

Российская академия наук
Учреждение Российской академии наук Институт математики им. С.Л.
Соболева Сибирского отделения РАН
(ИМ СО РАН)

УДК 519.7

№ госрегистрации 01201064560

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Директор Учреждения Российской
академии наук Институт математики им.
С.Л. Соболева Сибирского отделения РАН
академик РАН

_____ Ершов Ю.Л.

«__» _____ 2010 г.

Государственный контракт от «20» сентября 2010 г. № 14.740.11.0362
Шифр заявки: «2010-1.1-113-130-032»

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры
инновационной России» на 2009-2013

по теме:
«СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ»
(промежуточный, этап № 1)

Наименование этапа: «Постановка и анализ задач»

Руководитель темы
член-корреспондент РАН

_____ Мазуров В.Д.

Новосибирск 2010

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Рук. темы, зав. отделом ИМ СО РАН, член-корр. РАН	_____	В.Д. Мазуров (результаты) С.М. Лавлинский (Реферат, Введение, Заключение, Приложения А-В, результаты, подготовка)
Отв. исполнитель темы, исп. директор НОЦ, д.т.н.	_____	Береснев В.Л. (1.9, результаты)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	_____	Гимади Э.Х. (1.1, результаты) Ерзин А.И. (1.1,1.8, результаты, подготовка)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	_____	Кельманов А.В. (1.1, 1.3, результаты, подготовка)
зав. кафедрой НГУ, д.ф.-м.н.	_____	Севастьянов С.В. (1.1, 1.2 результаты)
гл.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	_____	Соловьева Ф.И. (1.6, результаты) Августинович С.В. (1.1,1.5, результаты)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	_____	Токарева Н.Н. (1.7, результаты) Могильных И.Ю. (1.5, результаты)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	_____	Кротов Д.С. (1.6,1.5, результаты, подготовка)
зав. лабораторией ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	_____	Салимов П.В. (1.5, результаты) Алексеева Е.В. (1.9.2, результаты, подготовка)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_____	Руднев А.С. (1.9, результаты) Орозбеков Н.А. (1.9, результаты)
асс. НГУ	_____	Пузынина С.А. (1.1, результаты) Рыков И.А. (1.1, результаты)
доц. НГУ, к.ф.-м.н.	_____	Тахонов И.И. (1.1, результаты) Алдын-оол Т.А. (1.9, результаты)
асс. НГУ	_____	Горкунов Е.В. (1.7, результаты)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_____	
н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	_____	
м.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	_____	
н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	_____	
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_____	
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_____	
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_____	
асс. НГУ	_____	
аспирант НГУ	_____	

аспирант НГУ	_____	Лисицына М.А. (1.7, результаты)
аспирант НГУ	_____	Воробьев К.В. (1.5, результаты)
аспирант ИМ СО РАН	_____	Козлов А.С. (1.2, результаты)
аспирант ИМ СО РАН	_____	Павлов С.В. (1.2, результаты)
аспирант ИМ СО РАН	_____	Сухорослов А.А. (1.2, результаты)
аспирант НГУ	_____	Долгушев А.В. (1.3, результаты)
аспирант ИМ СО РАН	_____	Плотников Р.В. (1.8, результаты)
аспирант ИМ СО РАН	_____	Курочкин А.А. (1.8, результаты)
аспирант ИМ СО РАН	_____	Истомин А.М. (1.1, результаты)
студент НГУ	_____	Романченко С.М. (1.3, результаты)
студент НГУ	_____	Мельников А.А. (1.9.2, результаты, подготовка)
студент НГУ	_____	Корпич Д.В. (1.3, результаты, подготовка)
студент НГУ	_____	Панин А.А. (1.1, результаты)
Нормоконтролер	_____	Кравченко С.В.

Реферат

Отчет 65 с., 1 ч., 139 источников, 3 прил.

Тема: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Ключевые слова: *теория расписаний; кластерный анализ; дискретный анализ; совершенные 2-раскраски гиперкуба; бент-функция; методы глобальной маршрутизации; игра Штакельберга; модели конкурентного размещения предприятий.*

Основной целью проекта является получение научных результатов мирового уровня, позволяющих закрепить приоритет российской школы теоретической кибернетики, повысить уровень подготовки и способствовать закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формированию эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Выполнение НИР в целом направлено на проведение фундаментальных исследований в области теоретической кибернетики по следующим направлениям:

- задачи размещения и маршрутизации;
- проблемы теории расписаний;
- дискретный анализ и теория графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации;
- актуальные проблемы анализа данных и распознавания образов.

В процессе выполнения 1 этапа НИР проведены следующие работы.

1. Проведен обзор литературы и определены приоритетные направления фундаментальных исследований в различных областях современной кибернетики
2. Проанализированы актуальные проблемы теории расписаний и намечен соновной фронт работ этого направления в НИР.
3. Проведен обзор проблем в области поиска подмножеств «похожих» векторов и кластерного анализа. Очерчен широкий класс неизученных и слабо изученных оптимизационных задач, связанных с поиском подмножеств векторов и кластерным анализом в евклидовом пространстве. В качестве актуальной задачи выделена проблема сложностного статуса оптимизационных задач, к которым сводятся некоторые проблемы анализа данных, связанные с поиском подмножеств векторов.
4. В обзоре проблем дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации сделана попытка проследить основные направления развития теории кодирования дискретных источников от задачи оптимального кодирования известного источника к задаче оптимального универсального кодирования семейства источников и задаче построения модели источника по сообщению. Рассмотрены

самосинхронизирующиеся и омофонные коды, а также способы кодирования двух часто встречающихся на практике видов источников: текстов на естественных языках и источников с низкой энтропией

5. Приведен краткий обзор методов улучшения оценок числа совершенных 2-раскрасок гиперкуба. Выделены свитчинговый, каскадный, а также различные комбинированные конструкции.

6. Проведен анализ критериев восстановимости кода (с точностью до эквивалентности) по полной или частичной информации о метрических соотношениях между кодовыми вершинами. С новых позиций рассмотрена проблема жёсткости кодов.

7. Проанализированы новые конструкции бент-функций, используемых для построения кодов постоянной амплитуды в системах CDMA (Code Division Multiple Access). Приведен обзор исследований по нижним оценкам числа бент-функций, которые могут быть получены с помощью итеративных конструкций.

8. Проведен обзор проблем маршрутизации в современных беспроводных сенсорных сетях. Проанализированы существующие методы глобальной маршрутизации при проектировании СБИС. Задача глобальной трассировки рассмотрена в контексте важнейшего этапа проектирования СБИС, на котором для каждой цепи определяется множество используемых областей маршрутизации в условиях ограничений на трассировочные ресурсы и время прохождения сигнала.

9. Разработаны новые постановки математических моделей конкурентного размещения предприятий с различными целевыми функциями в виде задач двухуровневого целочисленного программирования.

В результате исследований проведен обзор литературы, поставлены и проанализированы основные задачи НИР. По ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в монографиях и статьях.

Обозначения и сокращения

ИМ СО РАН - Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук.

НГУ – Новосибирский государственный университет.

НОЦ – научно-образовательный центр.

СБИС – сверхбольшие интегральные схемы.

Содержание

	Введение	8
1	Постановка и анализ задач	9
1.1	Обзор литературы и определение приоритетных направлений фундаментальных исследований в различных областях современной кибернетики	9
1.2	Анализ актуальных проблем теории расписаний	20
1.3	Обзор проблем в области поиска подмножеств «похожих» векторов и кластерного анализа	28
1.4	Обзор проблем дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации	29
1.5	Обзор методов улучшения оценок числа совершенных 2-раскрасок гиперкуба	30
1.6	Анализ критериев восстановимости кода (с точностью до эквивалентности) по полной или частичной информации о метрических соотношениях между кодовыми вершинами	30
1.7	Анализ новых конструкций бент-функций, используемых для построения кодов постоянной амплитуды в системах CDMA (Code Division Multiple Access)	31
1.8	Обзор проблем маршрутизации в современных беспроводных сенсорных сетях и анализ существующих методов глобальной маршрутизации при проектировании СБИС	32
1.9	Постановка математических моделей конкурентного размещения предприятий с различными целевыми функциями в виде задач двухуровневого целочисленного программирования	38
1.9.1	Задача Лидера в игре Штакельберга	38
1.9.2.	Математические модели конкурентного размещения предприятий	41
2	Показатели	46
3	Заключение	47
4	Список использованных источников	49
	Приложение А Список публикаций исполнителей	58
	Приложение Б Список сделанных исполнителями докладов	61
	Приложение В Список представленных диссертаций	65

Введение

Выполнение НИР в целом направлено на проведение фундаментальных исследований в области современной информатики. В коллективе исполнителей сформировались признанные мировым сообществом научные школы, которые ведут исследования в области теоретической кибернетики в следующих направлениях:

- I. Задачи размещения и маршрутизации;
- II. Проблемы теории расписаний;
- III. Дискретный анализ и теория графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации;
- IV. Актуальные проблемы анализа данных и распознавания образов.

Выполнение НИР направлено на проведение фундаментальных исследований в области теоретической кибернетики, с целью получения научных результатов мирового уровня, на подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Запланированные исследования 1 этапа являются заделом для всей НИР. В ходе работ предполагается провести обзор литературы и определить приоритетные направления фундаментальных исследований в различных областях современной кибернетики. Важная роль в работах 1 этапа отведена обзору актуальных проблем теории расписаний, кластерного анализа, проблем дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации. Намечена обширная программа работ по основным направлениям развития теории кодирования, разработки методов улучшения оценок числа совершенных 2-раскрасок гиперкуба, анализа критериев восстановимости кода, поиска новых конструкций бент-функций. Совместно с обзором проблем маршрутизации в современных беспроводных сенсорных сетях и новыми постановками математических моделей конкурентного размещения предприятий с различными целевыми функциями в виде задач двухуровневого целочисленного программирования, эти исследования определяют фронт работ 1 этапа и позволяют в максимальной степени конкретно поставить основные задачи, решаемые в рамках НИР.

1. Постановка и анализ задач

В рамках работ первого этапа НИР проведен обзор литературы, относящейся к тематике проекта, и обобщен зарубежный и отечественный опыт исследований в области теоретической кибернетики. Основной акцент сделан на проблемах размещения и маршрутизации, теории расписаний, дискретный анализ и теория графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации, анализа данных и распознавания образов.

В отчете приведено описание работ по пунктам календарного плана в соответствии с техническим заданием.

1.1. Обзор литературы и определение приоритетных направлений фундаментальных исследований в различных областях современной кибернетики

Можно выделить следующие наиболее приоритетные направления фундаментальных исследований в теоретической кибернетике.

Задачам размещения посвящено большое количество публикаций, среди которых стоит отметить монографию [Береснев В.Л. (1978)]. Позже появились работы как отечественных, так и иностранных учёных, в которых рассматривались обобщения простейшей задачи размещения. Некоторые способы решения таких задач представлены в монографии [Береснев В.Л. (2005)]. В практических приложениях достаточно важной является метрическая задача размещения, когда расстояния между объектами (пунктами производства и потребления) удовлетворяют неравенству треугольника. Известно, что метрическая задача размещения на сети является NP-трудной даже в случае неограниченных объемов производства. В работе [Агеев А.А. (2009)] рассмотрен подкласс метрических задач CFLP, в котором пункты производства и потребления расположены в вершинах путевого графа, а мощности предприятий одинаковы. До недавнего времени единственным полиномиальным точным алгоритмом для этого подкласса задач был алгоритм с временной сложностью $O(m^5 n^2 + m^3 n^3)$, где m и n – число предприятий и число пунктов спроса, соответственно. В представленном ныне результате для решения задачи размещения на путевом графе с одинаковыми производственными мощностями приводится обоснование модифицированного полиномиального точного алгоритма с временной сложностью $O(m^4 n^2)$. Это на порядок улучшает ранее достигнутый результат как относительно числа предприятий m , так и относительно числа пунктов спроса n [Агеев А.А. (2009)].

Рассмотрена задача CFLP с одинаковыми объемами производства при некоторых специальных ограничениях на объемы спроса клиентов и число открываемых предприятий. Предполагается, что элементы матрицы транспортных расходов – независимые случайные величины с равномерной функцией распределения на целочисленном сегменте $[1, r]$. Построен приближенный алгоритм решения задачи и проведен вероятностный анализ его работы. Представлены условия, при которых алгоритм за время $O(n \ln m)$ (n – число потребителей, m – число возможных пунктов производства) находит асимптотически точное решение. Кроме того, в результате анализа построен быстрый алгоритм отыскания совершенного паросочетания с минимальной суммой весов ребер в случайном графе и обоснованы условия на параметр r , когда этот алгоритм асимптотически точен [Гимади Э.Х. (2010)].

Для решения задачи размещения в так называемой p -медианной форме с расстояниями между вершинами – случайными независимыми переменными с одинаковой функцией равномерного распределения – представлен приближенный алгоритм с временной сложностью $O(n^2)$. Значение целевой функции, получаемой в результате работы алгоритма, представляет из себя сумму случайных величин, анализ которых основан на оценке вероятностей больших отклонений этих сумм. В работе используется одна из предельных теорем такого анализа в форме неравенства Петрова, при этом учтен фактор зависимости суммируемых случайных величин. Результатом вероятностного анализа являются оценки относительной погрешности и вероятности несрабатывания представленного алгоритма, а также условия его асимптотической точности.

Типовой задачей маршрутизации является задача коммивояжера. Она NP-трудна в сильном смысле, как на минимум, так и на максимум длины гамильтонова цикла. Это стимулировало усилия по разработке приближенных методов ее решения. Кристофидесом и Сердюковым для приближенного решения метрической задачи коммивояжера для n вершин был разработан приближенный алгоритм трудоемкостью $O(n^3)$ с точностью $3/2$. Этот, пожалуй, наиболее цитируемый результат в дискретной оптимизации основан на преобразовании кратчайшего остовного дерева в гамильтонов цикл. Естественными модификациями классической задачи коммивояжера являются задачи, в которых требуется найти два или несколько (вершинно или реберно) непересекающихся маршрутов минимального или максимального суммарного веса. Одной из первых задач этого типа, привлечших внимание исследователей, является задача m -PSP (Kragup (1975)) о m коммивояжерах – m -peripatetic salesman problem, которая также NP-трудна в сильном смысле при $m \geq 2$. Для задачи отыскания приближенного решения задачи 2-PSP на максимум на полном n -вершинном графе с симметричной матрицей расстояний построен алгоритм с

временной сложностью $O(n^3)$ и гарантированной оценкой точности $3/4$ (Агеев, Гимади, Бабурин). В основе алгоритма лежит общая идея, впервые реализованная А. Сердюковым при построении приближенного алгоритма для нахождения одного гамильтонова цикла максимального веса в полном неориентированном взвешенном графе с теми же оценками временной сложности и точности. Прямое применение его схемы построения частичных туров к задаче 2-PSP не приводит к успеху, поскольку конструируемые частичные туры могут содержать одинаковые ребра. Поэтому предлагается алгоритм, в котором в качестве исходного подграфа, подвергающегося разбиению на два реберно-непересекающихся частичных тура, используется либо кубический подграф (при четном n), либо «почти кубический» подграф (при нечетном n) максимального веса. Найденные реберно-непересекающиеся частичные туры в дальнейшем удастся дополнить до реберно-непересекающихся маршрутов, что далеко не всегда возможно в случае произвольных реберно-непересекающихся частичных туров.

В области **анализа данных и распознавания образов** приоритетным направлением исследований является решение фундаментальных математических проблем, к которым сводятся разнообразные прикладные задачи, связанные с компьютерной обработкой (в том числе хранением, классификацией и сжатием) потоков (зачастую зашумленных) данных, имеющих неизвестную структуру, и принятием оптимальных решений по этим данным. Актуальной проблемой является изучение сложности дискретных оптимизационных задач и построение алгоритмов с оценками точности для их решения. Актуальность и приоритетность вытекают из следующих замечаний.

Как известно [Jain A.K. (1988)], [Kaufman L. (2005)], [P. Arabie (1996)], [Richard O. (2001)] конструктивная модель какой-либо содержательной проблемы анализа данных и распознавания образов формулируется в форме задачи оптимизации подходящего критерия или функционала (максимума правдоподобия, минимума суммы квадратов уклонений, максимума апостериорной вероятности и т.п.), адекватно отражающего эту проблему. Оптимизация этого критерия в комбинации с многообразием объективно существующих структур (моделей) анализируемых данных и распознаваемых объектов порождает разнообразие редуцированных экстремальных задач, к которым сводится поиск оптимального решения. При этом сходные в содержательном плане проблемы сводятся к отличающимся экстремальным задачам. Зачастую простейшие и давно известные содержательные проблемы анализа структурированных данных и распознавания образов, типичные для актуальных приложений, сводятся к решению экстремальных задач, статус сложности которых неизвестен.

Широко распространенным (в Российской Федерации и за рубежом) и наиболее часто используемым подходом к решению задач анализа данных и распознавания образов является подход, сущность которого состоит в разбиении задачи на небольшое число подзадач (этапов), которые решаются либо известными оптимизационными малотрудоемкими алгоритмами, либо «быстрыми» эвристическими процедурами. При этом задача в целом, как оптимизационная проблема, как правило, не формулируется, какие-либо доказуемые оценки точности ее решения не устанавливаются, а класс допустимых входов не описываются формально (математически). Подтверждение работоспособности алгоритмов и компьютерных технологий получают в численных экспериментах и на примерах решения конкретных прикладных задач, т.е. для узкого класса реально имеющих (под рукой) входных данных. Этот подход отчетливо просматривается на множестве российских и международных конференций, в тысячах отечественных и зарубежных публикаций (библиографический список займет не один десяток страниц) и реализован в многочисленных существующих информационных технологиях, системах анализа данных и распознавания образов (см., например, [Jain A.K. (2010)] и цитированные там работы).

Во многих случаях применение этого подхода приводит к результату, который узкими специалистами-прикладниками оценивается как приемлемый для использования на практике. Однако, очевидно, что этот подход в общем случае не гарантирует оптимальность решения задачи в целом даже в случае оптимальности решений, получаемых на каждом из этапов или для каждой из подзадач. Результат оптимизации, найденный по условным экстремумам, вычисленным на последовательно выполняемых этапах обработки данных, в общем случае может не совпадать с глобальным экстремумом. Лишь в последние 15-20 лет сложилась устойчивая мировая тенденция, направленная, во-первых, на изучение комбинаторной сложности специфических (как правило, труднорешаемых) экстремальных задач, к которым сводятся типовые проблемы анализа данных и распознавания образов, а во-вторых, на построение эффективных алгоритмов с гарантированными оценками точности для решения этих задач. Это направление исследований в последние годы оформилось в виде области, которую можно определить как «экстремальные задачи анализа данных и распознавания образов».

Резюмируя, можно констатировать, что задачи дискретной оптимизации, возникающие в рамках решения проблем анализа данных и распознавания образов, на сегодняшний день не систематизированы. Сложностной статус большинства из этих задач до настоящего времени не изучен, а алгоритмы их решения ориентированы на индивидуальные задачи и, как правило, не имеют теоретических оценок точности.

Одной из наиболее общих проблем **теории кодирования и дискретной математики** является проблема существования объектов с экстремальными свойствами. Вопросы существования таких структур как совершенные, полностью регулярные и равномерно упакованные коды, блок-схемы и совершенные раскраски различных графов уже на протяжении многих лет притягивают внимание отечественных и зарубежных математиков. При этом одним из ключевых моментов исследований обычно является установление некоторых свойств этих объектов, влекущих сильные необходимые условия их существования.

Первая бесконечная серия совершенных блоковых кодов была построена Р. Хэммингом в 1950 году. Спустя более чем 20 лет В.А. Зиновьев и В. К. Леонтьев [Зиновьев В. А., (1972), (1973)] и независимо Э. Титвайнен в [Tietavainen A. (1973)] доказали что кодов с параметрами, отличными от параметров кода Хэмминга, за исключением двоичного и троичного кодов Голя, над полями Галуа не существует. Ф. Дельсарт в [Delsarte P. (1973)] ввел понятие полностью регулярных кодов в дистанционно-регулярных графах, то есть класса кодов, включающего в себя совершенные коды и обладающих многими схожими с ними свойствами. Проблема существования полностью регулярных кодов в n -кубе является по-прежнему нерешенной, известны не все параметры, для которых такие коды существуют. На сегодняшний день выяснено, что класс полностью регулярных кодов в n -кубе содержит равномерно упакованные в узком смысле коды, введенные Н. В. Семаковым, В. А. Зиновьевым и Г. В. Зайцевым в [Семаков Н.В. (1971)]. Этот класс включает совершенные и укороченные совершенные коды, выколотые коды Препараты, некоторые классы кодов БЧХ и выколотых кодов Рида-Маллера. Полное описание всех равномерно упакованных кодов было сделано Х. К. А. ван Тилборгом в [Van Tilborg H. C. A. (1975)].

Проблема существования совершенных кодов в схеме Джонсона оказалась сложнее, чем аналогичная проблема в схеме Хэмминга. В работе [Delsarte P. (1973)] Дельсарт выдвинул гипотезу, что нетривиальных совершенных кодов в графе Джонсона не существует. Усилия целого ряда авторов так и не привели ни к ее доказательству, ни к ее опровержению. Один из лучших на сегодняшний день результатов был получен Д.Гордоном в 2006 году в работе [Gordon M.D. (2006)]. Используя компьютер, он доказал, что не существует 1-совершенных кодов в графах Джонсона $J(n,w)$ при $n < 2^{250}$.

Как отмечалось ранее, совершенные 2-раскраски являются обобщением 1-совершенных кодов. Заметим, что гипотеза Дельсарта не может быть обобщена на совершенные 2-раскраски графов Джонсона. У. Мартин в работе [Martin W. J. (1998)] заметил, что нетривиальную совершенную 2-раскраску графа $J(n,w)$ можно получить, покрасив блоки произвольной k -кратной $(w-1)$ -схемы (при этом подразумевается что все

блоки схемы различны) в один цвет, а оставшиеся вершины $J(n,w)$ в другой цвет. Проблема существования таких схем при $w=3$ была решена М. Дегоном в 1983 в работе [Dehon M. (1983)]; при $w=4$ для однократного случая (системы четверок Штейнера) Х. Ханани в работе [Hanani H. (1960)], для двукратного случая А. Хартманом и К. Т. Фелпсом в [Hartman A., (1990)], для трехкратного случая К. Т. Фелпсом, Д. Р. Стинсоном и С. А. Ванстоуном в работе [Phelps K.T. (1989)]. Проблема существования таких схем для параметров, отличных от вышеперечисленных, за исключением нескольких спорадических случаев, является открытой.

Каково положение дел сегодня в теории расписаний?

Для того, чтобы ответить на этот вопрос, вначале дадим общую классификацию направлений исследований дискретных оптимизационных задач, после чего в рамках общей классификации опишем специализированные направления, существующие в теории расписаний, а затем перечислим «перспективные» направления, осуществляемые участниками проекта.

Общая классификация направлений исследований в дискретной оптимизации.

Поскольку теория расписаний является частью такой обширной области науки как исследование операций, то одним из значимых направлений исследований (и первым шагом в исследовании задачи) является **построение адекватных математических моделей** для реальных исследуемых процессов или объектов. Таким образом, целью первой части всякого исследования (отправляющегося от реальной прикладной задачи) является выявление общематематических проблем в реальной задаче, определение критериев оптимальности выбора решения, формулировка оптимизационных (либо распознавательных) задач.

Распознавательной задачей мы называем такую задачу, в которой ставится некоторый вопрос о свойствах заданного на входе объекта, а нашей задачей является «угадывание» правильного ответа из двух возможных вариантов: «ДА» или «НЕТ». (Таковыми являются все задачи из класса NP.) В *оптимизационных* задачах требуется найти, как правило, одно (оптимальное по заданному критерию) решение из множества допустимых решений. В других постановках целью «решателя задачи» является отыскание множества **всех** оптимальных решений. В третьих постановках ставится вопрос об отыскании полного множества «неулучшаемых» (по заданному набору критериев) решений многокритериальной задачи (построение так называемого *Парето-оптимального множества* решений), либо – полного множества представителей Парето-оптимального множества. В четвёртых постановках имеется упорядоченный набор критериев, и требуется

найти решение, лексикографически минимизирующее вектор значений данных критериев (взятых в указанном порядке). Наконец, в некоторых постановках задач целевая функция отсутствует, и требуется найти хотя бы одно допустимое решение (либо убедиться, что таковых не существует).

Следующим шагом (и направлением) в теоретическом исследовании задачи является **анализ сложности** полученной оптимизационной (либо распознавательной) задачи. Под этим «шагом» подразумевается проведение широкого спектра исследований, включая анализ сложности точного и приближённого решения, анализ существования и возможности построения полиномиальных аппроксимационных схем, асимптотически точных алгоритмов, алгоритмов гарантированной точности, нахождение порогов приближаемости, псевдополиномиальная разрешимость и т.д. Значительную роль при этом играет исследование свойств оптимальных решений.

Нередко возникает ситуация, когда построенная математическая модель, хотя и достаточно адекватно отражает исходную прикладную задачу, но оказывается слишком сложной в вычислительном плане (причём, не только в смысле точного её решения, но и приближённого). В этом случае возникает необходимость вернуться к первому шагу исследований прикладной задачи (построение модели) и попытаться построить другую модель, более удобную для решения. Таким образом, процесс исследования исходной задачи является итеративным, где на каждой итерации повторяются шаги 1 и 2 (моделирования и анализа сложности полученной модели).

Упомянутый выше «анализ сложности задачи» имеет абсолютный характер, безотносительный к какому-либо конкретному алгоритму. Хотя доказательство полиномиальной (псевдо-полиномиальной) разрешимости задачи, как правило, опирается на описание конкретного алгоритма, этот результат также является абсолютным, поскольку доказывает **существование** алгоритма решения с трудоёмкостью не выше заданной функции от длины входа задачи (или от других параметров этого входа). Отрицательные же результаты, говорящие о несуществовании тех или иных алгоритмов, носят априорно абсолютный характер, безотносительный к каким-либо алгоритмам.

«Ортогональным» к данному направлению исследований (отправляющемуся от конкретной **модели** или класса моделей) являются исследования, направленные на разработку универсальных **методов**, способных находить приемлемые решения для широкого спектра оптимизационных задач и их примеров. Хорошо известными примерами таких универсальных методов являются линейное и динамическое программирование, метод ветвей и границ, алгоритмы локального поиска и др. Универсальность таких методов, однако, не исключает необходимости учёта специфики конкретной задачи, решаемой

данным методом (т.е. требует разработки конкретного **алгоритма**), поэтому процесс исследования того или иного универсального метода потенциально бесконечен и направлен на всё более широкое его применение по отношению к новым, ранее не исследованным задачам и моделям.

Получаемые результаты исследований алгоритмов могут иметь как абсолютный характер (когда они доказаны теоретически и справедливы для всех без исключения примеров задачи из рассматриваемого класса – такие алгоритмы называются *алгоритмами с гарантированными оценками качества*), так и характер некоего «правдоподобного» утверждения, в пользу которого свидетельствуют «многочисленные факты» либо наблюдения. Речь идёт о так называемой «экспериментальной компьютерной проверке» эффективности исследуемого алгоритма на некотором конечном семействе конкретных входных примеров задачи. (Под «эффективностью» алгоритма здесь зачастую подразумевается абсолютная оценка времени счёта конкретных примеров, а также апостериорная оценка близости получаемых решений конкретных примеров к оптимуму.) Несмотря на массовость и широкую распространённость такого направления исследований, подобные результаты всегда оставляют открытые вопросы как в теоретическом, так и в практическом плане: достаточно ли представительна данная конечная выборка примеров, чтобы из неё можно было сделать теоретические выводы о поведении алгоритма на всём (бесконечном) семействе примеров исходной задачи? Отражает ли представленная конечная совокупность примеров реальное вероятностное распределение примеров конкретной прикладной задачи? Часто авторы подобных исследований не задаются подобными вопросами, что значительно снижает их практическую ценность (не говоря о теоретической).

Классификация направлений исследований в теории расписаний. Говоря о первой («модельно-ориентированной») группе направлений исследований в теории расписаний, следует отметить такие группы моделей и задач, которые за прошедшие десятилетия своего развития смогли оформиться в самостоятельные дисциплины – подразделы теории расписаний. Как правило, специфика этих дисциплин тесно связана с конкретной прикладной областью, из которой «вышли» данные модели и задачи. При этом специфика моделей и оптимизационных задач конкретной дисциплины зачастую требует и развития для них специфических методов решения. В качестве достаточно развитых (и относительно самостоятельных) подразделов теории расписаний можно назвать следующие.

Machine scheduling (где обязательными понятиями моделей являются «машины» и «работы»); «прародителями» этой дисциплины являются такие прикладные области как цеховое планирование, многопроцессорные вычислительные машины и др.

Project scheduling (или «управление проектами»; по-видимому, этому английскому названию соответствует русскоязычное «календарное планирование», хотя в нём и нет упоминания о каких-либо «проектах»); базовыми понятиями в этой дисциплине являются «ресурсы» и «задания»; типичными ограничениями в задаче из этой области являются ресурсные ограничения и ограничения предшествования на множестве заданий.

Time tabling (или «построение временных таблиц»); спецификой этой области является построение расписания на фиксированном временном интервале (например, построение учебного расписания в школе или вузе на недельной или двухнедельной основе); здесь оперируют такими понятиями как «группы», «преподаватели», «аудитории», «учебный план»; распределение «преподавателей» по дисциплинам и группам считается, как правило, заданным, а оптимальное распределение занятий по аудиториям и временной сетке требуется отыскать.

Nurse rostering; для этого названия пока нет русско-язычного аналога, поскольку данная дисциплина развивается исключительно за рубежом, в развитых странах; речь идёт о задачах распределения нагрузки медперсонала в лечебном заведении (с учётом их квалификации, предпочтений, а также предпочтений клиентов); в отличие от задач классической теории расписаний (*machine scheduling*), где, как правило, рассматриваются регулярные (реже – нерегулярные) целевые функции от моментов завершения работ, задачи в данной области характеризуются, во-первых, наличием «нежёстких» ограничений (т.е., «пожеланий», которые необязательно соблюдать), а во-вторых, в качестве критерия оптимальности рассматривается минимум количества невыполненных пожеланий.

Packet routing (маршрутизация пакетов в сетях связи); данная область начала активно развиваться в связи с возникновением и быстрым развитием «Всемирной Паутины»; возникающие здесь задачи объединяют в себе сложность потоковых задач и задач на составление расписаний выполнения работ.

Robotic cells (роботизированные производства) – дисциплина, характеризующаяся наличием элемента «доставки» изделия до машин, причём доставка осуществляется одним либо несколькими «роботами». Данная область теории расписаний отличается от *machine scheduling* более изощрёнными моделями с реализацией нетривиальных технологических моментов, а также большим приближением этих задач к практике.

Transportation scheduling, объединяющее всевозможные задачи на составление расписаний воздушного, морского, железнодорожного, общественного и пр. транспорта.

Эти задачи характеризуются повышенной вычислительной сложностью, поскольку постановки задач вынуждены учитывать множество разнотипных ограничений как весьма жёсткого, так и «мягкого» характера. О жёсткости некоторых ограничений (и неукоснительности их соблюдения на практике) говорит следующий пример. Когда через неделю после известных событий 11 сентября в США при посадке в аэропорту им. Джона Кеннеди по неизвестным причинам разбился пассажирский самолёт, то первой же версией были «происки Аль-Каиды». Однако более тщательное расследование дало неожиданный результат. Выяснилось, что приземляющийся самолёт попал в турбулентные воздушные потоки, оставленные от взлёта другого пассажирского самолёта с той же полосы. Диспетчер дал разрешение на посадку, не выждав положенного по технологии двухминутного интервала ожидания. Ценой несоблюдения технологического ограничения стали полторы сотни человеческих жизней.

Cyclic scheduling (построении циклических расписаний для одной либо нескольких групп идентичных работ) – отличается от традиционных расписательных моделей требованием построения расписания для бесконечного множества работ на бесконечной (либо полубесконечной) оси времени. Естественно, что в этом случае не работают классические целевые функции (такие как максимум или сумма моментов окончания работ, минимум числа опоздавших работ, и др.), и что качество получаемых расписаний для таких задач характеризуется другими параметрами (такими как плотность расписания, продолжительность цикла выполнения каждой работы и др.).

Online scheduling характеризуется необходимостью принятия решения о построении расписания при наличии неполной информации о входном примере. При этом степень полноты информации может варьироваться, что отражается в названиях таких поддисциплин как *semi-online scheduling* (когда часть информации о входном примере известна, а часть – нет).

Constraint-based scheduling – область задач на построение расписаний с целевыми функциями минимизации числа «мягких» ограничений на допустимые расписания.

Из второй («методо-ориентированной») группы направлений исследований можно выделить направления дальнейшего развития таких классических методов как:

- метод ветвей и границ (и его многочисленные модификации);
- метод динамического программирования;
- метод линейного программирования и полиэдральный анализ;
- методы локального поиска (поиск с запретами, «имитация обжига», «генетические» алгоритмы, «муравьиные колонии», и др.);

-- геометрические методы (основанные на анализе свойств векторных семейств в конечномерных нормированных пространствах);

-- графско-ориентированные методы, опирающиеся на сведение расписательных задач к задачам раскраски графов и мультиграфов и на анализ свойств этих графов.

Приоритетные направления исследований по теории расписаний. В рамках перечисленных выше направлений исследований участниками проекта будут осуществляться и разрабатываться следующие приоритетные направления.

А. Разработка эффективных геометрических методов нахождения приближённых решений цеховых задач, основанных на алгоритмах компактного и нестроого суммирования векторов в заданных областях (или семействах областей) конечномерного нормированного пространства. Этот подход к приближённому решению цеховых задач на построение кратчайших расписаний, родившийся одновременно (в 1974 году) в Новосибирске и Харькове, в дальнейшем получил широкое развитие в работах С.В. Севастьянова. Сила метода была продемонстрирована на широком круге задач (подробный обзор результатов представлен в статье [S.V. Sevast'janov (1994)]. В дальнейшем этот подход активно использовался зарубежными авторами (см. серию статей американских профессоров Christos Koulamas и George J. Kyriaris, а также работы К. Jansen и S. Sviridenko, посвящённые построению полиномиальных аппроксимационных схем для задачи job shop). Однако очевидно, что потенциал этого метода далеко не исчерпан. Авторами проекта предполагается как использование этого подхода к другим задачам теории расписаний, так и дальнейшее развитие самого метода.

В. Многопараметрический анализ сложности задач. До сих пор в работах зарубежных авторов преобладают результаты по «одномерному» (в лучшем случае — «плоскому») анализу сложности задачи в зависимости от одного либо двух каких-то выбранных параметров. В то же время, исследуемые задачи зависят, как правило, от гораздо большего числа параметров, и для получения более полной «картины» сложности задачи от всей совокупности параметров желательно рассматривать все комбинации ограничений на рассматриваемые параметры. Новый подход к исследованию сложности задач, хотя и требует более тонкого и скрупулёзного анализа, является более перспективным в плане достижения лучшего понимания задачи и понимания природы её сложности. Данный подход, являющийся детищем участников проекта (и описанный подробно в работе [S. Sevastianov (2005)], уже показал свою перспективность на ряде задач дискретной оптимизации (см., например, [А.В. Кононов (2000)], а также [Каширских К.Н. (2000)]).

С. Направление исследования задач с ресурсными ограничениями, основанное на унифицированном подходе к трактовке ресурсных ограничений различных типов. В существующей литературе принято деление ресурсных ограничений на различные типы, такие как невозобновимые, возобновимые, складываемые, оборотные и т.д. Для задач с разными типами ресурсных ограничений разными авторами получаются независимые результаты по анализу сложности, построению полиномиальных алгоритмов, анализу свойств оптимальных решений и т.д. В то же время, участниками проекта разработан унифицированный подход к рассмотрению ресурсных ограничений различных типов, позволяющий получать результаты существенно более общего вида. Этот подход имеет очевидную перспективу и преимущества по сравнению с имеющимися традиционными подходами

Д. В рамках развития метода динамического программирования предполагается исследование много-параметрического ДП, в котором число динамических параметров может быть сколь угодно велико, и это число выступает в качестве решающего фактора, влияющего на сложность алгоритма. С помощью этого подхода удаётся для некоторых задач найти точную границу сложности между подзадачами, NP-трудными в простом смысле, и подзадачами, NP-трудными в сильном смысле.

Е. Область задач с прерываниями операций является наименее изученной областью теории расписаний. Даже для сравнительно простых задач (таких как классическая задача job shop) свойства оптимальных расписаний изучены настолько слабо, что это не позволяет строить даже простейшие алгоритмы точного решения переборного типа. Вопросы существования оптимальных расписаний со свойством целочисленности всех прерываний решены лишь фрагментарно для некоторых конкретных типов целевой функции. А такие фундаментальные теоретические вопросы как гарантированное существование оптимального решения (при условии, что множество допустимых решений не пусто), и принадлежность задачи распознавания классу NP (т.е. возможность полиномиального решения задачи на недетерминированной машине Тьюринга) практически вовсе не затрагиваются в работах по теории расписаний. Тем не менее, у участников проекта есть определённые наработки к решению данных проблем для достаточно общих задач теории расписаний и календарного планирования.

1.2. Анализ актуальных проблем теории расписаний

Глобальной проблемой теории расписаний (как и дискретной оптимизации в целом) является проблема установления сложности той или иной задачи. (Достаточно пояснить, что проблема построения эффективных алгоритмов точного либо приближённого решения

задач является составной частью указанной выше проблемы сложности.) При этом сложность задачи является функцией от многих параметров, от которых в принципе зависит данная задача, и хотелось бы знать полный спектр значений этой функции, что позволяет делать вывод о том, как сложность задачи зависит от тех или иных параметров или от комбинации их значений. Для примера рассмотрим классические цеховые задачи job shop и open shop. В качестве параметров, влияющих на сложность задачи, можно рассматривать такие параметры как: число работ, число машин, верхняя граница на число операций каждой работы, то же - для каждой машины, ограничение на число различных значений длительностей операций, на число различных значений моментов появления работ, на длину расписания и т.п. Смешение примеров двух задач различных типов также может коренным образом повлиять на сложность полученной задачи. Например, при некоторых значениях параметров задачи open shop и job shop могут быть по отдельности полиномиально разрешимыми, но их смешение приводит к возникновению существенно более сложной (NP-трудной в сильном смысле) задачи. Таким образом, само «смешение» задач различных типов также является неким параметром задачи. В качестве другого примера рассмотрим два типа задач: с прерываниями и без прерываний операций. В задачах первого типа разрешается любое число прерываний любой из операций. В задачах второго типа не разрешаются никакие прерывания вообще. Обычно, классическая теория расписаний рассматривает только эти две полярные ситуации. Хотя очевидно, что реальные задачи, как правило, являются смешанными, «теория» игнорирует исследование таких ситуаций. В результате сложность таких актуальных задач до сих пор остаётся малоизученной. В рамках проекта мы будем рассматривать проблемы такого типа.

Другой глобальной проблемой является решение вопросов о существовании оптимальных расписаний с определёнными свойствами. Так например, в задачах с прерываниями операций интересной проблемой является определение минимальной верхней границы (Γ_1) на число прерываний, не влияющей на длину оптимального расписания. В тех случаях, когда задача с разрешением прерываний является полиномиально разрешимой, а соответствующая задача без прерываний — NP-трудной, возникает естественный вопрос: при какой минимальной границе (Γ_2) на число прерываний, возникающих в системе, задача остаётся гарантированно полиномиально разрешимой? Интересно также установить соотношение между величинами Γ_1 и Γ_2 . Другим примером проблемы установления свойств оптимальных решений является определение минимального числа миграций, не влияющего на длину оптимального расписания в задаче с параллельными машинами и миграционными задержками. Наконец, в качестве третьего примера подобной проблемы приведём проблему оценки числа внутренних простоев

(«дыр») на машинах в системе open shop в оптимальном расписании. Определение этой величины важно как с теоретической, так и прикладной точек зрения, поскольку влияет на эффективность алгоритмов приближённого решения данной задачи.

Анализ сложности «коротких» расписаний для цеховых задач, проведённый в фундаментальной работе Вильямсона и др., оставил, тем не менее, много открытых вопросов о зависимости сложности подобных задач от других параметров, таких как ограничения на число операций работы, на значение максимальной длительности операции, на число работ, число машин, и др. Исследование совокупности этих вопросов (или построение наиболее полной «карты сложности» данной задачи по всем комбинациям ограничений на исследуемые параметры) является важной открытой теоретической проблемой.

Остаются слабо изученными (с точки зрения анализа их сложности и построения точных и приближённых алгоритмов решения) такие теоретические проблемы, имеющие серьёзную прикладную значимость, как:

- одномашинная задача с оборотными ресурсами при одновременном поступлении работ;
- задача open shop с маршрутизацией машин;
- задача с параллельными поточными цехами (на минимум длины расписания).

В рамках проекта планируется выполнить:

- Анализ сложности и разработку алгоритмов решения задачи с оборотными ресурсами и одновременным поступлением работ на минимум длины расписания (а также — с другими целевыми функциями) в зависимости от различных параметров и для различных вариантов машинной среды (в частности, в зависимости от параметра «число различных моментов поступления работ»);
- Анализ свойств оптимальных расписаний в задачах с прерываниями операций;
- Анализ сложности построения «коротких» расписаний для цеховых задач;
- Разработку эффективных алгоритмов решения цеховых задач с маршрутизацией;
- Разработку эффективных алгоритмов решения задачи с параллельными поточными цехами;
- Разработку эффективных алгоритмов отыскания множества всех оптимальных расписаний для классической задачи Джонсона.

Обзор литературы по приоритетным направлениям теории расписаний.

Современное состояние исследований в области теории расписаний можно кратко охарактеризовать как «бурный поток» публикаций, имеющих, однако, в среднем довольно низкий теоретический уровень. Преобладают публикации по рассмотрению новых постановок задач. Причём, в некоторых публикациях не содержится ничего, кроме постановки самой задачи, — что может иметь лишь единственное оправдание, когда рассматривается задача, весьма актуальная для практических приложений. Потенциально, поток таких публикаций не ограничен, поскольку, как уже говорилось выше, трудно найти такую сферу человеческой деятельности, где бы не захотелось оптимизировать какой-нибудь процесс, проходящий во времени и смоделированный дискретным образом. Особо активный поток публикаций наблюдается в таких практически значимых областях теории расписаний как роботизированные производства (robotic cells), медицинское обслуживание (nurse rostering), управление пакетами в сетях связи (packet routing), построение расписаний для транспорта (transportation scheduling) и др.

Из работ, посвящённых анализу сложности задач, преобладают те, которые содержат лишь самый начальный уровень анализа — анализ точного решения задачи в общей постановке. (Обычно речь не заходит о построении «полной карты сложности» задачи от заданного набора параметров задачи — что мы ставим одним из приоритетов нашего проекта.) Из алгоритмических подходов львиная доля публикаций содержит так называемые «метаэвристики» и «экспериментальный анализ» их эффективности на тестовых либо случайно генерируемых примерах. Несмотря на высокую практическую значимость таких подходов для решения конкретных прикладных задач, теоретическая значимость этих работ невелика.

Справедливости ради следует отметить, что основной поток этих публикаций производится за рубежом. Россия участвует в этом процессе пока не слишком активно. На сегодняшний день ситуация такова, что многие, ранее активные центры по теории расписаний, существовавшие в бывшем Советском Союзе (с центрами в Москве, Ленинграде и других городах), практически перестали существовать, другие (такие как Минская и Киевская школы) — оказались «за рубежом». В этих условиях, по сути, единственным активным научным центром по теории расписаний в России остаётся Новосибирская школа по теории расписаний (основанная в 60-е годы прошлого века на базе Института математики СО АН СССР такими её представителями как Н.И. Глебов, В.А. Перепелица, Э.Х. Гимади, В.Э. Хенкин), а также её Омский филиал с активно работающим В.В. Сервахом и его многочисленными учениками. Некоторое оживление в последние годы

наблюдалось в этой области в Казани, — до тех пор, однако, пока А.А. Лазарев и его ученики не перебрались в Москву и за рубеж. Однако, несмотря на «сравнительную малочисленность» российской группы исследователей по теории расписаний, научный уровень их исследований явно превосходит среднемировой. В том числе, работы участников данного проекта активно публикуются в международных журналах по дискретной математике и исследованию операций, а сами участники проекта ежегодно представляют свои новые результаты на международных конференциях по теории расписаний и комбинаторной оптимизации.

Переходя к детальному обзору работ по теории расписаний, следует отметить две важных особенности. Во-первых, сразу следует оговориться, что нет никакой возможности в рамках данного отчёта представить полный обзор из нескольких тысяч работ по теории расписаний. Во-вторых, не факт, что в обзоре публикаций достаточно лишь выделить тенденции последних лет. Напротив, — немало теоретически значимых работ, не теряющих своей актуальности, находится в публикациях прошлых лет, в то время как в потоке современных публикаций немало число конъюнктурных работ, не имеющих теоретической либо практической ценности.

Видимо, одними из первых работ по теории расписаний являются работы Беллмана и Гросса [Bellman and Gross (1954)] и Джонсона [Johnson (1954)], а первое упоминание о «теории расписаний» как о самостоятельной дисциплине встречается уже в статье Беллмана 1956 года [Bellman (1956)]. Одной из первых монографий по теории расписаний является сборник статей под редакцией Мута и Томпсона [Muth and Thompson (1963)], в основном сконцентрированных на вычислительных аспектах алгоритмов. Более известной является монография Конвея, Максвелла и Миллера [Conway, Maxwell and Miller (1967)], которая, несмотря на некоторую «несовременность», остаётся до сих пор интересной во многих аспектах. Помимо детерминированных моделей, книга затрагивает стохастические аспекты и вопросы из теории очередей. В то же время, книга Бэйкера [Baker (1974)] является прекрасным обзором по детерминированным моделям. Она не затрагивает вопросов вычислительной сложности, поскольку вышла непосредственно перед появлением основополагающих работ Кука и Карпа. Вышедшая в следующем году на русском языке монография Танаева и Шкурбы [Танаев, Шкурба (1975)] описывает широкий спектр результатов по применению метода ветвей и границ, а также методов линейного, целочисленного и динамического программирования к теории расписаний. Описываются эффективные комбинаторные методы точного решения и многочисленные эвристики. Что любопытно (и удивительно для книги, вышедшей в 1975 году), в ней описываются «локальные методы», использующие понятие «окрестности» допустимого решения. В

целом обзревается более четырёх сотен статей, из которых 215 – на русском языке и 213 – на английском и прочих языках (что свидетельствует об интенсивности ведения исследований по теории расписаний в бывшем Советском Союзе).

Вышедшая уже в следующем году книга Кофмана [Coffman (1976)], являющаяся собранием статей по детерминированной теории расписаний, уже затрагивает вопросы вычислительной сложности задач. Учебник Френча [French (1982)] знакомит читателя с большинством известных на тот момент техник и методов детерминированной теории расписаний. Целый ряд выдающихся работ как по детерминированной, так и по стохастической теории расписаний содержится в сборнике трудов конференции NATO под редакцией Демпстера, Ленстры и Ринной Канна [Dempster, Lenstra and Rinnooy Kan (1982)].

Следующим, довольно интенсивным шагом в развитии теории расписаний оказался выпуск на русском языке двухтомника Танаева с учениками. В первый том [Танаев, Гордон, Шафранский (1984)] вошли результаты по одностадийным системам, а во второй [Танаев, Сотсков, Струевич (1989)] – по многостадийным. В них, помимо методов точного решения, уже встречаются описания некоторых результатов по приближенному решению задач с гарантированными оценками качества. Также довольно продвинутой в теоретическом плане является монография Блажевича и др. [Blazewicz, Cellary, Slowinski and Weglarz (1986)], в которой рассматриваются задачи с ресурсными ограничениями, а также многокритериальные задачи. Следующая книга Блажевича и др. [Blazewicz, Ecker, Schmidt and Weglarz (1993)] уже в значительной степени затрагивает вычислительные аспекты в детерминированных моделях теории расписаний, а также вопросы практических приложений этих задач на производстве. Более прикладной характер носит монография Мортон и Пентико [Morton and Pentico (1993)], в которой описывается большое число эвристик, могущих оказаться полезными при решении практических задач. В 1994 году издательство Клувер переводит на английский язык двухтомник Танаева [Tanaev (1994)]. Вышедшая в том же году монография Дузере-Пере и Лассерре [Dauz`ere-Per`es and Lasserre (1994)] концентрируется в основном на задачах типа job shop, а сборник статей под редакцией Цвебена и Фокса [Zweben and Fox (1994)] описывает ряд существующих систем по составлению расписаний и их применение. В следующем году выходит аналогичный сборник под редакцией Брауна и Шерера [Brown and Scherer (1995)]. Множество интересных статей по детерминированной ТР содержится в сборнике трудов конференции под редакцией Кретъена, Кофмана, Ленстры и Лю [Chretienne, Coffman, Lenstra and Liu (1995)]. Учебник Бэйкера [Baker (1995)] является неплохим введением в область задач на упорядочение и построение расписаний. Брукер [Brucker (1995)] в первой редакции своей

книги представляет достаточно подробный анализ сложности многих задач детерминированной ТР. Паркер [Parker (1995)] даёт аналогичный обзор, но при этом в значительной мере концентрируется на задачах с ограничениями предшествования и других графско-теоретических моментах. Книга Сьюла [Sule (1996)] представляет из себя текст более прикладного характера, где обсуждаются интересные реальные прикладные задачи. Книга Блажевича и др. [Blazewicz, Ecker, Pesch, Schmidt and Weglarz (1996)] является расширенной редакцией предыдущей книги примерно тех же авторов [Blazewicz, Ecker, Schmidt and Weglarz (1993)]. Монография Овацика и Узсоя [Ovacik and Uzsoy (1997)] всецело посвящена методам декомпозиции сложных моделей job shop. В том же году выходит два сборника под редакцией Ли и Лая [Lee and Lei (1997)], содержащих как много интересных теоретических, так и прикладных статей. В 1998 году выходит ещё одна монография Танаева с учениками [Танаев (1998)], посвящённая так называемым «групповым» задачам теории расписаний. Книга Пинедо и Чао [Pinedo and Chao (1999)] в значительной степени ориентирована на приложения и содержит множество расписательных моделей прикладных задач, возникающих на производстве и в сфере обслуживания.

В новом столетии поток монографий по теории расписаний открывается книгой Баптиста и др. [Baptiste, LePape and Nuijten (2001)], покрывающей область применения техники *constraint programming* к задачам типа job shop, и сборником статей под ред. Нарейека [Nareyek (2001)], посвящённых применению методов локального поиска к той же задаче. Книги Ткинкта и Бело [T'kindt and Billaut (2002), (2006)] содержат отличные обзоры по многокритериальной теории расписаний. В 2004 году под редакцией Льюнга появляется очень солидное издание «The Handbook of Scheduling» [Leung (2004)], насчитывающее более тысячи страниц и содержащее множество интересных обзорных статей по всем аспектам современной теории расписаний. Книга Пинедо [Pinedo (2005)] является расширенной и дополненной редакцией более ранней книги [Pinedo and Chao (1999)]. В том же году выходит книга Швиндта [Schwindt (2005)], посвящённая задачам project scheduling с ресурсными ограничениями. Книга под редакцией Херрмана [Herrmann (2006)] рассказывает о реальных системах составления расписаний для промышленных предприятий. С самого начала в ней не только подчёркивается её прикладной характер, но и делается как бы противопоставление этих работ теоретическим исследованиям, ведущимся в теории расписаний и «не приносящим никакой пользы для нужд реальных производств». Также в предисловии к книге подчёркивается, что книга никоим образом не затрагивает таких (также прикладных) областей применения теории расписаний как transportation scheduling, nurse rostering, time tabling и project scheduling (куда можно было бы добавить

также packet routing и некоторые другие, не упомянутые автором области). В том же году выходит небольшая теоретическая монография Лазарева и Гафарова [Лазарев (2006)] на русском языке, посвящённая одной специальной проблеме из machine scheduling, а также книга Брукера и Кнуст [Brucker, Knust (2006)], в которой рассматриваются различные усложнённые (по сравнению с классическими) модели и задачи теории расписаний. Для решения последних предлагаются как всевозможные эвристики, так и точные алгоритмы.

2007 год выдался весьма «урожайным» на монографии по теории расписаний и её приложениям. Было опубликовано 7 книг! Во-первых, выходит значительно дополненное пятое издание книги Брукера [Brucker (2007)], новая книга Блажевича с соавторами [Blazewicz, Ecker, Pesch, Schmidt and Weglarz (2007)], посвящённая как теоретическим вопросам, так и приложениям теории расписаний; книга Даванде и др. [Dawande, Geismar, Sethi and Sriskandarajah (2007)], посвящённая задачам на построение расписаний для роботизированных производств, а также – книга под редакцией Левнера [Levner (2007)], в которой рассматриваются теоретические и прикладные проблемы многостадийных систем. Ещё одна русскоязычная монография Лазарева и Гафарова [Лазарев (2007)] рассматривает задачи с ограничениями предшествования и ресурсными ограничениями. Наконец, в монографии Йозефовской [Jozefowska (2007)] рассматриваются модели и алгоритмы для компьютерных и производственных систем с нетрадиционными (нерегулярными) целевыми функциями от моментов завершения работ.

В 2008 году выходит третье издание книги Пинедо [Pinedo (2008)], а также английский перевод книги под редакцией Билло и др. [Billaut, Moukrim and Sanlaville (2008)], первоначально (в 2005 году) опубликованной на французском языке. Книга посвящена вопросам устойчивости и гибкости расписаний. Наконец, в 2009 году выходит книга Бэйкера и Трища [Baker and Trietsch (2009)], являющаяся значительно дополненным переизданием более ранней монографии Бэйкера [Baker (1995)].

Помимо упомянутых выше четырёх десятков монографий результаты по теории расписаний освещались в необозримом количестве обзорных статей. Ясно, что в данном отчёте нет возможности перечислить их все. Тем не менее, мы не можем не упомянуть наиболее значимых работ (так называемых «milestones» на пути развития теории расписаний). Одной из таких значимых работ оказалась 80-страничная обзорная статья Лолэ и др. [Lawler, Lenstra, Rinnooy Kan and Shmoys (1993)], в которой приведена трёхпольная классификация задач из такой обширной области теории расписаний как machine scheduling. (Следует отметить, что, несмотря на заметные недостатки этой системы, ей до сих пор пользуется большинство «расписальщиков», работающих в данной области.) Другим «верстовым столбом», наиболее полно зафиксировавшим текущие достижения теории

расписаний (на момент написания статьи), была статья Чена, Поттса и Вёгингера [Chen, Potts and Woeginger (1998)].

Из последних обзоров следует упомянуть статью Вонга и др. [Wang, Zhang, Gao and Li (2008)], посвящённую многокритериальной оптимизации, и статью Левнера и др. [Levner, Kats, López de Pablo, Cheng (2010)], описывающую текущее состояние в такой нетрадиционной области исследований как cyclic scheduling (специфика рассматриваемых здесь задач состоит в том, что множество работ бесконечно).

1.3. Обзор проблем в области поиска подмножеств «похожих» векторов и кластерного анализа

Наряду с уже изученными экстремальными задачами, возникающими в рамках анализа данных и распознавания образов, имеется широкий класс неизученных и слабо изученных оптимизационных задач, связанных с поиском подмножеств векторов и кластерным анализом в евклидовом пространстве. Сложностной статус оптимизационных задач, к которым сводятся некоторые актуальные проблемы анализа данных, связанные с поиском подмножеств векторов, изучался в ряде работ.

В первой части этих работ – [Бабурин А.Е. (2007)], [Гимади Э.Х. (2006)], [Кельманов А.В (2008), (2009)] - рассматривалась модель анализа данных, в которой предполагалось, что анализируемое множество векторов наряду с «близкими» по критерию минимума суммы квадратов расстояний векторами может содержать векторы «похожие» на центрированный около нуля шум. Проблема анализа данных состояла в поиске в заданном множестве векторов непустого подмножества «близких» между собой векторов. В цитируемых работах установлено, что экстремальные задачи, к которым сводится эта проблема, переформулированные в форме верификации свойств, относятся к классу NP-полных задач.

Во второй части упомянутых работ - [Долгушев А.В. (2010)], [Aloise D. (2008)], [Dasgupta S. (2007)], [Mahajan M. (2009)] - рассматривалась модель структурированных данных, в которой заданное множество векторов содержит непересекающиеся подмножества - кластеры, включающие «близкие» (по критерию минимума суммы квадратов расстояний) между собой векторы. Проблема анализа данных состояла в разбиении заданного множества на подмножества по указанному критерию. Оптимизационная задача, к которой сводится эта проблема анализа данных, широко известна под названием MSSC (Minimum-Sum-of-Squares Clustering). В некоторых публикациях эта же задача фигурирует под названием k-means. В работах [Долгушев А.В. (2010)], [Mahajan M. (2009)] показано, что задача MSSC в форме верификации свойств NP-полна.

К числу неизученных относится следующая задача. Дано: конечное множество векторов евклидова пространства. Найти: подмножество векторов заданной мощности такое, что сумма квадратов расстояний между всевозможными парами векторов из этого подмножества минимальна. К этой задаче сводится типичные для многих приложений, проблемы. Однако до настоящего времени она не изучена, несмотря на содержательное сходство с задачами, исследованными в вышеупомянутых работах.

1.4. Обзор проблем дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации

В обзоре рассмотрены основные задачи и конструкции теории неискажающего кодирования дискретных источников: побуквенное, адаптивное и универсальное кодирование, принцип кратчайшего описания, построение дерева контекстов и преобразование Барроуза--Уилера. Описаны наиболее известные методы сжатия данных: блочное, равномерное по выходу и арифметическое кодирование, схема кодирования Лемпела--Зива и методы интервального кодирования. Приведены оценки избыточности и трудоемкости перечисленных методов. Даны схемы доказательства для некоторых наиболее важных утверждений. Кроме того, рассмотрены задачи рандомизации сообщений и кодирования с синхронизацией, а также способы кодирования текстов на естественных языках и источников с низкой энтропией. Теория кодирования дискретных источников исследует задачу сжатия сообщений без потери информации. Под сообщением подразумевается конечное или бесконечное слово в некотором алфавите, порожденное стационарным источником. Источником называется последовательность одинаково распределенных случайных величин, множество значений которых - алфавит источника. Кодированием называется инъективное отображение множества слов алфавита источника в множество двоичных слов, а стоимостью кодирования - отношение средней длины кода сообщения к длине сообщения.

В статье [Shannon С.Е. (1948)], положившей начало современной теории информации в целом и теории кодирования источников в частности, К.Шеннон показал, что нижней гранью стоимости кодирования является энтропия источника. Избыточность - разность между стоимостью и энтропией - является основным критерием качества кодирования. Другими важными характеристиками кодирования являются объем памяти, который требуется при программной реализации метода, и среднее время кодирования и декодирования, измеряемое в операциях над битами. Основной областью применения алгоритмов кодирования являются компьютерные программы сжатия данных (архиваторы). Методы кодирования могут быть использованы также в криптографии (см. [Рябко Б.Я.

(1997)]), задачах прогнозирования (см. [Рябко Б.Я. (1003)]) и поиска информации [Кричевский Р.Е. (1989)].

Сделана попытка проследить основные направления развития теории кодирования дискретных источников от задачи оптимального кодирования известного источника к задаче оптимального универсального кодирования семейства источников и задаче построения модели источника по сообщению; а также от побуквенного кодирования к арифметическому кодированию и схеме кодирования Лемпела--Зива.

Кроме того, рассмотрены самосинхронизирующиеся и омофонные коды, а также способы кодирования двух часто встречающихся на практике видов источников: текстов на естественных языках и источников с низкой энтропией.

1.5. Обзор методов улучшения оценок числа совершенных 2-раскрасок гиперкуба

Понятие совершенной раскраски естественным образом возникает в теории графов, алгебраической комбинаторике, в теории кодирования. Раскраска вершин графа называется совершенной, если для каждой вершины цветовой набор её соседей зависит только от её цвета. Рассматриваются совершенные раскраски гиперкуба в 2 цвета. В общем виде задача формулируется следующим образом: определить параметры совершенных раскрасок, при которых они существуют, а также дать точное число различных совершенных раскрасок с заданными параметрами. На сегодняшний день ответ на оба эти вопроса ещё не известен. Исследуется вопрос количества совершенных раскрасок при заданных параметрах, способы их построения. Среди методов построения совершенных 2-раскрасок гиперкуба следует отметить свитчинговый, каскадный, а также различные комбинированные конструкции. Рекордные нижние оценки дает свитчинговый метод, все верхние оценки на сегодняшний день мало отличаются от тривиальных.

Основным результатом работы является новая конструкция, позволяющая строить совершенные раскраски, найдена нижняя оценка на их число. Кроме того, затронут вопрос существования совершенных раскрасок при заданных параметрах: найдено новое свойство совершенных раскрасок, достигающих границы корреляционной иммунности.

1.6. Анализ критериев восстановимости кода (с точностью до эквивалентности) по полной или частичной информации о метрических соотношениях между кодовыми вершинами

Доказано, что для восстановления произвольного двоичного кода с точностью до эквивалентности достаточно знать размерности всех его подкодов чётной мощности.

Показано, что теорема носит неуплучшаемый характер.

Пусть два произвольных двоичных кода C_1 и C_2 имеют одинаковую мощность и длину n . Биекция кодов C_1 и C_2 называется сильной изометрией, если для каждого подмножества кода C_1 его размерность совпадает с размерностью образа. Здесь под размерностью кода подразумевается размерность минимальной грани двоичного куба, содержащей этот код. Соответственно, биекция называется полусильной изометрией, если равенство размерностей имеет место для всех подкодов чётной мощности. Заметим, что и сильные, и полусильные изометрии являются изометриями в традиционном смысле.

Обычно проблема жёсткости кодов формулируется, как проблема продолжения изометрии пары кодов до эквивалентности [Августинович С.В., (2003)], [Solov'eva F.I. (1998)]. Мы рассматриваем несколько иную постановку. Код называется метрически жёстким, если он однозначно (как вариант - с точностью до эквивалентности) восстанавливается по некоторому набору своих метрических инвариантов. В качестве инвариантов могут выступать следующие: набор попарных расстояний между кодовыми вершинами [Августинович С.В. (1994)]; граф минимальных расстояний кода ([Августинович С.В. (1998)], [Могильных И.Ю. (2009)], [Mogilnykh I.Yu. (2009)]; граф фиксированных расстояний гиперкуба [Красин В.Ю. (2006)]; наборы троек вершин кода, попарные расстояния между которыми фиксированы.

Наиболее сильным инвариантом оказался полный набор размерностей подкодов кода. [Августинович С.В. (2000)]. Наши исследования показывают, что этот инвариант избыточен. Именно, для однозначного восстановления двоичного кода достаточно знать размерности только подкодов чётной мощности. Доказано также, что этот набор инвариантов минимален.

Рассмотрим пару двоичных кодов одинаковой мощности и длины. В работе [Августинович С.В. (2000)] доказано, что всякая сильная изометрия между такими кодами продолжается до изометрии всего пространства. В частности, это означает, что сильно изометричные коды эквивалентны. Оказалось верным и неуплучшаемым более сильное утверждение: произвольная полусильная изометрия двоичных кодов продолжается до изометрии булева куба. Очевидным образом из этой теоремы вытекает следствие: полусильно изометричные двоичные коды эквивалентны.

1.7. Анализ новых конструкций бент-функций, используемых для построения кодов постоянной амплитуды в системах CDMA (Code Division Multiple Access)

Задача построения булевых функций, обладающих нелинейными свойствами, естественным образом возникает во многих областях дискретной математики. И часто наибольший интерес вызывают те функции, для которых эти свойства экстремальны. Такие

булевы функции называются бент-функциями. Актуальность исследования бент-функций подтверждается их многочисленными теоретическими и практическими приложениями.

Бент-функции активно применяются в технологиях цифровой сотовой связи, а именно в технологии CDMA, использующейся большинством поставщиков беспроводного оборудования во всем мире согласно стандартам IMT-2000 мобильной связи третьего поколения (в России – стандарты IMT-MS 450 или CDMA-450).

Исследованы нижние оценки числа бент-функций, которые могут быть получены с помощью итеративных конструкций, а именно с помощью конструкции A.Canteaut and P.Charpin (2003). Показано, что задача оценки числа итеративных бент-функций тесно связана с проблемой декомпозиции булевых функций в сумму двух бент-функций. Приведена нижняя оценка числа итеративных бент-функций, которая предполагается асимптотически точной. С использованием метода Монте-Карло подсчитано число итеративных бент-функций от малого числа переменных. Основываясь на проведенных численных экспериментах, сформулированы гипотезы об асимптотическом значении числа всех бент-функций.

1.8. Обзор проблем маршрутизации в современных беспроводных сенсорных сетях и анализ существующих методов глобальной маршрутизации при проектировании СБИС

Рассмотрим задачу построения коммуникационной сети (без ограничения общности можно считать её деревом), связывающей множество сенсоров. Предполагается, что расположение сенсоров известно, и для связи они используют беспроводной интерфейс. Энергия сенсора ограничена ёмкостью аккумуляторной батареи, а энергетические затраты на связь пропорциональны дальности передачи. Если известно дерево, связывающее сенсоры, то дальность передачи сенсора определяется расстоянием до самого дальнего соседнего (в дереве) сенсора.

Вопросу построения коммуникационной сети, однозначно определяемой дальностью передачи её элементов, посвящён целый ряд публикаций, среди которых выделим следующие.

В работе [L.M. Kirousis (2000)] рассматривается проблема потери энергии при передаче пакетов данных с использованием радиосвязи. Требуется построить сильно связный подграф, минимизирующий суммарные энергозатраты. Предложен полиномиальный алгоритм построения решения в случае, когда вершины лежат на прямой линии, а энергия убывает пропорционально евклидову расстоянию между передатчиком и получателем пакета. Доказана NP-трудность задачи в трёхмерном евклидовом пространстве

R^3 (Ранее в [А.Е.Ф. Clementi (2000)] была показана NP-трудность задачи в R^2). Для этого случая предложен 2-приближенный алгоритм с квадратичной трудоёмкостью (от числа вершин).

В статье [P. Carmi (2007)] рассмотрен случай, когда каждый передатчик способен передавать на два расстояния: «близко» и «далеко». Показано, что задача остаётся NP-трудной и в этом случае. Предложен такой приближённый полиномиальный алгоритм, что число передатчиков на дальнейшее расстояние не более $11/6$ от числа таких передатчиков в оптимальном решении. Также предложен экспоненциальный $9/5$ -приближённый алгоритм.

В работе [E. Althaus (2006)] рассматриваемую задачу в евклидовом пространстве полиномиально свели к задаче Штейнера на специально построенном графе. Это позволило получить $5/3 + \varepsilon$ вполне полиномиальную аппроксимационную схему (FPTAS), а также $11/6$ -приближенный полиномиальный алгоритм.

В 21 веке большое внимание стало уделяться беспроводным сенсорным сетям, в которых основной задачей является эффективное использование ограниченной энергии с целью продления жизни сети. В качестве частной задачи появляется и рассматриваемая проблема в той или иной постановке. Однако вопросу построения оптимальной коммуникационной сети уделяется недостаточное внимание. В качестве коммуникационного дерева, как правило, (см., например, [J. Wu (2005)]) рассматривается минимальное остовное дерево. Очевидно, что минимальный остов не всегда является оптимальным коммуникационным деревом.

В [Ерзин А.И. (2010)] исполнителями проекта рассмотрена общая задача построения коммуникационного дерева в произвольном взвешенном графе с неотрицательными весами рёбер. Показано, что такая задача также является NP-трудной в сильном смысле, а минимальный остов является 2-приближённым решением. Найдены частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. Определены пределы аппроксимируемости задачи. Предложен эвристический алгоритм.

Задача выбора древовидной коммуникационной сети, а также оптимальных соединений в этой сети с заданными ограничениями на времена получения сигналов вершинами-терминалами, является NP-трудной как с аддитивной функцией задержки (время прохождения сигнала по пути равно сумме временных задержек входящих в путь ребер), так и в модели Эльмора [Elmore W.C. (1948)]. Например, в сигнальном дереве (clock tree), которое отвечает за синхронизацию вычислительных систем, время прихода сигналов в терминалы ограничено как сверху (что естественно), так и снизу (что продиктовано необходимостью минимизации, так называемого, временного перекоса – clock skew). Если коммуникационная сеть является частью интегральной схемы, то время распространения

сигнала обычно оценивается формулами Эльмора, что делает задачу ещё сложнее, но при этом и более важной, т.к. время передачи данных в интегральных схемах составляет до 60% временных затрат. При несвоевременном получении сигналов терминалами понижается производительность всей системы [Egzin A.I. (2000)].

Глобальная трассировка является одним из важнейших этапов проектирования СБИС, на котором для каждой цепи определяется множество используемых областей маршрутизации в условиях ограничений на трассировочные ресурсы и время прохождения сигнала. В литературе встречается несколько формулировок задачи глобальной трассировки (ЗГТ) с различными критериями и ограничениями, подробный обзор которых приведен в работе [Kastner R. (2002)]. Основной целью глобальной трассировки является маршрутизация всех цепей СБИС без нарушения ограничений. При этом даже простейшая постановка, в которой требуется осуществить трассировку двухтерминальных цепей в условиях ограниченности трассировочных ресурсов, является NP-трудной задачей. Для решения ЗГТ исследователями предложены различные подходы, в которых трассировка, как правило, осуществляется лишь на двух слоях. В основе этих подходов лежат алгоритмы последовательной маршрутизации, алгоритмы трассировки с разрывом связей и поиском новых соединений, алгоритмы, основанные на решении задач о многопродуктовом потоке, иерархические методы, а также различные метаэвристики. При проектировании современных СБИС на этапе глобальной маршрутизации, наряду с учетом трассировочных ресурсов, все большее внимание уделяется времени прохождения сигнала. При этом плотность соединений и временная задержка являются, как правило, конкурирующими критериями, и в литературе практически отсутствуют публикации, в которых эти критерии рассматриваются совместно.

Основные подходы к решению задач глобальной маршрутизации изложены в монографиях [S. M. Sait (1995)], [M. Sarrafzadeh (1996)], [N. A. Sherwani (1999)].

Книга [A. V. Kahng (1995)] и обзорная статья [J. Cong (1996)] целиком посвящены задачам маршрутизации, но основное внимание там уделяется задаче построения *единственной* сети.

Задача глобальной маршрутизации входит в число теоретически трудных проблем (является NP-трудной), поэтому для ее решения разрабатываются, в основном, приближенные алгоритмы. Одна из возможных классификаций выделяет три класса таких алгоритмов: последовательные алгоритмы, параллельные алгоритмы и метаэвристики.

Последовательная маршрутизация. Наиболее популярным подходом к решению задачи глобальной маршрутизации является последовательный подход, в котором сети

упорядочиваются в соответствии с некоторым критерием их важности, а затем производится их поочередная маршрутизация.

Алгоритм поиска в лабиринте, предназначенный для нахождения кратчайшего пути в глобальном графе был впервые предложен в работе [С. Y. Lee (1961)] и основан на методе поиска в ширину. Причиной популярности этого метода является простота реализации (даже при наличии препятствий) и гарантия нахождения оптимального решения в случае его существования. Некоторые способы ускорения алгоритма поиска в лабиринте представлены в статьях [F. Hadlock (1975)] и [J. Soukup (1978)].

Основным недостатком алгоритма поиска в лабиринте и его многочисленных вариаций является необходимость хранения значительного объема информации для каждой вершины. Для сокращения числа ячеек памяти был разработан *алгоритм пробных связей*, изложенный в статьях [D. W. Hightower (1969)], [K. Mikami (1968)]. Этот алгоритм, основанный на методе поиска в двух направлениях существенно экономичнее алгоритма поиска в лабиринте, но он не гарантирует нахождения кратчайшего пути между двумя точками.

Описанные алгоритмы не применимы для многотерминальных сетей. В книге [С. Schen (1986)] такие сети разбиваются на несколько двухтерминальных сетей, которые затем трассируются поочередно.

Естественным способом маршрутизации многотерминальных сетей является построение для них *дерева Штейнера*, оптимального по тому или иному критерию. В частности, минимаксным деревом Штейнера называется такое дерево Штейнера, у которого вес максимального ребра минимален. В статье [С. Chiang (1990)] задача глобальной маршрутизации решается последовательным построением минимаксного дерева Штейнера для каждой сети. Вес ребер сети вычисляется по оценкам плотности. Доказано, что построенное дерево является оптимальным минимаксным деревом Штейнера. Веса ребер динамически корректируются после маршрутизации каждой сети, отражая изменения плотности.

Построение минимаксного дерева Штейнера имеет целью минимизацию максимального веса ребра, т.е. минимизацию плотности соединений, но процедура построения этого дерева не принимает во внимание длину связей. В статье [С. Chiang (1994)] предложен алгоритм одновременной минимизации двух указанных критериев, основанный на последовательной маршрутизации сетей с использованием приближенного алгоритма построения прямоугольного дерева Штейнера минимального веса, отличающегося от оптимального не более чем в два раза.

При последовательном подходе неудачная маршрутизация очередной сети может блокировать маршрутизацию последующих сетей. Таким образом, конечный результат зависит от порядка, в котором рассматриваются сети. Но решить, какой порядок является наиболее предпочтительным, весьма непросто.

Параллельная маршрутизация. Одним из способов преодоления недостатков последовательного подхода является использование алгоритмов одновременной маршрутизации всей совокупности сетей, основанных на решении *задачи целочисленного линейного программирования (ЦЛП)*.

Поскольку трудоемкость решения задачи ЦЛП экспоненциально зависит от числа деревьев Штейнера, на практике непосредственное использование этого подхода встречается крайне редко. Гораздо чаще задача ЦЛП является вспомогательной. В иерархических алгоритмах глобальной маршрутизации она используется для решения подзадач на промежуточных уровнях, где размерности не так велики.

Один из первых известных *иерархических методов маршрутизации* был предложен в работе [M. Burstein (1983)]. В этом методе область маршрутизации рекурсивно делится на подобласти, и сети на каждом уровне иерархии трассируются одновременно. Такой подход позволяет свести исходную задачу глобальной маршрутизации к серии задач меньшей размерности. Простота этого метода не исключает возможности потери качества решения, поскольку при расчете очередного уровня иерархии не учитываются требования, возникающие на последующих уровнях.

Общей проблемой иерархических методов является то, что маршрутизация, выполненная на определенном уровне иерархии, может оказаться не оптимальной на следующем уровне. Для преодоления этого недостатка в статье [M. Hayashi (1995)] предложен комбинированный метод решения многоуровневой задачи глобальной маршрутизации.

Задача глобальной маршрутизации может быть сформулирована как *задача о многопродуктовом потоке в сети*. В статье [E. Shragowitz (1987)] рассматривается задача на ориентированном графе при условии, что все сети имеют по два терминала. Для ее решения предложен полиномиальный приближенный алгоритм. В работе представлено обоснование сходимости этого алгоритма, но отсутствуют оценки точности решения. Идея алгоритма заключается в том, что сначала для каждой из сетей решается соответствующая подзадача о потоке без ограничений на пропускные способности ребер, а затем возможные нарушения этих ограничений устраняются посредством итеративной процедуры.

В статье [F. Shahrokhi (1990)] предложен приближенный алгоритм для быстрого решения двухтерминальной дробной задачи о многопродуктовом потоке. В контексте задачи

глобальной маршрутизации этот алгоритм требует, чтобы все сети имели по два терминала, и при этом решение может получиться дробным.

Метаэвристики. Основная идея этих алгоритмов заключается в дополнении традиционных алгоритмов наискорейшего спуска определенными механизмами, позволяющими не ограничиваться нахождением локального минимума. Одним из наиболее известных методов такого типа является алгоритм имитации отжига, представленный в работе [S. Kirkpatrick (1983)]. В статье [M. P. Vecchi (1983)] на основе алгоритма имитации отжига предложен алгоритм решения задачи глобальной маршрутизации для случая двухтерминальных сетей, в которых разрешенное число поворотов не превышает 2. Известен пакет прикладных программ Timber-Wolf, в котором метод имитации отжига используется для решения задач размещения и глобальной маршрутизации. Для каждой сети строится множество деревьев-кандидатов, и одно из этих деревьев выбирается случайным образом в качестве начального решения. Каждая итерация алгоритма состоит в замене одного дерева другим для некоторой сети. Критерием качества решения является суммарное переполнение пропускных способностей ребер. Сеть, для которой производится замена дерева, выбирается случайным образом из множества сетей, пересекающих ребра, на которых имеется переполнение.

В качестве других примеров использования метаэвристик для решения задачи глобальной маршрутизации можно назвать работы [Y. A. Chen (1989)] (эволюционный алгоритм), [H. Esbensen (1994)] (генетический алгоритм) и [H. Youssef (1999)] (поиск с запретами).

Учет временных задержек. В связи с тем, что современные технологии достигли субмикронного уровня и гигагерцевых частот, временные задержки соединений становятся доминирующим фактором, определяющим производительность микросхем. Традиционные методы глобальной маршрутизации, дающие хорошие результаты в терминах длины связей и минимизации плотности, не могут гарантировать выполнение требований к быстродействию микросхем. В связи с этим в последние годы особое внимание уделяется способам учета временных ограничений на этапе глобальной маршрутизации. В работе [D. Wang (1996)] начальное решение строится алгоритмом поиска дерева Штейнера, учитывающим временные ограничения. Далее для улучшения решения используется следующий подход. На каждой итерации разрываются сети, проходящие через ребра с наибольшей плотностью. Задача повторной маршрутизации формулируется как задача о многопродуктовом потоке и решается с помощью иерархического алгоритма. Равномерность распределения проводников достигается максимизацией равномерности глобального потока и минимизацией максимальной плотности.

Из приведенного обзора можно сделать вывод, что, несмотря на актуальность и важность задачи, в настоящее время не существует методов, которые осуществляют маршрутизацию, удовлетворяющую одновременно временным критериям и ограничениям на пропускные способности ребер.

В настоящее время исполнителями проекта разрабатываются и тестируются новые алгоритмы решения задачи глобальной маршрутизации с учётом временных и ресурсных ограничений. Предложен итерационный алгоритм, выполняющий последовательно процедуру построения деревьев-кандидатов для всех сетей схемы с учётом временных характеристик. Далее по критерию минимума плотности соединений на основе разработанного малотрудоёмкого градиентного алгоритма выбирается по одному дереву для каждой сети. Проводится обширный численный эксперимент, участие в котором принимают наши коллеги из Индийского института науки, Бангалор, Индия.

1.9. Постановка математических моделей конкурентного размещения предприятий с различными целевыми функциями в виде задач двухуровневого целочисленного программирования

Исследуются задачи, являющиеся обобщением хорошо известной задачи размещения предприятий (средств обслуживания) на максимум [Береснев В.Л. (2005)]. В этих задачах в отличие от классической задачи рассматриваются две соперничающие стороны, которые последовательно открывают свои предприятия для обслуживания заданного множества потребителей. При этом каждая сторона стремится достичь собственные цели (например, получить максимальную прибыль), а каждый потребитель среди открытых предприятий выбирает наилучшее, исходя из собственных предпочтений.

1.9.1. Задача Лидера в игре Штакельберга

Задачи конкурентного размещения предприятий будем формулировать на базе известной модели конкуренции на рынке [Stackelberg H. Von (1952)], называемой игрой Штакельберга. В этой модели имеются две соперничающие стороны: Лидер и Последователь, которые последовательно принимают решения, стремясь достичь свои, вообще говоря, различные цели. Сначала Лидер принимает решения, зная цель, которую стремится достичь Последователь. Затем Последователь, зная решение Лидера, принимает свое решение, оптимизирующее его целевую функцию.

Задача Лидера в игре Штакельберга состоит в выборе такого решения, которое максимизирует его целевую функцию, значение которой зависит и от оптимального решения, принятого последователем.

Пусть множество A задает множество возможных решений Лидера, а множество $B(x)$ — множество возможных решений Последователя, при условии, что Лидер принял решение $x \in A$. Обозначим через $f(x, z)$ целевую функцию Лидера, которая может выражать, например, величину прибыли, получаемую Лидером, если он принял решение x , а Последователь — решение z . Аналогично, через $g(x, z)$ обозначим целевую функцию Последователя, равную, например, прибыли, которую, получит Последователь, если Лидер выбрал решение x , а Последователь — решение z .

Тогда задача Лидера в игре Штакельберга записывается как следующая задача двухуровневого математического программирования:

$$\max_x f(x, \tilde{z});$$

$$x \in A;$$

\tilde{z} — оптимальное решение задачи:

$$\max_z g(x, z);$$

$$z \in B(x).$$

Эта задача, как и всякая задача двухуровневого математического программирования [Dempe S., 2002] включает в себя задачу верхнего уровня и задачу нижнего уровня. Целевую функцию задачи верхнего уровня будем считать также целевой функцией задачи Лидера в целом. При этом отметим, что в задаче нижнего уровня в качестве параметра присутствует допустимое решение $x \in A$ задачи верхнего уровня. Аналогично, в задаче верхнего уровня в качестве параметра присутствует оптимальное решение \tilde{z} задачи нижнего уровня.

Допустимым решением задачи Лидера будем называть пару (x, \tilde{z}) , где $x \in A$, а \tilde{z} — оптимальное решение задачи нижнего уровня с параметром x .

Отметим, что рассматриваемая задача Лидера является корректной, если при любом $x \in A$ для любых допустимых решений (x, \tilde{z}_1) и (x, \tilde{z}_2) выполняется равенство $f(x, \tilde{z}_1) = f(x, \tilde{z}_2)$. Это условие справедливо, в частности, когда при любом $x \in A$ задача нижнего уровня имеет единственное оптимальное решение.

Если данное условие выполняется, то определение оптимального решения задачи Лидера не вызывает трудностей. Допустимое решение (x^*, \tilde{z}^*) является *оптимальным*, если $f(x^*, \tilde{z}^*) \geq f(x, \tilde{z})$ для любого допустимого решения (x, \tilde{z}) .

Если же указанное условие не выполняется, то задача Лидера не является корректной и чтобы снять неопределенность при вычислении целевой функции необходимо сформулировать правило выбора оптимального решения задачи нижнего уровня. Другими словами необходимо уточнить цель, которую преследует Последователь при выборе своего решения. В зависимости от этого будет уточняться и понятие оптимального решения.

Рассмотрим два правила поведения Последователя при выборе им своего решения: *кооперативное* и *некооперативное*. При кооперативном поведении Последователь, стремясь максимизировать свою целевую функцию, содействует Лидеру в получении максимального значения его целевой функции, а при некооперативном поведении Последователь стремится максимально ухудшить значение целевой функции Лидера.

В первом случае искомым решением задачи Лидера, которое будем называть *оптимальным кооперативным* решением задачи, будет допустимое решение (x^*, \tilde{z}^*) такое, что

$$f(x^*, \tilde{z}^*) = \max_x \max_{\tilde{z}} f(x, \tilde{z}).$$

Другими словами, допустимое решение (x^*, \tilde{z}^*) задачи Лидера является оптимальным кооперативным решением, если $f(x^*, \tilde{z}^*) \geq f(x, \tilde{z})$ для любого допустимого решения (x, \tilde{z}) .

При некооперативном поведении Последователя наилучшим решением задачи Лидера будем считать допустимое решение (x^*, \bar{z}^*) , для которого

$$f(x^*, \bar{z}^*) = \max_x \min_{\tilde{z}} f(x, \tilde{z}),$$

и называть его *оптимальным некооперативным* решением задачи Лидера. Допустимое решение (x, \bar{z}) задачи Лидера будем называть допустимым некооперативным решением, если $f(x, \bar{z}) \leq f(x, \tilde{z})$ для любого допустимого решения (x, \tilde{z}) . Тогда оптимальное некооперативное решение — это такое решение, что $f(x^*, \bar{z}^*) \geq f(x, \bar{z})$ для любого допустимого некооперативного решения (x, \bar{z}) .

Таким образом, будем рассматривать две постановки задачи Лидера в игре Штакельберга. В первой необходимо найти оптимальное кооперативное решение, а во второй — оптимальное некооперативное решение.

В некоторых случаях рассматриваемая задача Лидера, представленная как задача двухуровневого математического программирования, может быть записана как “обычная”

задача математического программирования с той же целевой функцией, что и исходная задача.

Предположим, что целевая функция Лидера $f(x, z)$ имеет вид

$$f(x, z) = h(x) + \lambda g(x, z),$$

где $h(x)$ — произвольная функция, а λ — число любого знака.

Легко видеть, что в этом случае для любых допустимых решений (x, \tilde{z}_1) и (x, \tilde{z}_2) задачи Лидера выполняется равенство $f(x, \tilde{z}_1) = f(x, \tilde{z}_2)$. Поэтому для оптимального значения целевой функции задачи Лидера справедливы равенства

$$\max_x f(x, \tilde{z}) = \max_x \{h(x) + \lambda g(x, \tilde{z})\} = \max_x \{h(x) + \lambda \max_z g(x, z)\}.$$

Отсюда, если $\lambda > 0$, получаем

$$\max_x f(x, \tilde{z}) = \max_x \max_z f(x, z),$$

И, если $\lambda < 0$, то

$$\max_x f(x, \tilde{z}) = \max_x \min_z f(x, z).$$

Таким образом, если $\lambda > 0$, то задача Лидера записывается как “обычная” задача математического программирования вида

$$\max_x f(x, z);$$

$$x \in A;$$

$$z \in B(x),$$

а если $\lambda < 0$, то как следующая максиминная задача

$$\max_x \min_z f(x, z);$$

$$x \in A;$$

$$z \in B(x).$$

1.9.2. Математические модели конкурентного размещения предприятий

Сформулируем задачу конкурентного размещения предприятий как задачу Лидера в игре Штакельберга. При этом, следуя терминологии игры Штакельберга, стороны,

открывающие предприятия, будем называть соответственно Лидером и Последователем. Введем необходимые обозначения.

Обозначим через $I = \{1, \dots, m\}$ множество предприятий (возможных мест размещения предприятий), а через $J = \{1, \dots, n\}$ — множество потребителей. Считаем, что для всякого $i \in I$ заданы величины f_i и g_i равные фиксированным затратам на открытие предприятия i соответственно Лидером и Последователем. Для $i \in I$ и $j \in J$ через p_{ij} обозначим величину дохода, получаемого предприятием i при обслуживании потребителя j .

Считаем, что для всякого $j \in J$ на множестве I задано отношение порядка \succ_j , показывающее предпочтения потребителя j при выборе им предприятия. Отношение $i \succ_j k$ для $i, k \in I$ означает, что из двух открытых предприятий i и k потребитель j выберет предприятие i . Считаем также, что отношение $i \succcurlyeq_j k$ для $i, k \in I$ означает, что либо $i \succ_j k$, либо $i = k$.

Для формальной записи задачи используем следующие переменные:

x_i — переменная, показывающая открывает или нет Лидер предприятие $i \in I$; $x_i = 1$, если открывает и $x_i = 0$, если нет;

x_{ij} — переменная, показывающая является ли предприятие $i \in I$ наилучшим для потребителя $j \in J$ среди всех предприятий, открытых Лидером.

z_i — переменная, показывающая открывает или нет Последователь предприятие $i \in I$; $z_i = 1$, если открывает и $z_i = 0$, если нет;

z_{ij} — переменная, показывающая является ли предприятие $i \in I$, открытое Последователем, наилучшим для потребителя $j \in J$ среди всех предприятий, открытых Лидером и Последователем.

С использованием указанных переменных и введенных обозначений задача конкурентного размещения предприятий записывается следующим образом:

$$\max_{(x_i), (x_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} \right) \right\}; \quad (1.9. \quad 2.1)$$

$$x_i + \sum_{k | i \succ_j k} x_{kj} \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (1.9. \quad 2.2)$$

$$x_i \geq x_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (1.9.)$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (1.9.2.3)$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (1.9.2.4)$$

$$((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij})) \text{ — оптимальное решение задачи:} \quad (1.9.2.5)$$

$$\max_{(z_i), (z_{ij})} \left\{ - \sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} P_{ij} z_{ij} \right\}; \quad (1.9.2.6)$$

$$x_i + z_i + \sum_{k | i > j k} z_{kj} \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (1.9.2.7)$$

$$z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J; \quad (1.9.2.8)$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (1.9.2.9)$$

Целевая функция (1.9.2.1) сформулированной задачи выражает величину прибыли, получаемой Лидером с учетом потери части потребителей, «захваченных» Последователем. Неравенство (1.9.2.2) реализует правило выбора потребителем наиболее предпочтительного предприятия среди всех предприятий, открытых Лидером. Это же неравенство гарантирует, что каждый потребитель может выбрать для своего обслуживания не более одного открытого предприятия. Ограничение (1.9.2.3) означает, что потребитель для своего обслуживания может выбрать только открытое предприятие. Аналогичный смысл имеют целевая функция и ограничения задачи (1.9.2.6)–(1.9.2.9). Целевая функция (1.9.2.6) выражает суммарную прибыль, получаемую Последователем, а неравенство (1.9.2.7) обеспечивает выполнение правила выбора потребителем наиболее предпочтительного для него предприятия среди всех предприятий, открытых как Лидером, так и Последователем. Помимо этого ограничение (1.9.2.7) показывает, что если предприятие открыто Лидером, то оно не может быть открыто Последователем.

Представленная задача является задачей двухуровневого математического программирования. Как и всякая такая задача, она включает задачу первого уровня (1.9.2.1)–(1.9.2.4), которую будем называть *задачей Лидера* и обозначать L , и задачу второго уровня (1.9.2.6)–(1.9.2.9), которую будем называть *задачей Последователя* и обозначать через F . Для задачи (1.9.2.1)–(1.9.2.9) будем использовать обозначение (L, F) .

Наряду с рассмотренной моделью рассмотрим еще один вариант задачи конкурентного размещения предприятий. Предположим, что цель Последователя состоит не в максимизации прибыли, а максимизации суммарного дохода, полученного от потребителей. При этом в качестве дополнительного ограничения будем считать, что доход, полученный предприятием не может быть меньше величины фиксированных затрат на открытие этого предприятия.

В этом случае задача нижнего уровня в задаче конкурентного размещения предприятий записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \max_{(z_i)(z_{ij})} \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} z_{ij} \\ & x_i + z_i \sum_{k|i > j k} z_{kj} \leq 1, \quad i \in I, j \in J; \\ & z_i \geq z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \\ & z_i g_i \leq \sum_{j \in J} p_{ij} z_{ij}, \quad i \in I, j \in J; \\ & z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J. \end{aligned}$$

Эту задачу будем обозначать через F' , а задачу конкурентного размещения предприятий с такой задачей нижнего уровня — через (L, F') .

Обозначим через $X = ((x_i), (x_{ij}))$ допустимое решение задачи L , а через $Z = ((z_i), (z_{ij}))$ и $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i), (\tilde{z}_{ij}))$ соответственно допустимое и оптимальное решение задач F и F' .

Пару (X, \tilde{Z}) назовем *допустимым решением* задачи (L, F) (задачи (L, F')), если X — допустимое решение задачи L , а \tilde{Z} — оптимальное решение задачи F (задачи F').

Обозначим через $L(X, Z)$ целевую функцию задач (L, F) и (L, F') .

Допустимое решение (X, \bar{Z}) задачи (L, F) (задачи (L, F')) назовем *допустимым некооперативным* решением задачи (L, F) (задачи (L, F')), если для всякого оптимального решения \tilde{Z} задачи F (задачи F') выполняется неравенство $L(X, \bar{Z}) \leq L(X, \tilde{Z})$.

Допустимое некооперативное решение (X^*, \bar{Z}^*) задачи (L, F) (задачи (L, F')) назовем *оптимальным некооперативным* решением задачи (L, F) (задачи (L, F')), если для любого допустимого некооперативного решения (X, \bar{Z}) задачи (L, F) (задачи (L, F')) выполняется

неравенство $L(X^*, \bar{Z}^*) \geq L(X, \bar{Z})$. При этом величину $L(X^*, \bar{Z}^*)$ будем называть оптимальным значением целевой функции задачи (L, F) (задачи (L, F')).

Далее основное внимание будет сосредоточено на проблеме вычисления оптимального значения целевой функции задач (L, F) и (L, F') и поиску оптимальных некооперативных решений этих задач.

2 Показатели

2.1. Защиты диссертаций

Исполнителями НИР представлены 3 кандидатских диссертации (см. Приложение В).

2.2. Список студентов, аспирантов, докторантов и молодых исследователей, закрепленных в сфере науки и образования.

Зачислены в аспирантуру ИМ СО РАН:

- Курочкин А.А.;
- Плотников Р.В.;
- Истомин А.М.

Принят в штат ИМ СО РАН:

Руднев А.С.

Принята в штат НГУ:

Алдын-оол Т.А.

2.3. Количество подготовленных и опубликованных статей:

Опубликовано 17, принято к печати 2, сдано в печать 15 статей (см. Приложение А).

2.4. Количество сделанных докладов:

Сделано 17 докладов на отечественных и 17 докладов на международных научных форумах. (см. Приложение Б).

3 Заключение

В процессе выполнения 1 этапа НИР проведены следующие работы.

1. Проведен обзор литературы и определены приоритетные направления фундаментальных исследований в различных областях современной кибернетики.
2. Проанализированы актуальные проблемы теории расписаний.
3. Проведен обзор проблем в области поиска подмножеств «похожих» векторов и кластерного анализа. Очерчен широкий класс неизученных и слабо изученных оптимизационных задач, связанных с поиском подмножеств векторов и кластерным анализом в евклидовом пространстве.
4. В обзоре проблем дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации сделана попытка проследить основные направления развития теории кодирования дискретных источников от задачи оптимального кодирования известного источника к задаче оптимального универсального кодирования семейства источников и задаче построения модели источника по сообщению.
5. Приведен краткий обзор методов улучшения оценок числа совершенных 2-раскрасок гиперкуба.
6. Проведен анализ критериев восстановимости кода (с точностью до эквивалентности) по полной или частичной информации о метрических соотношениях между кодовыми вершинами. С новых позиций рассмотрена проблема жёсткости кодов.
7. Проанализированы новые конструкции бент-функций, используемых для построения кодов постоянной амплитуды в системах CDMA (Code Division Multiple Access). Приведен обзор исследований по нижним оценкам числа бент-функций, которые могут быть получены с помощью итеративных конструкций.
8. Проведен обзор проблем маршрутизации в современных беспроводных сенсорных сетях. Проанализированы существующие методы глобальной маршрутизации при проектировании СБИС.
9. Разработаны новые постановки математических моделей конкурентного размещения предприятий с различными целевыми функциями в виде задач двухуровневого целочисленного программирования.

В результате исследований проведен обзор литературы, проанализированы и поставлены основные задачи НИР. По ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в монографиях и статьях.

Приведены списки опубликованных работ, выступлений на научных форумах, а также другие показатели успешной работы в рамках данного проекта.

Полученные результаты имеют мировой уровень, а исполнители представляют передовой фронт науки в указанных областях.

По результатам 1 этапа НИР напрашивается вывод о целесообразности продолжения работ.

4. Список использованных источников

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации - Новосибирск: Изд-во Наука, 1978 – 323 с.
2. Агеев А.А., Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Полиномиальный алгоритм решения задачи размещения на цепи с одинаковыми производственными мощностями предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2009. - Т. 16, № 5. - С. 3-17.
3. Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Одна задача размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входных данных // Вестник НГУ. Математика. 2010, в печати.
4. Jain A.K., Dubes R.C. Algorithms for clustering data. Prentice Hall, New Jersey: Englewood Cliffs, 1988. – 320 P.
5. Kaufman L., Rousseeuw P. Finding Groups in Data: An Introduction to Cluster Analysis. New York: John Wiley and Sons, 2005.- 368 P.
6. P. Arabie, L. J. Hubert. An overview of combinatorial data analysis. In P. Arabie, L. J. Hubert, and G. De Soete, editors, Classification and Clustering, p. 5-63. New York: World Publishing, 1996.
7. Richard O. Duda, Peter E. Hart, David G. Stork. Pattern Classification, 2nd Edition. New York: John Wiley & Sons, 2001. – 680 P.
8. Edwards A. W. F., Cavalli-Sforza L. L. A Method for Cluster Analysis // Biometrics. - 1965. - Vol. 21. - P. 362-375.
9. Jain A.K. Data Clustering: 50 Years Beyond K-Means // Pattern Recognition Letters. 2010. Vol. 31, No. 8. P. 651-666.
10. Proceedings of the Fourth IEEE International Conference on Data Mining (ICDM'04). 2004.
11. Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17–24 октября 2010 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2010.
12. Hamming R. W. Error detecting and errorcorrecting codes // Bell Syst.Tech.J. 1950. V. 29. P. 147-160.
13. Зиновьев В. А., Леонтьев В.К. О совершенных кодах // (Препринт/ИППИ АН СССР). 1972. Вып. 1. С. 26-35.
14. Зиновьев В. А., Леонтьев В.К. Несуществование совершенных кодов над полями Галуа // Проблемы управления и теории информации. 1973. Вып. 2. С. 123-132.

15. Tietavainen A. On the nonexistence of perfect codes over the finite fields // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 24. P. 88-96.
16. Delsarte P. An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Res. Rep. Suppl. 1973. V. 10. P.1-97.
17. Семаков Н.В., Зиновьев В.А., Зайцев Г.В. Равномерно упакованные коды // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7. N. 1. С. 38--50.
18. Van Tilborg H. C. A. Uniformly packed codes // Ph. D. Thesis, Eindhoven University of Technology, the Netherlands, 1975.
19. Delsarte P. An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Res. Rep. Suppl. 1973. V. 10. P.1-97.
20. Gordon M.D. Perfect Single Error-Correcting Codes in the Johnson Scheme // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. N. 10. P. 4670-4672.
21. Martin W. J. Completely Regular Designs // J. Combin. Designs. 1998. V. 6. N. 4. P. 261--273
22. Dehon M. On the existence of 2-designs $S_{\lambda}(2,3,v)$ without repeated blocks // Discrete Math. 1983. V. 43. P. 155-171.
23. Hanani H. On quadruple systems // Canad. J. Math. 1960. V. 15. P. 145-157
24. Hartman A., Phelps K.T. Tetrahedral quadruple systems // Utilitas Math. 1990. V. 37. P. 181-189.
25. Sevast'janov S.V. On Some Geometric Methods in Scheduling Theory: a survey// Discrete Appl. Math. 1994. V. 55. P. 59-82.
26. Sevastianov S. An introduction to multi-parameter complexity analysis of discrete problems// European Journal of Operational Research, 2005, V. 165(2) P. 387-397.
27. Кононов А.В., Севастьянов С.В. О сложности нахождения связной предписанной раскраски вершин графа// Дискретный анализ и исследование операций. 2000. Сер. 1. Т. 7, N 2. С. 21-46.
28. Каширских К.Н., Севастьянов С.В., Черных И.Д. Четырехпараметрический анализ сложности задачи open shop // Дискретный анализ и исследование операций. 2000. Сер. 1. Т. 7, N 4. С. 59-77.
29. Baker K.R. Introduction to Sequencing and Scheduling, John Wiley, NY.1974.
30. Baker K.R. Elements of Sequencing and Scheduling, K. Baker, Amos Tuck School of Business Administration, Dartmouth College, Hanover, NH 03755. 1995.
31. Baker K.R. and Trietsch D. Principles of Sequencing and Scheduling. John Wiley & Sons, Inc. 2009.

32. Baptiste P., Le Pape C. and Nuijten W. Constraint-Based Scheduling, Kluwer Academic Publishers, Boston. 2001.
33. Bellman R. Mathematical aspects of scheduling theory, J. Soc. Industr. and Appl. Math. 2, 1956, № 3, 168-205.
34. Bellman R., Gross O. Some combinatorial problems arising in the theory of multistage processes, J. Soc. Industr. and Appl. Math. 2, 1954, № 3, 175-183.
35. Billaut J.C., Moukrim A. and Sanlaville E. (eds.) Flexibility and Robustness in Scheduling, London: ISTE Ltd, Hoboken (USA): John Wiley & Sons, Inc. 2008.
36. J. Blazewicz, W. Cellary, R. Slowinski and J. Weglarz Scheduling under Resource Constraints - Deterministic Models, Annals of Operations Research, Vol. 7, Baltzer, Basel. 1986.
37. J. Blazewicz, K. Ecker, E. Pesch, G. Schmidt and J. Weglarz Scheduling Computer and Manufacturing Processes, Springer Verlag, Berlin. 1996.
38. Blazewicz J., Ecker K., Pesch E., Schmidt G. and Weglarz J. Handbook on Scheduling. From Theory to Applications, Berlin/New York: Springer, 2007.
39. J. Blazewicz, K. Ecker, G. Schmidt and J. Weglarz Scheduling in Computer and Manufacturing Systems, Springer Verlag, Berlin. 1993.
40. D.E. Brown and W.T. Scherer (eds.) Intelligent Scheduling Systems, Kluwer Academic Publishers, Boston. 1995.
41. P. Brucker Scheduling Algorithms (First Edition), Springer Verlag, Berlin. 1995.
42. P. Brucker Scheduling Algorithms (Fifth Edition), Springer Verlag, Berlin. 2007.
43. Brucker P., Knust S. Complex Scheduling. Springer, 2006.
44. B. Chen, C.N. Potts and G.J. Woeginger "A Review of Machine Scheduling: Complexity, Algorithms, and Approximability", in Handbook of Combinatorial Optimization, D.-Z. Du and P. Pardalos (eds.), pp. 21–169, Kluwer Academic Press, Boston. 1998.
45. P. Chretienne, E.G. Coffman, Jr., J.K. Lenstra, and Z. Liu (eds.) Scheduling Theory and Applications, John Wiley, New York. 1995.
46. E.G. Coffman, Jr. (ed.) Computer and Job Shop Scheduling Theory, John Wiley, New York. 1976.
47. R.W. Conway, W.L. Maxwell, L.W. Miller Theory of Scheduling, Addison-Wesley, Reading, MA. 1967.
48. S. Dauzère-Prères and J.-B. Lasserre An Integrated Approach in Production Planning and Scheduling, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 411, Springer Verlag, Berlin. 1994.

49. M.W. Dawande, H.N. Geismar, S.P. Sethi, and C. Sriskandarajah *Throughput Optimization in Robotic Cells*, International Series in Operations Research and Management Science, Springer. 2007.
50. M.A.H. Dempster, J.K. Lenstra and A.H.G. Rinnooy Kan (eds.) *Deterministic and Stochastic Scheduling*, Reidel, Dordrecht. 1982.
51. S. French *Sequencing and Scheduling: an Introduction to the Mathematics of the Job Shop*, Horwood, Chichester, England. 1982.
52. S.M. Johnson *Optimal two-and-three stage production schedules with set-up times included*, Nav. Res. Log. Quart. 1, № 1, 1954, 61-68.
53. J. Jozefowska *Just-in-Time Scheduling: Models and Algorithms for Computer and Manufacturing Systems*. Springer. 2007.
54. J.W. Herrmann (ed.) *Handbook of production scheduling*. New York: Springer Science+Business Media. 2006.
55. E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and D. Shmoys *Sequencing and Scheduling: Algorithms and Complexity*, in *Handbooks in Operations Research and Management Science*, Vol. 4: *Logistics of Production and Inventory*, S.S. Graves, A.H.G. Rinnooy Kan and P. Zipkin, (eds.), 1993, pp. 445–522, North-Holland, New York.
56. C.-Y. Lee and L. Lei (eds.) “*Scheduling: Theory and Applications*”, *Annals of Operations Research*, Vol. 70, Baltzer, Basel. 1997.
57. J.Y.-T. Leung (ed.) *Handbook of Scheduling*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, Florida. 2004.
58. E. Levner (ed.) *Multiprocessor Scheduling: Theory and Applications*, Vienna: I-Tech Education and Publishing. 2007.
59. E. Levner, V. Kats, D.A. López de Pablo and T.C.E. Cheng *Complexity of Cyclic Scheduling Problems: A State-of-the-Art Survey*, *Computers & Industrial Engineering*, 2010, 59(2), P. 352-361.
60. T.E. Morton and D. Pentico *Heuristic Scheduling Systems*, John Wiley, NY. 1993.
61. J.F. Muth and G.L. Thompson (eds.) *Industrial Scheduling*, Prentice-Hall, NJ. 1963.
62. A. Nareyek (ed.) *Local Search for Planning and Scheduling*, Revised Papers of ECAI 2000 Workshop in Berlin, Germany, *Lecture Notes in Computer Science*, No. 2148, Springer Verlag, Berlin. 2001.
63. I.M. Ovacik and R. Uzsoy *Decomposition Methods for Complex Factory Scheduling Problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston. 1997.
64. R.G. Parker *Deterministic Scheduling Theory*, Chapman & Hall, London. 1995.

65. M. Pinedo Planning and Scheduling in Manufacturing and Services, Springer Series in Operations Research, Springer, New York. 2005.
66. M.L. Pinedo Scheduling. Theory, Algorithms, and Systems. Third Edition, Springer Science+Business Media. 2008.
67. M. Pinedo and X. Chao Operations Scheduling with Applications in Manufacturing and Services, Irwin/McGraw-Hill, Burr Ridge, IL. 1999.
68. C. Schwindt Resource Allocation in Project Management, Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. 2005.
69. D.R. Sule Industrial Scheduling, PWS Publishing Company, Boston. 1996.
70. V.S. Tanaev, V.S. Gordon, Y.M. Shafransky Scheduling theory. Single-stage systems. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. 1994.
71. V.S. Tanaev, Yu.N. Sotskov, V.A. Strusevich Scheduling theory. Multi-stage systems. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers. 1994.
72. V. T'kindt and J.-C. Billaut Multicriteria Scheduling - Theory, Models, and Algorithms (First Edition), Springer, Berlin. 2002.
73. V. T'kindt and J.-C. Billaut Multicriteria Scheduling - Theory, Models, and Algorithms (Second Edition), Springer, Berlin. 2006.
74. Xiao-Juan Wang, Chao-Yong Zhang , Liang Gao and Pei-Gen Li A survey and future trend of study on multi-objective scheduling, Fourth International Conference on Natural Computation (ICNC '08). Proceedings. 2008.
75. M. Zweben and M. Fox (eds.) Intelligent Scheduling, Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, California. 1994.
76. А.А. Лазарев, Е.Р. Гафаров Теория расписаний. Минимизация суммарного запаздывания для одного прибора. 2006. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН.
77. А.А. Лазарев, Е.Р. Гафаров Теория расписаний. Исследование задач с отношениями предшествования и ресурсными ограничениями. 2007. М.: Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН.
78. В.С. Танаев, В.С. Гордон, Я.Н. Шафранский Теория расписаний. Одностадийные системы, М.: Наука.
79. В.С. Танаев, М.Я. Ковалёв, Я.Н. Шафранский Теория расписаний. Групповые технологии. Минск: Институт технической кибернетики НАН Белоруссии. 1998.
80. В.С. Танаев, Ю.Н. Сотсков, В.А. Струсевич Теория расписаний. Многостадийные системы, М.: Наука. 1989.
81. В.С. Танаев, В.В. Шкурба Введение в теорию расписаний, М.: Наука. 1975.

82. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т.14, №1. С. 32-42.
83. Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55-74.
84. Долгушев А.В., Кельманов А.В. К вопросу об алгоритмической сложности одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, №2. С. 39-45.
85. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества «похожих» векторов // Доклады РАН. 2008. Т.421, №5. С. 590-592.
86. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №5. С. 25-40.
87. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009, Т.49, №11. С. 2059-2067.
88. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. 2008. 4 p.
89. Dasgupta S. The Hardness of k-means Clustering // Technical Report CS-2007-0890. University of California, 2007. – 6 p.
90. MacQueen J.B. Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations // Proc. 5-th Berkeley Symp. Of Mathematical Statistics and Probability. 1967. Vol. 1. P. 281-297.
91. Mahajan M., Nimbhorkar P., Varadarajan K. The Planar k-means Problem is NP-Hard // Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5431. P. 284-285.
92. Phelps K.T., Stinson D.R., Vanstone S.A. The existence of simple $S_{\{3\}(3,4,v)}$ // Discrete Math. 1989. V. 77. P. 255-258.
93. Shannon C.E. A mathematical theory of communication// Bell System. Tech. J. 1948. V.27, pt. I., P.379-423; pt. II, P.623-656. Русский перевод: Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
94. Рябко Б.Я., Фионов А.Н. Быстрый метод рандомизации сообщений// Проблемы передачи информации. 1997. Т.33, Вып.3. С.3-14.
95. Рябко Б.Я. Алгоритмический подход к задаче прогнозирования // Проблемы передачи информации. 1993. Т.29, Вып.2. С.96-103.

96. Кричевский Р.Е. Сжатие и поиск информации. М.: Радио и связь. 1989.
97. Августинovich С.В., Соловьёва Ф.И. К метрической жесткости двоичных кодов// Пробл. передачи информ.- 2003.- Т.39, №2., С.23-28.
98. Solov'eva F.I., Avgustinovich S.V., Honold T., Heise W. On the extendability of code isometries// J.Geom.- 1998.- V.61.- P.3-16.
99. Августинovich С.В. Об изометричности плотно упакованных бинарных кодов// Дискретный анализ - Новосибирск: Ин-т математики, 1994.- С.3-5.
100. Августинovich С.В. К строению графов минимальных расстояний совершенных бинарных $(n,3)$ -кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер.1.- 1998.- Т.3, №5.- С.3-5.
101. Могильных И.Ю. О слабых изометриях кодов Препараты // Пробл. передачи информ.- 2009.- Т.45, №2., С.78-83.
102. Mogilnykh I.Yu., Ostergard P.R.J., Pottonen O., Solov'eva F.I. Reconstructing extended perfect binary one-error-correcting codes from their minimum distance graphs // IEEE Trans. Inform. Theory- 2009. V.55., P.2622-2625.
103. Красин В.Ю. О слабых изометриях булева куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер.1.- 2006.- Т.13, №4. С.26-32.
104. Августинovich С.В. О сильной изометрии бинарных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер.1.- 2000.- Т.7, №3.- С.3-5.
105. L.M. Kirousis, E. Kranakis, D. Krizanc, and A. Pelc. Power consumption in packet radio networks // Theoretical Computer Science, 2000, 243, P. 289–305.
106. A.E.F. Clementi, P. Penna, and R. Silvestri. On the power assignment problem in radio networks // Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2000, 054.
107. P. Carmi, M.J. Katz. Power Assignment in Radio Networks with Two Power Levels // Algorithmica, 2007, 47, P.183-201.
108. E. Althaus, G. Calinescu, I.I. Mandoiu, S. Prasad, N. Tchervenski, A. Zelikovsky. Power Efficient Range Assignment for Symmetric Connectivity in Static Ad Hoc Wireless Networks // Wireless Networks, 2006, 12(3), 287-299.
109. J. Wu, S. Yang. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // Int. J. of Foundations of Computer Science, 2005, v. 16, No. 1, p. 3-17.
110. Ерзин А.И., Шамардин Ю.В. Одна задача синтеза оптимального остовного дерева // Труды Межд. конф. «Интеллектуализация обработки информации» (ИОИ-8), Кипр, Пафос, 2010, 251-254.

111. Elmore W.C. The transient response of damped linear networks with particular regards to wide-band amplifiers // *J. Appl. Phys.* 1948. V. 19. P. 55–63.
112. Erzin A.I., Cho J.D. A deep-submicron Steiner tree // *Mathematical and Computer Modelling.* № 31. 2000. P. 215-226.
113. Kastner R., Bozorgzadeh E., Sarrafzadeh M. Pattern routing: use and theory for increasing predictability and avoiding coupling // *IEEE Trans. on CAD.* 2002. V. 21. P. 777-791.
114. S. M. Sait and H. Youssef. *VLSI physical design automation : theory and practice.* 1995.
115. M. Sarrafzadeh and C. K. Wong. *An introduction to VLSI physical design.* 1996.
116. N. A. Sherwani. *Algorithms for VLSI Physical Design Automation.* 1999.
117. A. B. Kahng and G. Robins. *On optimal interconnections for VLSI.* 1995.
118. J. Cong, L. He, C.-K. Koh, and P. H. Madden. Performance optimization of VLSI interconnect layout. *Integration : the VLSI Journal*, vol. 21, 1996, pp. 1-94.
119. C. Y. Lee. An algorithm for path connection and its application. *IRE Trans. on Electronic Computers*, vol. EC-10, 1961, pp. 346-365.
120. F. Hadlock. Finding a maximum cut of a planar graph in polynomial time. *SIAM J. on Computing*, vol. 11, 1975, pp. 885-892.
121. J. Soukup. Fast maze router. *Proc. of 15th DAC*, 1978, pp. 100-102.
122. D. W. Hightower. A solution to the line routing problem on a continuous plane. *Proc. 6th Design Automation Workshop*, 1969, pp. 1-24.
123. K. Mikami and K. Tabuchi. A computer program for optimal routing of printed circuit connectors. *Proc. IFIPS Conf.*, 1968, pp. 1475-1478.
124. C. Schen. *VLSI placement and routing using simulated annealing.* 1986.
125. C. Chiang, M. Sarrafzadeh, and C. K. Wong. Global routing based on Steiner Min-Max trees. *IEEE Trans. on CAD*, vol. 9, pp. 1318-1325, 1990.
126. C. Chiang, C. K. Wong, and M. Sarrafzadeh. A weighted Steiner tree-based global router with simultaneous length and density minimization. *IEEE Trans. on CAD*, vol. 13, 1994, pp. 1461-1469.
127. M. Burstein and R. Pelavin. Hierarchical wire routing. *IEEE Trans. on CAD*, vol. CAD-2, 1983, pp. 223-234.
128. M. Hayashi and S. Tsukiyama. A hybrid hierarchical approach for multi-layer global routing. *Proc. European Desing and Test Conference*, 1995, pp. 492-496.
129. E. Shragowitz and S. Kell. A global router based on a multicommodity flow model. *Integration, the VLSI Journal*, vol. 5, 1987, pp. 3-16.

130. F. Shahrokhi and D. W. Matula. The maximum concurrent flow problem. *Journal of the ACM*, vol. 37, 1990, pp. 318-334.
131. S. Kirkpatrick, C. D. Gelatt, and M. P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *Science*, vol. 220, 1983, pp. 671-680.
132. M. P. Vecchi and S. Kirkpatrick Global wiring by simulated annealing. *IEEE Trans. on CAD*, vol. CAD-2, 1983, pp. 215-222.
133. Y. A. Chen, Y. L. Liu, and Y. C. Hsu. A new global router for ASIC design based on simulated evolution. *Proc. Int. Symp. on VLSI Technology, Systems and Applications*, 1989, pp. 261-265.
134. H. Esbensen. A macro-cell global router based on two genetic algorithms. *Proc. EDAC*, 1994 pp. 428-433.
135. H. Youssef and S. M. Sait. Timing-driven global routing for standard-cell VLSI design. *Computer systems: Science and Engineering*, vol. 14, 1999, pp. 175-185.
136. D. Wang and E. S. Kuh. Performance-driven interconnect global routing. *Proc. Great Lake Symp. VLSI*, 1996, pp. 132-136.
137. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных - Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005 - 408 с.
138. Dempe S. Foundations of bilevel programming. - Dordrecht: Kluwer Ac. Pub., 2002. - 332 p.
139. Stackelberg H. von. The theory of the market economy. - Oxford: Oxford Univ. Press, 1952. - 289 p.

Приложение А. Список публикаций исполнителей

Опубликованные статьи:

1. **Alekseeva E.V.**, Kochetova N. A., Kochetov Yu. A., Plyasunov A.V.
A heuristic and exact methods for the discrete $(r|p)$ -centroid problem // Lecture Notes Computer Science, Berlin: Springer, 2010.- V. 6022, - P. 11--22.
2. **Лавлинский С.М.** Государственно-частное партнерство на сырьевой территории - экологические проблемы, модели и перспективы // Проблемы прогнозирования. - 2010. - № 1. - С. 99-111.
3. **Ерзин А.И.**, Шамардин Ю.В. Одна задача синтеза оптимального остовного дерева // Труды Межд. кон. «Интеллектуализация обработки информации» (ИОИ-8), Кипр, Пафос, 2010, с. 251-254.
4. **Бабурин А.Е.**, **Гимади Э.Х.** Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Труды ИММ УрО РАН, 2010, Т. 15. № 4. С. 21-32.
5. **Гимади Э.Х.** О вероятностном анализе алгоритма решения задачи о p-медиане // Дискретный анализ и исследование операций. Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2010. Т. 17. № 3. С. 11-19.
6. **Кельманов А.В.** О сложности некоторых задач анализа данных // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010, Т.50, №11. С. 2045-2051.
7. **Кельманов А.В.**, **Пяткин А.В.** NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т.15, №5. С. 31-45.
8. **Kel'manov A.V.**, **Khamidullin S.A.** An Algorithm for Recognition of a Vector Alphabet Generating a Sequence with a Quasi-Periodic Structure // Pattern Recognition and Image Analysis. 2010. Vol. 20, No.4, pp. 451-458.
9. **A.V. Kel'manov.** On the Complexity of Some Data Analysis Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2010, Vol. 50, No. 11, pp. 1941-1947.
10. **Кельманов А. В.** NP-полнота некоторых задач поиска подмножеств векторов // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 3. С. 121-129.
11. **Кротов Д.С.** О свитчинговой разделимости графа и его подграфов // Дискретный анализ и исследование операций, 2010, , т. 17, №2, С. 46-56.
12. **Токарева Н.Н.** Обобщения бент-функций. Обзор работ // Дискретный анализ и исследование операций, 2010, , т. 17, №1, С. 33-62.
13. **Августинович С.В.**, **Могильных И.Ю.** Совершенные раскраски графов Джонсона

J(8,3) и J(8,4) в два цвета // Дискретный анализ и исследование операций, 2010, т. 17, №2, С. 3-19.

14. Горкунов Е.В. Мономиальные автоморфизмы линейной и простой компонент кода Хэмминга // Дискретный анализ и исследование операций, 2010, т. 17, №1, С. 11–33.
15. **Воробьев К.В.**, Фон-Дер-Флаасс Д.Г. О совершенных 2-раскрасках гиперкуба, Сибирские Электронные Математические Известия , (2010), том 7, С. 65-75.
16. Горкунов Е.В., Августинovich С.В. О восстановлении двоичных кодов по размерностям их подкодов // Дискретный анализ и исследование операций, 2010, т. 17, №5, С. 15-21.
17. Севастьянов С.В., Ситтерс Р.А., Фишкин А.В. Построение расписаний выполнения независимых работ на идентичных параллельных машинах с прерываниями и миграционными задержками // Автоматика и телемеханика. N 10, 2010. С. 90-99.

Статьи, принятые к печати:

1. Береснев В.Л., Мельников А.А. Приближенные алгоритмы для задачи конкурентного размещения предприятий // Дискретный анализ и исследование операций. -2010. - Т. 17, № 6.
2. **Алдын-оол Т.А., Ерзин А.И.,** Залюбовский В.В. Покрывание плоской области случайно распределёнными сенсорами // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика, № 4, 2010.

Статьи, сданные в печать:

1. **Береснев В.Л.,** Гончаров Е.Н., **Мельников А.А.** Локальный поиск по обобщенной окрестности // Дискретный анализ и исследование операций.
2. V. Zalyubovskiy, **T. Aldyn-ool, A. Erzin,** H. Choo. Energy-Efficient Coverage-Guaranteed Node Scheduling Models in Sensor Networks with Random Deployed Sensors // Proceedings, 2nd Int. Conf. on Internet (ICONI) 2010, Philippines.
3. **Гимади Э.Х.,** Дементьев В.Т. Децентрализованная обобщенная задача о назначениях // Сибирские электронные математические известия, 2010.
4. Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Одна задача размещения с одинаковыми объемами производства на случайных входных данных // Вестник НГУ. Математика. 2010.
5. **Э. Х. Гимади,** Е. Н. Гончаров, В. В. Залюбовский, Н. И. Пляскина, В. Н. Харитонова. О программно-математическом обеспечении решения задачи ресурсно-календарного

- планирования на примере освоения нефтегазовых ресурсов Восточной Сибири // Вестник НГУ. Математика. 2010.
6. Кельманов А.В., Романченко С.М. Приближённый алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011.
 7. Пузынина С.А. О периодичности совершенных раскрасок бесконечной гексагональной и треугольной решеток // Сиб. мат. журнал
 8. Горкунов Е.В. Группа автоморфизмов q -ичного кода Хэмминга // Дискретн. анализ и исслед. операций.
 9. P. Sole and **Natalia Tokareva** Connections between quaternary and Boolean bent functions // Designs, codes and Cryptography, 2010.
 10. Токарева Н.Н. Группа автоморфизмов множества бент-функций // Дискретная математика, 2010.
 11. J. Karhumäki, S. Puzynina Turtle graphics and locally catenative sequences // Theoretical Informatics and Applications.
 12. S. Avgustinovich, J. Karhumäki, S. Puzynina On abelian versions of Critical factorization theorem // Theoretical Informatics and Applications.
 13. С.В.Августинович, М.А.Лисицына Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискретн. анализ и исслед. опер.
 14. N. Tokareva On the number of bent functions from iterative constructions: bounds and hypotheses // Advances in Mathematics of Communications, 2010.
 15. N. Tokareva Duality between bent functions and affine functions // Discrete Mathematics, 2010.

Приложение Б. Список сделанных исполнителями докладов

На всероссийских конференциях и семинарах:

1. Береснев В.Л., Гончаров Е.Н. Алгоритм локального спуска по расширенной окрестности для задачи размещения предприятий // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций», Алтай, 27 июня – 3 июля 2010 (секционный).
2. Береснев В.Л., Мельников А.А. Алгоритмы локального поиска по обобщенной окрестности для задачи конкурентного размещения предприятий // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций», Алтай, 27 июня – 3 июля 2010 (секционный).
3. Алексеева Е.В., Кочетова Н.А. Модифицированный точный метод для задачи о (r|p)-центроиде, секционный доклад // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций», Алтай, 27 июня – 3 июля 2010 (секционный).
4. Алдын-оол Т.А., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Покрытие плоской области случайно распределенными сенсорами // Росс. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций» 27 июня – 03 июля 2010 г., Республика Алтай (секционный)
5. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Покрытие ограниченных плоских областей кругами // Росс. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций» 27 июня – 03 июля 2010 г., Республика Алтай (секционный)
6. Ерзин А.И., Плотников Р.В. Максимизация времени жизни сенсорной сети в случае заданного множества покрытий // Росс. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций» 27 июня – 03 июля 2010 г., Республика Алтай (секционный)
7. Ерзин А.И., Шамардин Ю.В. Одна задача синтеза оптимального остовного дерева // Межд. кон. «Интеллектуализация обработки информации», Кипр, Пафос, 17-24 октября 2010 г. (секционный).
8. А.Е.Бабурин, Э.Х. Гимади. Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Изд-во Ин-та математики, 2010. С. 151-151 (секционный).
9. Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Децентрализованная обобщенная задача о назначениях // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Изд-во Ин-та математики, 2010.С. 101-101(секционный).

10. Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Полиномиальные алгоритмы для некоторых классов задачи размещения // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Изд-во Ин-та математики, 2010.С. 158-158 (секционный).
11. Гимади Э.Х., Рыков И.А. Приближенный рандомизированный алгоритм отыскания подмножества векторов с максимальной нормой суммы в многомерном евклидовом пространстве // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций»: Изд-во Ин-та математики, 2010.С. 102-102 (секционный).
12. Долгушев А.В., Кельманов А.В. К вопросу о сложности задачи MSSC // Материалы Российской конференции «Дискретная оптимизация и исследование операций», DOOR-2010, Алтай, 27 июня - 3 июля 2010 (секционный).
13. Кельманов А.В. О сложности некоторых задачах анализа данных и распознавания образов // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций», DOOR-2010, Алтай, 27 июня - 3 июля 2010 г. (секционный).
14. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Об одной задаче поиска и идентификации наборов фрагментов в числовой последовательности // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций», DOOR-2010, Алтай, 27 июня - 3 июля 2010 г. (секционный).
15. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач поиска подмножества векторов // Российская конференция «Дискретная оптимизация и исследование операций», DOOR-2010, Алтай, 27 июня - 3 июля 2010 г. (секционный).
16. Севастьянов С.В., Б.М.Т. Лин, Хуанг Ш.Л. Задача с оборотными ресурсами: анализ сложности и алгоритмы // Российская конференция “Дискретная оптимизация и исследование операций” (DOOR-2010), Республика Алтай, 27 июня – 3 июля 2010 (секционный).
17. Козлов А.С. К гипотезе существования для задачи на m параллельных машинах оптимального расписания с не более чем $m-1$ миграцией // Российская конференция “Дискретная оптимизация и исследование операций” (DOOR-2010), Материалы конференции. Республика Алтай, 27 июня –3 июля 2010 (секционный).

На международных конференциях и семинарах:

1. Береснев В.Л. Алгоритм локального поиска для задачи конкурентного размещения предприятий // 8 Международная конференция «Интеллектуализация обработки информации», 17 – 24 октября, 2010, г. Пафос, Кипр (секционный).

2. Beresnev V.. Approximation Algorithm for the Competitive Facility Location Problems // 24-th European Conference on Operational Research, Lisbon, Portugal, 2010 (секционный).
3. Alekseeva E. An improved exact method for the discrete (r, p) -centroid problem // 24-th European Conference on Operational Research, Lisbon, Portugal, 2010 (секционный).
4. V. Zalyubovskiy, T. Aldyn-ool, A. Erzin, H. Choo. Energy-Efficient Coverage-Guaranteed Node Scheduling Models in Sensor Networks with Random Deployed Sensors // The 2nd International Conference on Internet (ICONI) 2010, 16-20 Dec. 2010, Philippines (секционный).
5. Edward GIMADI, Aleksei GLEBOV, Anastasia GORDEEVA, Eugenia IVONINA, and Dolgor ZAMBALAEVA. Some polynomial algorithms with performance guarantees for the 2-PSP in complete graph // Abstracts of International Conference “Operations Research 2010”, 1–3 Sept. 2010, Munich, Germany. P.121 (секционный).
6. Alexander KUROCHKIN. Effective algorithm for the two-stage FLP on the tree network // Abstracts of International Conference “OPTIMAL DISCRETE STRUCTURES AND ALGORITHMS” (ODSA 2010), 13–15 Sept. 2010. Rostock, Germany. P. 29-29 (секционный).
7. Edward GIMADI. Approximation algorithms with performance guarantees for some discrete routing problems // Abstracts of International Conference “OPTIMAL DISCRETE STRUCTURES AND ALGORITHMS” (ODSA 2010), 13–15 Sept. 2010. Rostock, Germany. P. 8-8 (секционный).
8. Гимади Э.Х. Алгоритмы с оценками качества решения некоторых задач выбора подмножества векторов в евклидовом пространстве // Международная конференция «Интеллектуализация обработки информации» (ИОИ-8), Кипр, г. Лимассол, 10–16 октября 2010 г., С. 240-243 (секционный).
9. Долгушев А. В., Кельманов А. В. О сложности одной задачи кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17–24 октября 2010 г. (секционный).
10. Кельманов А. В., Пяткин А. В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17–24 октября 2010 г. (секционный).
11. Кельманов А. В., Михайлова Л. В., Хамидуллин С.А. Об одной задаче обнаружения и идентификации векторных наборов в последовательности /// Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17–24 октября 2010 г. (секционный).

12. Кельманов А. В. NP-полнота некоторых задач анализа данных // Интеллектуализация обработки информации: 8-я международная конференция. Республика Кипр, г. Пафос, 17–24 октября 2010 г. (пленарный).
13. S. Avgustinovich, J. Karhumäki, S. Puzynina On abelian versions of Critical factorization theorem. International, selected contribution, Mons Theoretical Computer Science Days, September, 2010, France (пленарный).
14. Gorkunov E.V. Symmetries of a q-ary Hamming code. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Novosibirsk, Russia, Sept.5–11, 2010 (секционный).
15. Avgustinovich S.V., Gorkunov E.V. On redundancy of strong isometries of binary codes. IEEE Int. Conf. on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering, Irkutsk, Russia. July11-15, 2010, (секционный).
16. Heden O., Solov'eva F.I., Mogilnykh I.Yu. Intersections of perfect binary codes - 2010 International Conference on Computational Technologies in Electrical and Electronics Engineering (SIBIRCON-2010), Irkutsk, Russia, July 11-15, 2010 (секционный).
17. Avgustinovich S.V., Mogilnykh I.Yu. On completely regular codes in Johnson graphs $J(2w+1, w)$ with covering radius 1 - Twelfth International workshop on Algebraic Combinatorial Coding Theory (ACCT-2010), September 5-11, 2010, Akademgorodok, Novosibirsk, Russia (секционный).

Приложение В. Список представленных диссертаций

№	Ф.И.О.	Искомая степень	Дата Представления	Шифр спец-ти, совет	Тема
1	Могильных Иван Юрьевич	к.ф.-м.н.	16.06.2010	01.01.09 Д 003.015.01	Совершенные 2-раскраски графов Джонсона
2	Салимов Павел Вадимович	к.ф.-м.н.	22.09.2010	01.01.09 Д 003.015.01	Рекуррентность и равномерная рекуррентность бесконечных слов и их произведений
3	Горкунов Евгений Владимирович	к.ф.-м.н.	22.09.2010	01.01.09 Д 003.015.03	Группы автоморфизмов кодов Хэмминга и их компонент