Российская академия наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

(ИМ СО РАН)

УДК 519.17, 519.72

№ госрегистрации 01201172121

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора
член-корреспондент РАН
_____________ Гончаров С.С.
«___»______________ 2011 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы

по государственному контракту № 14.740.11.0868
шифр заявки «2010-1.5-502-001-007
по теме:

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ В ПРОБЛЕМАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИОЧАСТОТ В СЕТЯХ СОТОВОЙ СВЯЗИ, ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ И КРИПТОГРАФИИ, АНАЛИЗЕ СЕТЕЙ, ОБРАБОТКЕ И ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Наименование этапа: «Постановка задач»
(промежуточный, этап № 1)

Руководитель НИР, д.ф.-м.н. ________________ А.В. Косточка

Новосибирск 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

рук. темы, в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н	__________________	Косточка А.В. (Введение, Заключение, разделы 1.1, 1.2, 2.1)
отв. исполнитель темы, зав. лаб. ИМ СО РАН, д.ф-м.н.	__________________	Бородин О.В. (Реферат, Приложения А-Б, разделы 3.1, 4)
гл.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	__________________	Кельманов А.В. (разделы 1.1, 2.2)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	__________________	Пяткин А.В. (раздел 2.1)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Кротов Д.С. (разделы 1.1, 2.2)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Глебов А.Н. (разделы 1.1, 2.6)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Добрынин А.А. (разделы 3.2, 2.5)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Мельников Л.С. (раздел 2.1)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Потапов В. Н. (раздел 2.2)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Августинович С.В. (раздел 1.1)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Токарева Н.Н. (разделы 1.2, 2.3)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	__________________	Могильных И.Ю. (раздел 2.2)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Замбалаева Д.Ж. (раздел 2.6)
аспирант ИМ СО РАН	__________________	Воробьев К.В. (раздел 2.2)
студент НГУ	__________________	Валюженич А.А. (раздел 2.3)
студент НГУ	__________________	Коломеец Н.А. (раздел 2.3)
Нормоконтролер	__________________	Кравченко С.В.

Реферат

Отчет 43 с., 1 ч., 128 источников, 2 прил.

Тема: ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ТЕОРЕТИКО-ГРАФОВЫЕ МОДЕЛИ В ПРОБЛЕМАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАДИОЧАСТОТ В СЕТЯХ СОТОВОЙ СВЯЗИ, ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ И КРИПТОГРАФИИ, АНАЛИЗЕ СЕТЕЙ, ОБРАБОТКЕ И ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

Ключевые слова: ТЕОРИЯ ГРАФОВ; РАСКРАСКА ГРАФОВ; ДЕКОМПОЗИЦИЯ ГРАФОВ; ИНВАРИАНТЫ ГРАФОВ; МИНОРЫ ГРАФОВ; ТЕОРИЯ КОДИРОВАНИЯ; ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНЫЕ КОДЫ; СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ; БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ; БЕНТ-ФУНКЦИИ; КЛАСТЕРНЫЙ АНАЛИЗ.

Основным объектом исследования являются актуальные проблемы дискретной математики и ее приложений.

Основной целью проекта является получение научных результатов мирового уровня, позволяющих укрепить позиции российской школы в области теоретических направлений в дискретной математике и информатике (теория графов и ее приложения, методы эффективного кодирования и передачи информации, защита информации, анализ данных и распознавание образов). Важной целью проведения работ является привлечение научных сотрудников, студентов и аспирантов к современным передовым методам и подходам в научно-исследовательской работе в указанных областях, что будет способствовать повышению эффективности и устойчивости российских научных коллективов.

В процессе работ использовались классические и современные методы теории графов, а также новые подходы участников проекта.

На первом этапе получены следующие результаты:

1. Определены приоритетные направления фундаментальных научных исследований по проекту, сформулированы решаемые задачи.

2. Сделан обзор научной литературы по соответствующим направлениям.

3. Получены результаты по оценкам 2-дистанционного хроматического числа графов и свойствам метрического инварианта (индекса Винера) гексагональных структур.

Степень внедрения – результаты исследований планируется использовать в образовательном процессе Новосибирского государственного университета при чтении общих и специальных курсов лекций, таких как «Теория графов», «Совершенные структуры», «Теория расписаний», «Теория графов и алгоритмы» «Анализ данных и распознавание образов».

Полученные результаты носят фундаментальный характер и, прежде всего, являются вкладом в общую математическую теорию.

Эффективность и значимость работ, помимо чисто научных результатов, заключается в подготовке молодых ученых, непосредственно участвовавших в работах наряду с признанными специалистами, и способствуют закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров.

В развитии результатов первого этапа в последующих работах этого направления следует ожидать формирование эффективного инструментария исследования проблем дискретной математики.

В результате исследований по ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, часть из которых доложена на научных форумах и подготовлена к печати.

Обозначения и сокращения

ИМ СО РАН – Институт математики Сибирского отделения им. С.Л. Соболева Российской академии наук.

НГУ – Новосибирский государственный университет.

Содержание

Введение

Выполнение НИР направлено на проведение фундаментальных исследований в области анализа теоретико-графовых моделей в проблемах анализа сетей, теории кодирования и криптографии, обработке и передачи данных. Основной целью НИР проекта является получение научных результатов мирового уровня, позволяющих укрепить позиции российской школы в области теоретических направлений в дискретной математике и информатике (теория графов и ее приложения, методы эффективного кодирования и передачи информации, защита информации, анализ данных и распознавание образов). Важной целью проведения работ является привлечение научных сотрудников, студентов и аспирантов к современным передовым методам и подходам в научно-исследовательской работе в указанных областях, что будет способствовать повышению эффективности и устойчивости российских научных коллективов.

В запланированных исследованиях по 1 этапу определяются приоритетные направления фундаментальных научных исследований в рамках проекта, делается обзор научных исследованиях в соотвестствующих областях, намечаются решаемые задачи.

1. Постановка задач

В рамках работ первого этапа НИР основной акцент сделан на определение приоритетных направлений в различных разделах дискретной математики (теория графов, теория кодирования, обработки, передача и защита информации, анализ данных и распознавание образов) и формулировку решаемых задач, сделан обзор научной литературы по соответствующим направлениям.

В отчете приведено описание работ по пунктам календарного плана в соответствии с техническим заданием.

1.1 Определение приоритетных направлений исследований

1. Раскраска графов и смежные вопросы.

Исследование структур является одной из самых востребованных областей дискретной математики, что объясняется потребностями развития вычислительной техники, информатики и сетей связи. Структура многих информационных и вычислительных систем естественно моделируются графами и их обобщениями. Язык и методы теории графов позволяют дать адекватное описание дискретных структур, сформулировать проблемы анализа их свойств, провести анализ сложности задач, и предложить эффективное точное или приближенное решение. В теоретических исследованиях проблемы распределения радиочастот в сетях связи используется следующая теоретико-графовая модель. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета (целые числа) любых двух вершин, находящихся друг от друга на расстоянии 1, отличались не менее чем на p, а вершин на расстоянии 2 – не менее чем на q. Таким образом, нахождение (p,q)-дистанционного хроматического числа позволяет минимизировать количество занятых частот. На практике $p \geq q$, поскольку с увеличением расстояния интерференция волн ослабевает. При $p = 1$ и $q = 2$ возникает задача 2-дистанционной раскраски плоских графов. Это направление теоретических исследований в теории графов в настоящее время интенсивно развивается и имеет перспективные приложения для построения и анализа структур телекоммуникационных сетей. Коллектив исполнителей проекта включает известных специалистов в области решения классических задач раскрасок графов и их обобщений. Ими существенно продвинуты методы получения верхних и нижних оценок хроматических чисел.

Теория раскрасок графов и гиперграфов играет центральную роль в дискретной математике. Раскраска относится к фундаментальной проблеме разбиения конечного множества на классы, избегая конфликты. Многие задачи информатики, декомпозиции структур, теории расписаний, теории очередей и исследования операций носят такой характер. Другой важной темой является нахождение специальных миноров в графах. Напомним, что граф H является минором графа G, если H можно получить из G путем удаления некоторых вершин и ребер и стягивания нескорых ребер. Тот факт, что H является минором графа G, говорит, что топологическая структура у G не проще, чем у H. Знаменитая Гипотеза Хадвигера утверждает, что каждый граф с хроматическим числом k содержит минор полного k-вершинного графа. Отсюда возникают задачи определения существования заданных миноров в графе и эффективных способов их обнаружения.

Одним из актуальных направлений исследований в информатике является теоретический анализ функционирования моделей передачи информации в вычислительных системах. Одна из моделей работы сети состоит в следующем. Пусть задана локальная коммуникационная сеть, состоящая из центральной ЭВМ и n каналов передачи данных (шин), соединяющих ее с периферийными объектами. Каждый из каналов за один момент времени может обслуживать лишь одну пару пользователей. Пропускные способности всех шин равны 1, т.е. для передачи t единиц информации от одного пользователя другому посредством шины потребуется t единиц времени. При передаче информации допускаются прерывания и для каждой пабы объектов заранее известен общий объем информации, который один объект должен передать другому. Объекты, находящиеся на разных шинах, могут общаться только через центральную ЭВМ. Общение шин между собой может быть организовано разными способами. Требуется так организовать общение шин дуг с другом, чтобы передать всю информацию с соблюдением всех ограничений за наименьшее время. Теоретико-графовый подход к анализу указанной модели при различных ограничениях дает возможность оценивать время передачи информации, алгоритмическую сложность нахождения точных значений. Здесь возникает новое обобщение понятия классической раскраски графов – раскраска инцидентов графа, состоящей в раскраске полудуг графа или мультиграфа. Работы в этом направлении представляются перспективными для приложений.

2. Экстремальные структуры и теория кодирования информации.

Одним из достаточно общих понятий, частным случаем которого являются многие классы кодов и функций, является понятие совершенной раскраски. Под этим понимается такая раскраска вершин гиперкуба, что цветовой состав окрестности вершины зависит только от цвета этой вершины и не зависит от ее выбора, наборы таких цветовых составов являются параметрами раскраски. Здесь же возникают и действительнозначные обобщения совершенных раскрасок – обобщенные центрированные функции. В англоязычной литературе по алгебраической теории графов совершенные раскраски известны как «equitable partitions» (этот термин не имеет удобного русского аналога), также известно много других эквивалентных названий, настолько эти объекты естественны для изучения. Вопросы существования совершенных раскрасок с различными параметрами включают в себя в качестве частных случаев вопросы существования совершенных кодов в дистанционно регулярных графах. Известными нерешенными проблемами здесь являются существование совершенных кодов в графах Джонсона и в q-ичном гиперкубе, где q не является степенью простого числа. Другим актуальным направлением являются вопросы существования некоторых видов комбинаторных дизайнов (систем Штейнера). Коллектив исполнителей проекта включает квалифицированных специалистов в этих областях, что позволит эффективно проводить исследования в этих направлениях.

3. Булевы функции с экстремальными свойствами (бент-функции)

Задача построения булевых функций, обладающих нелинейными свойствами, естественным образом возникает во многих областях дискретной математики. И часто наибольший интерес вызывают те функции, для которых эти свойства экстремальны. Такие булевы функции называются бент-функциями. Актуальность исследования бент-функций подтверждается их многочисленными теоретическими и практическими приложениями. Бент-функцию можно определить как функцию, которая крайне плохо аппроксимируется аффинными функциями. Это базовое свойство бент-функций используется в криптографии. В блочных и поточных шифрах бент-функции и их векторные аналоги способствуют предельному повышению стойкости этих шифров к линейному и дифференциальному методам криптоанализа – основным статистическим методам криптоанализа шифров. Например, в 1993 году была обнаружена существенная слабость к линейному криптоанализу блочного шифра DES. Этот шифр являлся стандартом симметричного шифрования США на протяжении почти двадцати лет (с 1980 года по 1998 год). Слабость шифра, которая привела к успешной атаке на него, заключалась в плохих криптографических свойствах его нелинейных компонент, так называемых S-блоков. Математически, S-блок – это векторная булева функция, отображающая n входных битов в m выходных битов. Именно эти булевы функции в шифре DES не отвечали необходимым криптографическим требованиям, что и послужило причиной успеха метода линейного криптоанализа. Шифр DES оказался нестойким и к дифференциальному методу криптоанализа. Причина вновь заключалась в слабых S-блоках шифра. Стойкость шифров к упомянутым методам криптоанализа достигается за счет использования бент-функций, их аналогов и обобщений при построении S-блоков. Это было сделано, например, в канадском шифре CAST и новом американском стандарте AES.

Бент-функции активно применяются в технологиях цифровой сотовой связи, а именно в технологии CDMA (Code Division Multiple Access – множественный доступ с кодовым разделением каналов), использующейся большинством поставщиков беспроводного оборудования во всем мире согласно стандартам IMT-2000 мобильной связи третьего поколения (в России – стандарты IMT-MC 450 или CDMA-450). Для предельного снижения отношения пиковой и средней мощностей сигнала (peak-to-average power ratio) в системах CDMA используются так называемые коды постоянной амплитуды (constant-amplitude codes), построение которых напрямую связано с бент-функциями. А именно, двоичный код является кодом постоянной амплитуды тогда и только тогда, когда каждое его кодовое слово – вектор значений некоторой бент-функции. Построение таких кодов большой мощности (а следовательно и соответствующих классов бент-функций) является очень актуальной задачей.

Бент-функции и их обобщения находят свое применение также в схемах аутентификации, хэш-функциях, псевдослучайных генераторах, в развивающейся квантовой теории информации. Широко исследуются различные обобщения, подклассы и надклассы бент-функций. В настоящее время нелинейные булевы функции исследуются по всему миру очень активно. Тем не менее, в этой области остается множество открытых вопросов, на исследование которых будут направлены усилия участников проекта.

4. Сложностные вопросы анализа данных и распознавания образов

Конструктивная модель какой-либо содержательной проблемы анализа данных и распознавания образов формулируется в форме задачи оптимизации подходящего критерия или функционала (максимума правдоподобия, минимума суммы квадратов уклонений и т.п.), адекватно отражающего исходную проблему. Оптимизация этого критерия в комбинации с многообразием объективно существующих структур (моделей) анализируемых данных и распознаваемых объектов порождает разнообразие редуцированных экстремальных задач, к которым сводится поиск оптимального решения. При этом сходные в содержательном плане проблемы сводятся к отличающимся экстремальным задачам. Зачастую простейшие и давно известные содержательные проблемы анализа структурированных данных и распознавания образов, типичные для актуальных приложений, сводятся к решению экстремальных задач, статус сложности которых неизвестен. Знание сложности решаемой задачи имеет решающее значение для возможности построения эффективных алгоритмов обработки структур и данных. Одной из важных проблем в этой области является определение сложности задач, связанных с поиском подмножеств векторов.

5. Метрические инварианты графов

Инвариантом графа называется функция на графах, принимающая одинаковые значения на изоморфных графах. Значения инварианта зависят только от структуры графа и не могут зависеть, например, от нумерации вершин графа, от изображения графа на плоскости и др. Если графы являются неизоморфными, то инвариант может принимать на них как одинаковые, так и разные значения. Метрические инварианты графов, определяемые как функции от расстояний между вершинами графа, находят многочисленные приложения в областях, для которых изучаемые объекты или отношения между ними моделируются графами. В качестве моделей структуры коммуникационных сетей традиционно используются неориентированные или ориентированные графы, а также гиперграфы. Для приближенной характеризации «структурной сложности» часто используются интегральные метрические инварианты, которые, как правило, отражают структуру описываемого объекта (разветвленность, компактность) и часто рассматриваются как структурные дескрипторы. В ряде областей успех применения инвариантов для характеризации, сравнения и упорядочения объектов основан на том, что соответствующие графы с «похожей» структурой (и с близкими значениями инварианта как мерой подобия) соответствуют объектам со сходными свойствами. Одним из самых известных и важных для приложений инвариантом является так называемый индекс Винера, определяемый как сумма расстояний между всеми парами вершин в графе G, где под расстоянием понимается длина кратчайшей цепи, соединяющей вершины в G. При изучении математических свойств индекса Винера и других инвариантов основное внимание уделяется следующим взаимосвязанным проблемам. Как инвариант зависит от структуры графа? Как эффективно вычислить инвариант? Как изменяется инвариант при модификациях структуры графа? Какую дискриминирующую силу имеет инвариант на классах графов (т.е. способность различать неизоморфные графы)? В рамках проекта предполагается изучить свойства интегральных инвариантов для некоторых классов графов, имеющих древовидную, гексагональную и другие типы структур.

6. Оптимизационные задачи на графах

Среди наиболее известных и активно изучаемых дискретных оптимизационных проблем на графах и сетях является классическая задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem – TSR), состоящая в нахождении обхода всех узлов сети или вершин взвешенного графа с наименьшими (наибольшими) затратами. В настоящее время актуальными являются исследования обобщения классической задачи коммивояжера –задача об m коммивояжерах (m-Peripatetic Salesman Problem – m-PSP), состоящая в поиске в полном взвешенном неориентированном графе m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным или максимальным суммарным весом ребер. Известно, что задача о существовании двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе NP-полна, что влечет NP-трудность задачи 2-PSP как на минимум, так и на максимум даже в случае, если веса ребер принимают лишь значения 1 и 2. Ввиду NP-трудности известных модификаций задач TSP и m-PSP большинство работ, посвященных их исследованию, связано с анализом полиномиально разрешимых случаев, а также с построением приближенных эвристических алгоритмов и полиномиальных алгоритмов (как детерминированных так и рандомизированных) с гарантированными оценками точности для полученного решения. В ходе выполнения проекта предполагается провести теоретические исследования в этом важном для приложений направлении.

Для выполнения работ по проекту определены следующие приоритетные направления научных исследований: раскраска графов и смежные вопросы дискретной математики, экстремальные структуры и теория кодирования информации, булевы функции с экстремальными свойствами (бент-функции), сложностные вопросы анализа данных и распознавания образов, метрические инварианты графов, оптимизационные задачи на графах.

1.2 Решаемые задачи

На основе выбора приоритетных направлений исследований и анализа соответствующих проблем предполагается решение следующих задач, их обобщений и модификаций:

1) Получить новые оценки хроматического числа графов как в классических постановках задач, так и в их обобщениях, в частности, для 2-дистанционной раскраски и уравновешенной раскраски графов.

2) Исследовать проблему существования заданных миноров в графах с предписанными свойствами. В частности, изучить возможности построение новых алгоритмов нахождения миноров полных графов в графах с ограниченным числом независимости.

3) Изучить свойства различных классов кодов. В частности, получить представления равномерно упакованных кодов через гармонические функции на n-кубе в терминах преобразования Фурье. Провести анализ проблемы классификации дистанционно регулярных кодов в бесконечной квадратной решетке.

4) Исследовать свойства экстремальных булевых функций. В частности, исследовать нижние оценки числа бент-функций, которые могут быть получены с помощью итеративных конструкций.

5) Исследовать задачу оценки числа итеративных бент-функций и их связь с проблемой декомпозиции булевых функций в сумму двух бент-функций.

6) Изучить взаимосвязи между бент-функциями и двоичными кодами, а также отношений между различными обобщениями бент-функций такими, как q-значные бент-функции, обобщенные бент-функции и др.

7) Исследовать новых приложений бент-функций в криптографии, в теории хэш-функций.

8) Исследовать свойства интегральных метрических инвариантов графов (индекса Винера и подобных). В частности, изучить возможность восстановление индекса Винера через расстояния между висячими вершинами ациклических структур.

9) Систематизировать и сделать обзор свойств индекса Винера для реберных графов.

10) Изучить коллективные свойства индекса Винера для графов гексагональных систем разных классов.

11) Получить результаты по анализу алгоритмической сложности дискретных экстремальных задач, к которым сводятся некоторые актуальные проблемы анализа данных и распознавания образов.

12) Разработать алгоритмы с гарантированными оценками точности для решения некоторых актуальных задач кластерного анализа и поиска подмножеств.

13) Исследовать задачу двух коммивояжеров с метрикой разного типа. Разработать приближенные алгоритмы с гарантированными оценками оптимальности решения.

2. Обзор научной литературы по выбранным направлениям исследований

2.1. Раскраска графов и смежные вопросы

Теория раскрасок графов и гиперграфов играет центральную роль в дискретной математике. Она имеет приложения во многих областях. Раскраска относится к фундаментальной проблеме разбиения конечного множества на классы, избегая конфликты. Многие задачи теории расписаний, теории очередей и исследования операций носят такой характер. k-Раскраска (гипер)графа H – это функция, которая сопоставляет каждой вершине один из k цветов. Ряд членов коллектива проекта активно работает в этой области. В частности, ими опубликован цикл работ по этой тематике [10-19].

Дистанционная раскраска графов тесно связана с цикловой и другими видами раскрасок, и прогресс по ней должен опираться на знание строения плоских графов. В этих вопросах, да и вообще в области раскрасок, группа участников проекта является одной из сильнейших в мире. Ими сделаны оценки дистанционного хроматического числа для различных классов графов [1-9], в том числе для предписанной раскраски. В частности, были получены верхние точные оценки для циклового хроматического числа: $9D/5$ (D – максимальная степень вершин графа) для произвольных плоских графов и D+1 – для 3-многогранников, содержащих хотя бы одну достаточно большую грань (тогда как в гипотезе Пламмера и Тофта 1987 г. для многогранников шла речь лишь об оценке D+2). Техника, разработанная для цикловых раскрасок, хорошо подходит и для более трудной задачи 2-дистанционной раскраски и ее обобщений.

В ряде приложений раскраски как задачи об оптимальных разбиениях есть дополнительное ограничение, чтобы цветовые классы были не слишком большие или примерно одного размера. Такие задачи возникают в задачах взаимно исключающих расписаний [20, 21], расписаниях систем коммуникаций [22], планировании строительства [23] и круглосуточного планирования [24]. Одна из моделей с такими ограничениями – это уравновешенная раскраска, т.е. правильная раскраска, где размеры цветовых классов отличаются не более чем на 1. Такие раскраски также использовались для оценок хвостов распределений сумм случайных величин и вложений одних гиперграфов в другие.

Интересной задачей является задача о назначении радио и телевизионных частот в сетях связи. Для решения этой задачи предложена модель коммуникационной сети в виде неплоского графа, вершины которого окрашиваются в упорядоченное множество целочисленных цветов. При этом сами цвета могут интерпретироваться как значения частот. В такой модели исходную задачу о минимизации спектра используемых частот можно переформулировать как задачу о минимизации числа цветов при некоторой специальной обобщенной радио раскраске вершин графа. Характерным свойством такой раскраски является ее периодичность, что при решении данной оптимизационной задачи (и других аналогичных задач) позволяет получить полезные для практики результаты.

Интересным типом раскраски, возникающей в приложениях (кодирование) является инъективная раскраска. Она похожа на 2-дистанционную, только соседние вершины можно красить в одинаковый цвет. Недавние результаты О.В. Бородина в этой области (Discrete Math. и Сиб. мат. журнал, 2011 г.) перекрывают многие зарубежные достижения.

Другой важной темой является нахождение специальных миноров в графах. Напомним, что граф H является минором графа G, если H можно получить из G путем удаления некоторых вершин и ребер и стягивания некоторых ребер. Тот факт, что H является минором графа G, говорит, что топологическая структура у G не проще, чем у H. Знаменитая Гипотеза Хадвигера утверждает, что каждый граф с хроматическим числом k содержит минор полного k-вершинного графа. Этой теме посвящены работы [25-28] участников проекта.

Интересная теоретическая модель функционирования моделей передачи информации в вычислительных системах рассмотрена в работах [29, 35]. Локальная коммуникационная сеть состоит из центральной ЭВМ и n каналов передачи данных (шин), соединяющих ее с периферийными объектами. Каждый из каналов за один момент времени может обслуживать лишь одну пару пользователей, причем пропускные способности всех шин равны 1, т.е. для передачи t единиц информации от одного пользователя другому посредством шины потребуется t единиц времени. При передаче информации допускаются прерывания и для каждой пары объектов заранее известен общий объем информации, который один объект должен передать другому. Объекты, находящиеся на разных шинах, могут общаться только через центральную ЭВМ. Требуется так организовать общение шин дуг с другом, чтобы передать всю информацию с соблюдением всех ограничений за наименьшее время. Теоретико-графовый подход к анализу указанной модели при различных ограничениях дает возможность оценивать время передачи информации, алгоритмическую сложность нахождения точных значений. Это приводит к обобщению понятия классической раскраски графов – раскраски инциденторов графа, состоящей в раскраске полудуг графа или мультиграфа. Теория инциденторной раскраски графов фактически была создана и развита настоящим коллективом исполнителей (А.В. Пяткин, Л.С. Мельников) и украинскими исследователями (В.Г. Визинг). Ими были получены все значимые результаты по верхним и нижним оценкам инциденторного хроматического числа для различных классов графов, для графов с заданными ограничениями, разработаны алгориты нахождения инциденторной раскраски для основных классов графов [29-44].

2.2. Экстремальные структуры и теория кодирования информации.

Одной из наиболее общих проблем теории кодирования и дискретной математики является проблема существования объектов с экстремальными свойствами. Вопросы существования таких структур как совершенные, полностью регулярные и равномерно упакованные коды, блок-схемы и совершенные раскраски различных графов уже на протяжении многих лет притягивают внимание отечественных и зарубежных математиков. При этом одним из ключевых моментов исследований обычно является установление некоторых свойств этих объектов, влекущих сильные необходимые условия их существования.

Первая бесконечная серия совершенных блоковых кодов была построена Р. Хэммингом в 1950 году [45]. Спустя более чем 20 лет В.А. Зиновьев и В. К. Леонтьев [46,47] и независимо Э. Титвайнен [48] доказали, что кодов с параметрами, отличными от параметров кода Хэмминга, за исключением двоичного и троичного кодов Голея, над полями Галуа не существует. Ф. Дельсарт в [49] ввел понятие полностью регулярных кодов в дистанционно-регулярных графах, то есть класса кодов, включающего в себя совершенные коды и обладающих многими схожими с ними свойствами. Проблема существования полностью регулярных кодов в n-кубе является по-прежнему нерешенной, известны не все параметры, для которых такие коды существуют. На сегодняшний день выяснено, что класс полностью регулярных кодов в n-кубе содержит равномерно упакованные в узком смысле коды, введенные Н. В. Семаковым, В. А. Зиновьевым и Г. В. Зайцевым [50]. Этот класс включает совершенные и укороченные совершенные коды, выколотые коды Препараты, некоторые классы кодов БЧХ и выколотых кодов Рида-Маллера. Полное описание всех равномерно упакованных кодов было сделано Х. К. А. ван Тилборгом в [51].

Проблема существования совершенных кодов в схеме Джонсона оказалась сложнее, чем аналогичная проблема в схеме Хэмминга. В работе [52] Дельсарт выдвинул гипотезу, что нетривиальных совершенных кодов в графе Джонсона не существует. Усилия целого ряда авторов так и не привели ни к ее доказательству, ни к ее опровержению. Один из лучших на сегодняшний день результатов был получен Д. Гордоном в 2006 году в работе [53]. Используя компьютер, он доказал, что не существует 1-совершенных кодов в графах Джонсона $J(n,w)$ при $n < 2^{250}$.

Раскраска булева n-куба в два цвета 0 и 1 называется совершенной, если цветовой состав шара радиуса 1 зависит только от цвета центра шара. Совершенные 2-раскраски являются обобщением 1-совер-шенных кодов. Заметим, что гипотеза Дельсарта не может быть обобщена на совершенные 2-раскраски графов Джонсона. У.Мартин в работе [54] заметил, что нетривиальную совершенную 2-раскраску графа $J(n,w)$ можно получить, покрасив блоки произвольной k-кратной $(w-1)$-схемы (при этом подразумевается, что все блоки схемы различны) в один цвет, а оставшиеся вершины $J(n,w)$ в другой цвет. Проблема существования таких схем при $w=3$ была решена М. Дегоном в 1983 [55]; при $w=4$ для однократного случая (системы четверок Штейнера) Х. Ханани в работе [56], для двукратного случая А. Хартманом и К. Т. Фелпсом в [57], для трехкратного случая К. Т. Фелпсом, Д. Р. Стинсоном и С. А. Ванстоуном в работе [58]. Проблема существования таких схем для параметров, отличных от вышеперечисленных, за исключением нескольких спорадических случаев, является открытой.

В работе [59] исследуется совершенные раскраски в 2 цвета некоторых бесконечных серий транзитивных кубических графов. Раскраска вершин графа G называется совершенной, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают. Именно, для всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18, получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок. Изучение совершенных раскрасок обычно начинается со случая двух цветов. Этот случай представляется самым простым, но он и наиболее интересен, поскольку обладает большим потенциалом обобщения. Как правило, рассматриваемые графы однородны и вершинно транзитивны. К редким исключениям следует отнести работу [60], в которых неоднородность графа является существенным условием. Исторически сложилось, что по данной теме исследователи уделяли внимание классам регулярных графов достаточно большой степени [61, 62]. Случай степени 3 оказался незаслуженно пропущен, возможно, из-за своей кажущейся простоты. Вместе с тем транзитивных кубических графов очень много, что может быть продемонстрировано на примере списка диаграмм таких графов с числом вершин, не превосходящих 18 [63]. Для удобства совершенные раскраски в 2 цвета будем называть совершенными 2-раскрасками, причем цвет 1 будем называть белым, а цвет 2 – черным.

Матрица параметров совершенной 2-раскраски является квадратной и определяется четырьмя параметрами a, b, c и d. Параметры a и d называются внутренними степенями белого и черного цветов соответственно. Эта терминология делает наглядной смежность каждой белой вершины с a вершинами одноименного ей цвета и смежность каждой черной вершины с d вершинами одноименного ей цвета в совершенной 2-раскраске графа. Аналогично, b и c называются внешними степенями белого и черного цветов соответственно. Две матрицы совершенных раскрасок называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой перестановкой строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов. Для того чтобы не рассматривать эквивалентные матрицы, мы ограничились рассмотрением матриц параметров совершенных 2-раскрасок, характеристический вектор которых удовлетворяет условию $b > c$.

Основным инструментом исследования совершенных 2-раскрасок графа является понятие локально жесткого фрагмента. Подмножество вершин графа G называется локально жестким фрагментом, если всякая совершенная раскраска G однозначно восстанавливается по своему сужению на этот фрагмент. Для тех бесконечных серий кубических графов, которые пришлось рассмотреть, минимальные локально жесткие фрагменты содержали от 4 до 6 вершин, что позволило значительно сократить перебор вариантов.

Хорошо известно, что всякой совершенной раскраске графа можно поставить в соответствие ряд собственных функций графа, принимающих одинаковые значения на вершинах одного цвета. В случае двуцветных раскрасок такое соответствие вполне однозначно. Именно, всякая собственная функция графа, принимающая ровно два значения, задает двуцветную совершенную раскраску (или булеву функцию, если речь идет о гиперкубе). Одними из наиболее информативных инвариантов булевой функции являются ее коэффициенты Фурье и коэффициенты полинома Жигалкина [64,65]. Из интегративных инвариантов стоит упомянуть порядок корреляционной иммунности, алгебраическую степень и плотность функции.

Булева функция называется корреляционно-иммунной порядка m, если её единицы равномерно распределены по граням размерности $n - m$. Плотностью функции называется отношение числа ее единиц к общему числу значений. Известное неравенство Биербрауэра-Фридмана [66,67] связывает значение корреляционной иммунности булевой функции с ее плотностью. Доказано, что в случае достижения равенства в упомянутой оценке соответствующая функция задает совершенную раскраску гиперкуба.

В [68] перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки. Раскраска вершин графа в цвета от 1 до k называется совершенной, если для всех не обязательно различных $i, j = 1,2,\ldots,k$ однозначно определено целое $A_{i,j}$, равное числу вершин цвета j в окружении каждой вершины цвета i. Матрица A называется матрицей параметров соответствующей раскраски. Совершенная раскраска называется дистанционно регулярной, если ее матрица параметров приводима к тридиагональному виду. Фактически это означает, что цвета в раскраске можно упорядочить так, что каждый из них будет видеть лишь соседние цвета. Понятие дистанционно регулярной раскраски напрямую связано с понятием вполне регулярного кода в графе. В нашей терминологии вершины и первого и последнего цветов дистанционно регулярных раскрасок являются вполне регулярными кодами. Таким образом, из доказанного вытекает полная характеризация параметров всех таких кодов в Z^2.

Совершенная раскраска вершин графа характеризуется тем свойством, что все вершины одинакового цвета имеют одинаковый цветовой состав окружения (строгие определения см. ниже). Понятие дистанционно регулярной совершенной раскраски (в другой терминологии – дистанционно регулярное расслоение графа) является весьма полезным инструментом при изучении инвариантных свойств (скажем, весовых распределений) различных совершенных структур. Восходящее к Дельсарту, оно неоднократно переоткрывалось и подвергалось разностороннему изучению. Достаточно сказать, что в дистанционно регулярных графах дистанционное расслоение множества его вершин относительно любой вершины является совершенной раскраской. При этом параметры раскраски от выбора вершины не зависят.

Всякая совершенная раскраска в 2 цвета является дистанционно регулярной. Со случая двух цветов обычно и начинается исследование тех или иных классов графов. Для бесконечной квадратной решетки полное описание всех совершенных 2-раскрасок получено в [68], параметры трехцветных раскрасок описаны в [69].

Значительное продвижение в описании параметров совершенных 2-раскрасок графов Кели бесконечной циклической группы имеется в [70]. Для плоских триангуляций частичное исследование проведено в [71]. Случай гиперкуба, половинного гиперкуба и графа Джонсона рассматривался ранее. Также в данной области есть ряд результатов, касающихся нескольких бесконечных серий транзитивных кубических графов.

2.3. Булевы функции с экстремальными свойствами (бент-функции)

Мера нелинейности является важной характеристикой булевой функции в криптографии. Линейность и близкие к ней свойства часто свидетельствуют о простой (в определенном смысле) структуре этой функции и, как правило, представляют собой богатый источник информации о многих других ее свойствах. Задача построения булевых функций, обладающих нелинейными свойствами, естественным образом возникает во многих областях дискретной математики. И часто наибольший интерес вызывают те функции, для которых эти свойства экстремальны. Такие булевы функции называются бент-функциями. Впервые они начали исследоваться в 60-х годах XX века в связи с криптографическими приложениями. Актуальность исследования бент-функций подтверждается их многочисленными теоретическими и практическими приложениями. Бент-функцию можно определить как функцию, которая крайне плохо аппроксимируется аффинными функциями. Это базовое свойство бент-функций используется в криптографии. В блочных и поточных шифрах бент-функции и их векторные аналоги способствуют предельному повышению стойкости этих шифров к линейному и дифференциальному методам криптоанализа – основным статистическим методам криптоанализа шифров. Например, в 1993 году была обнаружена существенная слабость к линейному криптоанализу блочного шифра DES. Этот шифр являлся стандартом симметричного шифрования США на протяжении почти двадцати лет (с 1980 года по 1998 год). Слабость шифра, которая привела к успешной атаке на него, заключалась в плохих криптографических свойствах его нелинейных компонент, так называемых S-блоков. Математически, S-блок – это векторная булева функция, отображающая n входных битов в m выходных битов. Именно эти булевы функции в шифре DES не отвечали необходимым криптографическим требованиям, что и послужило причиной успеха метода линейного криптоанализа. Шифр DES оказался нестойким и к дифференциальному методу криптоанализа. Причина вновь заключалась в слабых S-блоках шифра. Стойкость шифров к упомянутым методам криптоанализа достигается за счет использования бент-функций, их аналогов и обобщений при построении S-блоков. Это было сделано, например, в канадском шифре CAST и новом американском стандарте AES.

Бент-функции активно применяются в технологиях цифровой сотовой связи, а именно в технологии CDMA (Code Division Multiple Access – множественный доступ с кодовым разделением каналов), использующейся большинством поставщиков беспроводного оборудования во всем мире согласно стандартам IMT-2000 мобильной связи третьего поколения (в России – стандарты IMT-MC 450 или CDMA-450). Для предельного снижения отношения пиковой и средней мощностей сигнала (peak-to-average power ratio) в системах CDMA используются так называемые коды постоянной амплитуды (constant-amplitude codes), построение которых напрямую связано с бент-функциями. А именно, двоичный код является кодом постоянной амплитуды тогда и только тогда, когда каждое его кодовое слово – вектор значений некоторой бент-функции. Построение таких кодов большой мощности (а следовательно и соответствующих классов бент-функций) является очень актуальной задачей.

Бент-функции и их обобщения находят свое применение также в схемах аутентификации, хэш-функциях, псевдослучайных генераторах, в развивающейся квантовой теории информации. Широко исследуются различные обобщения, подклассы и надклассы бент-функций. В монографии [72] приводится подробный обзор основных результатов в области бент-функций; рассматриваются их теоретические и практические приложения; приводится систематический обзор обобщений бент-функций. Устанавливается группа автоморфизмов множества бент-функций. Предлагается новое обобщение бент-функций, позволяющее поэтапно усиливать их нелинейные свойства.

В работе [73] показано, что каждое изометричное отображение множества булевых функций от n переменных в себя, оставляющее класс бент-функций на месте, является комбинацией аффинного преобразования координат и сдвига на аффинную функцию. Доказано, что аффинные функции – это в точности все те булевы функции, которые удалены от класса бент-функций на максимально возможное расстояние.

В [74] исследуются нижние оценки числа бент-функций, которые могут быть получены с помощью итеративных конструкций, а именно с помощью конструкции A.Canteaut и P.Charpin (2003). Задача оценки числа итеративных бент-функций тесно связана с проблемой декомпозиции булевых функций в сумму двух бент-функций. В работе приводится нижняя оценка числа итеративных бент-функций, которая предполагается асимптотически точной. Подсчет числа итеративных бент-функций от малого числа переменных проводится при использовании методов Монте-Карло.

2.4. Сложностные вопросы анализа данных и распознавания образов

Широко распространенным подходом к решению задач анализа данных и распознавания образов является подход, который состоит в разбиении задачи на небольшое число подзадач, которые решаются либо известными оптимизационными малотрудоемкими алгоритмами, либо быстрыми эвристическими процедурами. При этом задача в целом, как оптимизационная проблема, как правило, не формулируется, какие-либо доказуемые оценки точности ее решения не устанавливаются, а класс допустимых входов не описываются формально (математически). Подтверждение работоспособности алгоритмов и компьютерных технологий получают в численных экспериментах и на примерах решения конкретных прикладных задач, т.е. для узкого класса реально имеющихся входных данных.

Этот подход отчетливо просматривается в тысячах отечественных и зарубежных публикаций и реализован в многочисленных существующих информационных технологиях, системах анализа данных и распознавания образов (см., например, [75]). Во многих случаях применение этого подхода приводит к результату, который узкими специалистами-прикладниками оценивается как приемлемый для использования на практике. Однако, очевидно, что этот подход в общем случае не гарантирует оптимальность решения задачи в целом даже в случае оптимальности решений, получаемых на каждом из этапов или для каждой из подзадач.

Результат оптимизации, найденный по условным экстремумам, вычисленным на последовательно выполняемых этапах обработки данных, в общем случае может не совпадать с глобальным экстремумом. Лишь в последние 15-20 лет сложилась устойчивая мировая тенденция, направленная, во-первых, на изучение комбинаторной сложности специфических (как правило, труднорешаемых) экстремальных задач, к которым сводятся типовые проблемы анализа данных и распознавания образов, и, во-вторых, на построение эффективных алгоритмов с гарантированными оценками точности для решения этих задач. Это направление исследований в последние годы оформилось в виде области, которую можно определить как «экстремальные задачи анализа данных и распознавания образов». Коллектив исполнителей был у истоков этого направления и имеет ряд широко известных приоритетных теоретических результатов, полученных в его рамках. Полученные результаты соответствуют мировому уровню достижений и обладают достаточным набором оригинальных элементов, опережая отечественные и зарубежные разработки.

Проблемы кластерного анализа исследуются более полувека. Из недавно опубликованного обзора [75] видно, что принципы, критерии, модели, задачи, методы и алгоритмы кластеризации рассматривались в тысячах публикаций. При этом скорость разработки алгоритмов (как правило, эвристических и не имеющих теоретических гарантий по точности) для решения разнообразных прикладных задач значительно опередила скорость изучения алгоритмической сложности редуцированных оптимизационных задач, к которым сводятся прикладные проблемы. Статус сложности многих редуцированных задач до настоящего времени остается невыясненным, хотя интуитивно и гипотетически они считаются NP-трудными. Между тем, выяснение сложностного статуса позволяет решить вопросы о существовании, как точного полиномиального алгоритма решения редуцированной экстремальной задачи, так и эффективного алгоритма, гарантирующего оптимальность решения соответствующей прикладной проблемы. Поэтому изучение алгоритмической сложности задач кластерного анализа и их систематизация является важным направлением исследований.

В этой краткой работе анализируется алгоритмическая сложность нескольких похожих по постановке задач кластерного анализа. Мотивацией исследований послужил тот факт, что статус сложности этих задач не был известен. В постановочном плане они близки к хорошо известной NP-полной задаче MSSC (Minimum-Sum-of-Squares Clustering) – кластеризации множества векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров [77-79]. В некоторых публикациях [75, 78, 80] эта же задача фигурирует под названием k-Means. Рассматриваемые задачи по постановке близки также к тем задачам кластерного анализа, NP-полнота которых была установлена в [81-84]. Для пояснения отличий задач, исследуемых в настоящей работе, от задач, изученных ранее в [76-84], рассмотрим одну из возможных содержательных трактовок анализируемой проблемы.

Имеется совокупность (таблица), включающая несколько результатов измерения набора (вектора) каких-либо характеристик для элементов из некоторого множества материальных объектов. Каждый объект может находиться в двух состояниях: активном и пассивном. В пассивном состоянии значения всех измеряемых характеристик из набора равны нулю, а в активном – значение хотя бы одной характеристики не равно нулю. Для активных состояний одной части объектов из множества известен алфавит эталонных наборов значений всех характеристик. Для активных состояний другой части объектов этого множества аналогичные данные отсутствуют (неизвестны). В каждом результате измерения имеется ошибка, причем соответствие между объектом и результатом измерения его характеристик неизвестно. Требуется, используя критерий минимума суммы квадратов расстояний, разбить совокупность наборов на три семейства непересекающихся подмножеств так, что: 1) первое семейство состоит из единственного множества, содержащего наборы, соответствующие пассивному состоянию всех объектов, 2) второе семейство состоит из подмножеств, каждое из которых содержит наборы, соответствующие активному состоянию одного объекта, имеющего известные характеристики, 3) третье семейство состоит из подмножеств, каждое из которых содержит наборы, соответствующие активному состоянию одного объекта с неизвестными характеристиками. Одновременно с разбиением требуется оценить неизвестные характеристики для части объектов в активном состоянии, учитывая, что данные содержат ошибку измерения. Судя по обзору [75], сформулированная содержательная проблема характерна и актуальна для широкого спектра приложений, связанных с анализом данных и распознаванием образов. Отличие рассматриваемых ниже задач, к которым сводится сформулированная проблема, от близких аналогов состоит в следующем. Задача MSSC [78-82] ориентирована на случай, когда анализируемая совокупность наборов (данных) состоит лишь из третьего семейства. В задачах, изучавшихся в [82, 83], предполагалось, что заданная на входе совокупность наборов состоит только из первого и третьего семейства. В [84] анализировалась еще более простая задача, когда во множестве наборов требовалось найти всего один многоэлементный кластер или подмножество фиксированной мощности в предположении, что входная совокупность наборов включает, во-первых, соответствующее подмножество результатов измерения только для одного объекта, который может находиться лишь в активном состоянии, а во-вторых, эта совокупность содержит произвольные и не «похожие» между собой наборы.

2.5. Метрические инварианты графов

Инвариантом f графа называется функция на графах, принимающая одинаковые значения на изоморфных графах, т.е. если для графов G и H выполняется $G \cong H$, то $f(G)=f(H)$. Значения инварианта зависят только от структуры графа и не могут зависеть, например, от нумерации вершин графа, от изображения графа на плоскости и др. Если графы являются неизоморфными, то инвариант может принимать на них как одинаковые, так и разные значения. Множество попарно неизоморфных графов называется множеством вырождения инварианта, если его значения на этих графах совпадают.

Метрические инварианты графов, определяемые как функции от расстояний между вершинами графа, находят многочисленные приложения в областях, для которых изучаемые объекты или отношения между ними моделируются графами. В качестве моделей структуры коммуникационных сетей традиционно используются неориентированные или ориентированные графы, а также гиперграфы. Интегральные метрические инварианты, как правило, отражают структуру описываемого объекта (разветвленность, компактность) и часто рассматриваются как структурные дескрипторы. Одним из известных и важных для приложений инвариантом является индекс Винера, определяемый как сумма расстояний между всеми парами вершин в графе G, т.е. $W(G) = \sum_{\{u,v\}\subseteq V(G)} d(u,v)$, где под расстоянием $d(u,v)$ между вершинами u и v понимается длина кратчайшей по числу ребер цепи, соединяющей вершины u и v в связном неориентированном графе G без петель и кратных ребер. Этот инвариант используется для характеризации компактности структуры графа. Хотя, по-видимому, впервые этот инвариант был введен еще в 1947 г. в работе [85], интенсивные теоретико-графовые исследования индекса Винера были инициированы в 1976 г. работой [86]. Инвариант W известен также под названиями «дистанция графа» [86], «трансмиссия» [87], «сумма всех расстояний» графа [88]. Ряд работ посвящен близкому инварианту, называемому «средняя дистанция», равному $W(G)/ p(p–1)$ для p-вершинного графа [89,90]. В [91] средняя дистанция используется для характеризации структуры коммуникационных сетей.

При изучении математических свойств индекса Винера (и других инвариантов) основное внимание уделяется следующим взаимосвязанным проблемам: как инвариант зависит от структуры графа? Как эффективно вычислить инвариант, в том числе без применения компьютера? Как изменяется инвариант при разрушениях структуры графа? Как правило, исследования индекса Винера и средней дистанции посвящены нахождению нижних и верхних оценок инвариантов в терминах структурных параметров графов или других известных инвариантов. Такие оценки были получены для произвольных графов, вершинно и реберно 2-связных графов, k-хроматических графов и блоков [88,92,93]. Известны оценки средней дистанции графа через степени вершин, диаметр и собственные числа, числа независимости и доминирования графа [89, 94-96]. В ряде работ оценивалось изменение инварианта при операциях над графами (удаление вершин и т. п.) [87, 98, 99]. При рассмотрении специфических классов графов, имеющих значение для приложений, удается более детально изучить свойства величины W. Особый интерес представляет нахождение легко проверяемых условий, обеспечивающих равенство индексов Винера. Это можно сделать на основе вычислительных формул для W включающих простые структурные параметры графа.

Точные формулы для индекса Винера деревьев различных типов приводятся, например, в [98, 99]. Методы получения таких выражений были развиты в [100-103]. Один из первых методов, предложенных для вычисления индекса Винера, основан на использовании рекуррентных соотношений. Дистанция вершины $d_G(v)$ в графе G определяется как сумма расстояний между вершиной v и остальными вершинами графа G, т.е. $d_G(v) = \sum_{u \in V(G)} d(v,u)$. Обозначим через $G–v$ граф, полученный удалением из графа G вершины v и всех инцидентных ей ребер. Пусть вершина v является висячей в дереве T, а вершина u смежна с v. Пусть множество всех пар вершин дерева T разбито на две группы, в первой из которых каждая пара содержит вершину v, а любая пара из другой группы не содержит v. Тогда сумма расстояний между вершинами в парах второй группы есть индекс Винера дерева $T–v$. Если $x \in V(T–v)$, то из равенства $d_T(v,x) = d_{T-v}(u,x) + 1$ следует, что сумма расстояний между вершинами в парах первого типа будет равна значению $p(T) – 1 + d_{T-v}(u)$. Поэтому $W(T) = W(T–v) + d_{T-v}(u) + p(T–v)$, т.е. для вычисления $W(T)$ нужно знать индекс Винера и дистанцию вершины в некотором поддереве дерева T. Обобщая эту формулу, Е. Кэнфилд и др. предложили способ рекуррентного вычисления индекса Винера произвольного дерева [101]. Пусть $T_1, T_2,\ldots,T_m$ есть лес из $m > 1$ деревьев, в дереве T_i содержится p_i вершин и $w_i \in V(T_i)$, $i = 1,2,\ldots,m$. Любое дерево может быть представлено в виде соединения вершины u с каждой из вершин w_1, w_2 ,…, w_p. Тогда для p-вершинного дерева T представленного в указанном выше виде выполняется равенство $W(T) = \sum_{i=1}^{m} [W(T_i) + (p - p_i) d_{Ti}(w_i) - p_i^2] + p(p-1)$. Применение этой формулы требует вычисления расстояний между вершинами дерева и с практической точки зрения уступает по удобству другим изложенным ниже методам. Известны также нерекуррентные формулы для нахождения индекса Винера, включающие дистанции вершин. В [104] получена формула, показывающая как индекс Винера зависит от отклонения в дистанциях вершин ребер дерева. Именно, $W(T)=\frac{1}{2}\left(p^2(p-1)-\sum[d_T(v)-d_T(u)]^2\right)$.

Определение индекса Винера можно рассматривать как полусумму величин $d_T(v)$, взятых с единичным весом. В работе [104] также показано, как можно вычислять индекс Винера, если в качестве веса выбрана локальная характеристика вершины, а именно ее степень. Для p-вершинного дерева T выполняется: $W(T)=\frac{1}{4}\left(p^2(p-1)+\sum_{v\in V(T)}\deg(v)d(v)\right)$.

Более простой и эффективный способ вычисления инварианта W предложен в [85]. Он основан на том, что величина W равна числу ребер в цепях, соединяющих все пары вершин в дереве. Вместо подсчета ребер во всех цепях можно подсчитать количество цепей, проходящих через данное ребро, и затем суммировать эти величины для всех ребер. Так как каждая пара вершин дерева соединена единственной цепью, то результат будет равен индексу Винера. Обозначим через $n_u(e)$ и $n_v(e)$ количества вершин дерева T в двух компонентах связности, образующихся после удаления из T ребра $e = (u,v)$. Тогда для произвольного дерева Т выполняется $W(T)=\sum_{(u,v)\in E(T)}n_u(e)n_v(e)$. Это утверждение, полученное Г. Винером в 1947 г., содержало первый вычислительный метод для нахождения W. Несмотря на то, что его работа часто цитировалась в литературе, эта формула была забыта до середины 80-х г.

Естественными характеристиками структуры дерева являются ветвления и линейные сегменты. Ветвления в дереве порождаются вершинами со степенью более 2, которые называются вершинами ветвления. Очевидно, число вершин ветвления в p-вершинном дереве не превышает $(p – 2)/2$. Сегментом S дерева T называется простая цепь в T, концевые вершины которой могут быть вершинами ветвления и висячими вершинами дерева, а все внутренние вершины цепи имеют в T степень 2. Любая висячая вершина дерева всегда будут концевой для некоторого висячего сегмента. Длину сегмента S (число его ребер) обозначим через l_S. Эти структурные характеристики по-разному влияют на индекс Винера. Увеличение количества и длин сегментов в дереве приводит, вообще говоря, к увеличению W, в то время как возрастание числа вершин ветвления и их степеней влечет уменьшение W.

Формула Винера допускает простое обобщение, если вместо ребер рассматривать сегменты графа. Пусть величины $n_u(S)$ и $n_v(S)$ равны количествам вершин дерева T в двух компонентах связности, образующихся после удаления из дерева сегмента S, т. е. всех ребер и внутренних вершин S. При удалении любого сегмента S с концевыми вершинами u и v из дерева T выполняется $n_u(S) + n_v(S) = p(T) - l_S + 1$. Тогда для произвольного n-вершинного дерева T справедливо $W(T) = \sum_S n_u(S) n_v(S) l_S + \frac{1}{6}\sum_S l_S(l_S - 1)(3n - l_S + 1),$ где суммирование ведется по всем сегментам S дерева [104].

Дж. Дойл и Дж. Грэвер [90] предложили метод вычисления индекса Винера, основанный на использовании характеристик ветвления дерева. Пусть u есть вершина ветвления в дереве T с числом вершин p. К ней подвешены висячие ветви-поддеревья T_1, T_2, … ,T_m порядков n_1, n_2, …, n_m, где $m > 2$. Тогда для n-вершинного дерева T выполняется $W(T) = \binom{p+1}{3} - \sum_u \sum_{1 \le i < j < k \le m} n_i n_j n_k,$ где первое суммирование ведется по всем вершинам ветвления u. Формула Дойла-Грэвера выполняется также для геодезических графов, в которых между любой парой вершин имеется единственная кратчайшая цепь. Применения и многочисленные специальные случаи этой формулы обсуждаются в [100, 103].

Степень вершины в графе можно рассматривать как число ребер в звезде с центром в этой вершине. В [104] показано, как вычислить индекс Винера через обобщенные звезды, состоящие из центральной вершины и выходящих из нее простых сегментов (максимальных цепей с внутренними вершинами степени 2 в дереве). Обозначим через q_v число ребер в обобщенной звезде в центром в вершине v. Пусть множество $BP(T)$ состоит из вершин дерева T со степенью не равной 2. Тогда для произвольного p-вершинного дерева T выполняется $W(T) = \frac{1}{12}\left((3p+1)(p-1) + 3\sum_{BP(T)} q_v d(v) - \sum_S l_S^3\right),$ где второе суммирования ведется по всем сегментам дерева.

Для некоторых классов деревьев диаметра D с нерегулярной структурой можно точно найти их индекс Винера [103]. Обозначим через d_k количество пар вершин дерева T, в которых вершины находятся на расстоянии k друг от друга, $k = 0,1,\ldots,D$. Дерево T называется палиндромным, если выполняется равенство $d_k = d_{D-k}$ для всех $k = 0,1,2,\ldots,[D/2]$, где $[x]$ обозначает целую часть числа x. Другими словами, числа в наборе $d_0,d_1,\ldots,d_D$, расположенные симметрично относительно середины, равны. Показано, что для произвольного p-вершинного палиндромного дерева T диаметра D справедливо равенство $W(T) = Dp(p+1)/4$.

Обозначим через $\Delta(G)$ матрицу порядка p, диагональные элементы которой есть степени вершин графа G, а все остальные элементы равны нулю. Матрица Лапласа (или матрица Кирхгофа) $L(G)$ для G определяется как $L(G) = \Delta(G) - A(G)$, где $A(G)$ есть матрица смежности графа. Собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p$ матрицы L образуют лапласовый спектр графа.

Связь между индексом Винера и лапласовым спектром дерева получен в [89,105]: для p-вершинного дерева T с лапласовым спектром $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$ выполняется $W(T) = p\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{\lambda_i}$.

Обзор результатов по индексу Винера для графов гексагональных систем приводится в работе [106]. Графы этого вида состоят из шестиугольников (гексагональных колец), соединенных друг с другом разными способами, что задает класс графов. В обзоре приводятся результаты по вычислению индекса Винера для графов, обсуждается влияние структуры графов на значения индекса Винера, проблемы вырождения индекса и смежные вопросы.

Теория индекса Винера для реберных $L(G)$ графов развита в работах [107-115]. Интерес к этому виду производных графов обусловлен тем, что его характеристики используются для характеризации «сложности» структуры исходного графа. Здесь основное внимание уделяется нахождению графов, для которых их индексы Винера и индексы их реберных графов совпадают. Бакли показал [107], что для деревьев равенства индексов быть не может. Позднее Гутман доказал аналогичный факт для моноциклических графов [108]. Первые графы, для которых $W(G) = W(L(G))$, принадлежат классу бициклических графов [109,110]. Обобщением понятия реберного графа являются итерированный реберный граф, при построении которого происходит итеративное применение операции построения реберного графа. Для квадратичных реберных графов (результат двух итерациий) деревья T со свойством $W(T) = W(L^2(T))$ найдены в [111,112], в том числе построены бесконечные семейства растущих деревьев. Графы со свойством $W(G) = W(L(G))$ и заданными цикломатическим числом и обхватом построены в работах [113-115].

2.6. Оптимизационные задачи на графах

Одним из естественных обобщений классической задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem – TSP) является задача об m коммивояжерах m-Peripatetic Salesman Problem – m-PSP, состоящая в поиске в полном взвешенном неориентированном графе m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов с минимальным или максимальным суммарным весом ребер. Эти задачи исследуются как для произвольной, так и метрической весовой функции. С тех пор как задача 2-PSP была впервые упомянута в [116], появилось много работ, посвященных ее исследованию. В [117] было доказано, что задача о существовании двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе NP-полна, что влечет NP-трудность задачи 2-PSP как на минимум так и на максимум даже в случае, если веса ребер принимают лишь значения 1 и 2. В [118] рассматривались некоторые полиномиально разрешимые случаи задачи на минимум 2-PSP. В работах [117,119,120] были предложены и проанализированы некоторые способы нахождения нижних и верхних оценок для применения в методе ветвей и границ. В [121] представлен полиэдральный подход к решению задачи m-PSP.

Ввиду NP-трудности известных модификаций задач TSP и m-PSP большинство работ, посвященных их исследованию, связано с анализом полиномиально разрешимых случаев а также с построением приближенных эвристических алгоритмов и полиномиальных алгоритмов (как детерминированных так и рандомизированных) с гарантированными оценками точности для полученного решения.

В случае задачи одного коммивояжера на максимум (TSP-max) с произвольными неотрицательными весами наилучшим полиномиальным алгоритмом с гарантированной оценкой точности 3/4 в течение длительного времени оставался алгоритм Сердюкова из [122]. За последние годы этот результат был незначительно усилен разными авторами за счет построения рандомизированных алгоритмов с оценками 25/33-ε [123] и 251/331-ε [124] (для любой константы ε>0), а также детерминированных алгоритмов с оценками 61/81-ε [125] и 25/33-ε [126], основанных на дерандомизации алгоритма из [123].

Для задачи о двух коммивояжерах на максимум (2-PSP-max) Агеевым, Бабуриным и Гимади [127] был получен полиномиальный приближенный алгоритм с оценкой 3/4. Основным результатом данной статьи является алгоритм для 2-PSP-max, имеющий лучшую на сегодняшний день оценку точности 7/9 и кубическую временную сложность. Представленный алгоритм развивает идеи, ранее использованные в работе Гимади, Глазкова и Глебова [128] для построения приближенного алгоритма с оценкой 6/5 в задаче о двух коммивояжерах на минимум с весами ребер 1 и 2 (задача 2-PSP-min(1,2)). Для случая 2-PSP-max, в котором веса ребер принимают значения из заданного промежутка [1,q], была предложена модификация алгоритма, имеющая оценку точности (7q+3)/(9q+1), наилучшую на сегодняшний день.

Глебов и Замбалаева (статья в печати) предложили приближенный алгоритм с оценкой точности 4/3 и временной сложностью $O(n^4)$ для задачи о поиске двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального суммарного веса в полном n-вершинном графе с весами ребер 1 и 2 в случае, когда весовые функции ребер двух циклов различны (задача о двух коммивояжерах на минимум с весами ребер 1 и 2, или 2-PSP(1,2)-min-2w). Этот результат улучшает ранее установленную для данной задачи оценку точности 11/7.

3. Полученные результаты

3.1. Верхние оценки для 2-дистанционного хроматического числа плоского графа в терминах максимальной степени вершин и обхвата графа.

В теоретических исследованиях проблемы распределения радиочастот в сетях связи используется следующая теоретико-графовая модель. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета (целые числа) любых двух вершин, находящихся друг от друга на расстоянии 1, отличались не менее чем на p, а вершин на расстоянии 2 – не менее чем на q. Таким образом, нахождение (p,q)-дистанционного хроматического числа позволяет минимизировать количество занятых частот. При $p = 1$ и $q = 2$ возникает задача 2-дистанционной раскраски плоских графов. Под обхватом графа понимается длина наименьшего цикла. Получен новый результат по 2-дистанционным раскраскам:
УТВЕРЖДЕНИЕ. *Каждый плоский субкубический плоский граф (т.е. граф со степенями не более* 3*) обхвата не менее* 12 *допускает* 2*-дистанционную* 5*-раскраску*.
Тем самым улучшены результаты Распо, Монтасьера, у которых обхват графов был не менее 14 (Montassier M., Raspaud A. A note on 2-facial coloring of plane graphs // Inform. Process. Lett. V. 98(6), 2006, P. 235-241) и результаты Аве с обхватом графов не менее 13 (Havet F. Choosability of square of planar subcubic graphs with large girth // Discrete Math. V.309, 2009, P. 3353-3563).

3.2. Свойства индекса Винера для одного класса гексагональных систем

Рассмотрим следующую теоретическую модель функционирования коммуникационной сети. Пусть связная сеть имеет гексагональную структуру (вложимую или не вложимую в правильную гексагональную решетку на плоскости). Функционирование сети оценивается суммой расстояний между всеми узлами сети в естественной метрике, т.е. ее индексом Винера W. Пусть далее происходит разрушение сети путем удаления ее элементов так, что оставшаяся сеть все еще сохраняет гексагональную структуру. После последовательности разрушающих воздействий образуются изолированные друг от друга подсети, существующие независимо друг от друга. В этом случае оценочная характеристика сети будет определяться как сумма индексов Винера этих подсетей. Как оценить этот инвариант? В простейшем случае получившаяся в итоге сеть G является объединением несвязанных друг с другом k шестиугольных циклов C_6, что, очевидно, влечет $W(G) = kW(C_6) = 27k$. Нами эта задача была рассмотрена при следующих ограничениях – образующиеся подсети имеют одинаковое число шестиугольников h, и каждая из них является гексагональной цепью, в которой любой сегмент (максимальная прямолинейно соединенная цепочка из шестиугольников) имеет одинаковую длину l (число шестиугольников). Наименьшая длина сегмента равна 2. Сегменты в графе могут быть двух типов, различающиеся тем, как расположены их соседние сегменты при вложении этого фрагмента в правильную гексагональную решетку на плоскости. Сегменты, у которых их соседи расположены по одну сторону от центрального, образуют множество Ω. Сегменты, у которых соседи расположены по разные стороны от центрального, образуют зигзаг и образуют множество сегментов *Z*. Основным полученным результатом является описание подмножеств графов указанного класса, для которых сумма их индексов Винера зависит только от мощности этих подмножеств и размера графов. Известно, что экстремальные графы этого класса имеют следующие значения индекса Винера:

$$W_{\min} = \frac{1}{(3l-1)}\left(8h^3(2l-3) + 24h^2(2l-1) - 2h(2l^2 - 5l + 15) + 4l^2 + 7l - 3\right),$$

$$W_{\max} = \frac{1}{3}\left(6h^3 + 24h^2 + 2h(6l + 19) - 12l + 3\right).$$

Наименьшее значение *W* имеет граф, в котором все сегменты последовательно спиралеобразно соединяются друг с другом, а наибольшее – граф, в котором любые три последовательных сегмента образуют зигзаг. Среднее значение обозначим через $W_s = (W_{\max} + W_{\min})/2$.

Пусть сегменты графов занумерованы последовательно, начиная с концевого сегмента. Два графа называются зацепленными, если их *i*-ые сегменты имеют разные типы для любого *i*. Множество графов называется полным, если для каждого своего графа оно содержит и его зацепленный граф. Пересечение, объединение или разность полных множеств будет всегда полным множеством.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Для произвольного полного множества графов* Θ *с сегментами длины l и числом колец h выполняется равенство* $W(\Theta) = \sum_{G \in \Theta} W(G) = |\Theta|\, W_s$.

Если Θ включает все графы, то, очевидно, оно является полным, и для него это равенство было известно ранее. Разработанный метод может быть использован для описания множеств вырождения и установления других свойств индекса. Полученный результат может трактоваться как коллективное свойство индекса Винера в отличие от традиционного подхода, при котором свойства инварианта изучаются для индивидуального связного графа.

3. Показатели

3.1. Количество подготовленных и опубликованных статей:

Принято к печати 1, сдана в печать 1 статья (см. Приложение А).

2.4. Количество сделанных докладов:

Сделаны 1 доклад на международных и 5 докладов на отечественных научных конференциях. (см. Приложение Б).

4. Заключение

В процессе выполнения 1 этапа НИР получены следующие основные результаты.

1. Определены приоритетные направления, по которым будут проводиться исследования в рамках данного контракта, и намечены решаемые задачи.

2. Сделан обзор литературных источников по приоритетным направлениям исследований.

4. Получены новые условия на среднюю степень графа, дающие возможность провести декомпозицию графа на компоненты с максимальной степенью не более 1.

5. Описаны коллективные свойства метрического инварианта графов (индекса Винера) для подмножеств графов гексагональных систем.

Полученные результаты будут опубликованы в высокорейтинговых журналах. Предполагается использование полученных результатов в обязательных и специальных учебных курсах. По тематике исследований было проведено 6 научных семинаров.

По результатам 1 этапа НИР представляется целесообразным продолжение работ.

6. Список использованных источников

1. Бородин О.В., Глебов А.Н., Иванова А.О., Неустроева Т.К., Ташкинов В.А. Достаточные условия 2-дистанционной (D+1) раскрашиваемости плоских графов // Сибирские электронные математические известия. - 2004 - Т.1 - С. 129-141

2. Бородин О.В., Иванова А.О., Неустроева Т.К. (p,q)-раскраска разреженных плоских графов // Мат. Заметки ЯГУ. 2006. Т. 13. Вып. 2. С. 3-9.

3. Бородин О.В., Иванова А.О., Неустроева Т.К. Предписанная (p,q)-раскраска разреженных плоских графов // Сибирские Электронные Математические Известия. 2006. Т. 3. С. 355-361.

4. Бородин О.В., Иванова А.О., Неустроева Т.К. Достаточные условия минимальной 2-дистанционной раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Сибирские Электронные Матем. Известия - 2006 - Т. 3 - С. 441-450.

5. Бородин О.В., Дмитриев И.Г., Иванова А.О. Реберная 2-дистанционная раскраска плоских субкубических графов // Мат. заметки ЯГУ, 2008, Т. 15, вып. 1. С. 20-26.

6. Borodin O.V., Ivanova A.O., Neustroeva T. K. List 2-distance (D+1)-coloring of planar graphs with given Girth // J. Applied Industrial Math., 2008, V. 2, N. 3, P. 317-328.

7. Бородин О.В., Иванова А.О. Предписанная 2-дистанционная (D+2)-раскраска плоских графов с обхватом 6 и D≥24 // Сиб. мат. журнал – Т. 50, n. 6, 2009, С. 1216-1224.

8. Borodin O.V., Ivanova A.O. 2-Distance (D+2)-coloring of planar graphs with girth six and D≥18 // Discrete Math. V. 309, 2009, P. 6496-6502.

9. Borodin O.V., Ivanova A.O. List 2-distance (D+2)-coloring of planar graphs with girth six // Europ. J. Combin. V. 30, 2009, P. 1257-1262.

10. Kostochka A.V., Kierstead H.A. Equitable versus Nearly Equitable Coloring and the Chen-Lih-Wu Conjecture // Combinatorica,V. 30, 2010, P. 201-216.

11. Kierstead H.A., Kostochka A.V., Mydlarz M., Szemeredi E. A fast algorithm for equitable coloring // Combinatorica, V. 30, 2010, P. 217-224.

12. Kostochka A.V., Rodl V. Constructions of sparse uniform hypergraphs with high chromatic number // Random Structures and Algorithms, V. 36, 2010, P. 46-56.

13. Kostochka A.V., Kumbhat M. Coloring simple uniform hypergraphs with few edges // Random Structures and Algorithms, V. 35, 2009, P. 348-368.

14. Kierstead H.A., Kostochka A.V. Ore-type versions of Brooks' theorem // J. Combin. Theory, Series B, V. 99, 2009, P. 298-305.

15. Borodin O.V., Kostochka A.V., Sheikh N., Yu G. M-degrees of quadrangle-free planar graphs // J. Graph Theory, V. 60, 2009, P. 80-85.

16. Borodin O.V., Ivanova A.O., Kostochka A.V., Sheikh N.N. Planar graphs decomposable into a forest and a matching // Discrete Math. V. 309, 2009, P. 277-279.
17. Borodin O.V., Ivanova A.O., Kostochka A.V., Sheikh N.N. Minimax degrees of quasiplanar graphs with no short cycles other than triangles // Taiwanese J. Math. V. 12, 2008, P. 873-886.
18. Borodin O.V., Hartke S.G., Ivanova A.O., Kostochka A.V., West D.B. Circular (5,2)-Coloring of Sparse Graphs // Siberian Electronic Math. Reports, V. 5, 2008, P. 417-426.
19. Chandran S.L., Kostochka A.V., Krishnam R.J. Hadwiger Number and the Cartesian Product of Graphs // Graphs Combinatorics, V. 24, 2008, V. 291-301.
20. Baker B., Coffman E. Mutual exclusion scheduling // Theor. Comput. Sci. V. 162, 1996, P. 225-243.
21. Smith B.F., Bjorstad P.E., Gropp W.D. Domain decomposition. Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations, Cambridge: Cambridge University Press, 1996, 224 p.
22. Irani S., Leung V. Scheduling with conflicts, and applications to traffic signal control // Proceedings of the 7th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms, held in Atlanta, GA, 1996, Philadelphia, PA: SIAM, 1996, P. 85-94.
23. Kitagawa F. Ikeda H. An existential problem of a weight-controlled subset and its application to school timetable construction // Discrete Math. V. 72, 1988, P.195-211.
24. Tucker A. Perfect graphs and an application to optimizing municipal services // SIAM Review, V. 15, 1973, P. 585-590.
25. Kostochka A.V., Prince N. Dense graphs have K{3,t} minors // Discrete Math. V. 310, 2010, P. 2637-2654.
26. Kostochka A.V., Prince N. On K{s,t}-minors in graphs with given average degree // Discrete Math. V. 308, 2008, P. 4435-4445.
27. Bohme T., Kostochka A.V., Thomason A. Hadwiger numbers and over-dominating colourings // Discrete Math. V. 310, 2010, P. 2662-2665.
28. Kostochka A.V. On K{s,t} minors in (s+t)-chromatic graphs // J. Graph Theory, V. 311, 2011, V. 996-1005.
29. Пяткин А.В. Некоторые задачи оптимизации расписания передачи сообщений в локальной сети связи // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 1995. Т.2. n.4. С. 74–79.
30. Melnikov L.S., Vizing V.G. The edge-chromatic number of a directed/mixed multigraph // J. Graph Theory. 1999. V. 23. n. 4. P. 267–273.
31. Визинг В.Г. Раскраска инциденторов графа в предписанные цвета // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2000. Т. 7. n. 1. С. 32–39.
32. Визинг В.Г. Раскраска инциденторов и вершин ориентированного мультиграфа // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2002. Т. 7. n. 3. С. 6–16.

33. Визинг В.Г., Мельников Л.С., Пяткин А.В. О (k;l)-раскраске инциденторов // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2000. Т. 7. n. 4. С. 29–37.
34. Pyatkin A. V. The incidentor coloring of multigraphs and its applications // Discrete Applied Math. 2002. V. 120. n 1–3. P. 209–217.
35. Плеханова Н.С., Пяткин А.В. Передача сообщений в локальной сети с двумя локальными ЭВМ // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2002. Т. 9. n. 1. С. 91–99.
36. Pyatkin A. V. The incidentor coloring of multigraphs and its applications // Discrete Applied Math. 2002. V. 120. n 1–3. P. 209-217.
37. Пяткин А.В. (k,l)-раскраска инциденторов кубических мультиграфов // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2002. Т. 9. n. 1. С. 49–53.
38. Пяткин А.В. Некоторые верхние оценки для инциденторного (k,l)-хроматического числа // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2003. Т. 10. n. 2. С. 66–78.
39. Пяткин А.В. Верхние и нижние оценки инциденторного (k,l)-хроматического числа // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2004. Т. 11. n. 1. С. 93–103.
40. Пяткин А.В. Об (1,1)-раскраски инциденторов мультиграфов степени 4 // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2004. Т. 11. n. 3. С. 59–62.
41. Визинг В.Г., Пяткин А.В. О раскраске инциденторов в ориентированном взвешенном мультиграфе // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2006. Т. 13. n. 1. С. 33–44.
42. Pyatkin A.V., Vizing V.G. Incidentor coloring of weighted multigraph // Electronic Notes in Discrete Mathematics. 2006. V. 27. P. 103–104.
43. Визинг В.Г., Пяткин А.В. Об оценках инциденторного хроматического числа взвешенного неориентированного мультиграфа // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2007. Т.14. n. 2. С. 3–15.
44. Пяткин А.В. О предписанной раскраске инциденторов в мультиграфе степени 4 // Дискретн. анализ и исслед. операций. Сер.1. 2007. Т. 14. n. 3. С. 80–89.
45. Hamming R. W. Error detecting and errorcorrecting codes // Bell Syst.Tech.J. 1950. V. 29. P. 147-160.
46. Зиновьев В. А., Леонтьев В.К. О совершенных кодах // Препринт/ИППИ АН СССР, 1972. Вып. 1. С. 26-35.
47. Зиновьев В. А., Леонтьев В.К. Несуществование совершенных кодов над полями Галуа // Проблемы управления и теории информации. 1973. Вып. 2. С. 123-132.
48. Tietavainen A. On the nonexistence of perfect codes over the finite fields // SIAM J.Appl. Math. 1973. V. 24. P. 88-96.
49. Delsarte P. An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Res. Rep. Suppl. 1973. V. 10. P.1-97.

50. Семаков Н.В., Зиновьев В.А., Зайцев Г.В. Равномерно упакованные коды // Пробл. передачи информ. 1971. Т. 7. N. 1. С. 38-50.
51. Van Tilborg H. C. A. Uniformly packed codes // Ph. D. Thesis, Eindhoven University of Technology, the Netherlands, 1975.
52. Delsarte P. An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory // Philips Res. Rep. Suppl. 1973. V. 10. P.1-97.
53. Gordon M.D. Perfect Single Error-Correcting Codes in the Johnson Scheme // IEEE Trans. Inform. Theory. 2006. V. 52. N. 10. P. 4670-4672.
54. Martin W. J. Completely Regular Designs // J. Combin. Designs. 1998. V. 6. P. 261-273.
55. Dehon M. On the existence of 2-designs Sl(2,3,v) without repeated blocks // Discrete Math. 1983. V. 43. P. 155-171.
56. Hanani H. On quadruple systems // Canad. J. Math. 1960. V. 15. P. 145-157.
57. Hartman A., Phelps K. Tetrahedral quadruple systems//Utilitas Math. 1990. V.37. P.181-189.
58. Phelps K.T., Stinson D.R., Vanstone S.A. The existence of simple S3(3,4,v) // Discrete Math. 1989. V. 77. P. 255-258.
59. Августинович С.В., Лисицына М.А. Совершенные 2-раскраски транзитивных кубических графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. N 2. С. 3-17.
60. Августинович С.В., Бородин О.В., Фрид А.Э. Дистрибутивные раскраски плоских триангуляций минимальной степени 5 // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. - 2001. Т. 8, N 3. - С. 3-16.
61. Августинович С.В., Могильных И.Ю. Совершенные раскраски графов Джонсона J(8,3) и J(8,4) в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. - 2010. - Т. 17, N 2. - С. 3-19.
62. Кротов Д. С. О совершенных раскрасках половинного 24-куба // Дискрет. анализ и исслед. операций. - 2008. - Т. 15, N 5. - С. 35-46.
63. Кохов В.А. Диаграммы, числа стабильности и цикловые индексы групп автоморфизмов транзитивных графов // Исследования по прикладной теории графов. - Новосибирск: Наука, 1986. - С.113-114.
64. Мак-Вильямс Ф.Дж., Слоэн Н.Дж.А. Теория кодов, исправляющих ошибки, М.: Связь, 1979.
65. Логачёв О.А., Сальников А.А., Ященко В.В. Булевы функции в теории кодирования и криптологии, М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
66. Friedman J. On the bit extraction problem, Proc.33rd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (1992), P. 314-319.
67. Bierbrauer J. Bounds on orthogonal arrays and resilient functions, Journal of Combinatorial Designs, 3, 1995, P. 179-183.

68. Августинович С.В., Васильева А.Ю., Сергеева И.В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решетки // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2011. Т.18. №3. С.3-10.
69. Axenovich M.A. On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. V. 268, N 1-3. P. 31-49.
70. Киселев С.А., Токарева Н. Н. О сокращении ключевого пространства шифра А5/1 и обратимости функции следующего состояния в поточном генераторе // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18. N 2. С. 51-63.
71. Хорошилова Д.Б. О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. - 2009. Т. 16, N 1. - С. 80-92.
72. Токарева Н. Н. Нелинейные булевы функции: бент-функции и их обобщения // Издательство LAP LAMBERT Academic Publishing (Saarbrucken, Germany), 2011, 180 с.
73. Токарева Н. Н. Группа автоморфизмов множества бент-функций // Дискретная математика. 2010. Т. 22. N 4. С. 34-42.
74. Tokareva N. On the number of bent functions: lower bounds and hypotheses // Cryptology ePrint Archive, Report 2011/083. http://eprint.iacr.org.
75. Anil K. Jain K. Data Clustering: 50 Years Beyond k-Means // Pattern Recognition Letters. 2010. Vol. 31. P. 651-666.
76. Aloise D., Hansen P. On the Complexity of Minimum Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2007-50. 2007. 12 p.
77. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. 2008. 4 p.
78. Mahajan M., Nimbhorkar P., Varadarajan K. The Planar k-means Problem is NP-Hard // Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5431. P. 284-285.
79. Долгушев А.В., Кельманов А.В. К вопросу об алгоритмической сложности одной задачи кластерного анализа // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, №2. С. 39-45.
80. MacQueen J.B. Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations // Proc. 5-th Berkeley Symp. Of Mathematical Statistics and Probability. 1967. Vol.1. P.281-297.
81. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества «похожих» векторов // Доклады РАН. 2008. Т.421, №5. С. 590-592.
82. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2008. Т.15, №5. С. 25-40.
83. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009, Т.49, №11. С. 2059-2067.

84. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретн. анализ и исслед. операций. 2010. Т.15, №5. С. 31-45.
85. Wiener H. Structural determination of paraffin boiling points // J. Amer. Chem. Soc.1947. V. 69. P. 17-20.
86. Entringer R. C., Jackson D. E., Snyder D. A. Distance in graphs // Czechoslovak Math. J. 1976. V. 26, N 2. P. 283-296.
87. Soltes L. Transmission in graphs: a bound and vertex removing // Math. Slovaca. 1991. V. 41, N 1. P. 11-16.
88. Plesnik J. On the sum of all distances in a graph or digraph//J. Graph Theory.1984. V.8, 1-21.
89. Chung F. R. K. The average distance and the independence number // J. Graph Theory. 1988. V. 12, N 2. P. 229-235.
90. Doyle J. K., Graver J. E. Mean distance in a graph // Discrete Math. 1977. V. 17, P.147-154.
91. Paoli M. Comparison of mean distance in superposed networks // Discrete Applied Math. V. 8, n. 3, 1984, P. 279-287.
92. Tomescu I. On the sum of all distances in chromatic blocks // J. Graph Theory. 1994. V. 18 P. 83-102.
93. Tomescu I., Melter R. A. On distances in chromatic graphs // Quart. J. Math. Oxford (2). 1989. V. 40, N 160. P. 475-480.
94. Dankelmann P. Average distance and domination number // Discrete Appl. Math. 1997. V. 80, N 1. P. 21-35.
95. Kouider M., Winkler P. Mean distance and minimum degree // J. Graph Theory. 1997. V. 25. P. 95-99.
96. Mohar B. Eigenvalues, diameter, and mean distance in graphs // Graphs Combin. 1991. V. 7. P. 53-64.
97. Winkler P. Mean distance in a tree // Discrete Appl. Math. 1990. V. 27, N 1-2. P. 179-185.
98. Polansky O. E., Bonchev D. The Wiener number of graphs. I. General theory and changes due to some graph operations // Commun. Math. Chem. 1986. V. 21. P. 133-186.
99. Polansky O. E., Bonchev D. Theory of the Wiener number of graphs. II. Transfer graphs and some of their metric properties // Commun. Math. Chem. 1990. V. 25. P. 3-39.
100. Gutman I. Calculating the Wiener number: the Doyle-Graver method // J. Serb. Chem. Soc. 1993. V. 58, N 10. P. 745-750.
101. Canfield E. R., Robinson R. W., Rouvray D. H. Determination of the Wiener molecular branching index for the general tree // J. Comput. Chem. 1985. V. 6, N 6. P. 598-609.
102. Gutman I. Distance of thorny graphs // Publ. Inst. Math. (Beograd). 1998. V. 63. P. 31-36.

103. Dobrynin A.A., Entringer R., Gutman I. Wiener index for trees: theory and applications // Acta Appl. Math. - 2001. - Vol.66, n. 3 - P. 211-249.
104. Dobrynin A.A. Branchings in trees and the calculation of the Wiener index of a tree // Comm. Math. Chem. (MATCH) - 2000 - Vol. 41 - P. 119-134.
105. Merris R. The distance spectrum of a tree // J. Graph Theory. 1990. V. 14, N 3. P. 365-369.
106. Dobrynin A.A., Gutman I., Klavzar S., Zigert P. Wiener index of hexagonal systems // Acta Appl. Math. - 2002. - Vol. 72, n.3 - P. 247-294.
107. Buckley F. Mean distance in line graphs // Congr. Numer. 1981. V. 32. P. 153-162.
108. Gutman I. Distance of line graphs // Graph Theory Notes New York. 1996. V.31. P. 49-52.
109. Gutman I., Jovasevic V., Dobrynin A. A. Smallest graphs for which the distance of the graph is equal to the distance of its line graph//Graph Theory Notes New York. 1997.V.33. P.19.
110. Добрынин А. А., Гутман И., Йовашевич В. Бициклические графы и их реберные графы с совпадающим индексом Винера // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 1997. Т. 4, No 2. С. 3-9.
111. Dobrynin A.A., Mel'nikov L.S. Some results on the Wiener index of iterated line graphs// Electronic Notes in Discrete Mathematics, Vol. 22, 2005, 469-475.
112. Dobrynin A.A., Mel'nikov L.S. Wiener index of generalized stars and their quadratic line graphs // Discuss. Math. Graph Theory. - 2006. - Vol. 26, n.1 - P. 161-175.
113. Добрынин А.А., Мельников Л.С. Индекс Винера графов и их реберных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. - 2004. - Т. 11, n. 2 . - С. 25-44.
114. Dobrynin A.A., Mel'nikov L.S. Wiener index for graphs and their line graphs with arbitrary large cyclomatic numbers // Appl. Math. Lett. - 2005. - Vol. 18, n. 3. - P. 307-312.
115. Добрынин А.А. Индекс Винера для графов произвольного обхвата и их реберных графов // Сиб. журн. индустриальной матем. - 2009 - Т.12 n. 4, С. 44-50.
116. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). - 1975. - P. 173-178.
117. De Kort J.B. Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. - 1991. - V. 22, N 1. P. 113-122.
118. De Brey M.J.D., Volgenant A. Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. - 1997. - V. 39, N 3. P. 275-293.
119. De Kort J.B. Upper bounds for the symmetric 2-peripatetic salesman problem // Optimization. - 1992. - V. 23, N 4. P. 357-367.
120. De Kort J.B. A branch and bound algorithm for symmetric 2-peripatetic salesman problems // European J. Oper. Res. - 1993. - V. 70, N 2. P. 229-243.

121. Duchenne E., Laporte G., Semet F. Branch-and-cut algorithms for the undirected *m*-peripatetic salesman problem // European J. Oper. Res. - 2005. - V. 162, N 3. - P. 700-712.
122. Сердюков А.И. Алгоритм с оценкой для задачи коммивояжера на максимум // Управляемые системы. Сб. науч. тр. Вып. 25. - Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984. - С. 80-86.
123. Hassin R., Rubinstein S. Better approximations for max TSP // Inform. Process. Lett. - 2000. - V. 75, N 4. - P. 181-186.
124. Chen Z.-Z., Wang L. An improved randomized approximation algorithm for Max TSP // J. Comb. Optim. - 2005. - V. 9, N 4. - P. 401-432.
125. Chen Z.-Z., Okamoto Y., Wang L. Improved deterministic approximation algorithms for Max TSP // Inform. Process. Lett. - 2005. - V. 95, N 2. - P. 333-342.
126. van Zuylen A. Multiplying Pessimistic Estimators: Deterministic Approximation of Max TSP and Maximum Triangle Packing // Lecture Notes in Computer Science. – 2010 -V. 6196. - P. 60-69.
127. Агеев А.А., Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой 3/4 для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов максимального суммарного веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. - Сер. 1. 2006. - Т. 13, N2. - С. 11--20.
128. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2 // Дискрет. анализ и исслед. операций. - Сер. 2. 2007. - Т. 14, N2.- С. 41-61.

Приложение А. Список публикаций исполнителей

Сданы в печать следующие статьи:

1. Бородин О.В., Косточка А.В. Вершинные разбиения разреженных графов на независимое множество и подграф максимальной степени не более 1 // Сибирский матем. журнал.
2. Balogh J., Kostochka A.V. Large minors in graphs with given independence number // Discrete Math.

Приложение Б. Список сделанных исполнителями докладов

На всероссийских конференциях и семинарах:

1. Бородин О.В., Иванова А.О. Ациклическая раскраска плоских графов и связанные с нею задачи // VI Международная конференция по математическому моделированию, Якутск, Россия, 3-8 июля 2011, Тезисы докладов, Якутск, 2011, С. 90-91 (секционный доклад).
2. Бородин О.В., Иванова А.О. Инъективная и 2-дистанционная раскраски разреженных плоских графов // VI Международная конференция по математическому моделированию, Якутск, Россия, 3-8 июля 2011, Тезисы докладов, Якутск, 2011, С. 92-93 (секционный доклад).
3. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа // Труды XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т.1: Пленарные доклады, Иркутск: РИО ИДСТУ СО РА, 2011. С. 55-60. (пленарный доклад)
4. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Труды XV Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Т.4: Дискретная оптимизация, Иркутск: РИО ИДСТУ СО РА, 2011. С. 144-149. (секционный доклад)
5. Глебов А.Н, Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В. Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // Байкальская школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» – 2011, пос. Листвянка, о. Байкал, 23–29 июня 2011 (секционный доклад).

На международных конференциях и семинарах:

6. Kostochka A.V. The Hajnal-Szemerédi theorem: extensions and variations, «Infinite and finite sets», Hungary, Budapest, 13-17 June, 2011 (приглашенный пленарный доклад).