Российская академия наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РАН

(ИМ СО РАН)

УДК 519.7

№ госрегистрации 01201064560

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ
И.о. директора
член-корреспондент РАН
_____________ Гончаров С.С.
«02» ноября 2011 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

по государственному контракту № 14.740.11.0362
шифр заявки «2010-1.1-113-130-032»
по теме:

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Наименование этапа: «Проведение фундаментальных исследований»
(промежуточный, этап № 3)

Руководитель НИР,
член-корреспондент РАН В.Д. Мазуров

____

Новосибирск 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Рук. темы, зав. отделом ИМ СО РАН, член-корр. РАН	________________	В.Д. Мазуров (Введение, Заключение)
Отв. исполнитель темы, исп. директор НОЦ, д.т.н.	________________	С.М. Лавлинский (Реферат, Приложения А-В)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Береснев В.Л. (раздел 1.1)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Гимади Э.Х. (раздел 1.9)
зав. кафедрой НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Ерзин А.И. (раздел 1.8)
гл.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	________________	Кельманов А.В. (раздел 1.3)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	________________	Севастьянов С.В. (раздел 1.2)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Кононов А.В. (раздел 1.2)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Шенмайер В.В. (раздел 1.3)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Алексеева Е.В. (раздел 1.1)
инж. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Тахонов И.И. (раздел 1.8)
зав. лабораторией ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Августинович С.В. (раздел 1.5)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	Токарева Н.Н. (раздел 1.7)
доц. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Кротов Д.С. (раздел 1.6,1.5)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Потапов В. Н. (раздел 1.5)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	Могильных И.Ю. (раздел 1.4)
инж. ИМ СО РАН	________________	Алдын-оол Т.А. (раздел 1.8)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Васильева А.Ю. (раздел 1.7)
вед. инж ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Лось А.В. (раздел 1.5)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	Горкунов Е.В. (раздел 1.7)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Лисицына М.А. (раздел 1.7)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Коломиец Н. А. (раздел 1.7)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Замбалаева Д.Ж. (раздел 1.7)
аспирант НГУ	________________	Батуева Ц.Ч. (раздел 1.5)

аспирант ИМ СО РАН	________________	Павлов С.В. (раздел 1.2)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Сухорослов А.А. (раздел 1.2)
аспирант НГУ	________________	Долгушев А.В. (раздел 1.3)
инж. ИМ СО РАН	________________	Плотников Р.В. (раздел 1.8)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Курочкин А.А. (раздел 1.1)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Истомин А.М. (раздел 1.1)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Романченко С.М. (раздел 1.3.1)
аспирант ИМ СО РАН	________________	Мельников А.А. (раздел 1.1)
студент НГУ	________________	Сотникова Е.В. (раздел 1.5)
студент НГУ	________________	Валюженич А.А. (раздел 1.5)
студент НГУ	________________	Хмелев А.В. (раздел 1.1)
студент НГУ	________________	Хандеев В.И. (раздел 1.3)
Нормоконтролер	________________	Кравченко С.В.

Реферат

Отчет 77 с., 1 ч., 91 источник, 1 табл., 3 прил.

Тема: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Ключевые слова ЦЕХОВЫЕ РАСПИСАНИЯ С РЕСУРСНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ И МАРШРУТИЗАЦИЕЙ; ПОДМНОЖЕСТВА «ПОХОЖИХ» ВЕКТОРОВ; БЕНТ-ФУНКЦИЯ; ТЕРНАРНЫЙ ГИПЕРКУБ; СОВЕРШЕННЫЕ 2-РАСКРАСКИ ГИПЕРКУБА; ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ В N-КУБЕ; МЕТОДЫ ГЛОБАЛЬНОЙ МАРШРУТИЗАЦИИ НА СБИС; МОДЕЛИ КОНКУРЕНТНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ.

Основным объектом исследования являются актуальные проблемы теоретической кибернетики.

Основной целью проекта является получение научных результатов мирового уровня, позволяющих закрепить приоритет российской школы теоретической кибернетики, повысить уровень подготовки и способствовать закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формированию эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

В процессе работ использовались классические методы кластерного анализа, методы теории кодирования, методы оптимизации и дискретного анализа, аппарат теории расписаний.

В результате фундаментальных исследований 3 этапа получены новые результаты мирового уровня.

1) Впервые выполнен полный анализ сложности задачи построения расписания для n работ на одной машине с ограничениями на оборотные ресурсы и неодновременным поступлением работ. Он представляет собой совокупность взаимосвязанных неулучшаемых результатов, дающих полную картину сложности задачи.

2) Выполнен полный анализ сложности четырёхпараметрического семейства цеховых задач (включающего классические задачи job shop и open shop, а также смешанную задачу mixed shop), определяемого всевозможными комбинациями ограничений на такие параметры как максимальное число операций работы, длительность операции, верхняя оценка на длину расписания. Показано, что этот бесконечный класс задач содержит так называемую базисную систему задач — конечное семейство задач, дающее «ключ» к определению сложности любой задачи из бесконечного класса. Установлено, что базисная система состоит из десяти задач, пять из которых полиномиально разрешимы, а пять других — NP-полны (рассматриваются задачи распознавания). Сложность двух задач из базисной системы была

известна ранее, сложность остальных восьми задач установлена авторами. Тем самым, в явном виде установлено свойство дихотомии бесконечного класса (свойство гласит, что класс задач не содержит задач «промежуточной сложности» — труднее полиномиально разрешимых, но легче NP-полных).

3) Рассмотрены две версии задачи Джонсона с общим буфером, возникающие в мультимедийных приложениях, связанных с передачей данных через переносное транслирующее устройство с ограниченной памятью. Для обеих версий установлена NP-трудность возникающих задач. Для случая, когда в процессе загрузки разрешены прерывания, выделены нетривиальные полиномиально разрешимые классы. Для обеих версий предложены новые нижние оценки, основанные на сведении задачи к специальной ограниченной версии.

4) Доказана NP-полнота некоторых актуальных задач выбора подмножеств векторов в конечном множестве векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

5) Предложены 2-приближённые алгоритмы для нескольких NP-трудных задач поиска подмножества векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

6) В терминах совершенных структур охарактеризованы коды с параметрами трижды укороченных 1-совершенных двоичных кодов. Доказано, что соответствующие расширенные коды (с расстоянием 4) всегда порождают совершенную раскраску (регулярное разбиение) вершин гиперкуба в шесть цветов.

7) Приведено несколько конструкций H- и A-дизайнов и доказано существование $H(2^{T+1}, S\cdot 2^{T}, 2^{T+1}-1, 2^{T+1}-2)$-дизайнов для всех S, T больших 1.

8) Получено описание всех бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции. Подсчитано количество таких бент-функций. Предложена нижняя оценка количества бент-функций на минимальном расстоянии от бент-функций из класса Мэйорана—Мак-Фарланда. Разработана библиотека для работы с булевыми функциями.

9) Доказано, что каждая нередуцируемая дистанционно регулярная раскраска n-мерной квадратной решетки содержит не более $2n+1$ цветов, причем эта оценка достижима.

10) Предложен новый эффективный метод построения приближенного решения задачи глобальной маршрутизации с учётом как временных, так и ресурсных ограничений. Проведен апостериорный анализ метода на тестовых примерах Intel и IBM, который показал высокую эффективность разработанного подхода.

11) Рассмотрена задача максимизации времени жизни сенсорной сети в условиях ограниченности ресурсов сенсоров в виде задачи целочисленного линейного программирования, в которой при заданном множестве покрытий требуется определить время функционирования каждого покрытия. При этом ресурс сенсора задаётся количеством временных раундов, в течение которых он может находиться в активном состоянии. Доказана NP-трудность задачи в сильном смысле; предложены способы её упрощения; показано, что для любого $\varepsilon > 0$ задача в общем случае не аппроксимируема полиномиальными алгоритмами с точностью $O(m^{1-\varepsilon})$, где m – количество покрытий; найдены частные случаи, когда задача полиномиально разрешима; предложено несколько эвристических алгоритмов построения приближённого решения задачи и проведён апостериорный анализ.

Степень внедрения - результаты используются в образовательном процессе Новосибирского государственного университета при чтении таких курсов лекций, как «Исследование операций», «Совершенные структуры», «Теория расписаний», «Анализ данных и распознавание образов».

Полученные результаты фундаментального характера, прежде всего, являются вкладом в общую математическую теорию. Результаты исследований могут быть использованы в практической сфере, связанной с процессами управления.

Эффективность и значимость работ, помимо чисто научных результатов, заключается в подготовке молодых ученых, непосредственно участвовавших в работах наряду с признанными специалистами, и способствуют закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров.

В развитии результатов третьего этапа в последующих работах этого направления следует ожидать формирование эффективного инструментария исследования проблем теоретической кибернетики, использующего сформулированные подходы и новые постановки ключевых задач.

В результате исследований по ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в монографиях и статьях.

Обозначения и сокращения

ИМ СО РАН - Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук.

НГУ – Новосибирский государственный университет.

НОЦ – научно-образовательный центр.

СБИС – сверхбольшие интегральные схемы.

Содержание

Введение

Выполнение НИР направлено на проведение фундаментальных исследований в области теоретической кибернетики, с целью получения научных результатов мирового уровня, на подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Запланированные исследования 3 этапа посвящены проведению фундаментальных исследований и играют важную роль в рамках всей НИР. В ходе работ предполагается построить базовые алгоритмы вычисления локально-оптимальных решений для задач конкурентного размещения, провести анализ сложности различных задач теории расписаний и задач поиска подмножеств «похожих» векторов. Предполагается оценить параметры совершенных 2-раскрасок тернарного гиперкуба и число совершенных кодов в терминах многомерного перманента специально построенной матрицы. Важная роль отведена анализу взаимосвязей между бент-функциями и двоичными кодами, а также анализу дискретных аналогов теоремы Коши для центрированных функций в n-кубе.

Совместно с разработкой новых подходов к анализу эффективности функционирования беспроводных сенсорных сетей и методов глобальной маршрутизации на СБИС, эти исследования определяют фронт работ 3 этапа.

1. Проведение фундаментальных исследований

В рамках работ третьего этапа НИР основной акцент сделан на конкретныъ проблемах анализа сложности задач теории расписаний и задач поиска подмножеств «похожих» векторов. Вкупе с задачами размещения и маршрутизации, а также задачами хранения, обработки, передачи и защиты информации, эти проблемы определяют основное содержательное русло исследований третьего этапа.

В отчете приведено описание работ по пунктам календарного плана в соответствии с техническим заданием.

1.1. Разработка алгоритмов вычисления локально-оптимальных решений для задач конкурентного размещения

В предшествующих отчетах рассмотрены модели $(L,\ F)$ и $(L,\ F')$ размещения производства, а также введены понятия оптимальных кооперативных и некооперативных решений полученных задач. Кроме того, ранее было показано, что задачи поиска оптимальных кооперативных и некооперативных решений задач $(L,\ F)$ и $(L,\ F')$ сводятся к задаче максимизации псевдобулевых функций. Особенность этих функций состоит в том, что они заданы неявным образом и для вычисления значения таких функций необходимо решить две задачи целочисленного линейного программирования.

В настоящем разделе приводятся алгоритмы поиска локально-оптимальных решений задачи максимизации псевдобулевых функций указанного вида. Алгоритмы включают два этапа. На первом вычисляется верхняя граница для значений, рассматриваемых псевдобулевых функций и одновременно строится некоторое начальное решение. На втором этапе это решение улучшается до локально-оптимального решения. Соответствующий алгоритм представляет собой стандартную процедуру локального поиска с окрестностью специального вида.

1.1.1. Верхние границы целевой функции задач

Построим систему подмножеств I_j, $j \in J$, определённую нестрогими ослабленными неравенствами.

При фиксированном $j_0 \in J$ для $i \in I$ рассмотрим множества

$$N(i) = \{k \in I \mid k \succ_{j_0} i\}, \quad J(i) = \{j \in J \mid i \not\succcurlyeq_j k \text{ для всякого } k \notin N(i)\}.$$

Если $N(i)=\varnothing$, то считаем, что $i\in I_{j_0}$. Пусть $N(i)\neq\varnothing$. Для всякого $k\in N(i)\}$ построим множества

$$J(k,i)=\{j\in J(i)\,|\,k\succ_j i\},\ \ S(k,i)=\{j\in J(i)\,|\,k\succ_j i\}.$$

Считаем, что $i\in I_{j_0}$, если для каждого $k\in N(i)$ выполняется неравенство

$$g_k+\sum_{j\in S(k,i)}\max\{0;\max(p_{lj}-p_{kj}),l\in I_F\setminus N(i):k\succ_j l\succ_j i\}\geq\sum_{j\in J(k,i)}p_{kj},$$

и $i\notin I_{j_0}$, если найдется $k\in N(i)\}$, для которого указанное неравенство нарушается.

Содержательный смысл множества I_j поясняет следующая лемма, устанавливающая, что если Лидер планирует получить прибыль от потребителя $j\in J$ и при этом не открывает ни одного предприятия из множества I_j, то этот потребитель будет «захвачен» Последователем.

Рассмотрим ненулевой (0,1)-вектор $w=(w_i)$, $i\in I$, и обозначим через $I_0(w)$ множество $\{i\in I\,|\,w_i=1\}$. Для всякого $j\in J$ обозначим через $i_j(w)$ элемент $i_0\in I_0(w)$, такой, что $i_0\succcurlyeq_j i$ для всякого $i\in I_0(w)$. Если $u=(u_i)$ и $v=(v_i)$ — два (0,1)-вектора, то через $u\bigcup v$ обозначим (0,1)-вектор $w=(w_i)$, где $w_i=\max\{u_i,v_i\}$, $i\in I$.

Лемма 1.1.1. Пусть $\{I_j\}$, $j\in J$, — система подмножеств, определённая нестрогими ослабленными неравенствами. При любом допустимом некооперативном решении $(X,\tilde{Z})$, $X=((x_i),(x_{ij}))$, $\tilde{Z}=((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, задачи (*L*, *F*) для всякого $j_0\in J$, такого, что $p_{i_0j_0}x_{i_0j_0}>0$ для некоторого $i_0\notin I_{j_0}$, выполняется равенство $\sum\limits_{i\in I}\tilde{z}_{ij_0}=1$.

Доказательство. Для заданных (0,1)-векторов $x=(x_i)$ и $\tilde{z}=(\tilde{z}_i)$ рассмотрим элементы i_j, $j\in J$, где $i_j=i_j(x\bigcup\tilde{z})$. Предположим, что для некоторых $j_0\in J$ и $i_0\notin I_{j_0}$ имеем $x_{i_0j_0}>0$, но требуемое равенство не выполняется. Для данного $j\in J$ рассмотрим множества $N(i_0)$ и $J(i_0)$. Поскольку $i_0\notin I_{j_0}$, найдется $k\in N(i_0)$, такое что

$$g_k+\sum_{j\in S(k,i)}\max\{0;\max(p_{lj}-p_{kj}),l\in I_F\setminus N(i):k\succ_j l\succ_j i\}<\sum_{j\in J(k,i)}p_{kj}.$$

Для данного $k\in N(i_0)$ рассмотрим множества

$$S=\{j\notin J(i_0)\,|\,k\succ_j i_j\},\quad S_1=\{j\in S\,|\,\tilde{z}_{i_j}=1\}$$

и построим допустимое решение $Z=((z_i),(z_{ij}))$ задачи *F*, которое отличается от оптимального решения $\tilde{Z}$ тем, что $z_k=1$ и $z_{kj}=1$ для $j\in J(k,i_0)\bigcup S$, $z=0$ для $j\in S_1$.

Поскольку $S(k,i_0) \supset S_1$, для разности значений целевой функции задачи F на решениях $\tilde{Z}$ и Z справедливы соотношения

$$F_1(Z) - F_1(\tilde{Z}) = -g_k + \sum_{j \in J(k,i_0)} p_{kj} + \sum_{j \in S} p_{kj} - \sum_{j \in S_1} p_{i_j j} \geq -g_k + \sum_{j \in J(k,i_0)} p_{kj} - \sum_{j \in S_1} (p_{i_j j} - p_{kj})$$

$$\geq -g_k + \sum_{j \in J(k,i)} p_{kj} - \sum_{j \in S(k,i)} \max\{0; \max(p_{lj} - p_{kj}), l \in I_F \setminus N(i) : k \succ_j l \succ_j i\} > 0.$$

Это противоречит тому, что $\tilde{Z}$ — оптимальное решение задачи F. Лемма доказана.

Лемма 1.1.2. Пусть $\{I_j\}$, $j \in J$, — система подмножеств, определённая нестрогими ослабленными неравенствами. При любом допустимом решении $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, задачи (L, F) для всякого $j \in J$ справедливо равенство

$$\left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij}\right) = \left(\sum_{i \in I_j} p_{ij} x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij}\right).$$

Доказательство. Если $p_{ij} x_{ij} = 0$ для любого $i \in I$, то равенство выполняется. Пусть $p_{i_0 j} x_{i_0 j} > 0$ для некоторого $i_0 \in I$. Если $i_0 \in I_j$, то равенство также выполняется. Если же $i_0 \notin I_j$, то равенство справедливо, поскольку в силу леммы 1.1.1 имеем $\sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij} = 1$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть *оценочной*:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \left\{ -\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right\};$$

$$x_i + \sum_{k:\, i \succ_j k} x_{ij} \leq 1, \; i \in I, j \in J;$$

$$x_i \geq x_{ij}, \; i \in I, j \in J;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\}, \; i \in I, j \in J.$$

Из леммы 1.1.2 следует, что если $(X, \tilde{Z})$ — допустимое решение задачи (L, F), то величина $L(X, \tilde{Z})$ не превосходит значения целевой функции оценочной задачи на решении X. Поэтому оптимальное значение B_0 целевой функции оценочной задачи будет верхней границей для величины $L(X, \tilde{Z})$ при любом допустимом решении $(X, \tilde{Z})$ задачи (L, F). Таким образом, получаем

Теорема 1.1.1. Для любого допустимого решения $(X, \tilde{Z})$ задачи (L, F) выполняется неравенство $L(X, \tilde{Z}) \leq B_0$.

Для вычисления верхней границы значений целевой функции задачи (*L*, *F*) на допустимых некооперативных решениях рассмотрим систему подмножеств I_j, $j \in J$, определённую строгими ослабленными неравенствами. В случае такой системы подмножеств считаем, что $i \in I_{j_0}$, если для каждого $k \in N(i)$ выполняется неравенство

$$g_k + \sum_{j \in S(k,i)} \max\{0; \max(p_{lj} - p_{kj}), l \in I_F \setminus N(i) : k \succ_j l \succ_j i\} > \sum_{j \in J(k,i)} p_{kj}.$$

и $i \notin I_{j_0}$, если найдётся $k \in N(i)$, для которого указанное неравенство нарушается.

По аналогии с леммой 1.1.1 легко убедиться в справедливости следующего утверждения:

Лемма 1.1.3. Пусть $\{I_j\}$, $j \in J$, — система подмножеств, определённая строгими ослабленными неравенствами. При любом допустимом некооперативном решении $(X, \bar{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\bar{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, задачи (*L*, *F*) для всякого $j_0 \in J$, такого, что $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$ для некоторого $i_0 \notin I_{j_0}$, выполняется равенство $\sum_{i \in I} \bar{z}_{ij_0} = 1$.

Обозначим через B оптимальное значение целевой функции оценочной задачи, построенной с использованием системы подмножеств $\{I_j\}$, $j \in J$, определённой строгими ослабленными неравенствами.

По аналогии с теоремой 1.1.1 получаем

Теорема 1.1.2. Для любого допустимого некооперативного решения $(X, \bar{Z})$ задачи (*L*, *F*) выполняется неравенство $L(X, \bar{Z}) \le B$.

Легко увидеть, что $B \le B_0$.

Из теорем 1.1.1 и 1.1.2 вытекают достаточные условия точности получаемых верхних границ.

Пусть X^* — оптимальное решение оценочной задачи с системой подмножеств, определённой нестрогими (строгими) ослабленными неравенствами, и пусть $(X^*, \tilde{Z})$ — соответствующее решению X^* допустимое кооперативное (некооперативное) решение задачи (*L*, *F*).

Следствие 1.1.1. Если для всякого $j \in J$ выполняется равенство

$$\left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij}^*\right)\left(\sum_{i \in I} \bar{z}_{ij}\right) = 0,$$

то $(X^*, \bar{Z})$ — оптимальное кооперативное (некооперативное) решение задачи (*L*, *F*).

Утверждения (1.1.1) и (1.1.2) справедливы также и для задачи (L, F')

Таким образом, получаем, что в случае рассмотренных задач конкурентного размещения предприятий, одновременно с вычислением верхней границы строится допустимое кооперативное (некооперативное) решение задачи. В некоторых случаях это решение является оптимальным, в общем случае его можно рассматривать как начальное приближенное кооперативное (некооперативное) решение.

1.1.2. Алгоритмы локального поиска для задач конкурентного размещения предприятий

В предшествующем отчете показано, что по всякому допустимому решению X задачи L может быть построено соответствующее допустимое кооперативное (некооперативное) решение каждой из рассматриваемых задач конкурентного размещения предприятий. При этом, хотя в общем случае соответствующее допустимое решение $(X,\bar{Z})$ строится неоднозначно, значения целевой функции $L(X,\bar{Z})$ на всех таких решениях одинаковые. Таким образом, решение X однозначно задаёт значение целевой функции рассматриваемой задачи, а любое значение целевой функции задаётся некоторым допустимым решением X.

Заметим также, что само допустимое решение $X=((x_i),(x_{ij}))$ задачи L однозначно определяется (0,1)-вектором $x=(x_i)$. Поэтому любой (0,1)-вектор x однозначно определяет некоторое значение $L(X,\bar{Z})$ целевой функции рассматриваемой задачи на соответствующем допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X,\bar{Z})$.

Таким образом, получаем, что задачу поиска оптимального кооперативного (некооперативного) решения каждой из рассматриваемых задач конкурентного размещения предприятий можно представить как задачу максимизации некоторой псевдобулевой функции $f(x)$, $x\in B^m$. Эта функция задана неявным образом и для вычисления её значения необходимо найти оптимальное решение соответствующей задачи нижнего уровня и затем оптимальное решение соответствующей вспомогательной задачи.

В силу сказанного далее при построении алгоритмов вычисления приближенных решений исследуемых задач конкурентного размещения предприятий будем рассматривать задачу максимизации псевдобулевых функций $f(x)$, определённых на множестве (0,1)-векторов $x=(x_i)$, $i\in I$, и строить приближенные алгоритмы для этой задачи. Особенность рассматриваемых псевдобулевых функций состоит в том, что вычисление каждого значения такой функции может быть достаточно трудоёмкой процедурой, включающей решение двух

задач целочисленного линейного программирования. Будем считать также, что известно начальное приближенное решение задачи максимизации псевдобулевой функции. Таким решением является (0,1)-вектор $x^* = (x_i^*)$, порождаемый оптимальным решением X^* соответствующей оценочной задачи. Оптимальное значение целевой функции этой задачи даёт оценку сверху для значений псевдобулевой функции.

С учётом неявного задания рассматриваемых функций для построения алгоритмов их максимизации используем метод локального поиска и, в частности, простейший его вариант — стандартный алгоритм локального поиска.

Основным понятием метода локального поиска является понятие окрестности. Окрестностью решения x называется подмножество $N(x) \subset B^m$, заданное для всякого $x \in B^m$. Решение $x_0 \in B^m$ такое, что $f(x_0) \geq f(x)$ для всякого $x \in N(x_0)$ называется локально-оптимальным. Результатом работы алгоритма локального поиска является локально-оптимальное решение.

В случае множества B^m в качестве окрестности $N(x)$ обычно используются следующие множества:

$$N_1(x) = \{y \in B^m \mid d(x, y) = 1\},$$

$$N_2(x) = \{y \in B^m \mid d(x, y) = 2, d(0, x) = d(0, y)\},$$

где $d(x, y)$ — расстояние Хэмминга, равное числу несовпадающих компонент (0,1)-векторов x и y.

Стандартный алгоритм локального поиска по заданной окрестности $N(x)$, $x \in B^m$, включает конечное число однотипных шагов, на каждом из которых рассматривается некоторое текущее решение x_0. На первом шаге в качестве x_0 может быть взят любой (0,1)-вектор. Шаг состоит в поиске элемента $x' \in N(x)$, улучшающего текущее решение x_0, т.е. такого элемента $x' \in N(x)$, что $f(x') > f(x_0)$. Если решение x' найти не удается, то алгоритм останавливается и текущее решение x_0 есть результат его работы. В противном случае текущее решение x_0 заменяется на решение x' и начинается следующий шаг.

Способ выбора решения x' в алгоритме локального поиска нуждается в уточнении. Если задан некоторый порядок просмотра элементов множества $N(x_0)$, то решение x' может быть выбрано в результате частичного просмотра окрестности $N(x_0)$. Таким решением будет первый в заданном порядке элемент $x \in N(x_0)$, для которого $f(x) > f(x_0)$. При

полном просмотре окрестности $N(x_0)$ в качестве улучшающего решения выбирается такой элемент x', что $f(x') > f(x_0)$ и $f(x') \ge f(x)$ для каждого $x \in N(x_0)$.

В нашем случае локальный поиск по «широкой» окрестности, например окрестности $N(x) = N_1(x) \bigcup N_2(x)$, может оказаться достаточно трудоемкой процедурой. Поэтому определим для (0,1)-вектора x окрестность $N_0(x) \subset N_1(x) \bigcup N_2(x)$, которая включает относительно небольшое число существенных вариантов изменения текущего решения x.

Для произвольного ненулевого (0,1)-вектора $w = (w_i)$, $i \in I$, рассмотрим множество $I_0(w) = \{i \in I \mid w_i = 1\}$ и для всякого $j \in J$ вычислим элемент $i_j(w)$. Для всякого $k \in I_0(w)$ определим величину

$$\Delta_k(w) = -f_k + \sum_{j:k=i_j(w)} p_{kj},$$

которую назовем прибыльностью предприятия k относительно решения w.

Пусть задано решение $x = (x_i)$. Используя величину прибыльности, построим множество $N_0(x)$ «существенных» вариаций текущего решения x. Окрестность $N_0(x)$ считаем состоящей из (0,1)-векторов $x^k = (x_i^k)$, $k \in I$. При фиксированном $k \in I$ вектор x^k строится следующим образом.

Если $x_k = 1$, то полагается $x_i^k = x_i$ для $i \ne k$ и $x_k^k = 1$. После этого вектор x^k считается построенным.

Если $x_k = 0$, то полагается $x_i^k = x_i$ для $i \ne k$ и $x_k^k = 0$. Далее вычисляется величина $\Delta_k(x^k)$. Возможны два случая: $\Delta_k(x^k) \ge 0$ и $\Delta_k(x^k) < 0$. В первом случае, когда доходность предприятия k неотрицательная, для всякого $i \in I_0(x)$ вычисляется величина $\Delta_i(x^k)$. Если $\Delta_i(x^k) \ge 0$ для всякого $i \in I_0(x)$, т. е. открытие «нового» предприятия k не приводит к тому, что некоторые «старые» предприятия, открытые Лидером, становятся убыточными, то вектор x^k считается построенным. Если же $\Delta_i(x^k) < 0$ для некоторых $i \in I_0(x)$, то определяется элемент $i \in I_0(x)$ такой, что $\Delta_{i_0}(x^k) \le \Delta_i(x^k)$ для всякого $i \in I_0(x)$, полагается $x_{i_0}^k = 0$ и вектор x^k считается построенным.

Если $\Delta_k(x^k) < 0$, т. е. доходность нового предприятия отрицательная, то среди старых предприятий отыскивается такое, удаление которого максимально увеличивает доходность нового предприятия k. Для этого для всякого $l \in I_0(x)$ строится (0,1)-вектор $x^{kl} = \left(x_i^{kl}\right)$, где

$x_i^{kl} = x_i^k$ при $i \neq l$ и $x_l^{kl} = 0$, и вычисляется величина $\Delta_k(x^{kl})$. Далее определяется номер $l_0 \in I_0(x)$ такой, что $\Delta_k(x^{kl_0}) \geq \Delta_k(x^{kl})$ для всякого $l \in I_0(x)$. Если $\Delta_k(x^{kl_0}) \geq 0$, то полагается $x_{l_0}^k = 0$. После этого вектор x^k считается построенным.

Предлагаемый алгоритм построения приближенного решения задачи максимизации псевдобулевой функции $f(x)$ представляет собой стандартный алгоритм локального поиска по окрестности $N_0(x)$. Работа алгоритма начинается с решения x^*, полученного в результате вычисления верхней границы, и завершается построением локально-оптимального решения. Поэтому этот алгоритм будем называть также алгоритмом улучшения начального приближенного решения.

В данном алгоритме рассматриваются три способа выбора улучшающего элемента x' в окрестности $N_0(x) = \{x^k, k \in I\}$. При первом способе используется правило полного просмотра, а в двух других — частичного просмотра окрестности. При втором способе просмотр элементов множества $\{x^k, k \in I\}$ производится в порядке возрастания номера k, а при третьем в порядке неубывания числа вхождений элемента $k \in I$ в множествах I_j, $j \in J$, определенных при вычислении верхней границы.

Приведем результаты вычислительного эксперимента с предложенными алгоритмами построения локально-оптимального решения задачи максимизации псевдобулевой функции $f(x)$ в случае, когда ее значение определяется допустимым некооперативным решением задачи (L, F). Алгоритмы отличаются способами выбора улучшающего элемента окрестности, и им присвоены номера 1, 2, 3 в соответствии с номерами используемых способов выбора улучшающего элемента.

Рассматривается класс задач конкурентного размещения предприятий A из [1]. Задачи этого класса являются задачами конкурентного размещения предприятий на сети. В таких задачах, во-первых, множество возможных мест размещения предприятий I и множество потребителей J совпадают с множеством вершин некоторого графа и, во-вторых, отношение порядка для каждого потребителя определяется длинами кратчайших путей из соответствующей вершины во все другие вершины графа. Кроме того, величина дохода, получаемого от потребителя, одинаковая для всех предприятий, находящихся от него на расстоянии не более заданного, и равняется нулю для остальных. Поэтому примеры из класса A являются задачами с монотонными величинами доходов.

Вычисления проводились для четырех подкласов $A20$, $A30$, $A40$, $A50$ задач данного класса,отличающихся числом узлов сети, равным соответственно 20, 30, 40 и 50. В таблице

1 для серий из 20 примеров каждого подкласса приводятся средние значения следующих показателей, полученных в результате работы трех рассмотренных алгоритмов:

B — величина верхней границы;

L — значение целевой функции задачи (L, F) на найденном допустимом кооперативном решении;

$|x|$ — число открываемых Лидером предприятий, определяемое найденным решением;

$|z|$ — число открываемых Последователем предприятий, определяемое найденным решением;

S — число шагов алгоритма;

L/B — оценка относительной точности найденного допустимого некооперативного решения, равная отношению величин L и B.

Кроме того, в таблице для задач из подклассов $A20$ и $A30$ приводятся средние значения следующих величин:

L^* — значение целевой функции задачи (L, F) на оптимальном некооперативном решении;

B/L^* — относительная точность вычисленной верхней границы, равная отношению величин B и L^*;

L/L^* — относительная точность найденного допустимого некооперативного решения, равная отношению величин L и L^*.

Таблица 1.

Задачи	Алг-м	B	L	$\|x\|$	$\|z\|$	S	L/B	L^*	B/L^*	L/L^*
$A20$	1 2 3	84,73 84,73 84,73	37,50 36,20 37,25	3,18 3,03	1,85 1,78 1,85	2,80 3,80 3,40	0,44 0,43 0,44	42,55 42,55 42,55	1,99 1,99 1,99	0,88 0,85 0,88
$A30$	1 2 3	132,45 132,45 132,45	58,68 54,32 55,87	4,80 4,75 4,75	2,60 2,68 2,60	3,57 4,35 4,35	0,44 0,41 0,42	67,90 67,90 67,90	1,95 1,95 1,95	0,86 0,80 0,82
$A40$	1 2 3	198,05 198,05 198,05	87,88 84,40 85,70	7,05 6,80 6,65	3,40 3,40 3,58	4,70 6,15 6,10	0,44 0,43 0,43			
$A50$	1 2 3	240,20 240,20 240,20	104,13 101,53 101,03	7,90 7,80 7,43	4,08 3,98 4,04	4,82 7,15 7,05	0,43 0,42 0,42			

Из таблицы 1 видно, что средняя точность приближенных решений, полученных рассматриваемыми алгоритмами, примерно одинаковая. Среднее значение верхней границы почти в два раза превосходит оптимальное значение целевой функции. Такая точность не является удовлетворительной для получения оценок точности вычисляемых приближенных решений. Однако начальное приближенное решение, получаемое одновременно с вычислением верхней границы, является хорошей основой для построения локального максимума целевой функции. Для этого, как следует из таблицы, достаточно в среднем 3–7 шагов. Получаемое локально-оптимальное решение для некоторых примеров является оптимальным. Из результатов вычислений ясно, что алгоритм поиска «хорошего» приближенного решения не должен завершаться построением первого локально-оптимального решения.

1.2. Анализ сложности различных задач теории расписаний (цеховых, с ресурсными ограничениями, с маршрутизацией)

Следуя (Пинедо 2005), мы можем определить процесс планирования на производстве как процесс принятия решений, сопровождаемый решением задачи оптимального размещения ограниченных ресурсов в пространстве и времени, соответствующего целям и задачам данного производства. Ресурсные ограничения являются одной из наиболее критических тем в календарном планировании (см., например, работы (Мингоцци и др. 1998), (Херроэлен и др. 1998), (Брукер и др. 1999)). Объектом нашего исследования также является задача распределения ограниченного ресурса в одномашинной модели, называемая «задачей передислокации». При этом рассматриваемые нами ресурсные ограничения отличаются от традиционных ограничений на так называемые *возобновимые ресурсы* (см. (Блажевич и др. 1983), (Хаммер 1986)) величиной количества ресурса, возвращаемого работой в ресурсный пул по её окончании. В задачах с возобновимыми ресурсами эта величина в точности совпадает с количеством ресурса, взятого работой из пула в момент её начала, в то время как в задаче передислокации эти две величины никак не связаны одна с другой.

Говоря формально, мы решаем задачу о выполнении работ из заданного конечного множества $N=\{1\ldots,n\}$ на одной машине. Исходно в ресурсном пуле имеется Q_0 единиц ресурса. Каждая работа $i \in N$ появляется в системе в заранее заданный момент времени r_i (лишь только после этого момента работа может быть «поставлена в расписание на выполнение») и имеет заданную длительность p_i. Для того, чтобы можно было начать выполнение этой работы, требуется изъять из ресурсного пула (в момент начала выполнения работы) заданное количество α_i единиц ресурса. В то же время, по окончании выполнения работы она «возвращает» в ресурсный пул β_i единиц ресурса. Без ограничения общности мы можем предполагать, что эти величины неотрицательны. Машина выполняет в каждый момент времени не более одной работы. Прерывания работ запрещены. Таким образом, работа i может начать выполнение в момент t, только если (1) она уже появилась в системе $(t > r_i)$, (2) уровень ресурса в ресурсном пуле достаточен (не меньше величины α_i), и (3) машина не занята другой работой. Все упомянутые параметры принимают неотрицательные целые значения (за исключением суммарного вклада работы в ресурсный пул, определяемого как $\delta_i = \beta_i - \alpha_i$ и могущего принимать отрицательные значения). При заданном начальном уровне ресурса в ресурсном пуле, расписание выполнения работ считается допустимым, если

оно удовлетворяет ограничениям на моменты поступления работ и выполнение никакой из работ не «заблокировано» вследствие отсутствия необходимого количества ресурса. Целью решения задачи является построение допустимого расписания минимальной длины (C_{max}).

Используя стандартные трёхпольные обозначения, введённые Грэмом и др. (1979), мы можем обозначить нашу задачу как $1|rp, r_i|C_{max}$. Обозначение «rp» во втором поле означает, что мы рассматриваем ресурсные ограничения, подобные тем, что рассматриваются в «задаче передислокации» (relocation problem). Впервые «задача передислокации» была предложена и сформулирована Капланом и его коллегами (см. (Каплан 1986), (Каплан и Берман 1988)) для проекта развития *и* реконструкции Бостона (США). В районе города, где запланирована реконструкция, имеется ряд старых зданий, подлежащих уничтожению. На месте этих зданий по проекту предполагается воздвигнуть новые объекты – жилые здания и объекты социально-культурного назначения. При этом жильцов зданий, подлежащих уничтожению, требуется предварительно переселить в какое-то временное жильё. Городские власти обеспечивают проект некоторой суммой из бюджета, необходимой для создания фонда временного жилья. В дальнейшем фонд временного жилья может пополняться за счёт поступления в него части квартир из вновь построенного жилья. По окончании строительства нового жилья в очередном микро-районе часть жильцов освобождает свои временные жилища, переселяясь в новые квартиры этого района. Задачей команды проектировщиков является нахождение такой последовательности реконструкции микро-районов, при которой в каждый момент выполнения проекта фонд временного жилья располагает достаточными ресурсами для размещения всех эвакуируемых жильцов. В своей исходной постановке «задача передислокации» рассматривала в качестве входных данных лишь Q_0, α_i , β_i и отыскивала допустимую последовательность реконструкции районов при заданном начальном уровне ресурса (фонда временного жилья). При этом предполагалось, что любая из «элементарных» работ (состоящая в реконструкции отдельно взятого микрорайона) может выполняться в любой момент времени. В оптимизационном аналоге этой задачи требуется вычислить такой минимальный исходный уровень ресурса, который гарантирует существование допустимой последовательности работ.

В отличие от исходной постановки, мы рассматриваем более общую ситуацию, когда время готовности разных работ к исполнению различно. Задача в этой новой постановке имеет следующую мотивировку. Каждый микрорайон, подлежащий реконструкции, может содержать ряд объектов, имеющих временные обязательства по своему функционированию, и работа по реконструкции микрорайона может начаться лишь после момента истечения наиболее позднего из обязательств, наложенных на объекты данного микрорайона. Таким

образом, времена готовности разных микрорайонов к предстоящей реконструкции могут быть различны. Ясно, что новая (более общая) модель имеет больше потенциальных практических приложений.

Следует отметить, что исследование задачи передислокации, начатое в 80-е годы, по началу не привлекло достаточного внимания со стороны расписальщиков-теоретиков. Каплан и Амир (1988) обнаружили эквивалентность оптимизационной задачи передислокации (на вычисление достаточного минимума исходного уровня ресурса) классической двухмашинной задаче flow shop на минимум длины расписания, исследованной Джонсоном в 1954 году. Эта эквивалентность дала новую интерпретацию двухмашинной задачи flow shop и алгоритма Джонсона в терминах задачи передислокации. И такая интерпретация более естественна и очевидна, чем те, что могут быть найдены в большинстве учебников по теории расписаний. Информацию о потенциальных применениях этой эквивалентности можно почерпнуть из статьи Ченга и Лина (2009). Помимо применения к проекту реконструкции, задача передислокации имеет приложения и в других областях, таких как управление памятью (Каплан и Амир, 1988) и финансовое планирование (Ксай 1997). В интересах развития теории, задача передислокации порождает также много новых исследовательских проблем. Так, например, задача передислокации с параллельными машинами на минимум длины расписания рассматривалась Капланом (1986) и Капланом и Амиром (1988). Её сложность оставалась открытой, пока Кононов и Лин (2006) не показали, что задача NP-трудна в сильном смысле даже в случае, когда имеется лишь две машины, длительности всех работ единичны, а вклад каждой работы в ресурсный пул неотрицателен. Кононов и Лин (2006) построили приближённые алгоритмы и получили оценки их относительной погрешности в наихудшем случае. Одномашинная задача на минимум взвешенной суммы времён завершения работ исследовалась в работе Кононова и Лина (2010). Они доказали NP-трудность задачи и разработали два приближённых алгоритма с гарантированными оценками относительной погрешности. Лин и Лью (2008) исследовали задачу передислокации с обобщёнными директивными сроками на максимум суммарного дохода, определённую в терминах «частичных платежей». Они доказали NP-трудность задачи в сильном смысле и нашли нижние оценки и правила доминирования для алгоритма ветвей и границ.

В проводимых нами исследованиях впервые исследуется задача передислокации с неодновременным поступлением работ. Получены следующие результаты. Во-первых, выявлены некоторые базовые свойства допустимых и оптимальных последовательностей работ исходного примера нашей задачи. На основе этих свойств разработан комбинаторный алгоритм решения задачи в общем случае. Затем мы преобразуем этот алгоритм в алгоритм

динамического программирования с $3m$ независимыми динамическими параметрами, где m есть число различных моментов появления работ. Таким образом, когда число различных моментов появления работ ограничено константой, алгоритм ДП работает псевдо-полиномиальное время. В дополнение к этому, доказано, что если параметр m является переменной, то задача становится NP-трудной в сильном смысле. Таким образом, никакого псевдо-полиномиального алгоритма не может существовать в случае переменного m (если справедлива гипотеза о $P \neq NP$). Кроме того, доказано, что наш результат не может быть улучшен до полиномиального по времени алгоритма при m, ограниченном любой константой, поскольку даже при m=2 задача остаётся NP-трудной. Наконец, задача исследуется по отношению к положительным/отрицательным вкладам работ в ресурсный пул. Мы показываем, что если все работы имеют неотрицательные вклады, то задача решаема за полиномиальное время, тогда как противоположный случай (когда вклады всех работ отрицательны) является NP-трудной в сильном смысле задачей.

II. Одним из первых результатов по классификации сложности задач из бесконечного класса был классический результат Шафера (1978). Рассматривая задачи выполнимости булевых формул, он обнаружил бесконечный класс задач, для которых удалось установить так называемое свойство дихотомии. Данное свойство означает, что каждая задача из класса является либо полиномиально разрешимой, либо NP-полной. Тем самым, явно исключается возможность существования в данном классе задач «промежуточной» сложности. Мы также обращаемся к данной теме, но – по отношению к классическим цеховым задачам теории расписаний (без прерываний операций): job shop, open shop и mixed shop.

Следует отметить, что задачи на составление расписаний повсеместно возникают при моделировании реальных процессов, например, при планировании работы заводских производственных линий, при передаче пакетов информации в сетях связи, при планировании работы школ, вузов в фиксированной временной сетке, и т.д. и т.п. Одной из фундаментальных целей при исследовании таких задач является классификация задач на «лёгкие» и «трудные».

Чтобы сформулировать полученные результаты, для начала давайте приведём формулировки рассматриваемых задач.

Задача job shop возникает в многостадийном производственном процессе, в котором заданное множество *работ* $\{J_1,\dots,J_n\}$ требуется выполнить на *машинах* из заданного множества $\{M_1,\dots,M_m\}$; при этом каждая работа бывает вынуждена пройти несколько последовательных стадий своего выполнения (называемых операциями), выполняемых на разных машинах. Более точно, работа J_j представляет собой цепь из η_j операций $O_{1j},\dots,O_{\eta_j j}$,

и при этом каждая операция O_{ij} может стартовать лишь после завершения предыдущей операции O_{i-1j}. Каждой операции O_{ij} заранее приписана машина, на которой она должна выполняться непрерывно в течение заданного времени p_{ij} (при этом мы допускаем существование операций нулевой длительности, что является существенным для задач данного типа.) В любом допустимом расписании для этой задачи в каждый момент времени (за исключением, быть может, конечного множества моментов) каждая работа может выполняться не более чем на одной машине, а каждая машина может выполнять не более одной работы.

Общая задача open shop отличается от задачи job shop тем, что порядок выполнения операций каждой работы не фиксирован заранее, а является предметом решения задачи.

Кроме того, в классической задаче open shop мы дополнительно предполагаем, что каждая работа имеет не более одной операции на каждой машине.

Наконец, в смешанной задаче (mixed shop) каждый пример может содержать как работы типа job shop (с фиксированным порядком операций), так и работы типа open shop (со свободным порядком операций).

Целью является нахождение расписания минимальной длины. Иначе говоря, ставится задача минимизации момента (C_{max}) завершения наиболее поздней операции. В задачах распознавания нашей целью является проверка существования допустимого расписания, длина которого не превосходит заданного параметра C (в этом случае значение параметра является частью входа).

Как правило, каждая задача на составление расписания может быть описана в терминах многих параметров. Кроме уже упомянутого параметёра *C* в анализе сложности наших задач мы будем использовать такие параметры как максимальная длительность операции (p_{max}) и максимальное число операций одной работы (η). Ясно, что ограничения, накладываемые на длину расписания, ограничивают также параметры p_{max} и η (по крайней мере, *C* ограничивает число ненулевых операций каждой работы). С другой стороны, два последних параметра могут рассматриваться как независимые (в том числе, независимые от *C*, что в большой степени верно для «длинных» расписаний). Зависимость сложности задачи от каждого из этих параметров, взятых по-отдельности, являлась предметом исследований многих статей по теории расписаний (обзор этих результатов будет приведён ниже).

Четвёртым параметром, взятым нами для анализа сложности, является *тип задачи*, принимающий значения из частично упорядоченного множества $\{J, O, \tilde{O}, (J+O), (J+\tilde{O})\}$; где $J, \tilde{O}$ и O обозначают задачи job shop, open shop и классическую open shop соответственно, тогда как (J+O) и $(J+\tilde{O})$ обозначают их смешения.

На парах элементов этого множества мы определяем отношение частичного порядка $\leq$, где $X \leq Y$ означает, что тип задачи X является подтипом задачи Y (или по-другому, что множество входов задачи Y содержит множество входов задачи X). Отношение $\leq$ определено для пар: $O \leq \tilde{O}$, $O \leq J+O$, $\tilde{O} \leq (J+\tilde{O})$, $J \leq (J+O)$, $(J+O) \leq (J+\tilde{O})$, а также для пар $X \leq X$ для всевозможных значений X параметра «тип задачи» и для всех транзитивных замыканий определённых выше отношений. Минимальную длину расписания (по всем допустимым расписаниям для данного примера) будем обозначать C^*_{max}.

Будем рассматривать бесконечный класс задач распознавания, каждая из которых является подзадачей смешанной задачи $(J+\tilde{O})$ с заданной верхней границей на длину расписания. Вопросом в этих задачах распознавания является вопрос о существовании допустимого расписания, удовлетворяющего заданному набору ограничений на выбранные нами ключевые параметры. В качестве ограничений на эти параметры будут рассматриваться их верхние границы (так называемые «ограничители»). Ограничители на параметры «тип задачи», p_{max}, η и C будут обозначаться $\overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{p}$, $\bar{\eta}$ и $\bar{C}$ соответственно. Они будут образовывать 4-мерный *вектор-ограничитель* ($\overline{\mathfrak{M}}, \bar{p}, \bar{\eta}, \bar{C}$), чьи конкретные значения будут определять отдельных представителей в исследуемом нами бесконечном классе задач. Такое обозначение вектора-ограничителя будет использоваться нами в приводимой ниже таблице результатов. Однако в тексте мы будем использовать более традиционные трёх-польные обозначения задач, в которых ограничения на параметры η, p_{max} и C будут явно задаваться во втором поле (в форме неравенств), тогда как в первом поле будет указываться тип задачи, а в третьем поле – либо целевая функция C_{max} (если мы говорим об оптимизационной задаче), либо неравенство $C_{max} \leq C$ (если мы рассматриваем задачу распознавания).

Общий обзор результатов и мотивация исследований. Одним из популярных способов проведения границы между «лёгкими» и «трудными» задачами с какой-либо целочисленной целевой функцией $F(S)$ является нахождение целого значения K, такого что проверка существования расписания S со значением функции $F(S) \leq K$-1 является полиномиально разрешимой проблемой, тогда как проверка существования допустимого расписания S со значением $F(S) \leq K$ NP-полна. Заметим, что из последнего результата при K>0 также следует невозможность построения приближённого алгоритма полиномиальной трудоёмкости с гарантированной оценкой относительной погрешности, лучшей величины $(K+1)/K$ (при условии справедливости гипотезы $P \neq NP$).

Наиболее часто результаты такого типа можно наблюдать для задач на минимум длины расписания (так называемые «короткие расписания»). Первым примером подобного результата в теории расписаний является доказательство (принадлежащее Ленстре и Ринноой-Кану, 1978) NP-полноты проверки существования расписания длины 3 для

выполнения на идентичных параллельных машинах множества работ с заданными ограничениями предшествования. Позднее этот подход был распространён на более общую задачу с неродственными параллельными машинами (см. Ленстра, Шмойс и Тардош 1990), задачу построения расписаний с коммуникационными задержками (Хогевин, Ленстра и Вельтман 1994), задачу job shop с нулевыми задержками работ (Бансал, Махдиан и Свириденко, 2005) и многие другие задачи.

Что касается цеховых задач на построение расписаний минимальной длины, первый анализ сложности «коротких» задач был выполнен Вильямсоном и др. в 1997, которые показали, что проверка существования допустимого расписания длины 3 для заданного примера задачи open shop либо job shop реализуется за полиномиальное время, тогда как для длины расписания 4 такой полиномиальной процедуры не существует (при условии справедливости гипотезы $P \neq NP$), поскольку обе эти задачи распознавания (open shop и job shop) являются NP-полными.

Первое направление наших исследований также касается анализа сложности «коротких» цеховых задач, т.е. анализа зависимости сложности задачи от параметра C и связанных с ним параметров η и p_{max}. Наиболее интересным, на наш взгляд, является установление зависимости сложности задачи от комбинации ограничений на эти параметры. Главной целью такого «многопараметрического» анализа сложности является осуществление полного анализа сложности бесконечного класса задач распознавания, определённых для всевозможных комбинаций ограничений на выбранные ключевые параметры, и в качестве удобного инструмента для такого анализа мы рассматриваем понятие базисной системы подзадач. Когда такая система найдена и конечна, то для определения сложности любой задачи из бесконечного класса достаточно сравнить её вектор-ограничитель с вектором-ограничителем каждой базисной подзадачи. Если вектор-ограничитель исследуемой задачи мажорируется вектором-ограничителем полиномиально разрешимой базисной подзадачи, мы заключаем, что исследуемая задача также полиномиально разрешима. Напротив, если вектор-ограничитель исследуемой задачи мажорирует вектор-ограничитель NP-полной базисной подзадачи, наша задача также является NP-полной. (По определению базисной системы, одна из двух альтернатив обязана выполниться, если таковая система существует.) Таким образом, доказательство существования базисной системы задач в заданном бесконечном классе влечёт свойство дихотомии этого класса.

В упомянутой выше статье Шафером (1978) был предложен другой подход к осуществлению полного анализа сложности бесконечного класса задач. Для класса задач выполнимости булевых формул, в котором каждая задача определяется некоторым конечным множеством S булевых функций, он показал, что для определения сложности

любой задачи достаточно проверить, удовлетворяет ли множество S хотя бы одному свойству из заданного конечного множества. Поскольку каждое из свойств легко проверяемо, это даёт эффективный инструмент установления сложности любой задачи из этого класса. Однако для достижения этой цели нам не требуется сравнения определяющего множества S с другими подобными множествами (определяющими какие-либо «базисные задачи»), да и никаких «базисных задач» не определяется для заданного множества свойств, что демонстрирует различие между этими двумя подходами.

Другая линия наших исследований касается вопроса о том, как смешивание различных типов задач влияет на сложность получаемой задачи. Как известно, смешанная задача может иногда обладать свойствами, разительно отличающими её от исходных задач. Такой феномен по отношению к задачам job shop и open shop с прерываниями и целочисленными входными данными был отмечен Баптистом и др. (2011). Как известно, для любого примера этих двух задач существует оптимальное расписание, в котором все точки переключения (моменты прерывания и возобновления операций, а также моменты их начала и окончания) целочисленны. Но как показано Баптистом и др. (2011), для задачи, получаемой смешением job shop и open shop, данное свойство не выполняется. Более того, длина оптимального расписания может быть нецелой.

Аналогичный феномен (появления нового свойства у смешанной задачи) отмечается в наших исследованиях по отношению к такой характеристике как вычислительная сложность задачи. Как было доказано в статье (Вильямсон и др. 1997), существование допустимого расписания длины 3 для заданного примера задачи job shop или open shop может быть проверено за полиномиальное время. В противоположность этому результату, мы показываем, что смешение этих двух задач распознавания даёт NP-полную проблему по отношению к тому же самому вопросу. Вот почему тип задачи (open shop, job shop или mixed shop) выбран нами в качестве ключевого параметра в много-параметрическом анализе сложности.

Известные результаты

Сложность точного решения. Простая NP-трудность задач job shop и open shop была установлена Ленстрой, Ринноой Каном и Брукером (1977) и Гонзалезом и Сани (1976) уже для случаев двух и трёх машин, соответственно. NP-трудность в сильном смысле для задач с переменным числом машин непосредственно следует из результатов об NP-трудности построения коротких расписаний (результаты Вильямсона и др. 1997). Эффективные алгоритмы известны лишь для очень ограниченных постановок, имеющих либо константное число работ, либо две машины, либо специальные свойства длительностей операций, и т.п. Такие результаты можно найти, например, в обзорных статьях (Чен, Поттс, Вёгингер, 1998)

либо (Лолэ и др. 1993). «Труднорешаемость» задачи job shop была практически продемонстрирована тем фактом, что простой пример этой задачи с 10 работами и 10 машинами, предложенный для решения Фишером и Томпсоном в 1963 году, оставался нерешённым в течение более 20 лет, несмотря на многочисленные попытки. (Лишь только в 1989 году Карлье и Пинсону удалось найти решение и доказать с использованием численных методов его оптимальность.) Более полный обзор относящихся к этой теме результатов и ссылки на другие работы можно найти в обзорах (Лолэ и др. 1993) и (Чен, Поттс, Вёгингер, 1998).

Анализ сложности «коротких» цеховых задач. Вильямсон и др. (1997) доказали, что проверка существования допустимого расписания длины 3 в задачах open shop и job shop и нахождение такого расписания могут быть выполнены за полиномиальное время.

В качестве отрицательных результатов, они показали, что задачи распознавания $J|p_{ij} = 1, \eta \leq 3|C_{max} \leq 4$ (т.е. проверка существования расписания длины не больше 4 для задачи job shop с единичными длинами операций и не более чем тремя операциями каждой работы) и $O|p_{ij} \in \{1,2\}, \eta \leq 3|C_{max} \leq 4$ (т.е. проверка существования расписания длины не больше 4 для задачи open shop с длительностями операций 1 или 2 и не более чем тремя операциями каждой работы) NP-трудны.

Анализ задач с ограничениями на параметр η. Джексон (1956) представил точный полиномиальный алгоритм решения двухмашинной задачи job shop $J2|\eta \leq 2|C_{max}$. Ленстра, Ринноой Кан и Брукер (1977) показали, что двухмашинная задача job shop становится NP-трудной, даже если всего одна работа имеет три операции, тогда как остальные работы имеют по одной операции. (Таким образом, задача $J2|\eta \leq 3|C_{max}$ NP-трудна.) С другой стороны, Неумытов и Севастьянов (1993) доказали NP-трудность задачи $J3|\eta \leq 2|C_{max}$ даже в специальном случае, когда имеется только два типа маршрутов работ по машинам: $M_1 \to M_3$ и $M_2 \to M_3$. Остаётся открытым вопрос, поставленный Гонзалезом и Сани в 1976 году: является ли полиномиально разрешимой трёх-машинная задача open shop с не более чем двумя операциями каждой работы (т.е. задача $O_3|\eta \leq 2|C_{max}$?).

Была доказана полиномиальная разрешимость двух специальных случаев этой задачи. Сначала Дробошевич и Струсевич (1999) доказали полиномиальную разрешимость частного случая этой задачи, в котором имеется машина-«узкое место» (одна из двух операций каждой работы выполняется на этой машине). Затем Каширских и др. (2001) показали, что в указанной выше задаче одна из машин имеет нагрузку не менее трёх максимальных операций, то задача разрешима за линейное время.

Анализ задач с ограничениями на максимальную длительность операции. Прежде всего, отметим, что задача $\bar{O}|p_{max} \leq 1|C_{max}$ является ничем иным как задача раскраски

рёбер двудольного мультиграфа, и следовательно, полиномиально разрешима. На самом деле, по анализу сложности задач с единичными длительностями операций имеется множество результатов, с которыми можно ознакомиться, например, на сайте Брукера (см. Брукер и Кнуст, 2000) и по обзорной статье Тимковского (2003).

Анализ сложности смешанных задач теории расписаний. Как показано в представительной обзорной работе (Шахлевич и др. 2000), к смешанной задаче было привлечено достаточно много внимания со стороны расписальщиков. При этом анализ сложности проводился по отношению к таким параметрам задачи как число машин, число работ типа job-shop и число работ типа open-shop.

Многопараметрический анализ сложности. Первый полный четырёхпараметрический анализ сложности был выполнен Кононовым и Севастьяновым (2000) по отношению к задаче о связной предписанной раскраске, поставленной Визингом (1999). Позднее аналогичный четырёхпараметрический анализ сложности был предпринят Каширских, Севастьяновым и Черных (2000) к задаче open shop по отношению к таким параметрам как число машин m, максимальное число операций на машине μ, число работ n и максимальное число операций одной работы (η). Рассматривался класс подзадач, генерируемых всевозможными комбинациями ограничений на указанные четыре параметра. Было показано, что если исключить из этого класса так называемые «тривиальные» подзадачи, то оставшийся бесконечный класс задач обладает конечной базисной системой, состоящей из 8 либо 12 подзадач. (Подзадача называется «тривиальной», если общее число операций в любом примере не превосходит заранее заданной константы, либо если каждая работа состоит из одной операции – все эти задачи решаются за линейное время.) Истинный размер базисной системы станет известным после получения (отрицательного или положительного) ответа на упомянутый выше открытый вопрос, поставленный Гонзалезом и Сани. Тем не менее, даже такой неполной информации о базисной системе оказалось достаточно для авторов статьи (Каширских и др. 2000), чтобы выполнить почти полный анализ сложности упомянутого выше класса задач. (Фактически, остался невыясненным сложностной статус лишь двух задач из бесконечного класса: $O3|\eta \leq 2|C_{max}$и эквивалентной ей задачи $O|n \leq 3, \mu \leq 2|C_{max}$.) Некоторые теоретические результаты общего характера по многопараметрическому анализу сложности задач представлены в работе Севастьянова (2005), где было введено понятие базисной системы подзадач и сформулированы условия, достаточные для существования, единственности и конечности базисной системы.

Новые результаты

Ниже представлены новые полученные нами результаты по анализу сложности пяти цеховых задач: $J, O, \bar{O}, (J + O)$ и $(J + \bar{O})$ на минимум длины расписания. Эти задачи

исследуются при ограничениях, налагаемых на такие параметры как максимальная длительность операции, максимальное число операций каждой работы (η) и верхняя граница на длину расписания (C). При анализе сложности класса подзадач общей задачи $J+\bar{O}$ будут рассматриваться две схемы кодирования: «обычная» и «компактная». Будет показано, что, несмотря на их неэквивалентность, они порождают эквивалентные классификации сложности подзадач из рассматриваемого класса. В частности, получены следующие перечисленные ниже результаты. (Все эти результаты могут рассматриваться как независимые друг от друга результаты по анализу сложности некоторых частных подзадач. Однако, лишь их полная совокупность позволяет сделать вывод о неулучшаемости каждого отдельного результата и о полноте данной системы результатов, дающей ключ к определению сложности любой подзадачи из бесконечного класса.)

1. Задача job shop с не более чем двумя операциями каждой работы и единичными длительностями операций (т.е задача $J|p_{ij}=1,\eta\le 2|C_{max}$) полиномиально разрешима. (Алгоритм основывается на алгоритме рёберной раскраски двудольного графа.)
2. Более общая смешанная задача $(J+\bar{O})|p_{ij}=1,\eta\le 2|C_{max}$ также полиномиально разрешима. Алгоритм её решения является комбинацией линейного по сложности алгоритма ориентации рёбер и упомянутого выше алгоритма решения задачи job shop.
3. Задача проверки существования расписания длины не более 2 для смешанной задачи $(J+\bar{O})||C_{max}\le 2$ полиномиально разрешима.
4. Смешанная задача $(J+O)|p_{ij}=1,\eta\le 3|C_{max}\le 3$ NP-полна.
5. Смешанная задача $(J+O)|p_{ij}\in\{1,2\},\eta\le 2|C_{max}\le 3$ NP-полна.
6. Задача open shop $O|p_{ij}\in\{1,2\},\eta\le 2,\mu\le 3|C_{max}\le 4$ NP-полна.
7. Результат улучшает результат из работы Вильямсона и др. (1997), где доказана полнота задачи $O|p_{ij}\in\{1,2\},\eta\le 3,\mu\le 3|C_{max}\le 4$, и «закрывает» открытый вопрос, поставленный Каширских и др. (2000). (В этой работе было доказано, что $O|p_{ij}\le 3,\eta\le 2,\mu\le 3|C_{max}\le 6$ является NP-полной. Поскольку было известно (Вильямсон и др. 1997), что аналогичная задача с ограничением $C_{max}\le 3$ полиномиально разрешима, оставался открытым вопрос о сложности задач с промежуточными ограничениями $C_{max}\le 4$ и $C_{max}\le 5$. Наш новый результат устраняет этот пробел.
8. Задача job shop $J|p_{ij}\in\{1,2\},\eta\le 2|C_{max}\le 4$ NP-полна.

III. Рассматривается задача потокового типа с буфером, которая может применяться для построения расписания представления (презентации) медиа-объектов (файлов) в автоматизированной презентации. Медиа-объекты загружаются из удаленной базы данных и могут транслироваться в произвольном порядке. Для каждого объекта или работы заданы время его загрузки и время его обработки (воспроизведения). Воспроизведение объекта не может начаться раньше окончания его загрузки. При загрузке медиа-объект поступает в буфер транслирующего устройства и покидает его сразу после завершения его воспроизведения. Для обеспечения хорошего качества презентации требуется составить расписание загрузки и представления объектов, так чтобы минимизировать общее время презентации, то есть минимизировать время окончания представления последнего медиа-объекта. Такие задачи имеют большое значение в создании электронно-цифровых библиотек и музеев.

Предлагаемая модель оптимизации последовательности обработки медиа-объектов может быть рассмотрена как задача потокового типа на двух машинах $F2||C_{max}$, также известная как двухмашинная задача Джонсона. Действительно, рассмотрим время загрузки a_i и время воспроизведения b_i объекта i как длительности операций работы i на первой и второй машинах соответственно. Любая работа не может стартовать на второй машине до момента её завершения на первой машине. Требуется минимизировать длину полученного расписания, или время завершения последней работы, обозначаемое C_{max}.

В приложениях, в которых используются переносные транслирующие устройства, необходимо учитывать размер буфера, позволяющего хранить загруженные объекты. Для конфигурации сетей с достаточно стабильной скоростью передачи (например, когда пропускная способность сети ограничена медленной пропускной способностью самого устройства) время загрузки объекта (то есть длина операции работы на первой машине) пропорционально его размеру. Следовательно, и количество объема буфера, занимаемого загруженной работой, линейно пропорционально времени её выполнения на первой машине. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что время загрузки объекта просто равно его размеру. Действительно, всегда можно выбрать такой масштаб, что единица размера объекта загружается за единицу времени. Кроме того, предполагается, что загрузка и воспроизведение объекта не могут быть прерваны, то есть все операции выполняются без прерывания.

Итак, рассматриваемая задача относится к задачам потокового типа на двух машинах с буферным ограничением на общий размер загруженных работ. Задачи с буфером стали популярны в последнее десятилетие и часто встречаются как объект исследования в статьях по теории расписаний. Однако большинство статей рассматривает

так называемый промежуточный буфер, то есть работа покидает буфер в момент начала её выполнения на второй машине. В нашей задаче, как было описано выше, работа покидает буфер в момент завершения её выполнения на второй машине; то есть работа, которая выполняется на второй машине, всё ещё оккупирует буферное пространство. Такие задачи впервые были рассмотрены в статье (Лин и др. 2008).

Мы рассматриваем задачу потокового типа на двух машинах с буфером на второй машине и двумя различными способами загрузки и изучаем сложность подзадач, возникающих в обеих моделях при дополнительных ограничениях. В (Лин и др. 2008) рассматривался случай, когда новый объект не загружается, пока свободное пространство в буфере недостаточно для помещения этого объекта. То есть, если размер загружаемого файла больше размера свободного пространства буфера, то требуется подождать до завершения презентации одного или более загруженных объектов. Мы будем ссылаться на такую модель как на модель с пассивной загрузкой и обозначать соответствующую задачу *PP*-задачей. В *PP*-задаче загрузка задерживается до того момента, пока размер загружаемого файла не станет меньше размера свободного пространства в буфере.

Активная модель загрузки предполагает более агрессивное использование свободного пространства, путём занятия этого пространства входящим объектом без нарушения непрерывности загрузки. Поскольку предполагается, что размер загруженного файла равен времени, потраченному на загрузку, требуется, чтобы в каждый момент времени общий размер загруженных и частично загруженных объектов не превышал размера буфера. Мы будем ссылаться на такую модель как на модель с активной загрузкой и обозначать соответствующую задачу *AP*-задачей. Заметим, что любое допустимое решение *PP*-задачи также является допустимым решением *AP*-задачи. Следовательно, оптимальное решение задачи с активной загрузкой всегда не хуже, и может быть лучше, чем оптимальное решение задачи с пассивной загрузкой. Мы показываем, что вторая модель имеет и другие хорошие свойства.

Ниже мы сформулируем описанные задачи как задачи теории расписаний.

Дано множество из n работ $J = 1,\ldots, n$, две машины A и B и буфер размера Ω. Каждая работа имеет две операции. Первая операция каждой работы выполняется на машине A, и вторая операция каждой работы выполняется на машине B. Вторая операция каждой работы не может начаться раньше завершения первой операции той же работы. Для каждой операции задано время её выполнения. Пусть a_i и b_i обозначают длительности первой и второй операций работы i соответственно.

Обозначим через $s^a_j(\sigma)$ и $C^a_j(\sigma)$ время начала и время окончания первой операции работы j в расписании σ соответственно. Для удобства будем опускать символ σ, если это

не создает двусмысленности. Пусть J_τ — подмножество работ, которые находятся в буфере или загружаются в него в момент τ. Тогда следующее ограничение должно выполняться в *PP*-задаче:

$$\sum_{i \in J_\tau} a_i \le \Omega \qquad \text{для всех } \tau. \qquad (1.2.1)$$

Для *AP*-задачи вместо ограничений (1.2.1) требуется другое условие. Пусть $a_j(\tau)$ обозначает часть первой операции работы j, уже загруженной к моменту τ. То есть $a_j(\tau) = 0$, если $\tau < s^a_j$; $a_j(\tau) = \tau - s^a_j$, если $s^a_j \le \tau < C^a_j$; $a_j(\tau) = a_j$, если $C^a_j \le \tau < C^b_j$. Тогда следующее ограничение должно выполняться в *AP*-задаче:

$$\sum_{i \in J_\tau} a_i(\tau) \le \Omega \qquad \text{для всех } \tau. \qquad (1.2.2)$$

Каждая машина выполняет не более одной операции в каждый момент времени. Прерывания не разрешены. Требуется минимизировать длину полученного расписания.

Так как после выполнения на машине *A* работа должна быть помещена в буфер, то размер работы не может превышать размер буфера, $a_i \le \Omega$ для всех $i \in N$. Далее мы рассмотрим следующее более сильное ограничение на вход обеих задач. Пусть

$$a_i + b_i \le \Omega \qquad \text{для всех } i \in N. \qquad (1.2.3)$$

Обозначим *PP*-задачу и *AP*-задачу с ограничением (1.2.3) как *RPP*-задачу и *RAP*-задачу соответственно. В этом параграфе мы покажем, что *PP*-задача линейно сводится к *RPP*-задаче, и *AP*-задача линейно сводится к *RAP*-задаче.

Рассмотрим две задачи минимизации *P* и *Q* с целевыми функциями $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ и $\Phi_{\boldsymbol{Q}}$ соответственно. Будем говорить, что задача *P* линейно сводится к задаче *Q*, если существуют функции *f* и *g*, такие что каждая вычислима в линейное от размера входа время, *f* преобразует любой пример *I* задачи *P* в пример *I ′* задачи *Q* и *g* преобразует оптимальное решение примера *I* в оптимальное решение примера *I ′*.

Если *P* линейно сводится к *Q* и *Q* линейно сводится к *P*, то задачи называются эквивалентными. В работе было показано, что *PP*-задача эквивалентна *RPP*-задаче, и *AP*-задача эквивалентна *RAP*-задаче.

В (Лин и др. 2008) было показано, что *PP*-задача является NP–трудной в сильном смысле. Этот результат сохраняется и для *RPP*–задачи. В нашей работе мы показали, что *RAP*–задача является NP–трудной в сильном смысле, так как к ней сводится задача о 3–Разбиении, для которой известна NP– трудность в сильном смысле из классической монографии Гэри и Джонсона (1979).

Далее мы рассмотрели две подзадачи *RPP*-задачи и две подзадачи *RAP*-задачи. В приложениях, когда объекты передаются в высокоскоростной сети, возникает ситуация,

когда время загрузки каждой работы меньше, чем время её представления. С другой стороны, в перегруженных сетях или сетях, предрасположенных к задержкам передачи информации, может возникнуть ситуация, когда время загрузки каждой работы больше времени её представления. Назовём *RPP*-задачу *RPP*>-задачей (*RPP*<-задачей), если $a_i < b_i$ ($a_i > b_i$) для всех работ. Мы показали, что обе задачи являются NP-трудными. Эти результаты усиливают результат полученный в (Лин и др. 2008). Кроме того, наши доказательства существенно проще представленных в (Лин и др. 2008).

С другой стороны, мы установили, что ограниченные задачи с активным буфером являются полиномиально разрешимыми. Действительно, перестановка σ работ в невозрастающем порядке величин b_i даёт оптимальное расписание для *RAP*>–задачи. Как следствие, получаем, что перестановка σ работ в невозрастающем порядке величин b_i даёт оптимальное расписание для *AP*>–задачи. Аналогичный результат верен и для *RAP*<–задачи. Перестановка σ работ в неубывающем порядке величин a_i даёт оптимальное расписание для *RAP*<–задачи. Однако *AP*<–задача оказывается NP-трудной, что указывает на несимметричность исходной постановки.

1.3. Оценка сложностного статуса и построение эффективных алгоритмов с оценками точности для задач поиска подмножеств «похожих» векторов

Предмет исследования настоящего раздела – дискретные экстремальные задачи, к которым сводятся некоторые проблемы поиска подмножеств во множестве векторов евклидова пространства. Цель работы – исследование сложности этих ранее неизученных задач.

В известной NP-трудной [44]-[47] задаче MSSC – кластеризации множества векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний от элементов кластеров до их центров – требуется разбить множество векторов на подмножества (кластеры), включающие «близкие» или «похожие» по указанному критерию векторы. Центр кластера в этой задаче определяется как среднее значение вектора в кластере. Поэтому в некоторых публикациях эта задача фигурирует под названием k-Means (k средних), которое соответствует названию одного из ранних алгоритмов [48], предложенных для ее решения.

К NP-трудным задачам, рассмотренным в [49]-[53], сводятся отличные от MSSC задачи поиска во множестве векторов евклидова пространства семейства непересекающихся подмножеств, включающих «похожие» между собой векторы. В этих задачах предполагается, что объединение элементов из искомого семейства может не совпадать с исходным множеством. При этом подмножество, дополняющее объединение семейства искомых подмножеств до всего множества, может быть как пустым, так и содержащим некоторые векторы, не вошедшие в искомое семейство. В данной работе анализируются сходные в содержательном плане задачи. В этих задачах наряду с поиском подмножеств, включающих «близкие» между собой векторы, требуется найти еще и подмножество векторов, «похожих» на заданный вектор. Предполагается, что объединение подмножеств из искомого семейства как и в задачах, рассмотренных в [49]-[53], может не покрывать исходное множество.

Перечисленные задачи актуальны в широком спектре приложений (см., например, [44], [46], [48], [49], [54]-[57] и цитированные там работы), связанных с компьютерным анализом и распознаванием массивов зашумленных структурированных данных (числовых последовательностей, временных рядов, сигналов), включающих повторяющиеся, чередующиеся или перемежающиеся информационно значимые векторы (или фрагменты одинаковой размерности), в случае, когда места расположения этих векторов (фрагментов) в массиве неизвестны.

Одна из возможных содержательных трактовок рассматриваемой ниже проблемы анализа данных состоит в следующем. Имеется совокупность, включающая несколько

результатов измерения набора (вектора) каких-либо характеристик для элементов из некоторого множества материальных объектов. Каждый объект может находиться в двух состояниях: активном и пассивном. В пассивном состоянии значения всех измеряемых характеристик из набора равны нулю, а в активном – значение хотя бы одной характеристики не равно нулю. Для одного из объектов совокупности известен эталонный набор значений всех характеристик в его активном состоянии. Для остальных объектов аналогичные данные отсутствуют. В каждом результате измерения имеется ошибка, причем соответствие между объектом и результатом измерения его характеристик неизвестно. Требуется, используя адекватный измеряемым характеристикам критерий, найти подмножества наборов, соответствующих каждому из этих объектов (или найти подмножества «похожих» объектов) и оценить характеристики объектов в активном состоянии.

Гипотеза о труднорешаемости редуцированных оптимизационных задач, к которым сводятся возможные варианты сформулированной содержательной проблемы, была высказана в [58]. Ниже эта гипотеза доказана для простейших случаев проблемы, в которых число объектов в совокупности равно двум, причем для одного из объектов набор характеристик, соответствующих его активному состоянию известен.

1.3.1. Модель анализа данных

Рассмотрим следующую структуру данных, представленных в виде совокупности векторов евклидова пространства. Пусть векторная последовательность $\mathbf{x}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, где $\mathcal{N} = \{1,2,\ldots,N\}$, обладает свойством

$$\mathbf{x}_n = \begin{cases} \mathbf{w}, & n \in \mathcal{M}_1, \\ \mathbf{v}, & n \in \mathcal{M}_2, \\ \mathbf{0}, & n \in \mathcal{N} \setminus \{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2\}, \end{cases} \tag{1.3.1.1}$$

где $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{N}$, причем $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \varnothing$, $\mathcal{M}_1 \neq \varnothing$ и $\mathcal{M}_2 \neq \varnothing$.

Допустим, что для обработки доступна последовательность

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \mathbf{e}_n, \quad n \in \mathcal{N}, \tag{1.3.1.2}$$

где $\mathbf{e}_n$ – вектор помехи (ошибки), независимый от вектора $\mathbf{x}_n$. Учитывая зависимость элементов последовательности $\mathbf{x}_n$ от множеств $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ и векторов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$, положим

$$S(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \| \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n \|^2 \tag{1.3.1.3}$$

и рассмотрим модель анализа данных в виде следующей оптимизационной задачи.

Дано: последовательность $\mathbf{y}_n \in \mathcal{R}^q$, $n \in \mathcal{N}$, и вектор $\mathbf{v}$. *Найти*: непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ множества $\mathcal{N}$ и вектор $\mathbf{w}$, минимизирующие $S(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v})$ при условии, что структура последовательности описывается формулами (1.3.1.1) и (1.3.1.2).

Эта задача соответствует сформулированной во введении содержательной проблеме. В модели анализа данных ненулевые векторы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ можно интерпретировать как информационно значимые векторы, компоненты которых соответствуют измеряемым характеристикам двух объектов в активном состоянии. Мощности подмножеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ соответствуют числу активных состояний этих объектов. Оптимизационную задачу можно трактовать, как поиск наилучшего варианта приближения по критерию минимума суммы квадратов уклонений последовательности (1.3.1.2) последовательностью (1.3.1.1), которая включает два повторяющихся ненулевых вектора, перемежающиеся с нуль-вектором. Нетрудно установить, что к аналогичной формулировке можно прийти, если считать, что вектор $\mathbf{e}_n$ есть выборка единичного объема из q-мерного нормального распределения с параметрами $(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$, где $\mathbf{I}$ единичная матрица, а в качестве критерия решения использовать традиционный для статистики максимум функционала правдоподобия.

Рассмотрим возможные варианты редуцированных задач, к которым сводится эта задача, возникающая, в частности, при анализа данных.

1.3.2. Редуцированные оптимизационные задачи

Раскрывая сумму квадратов в правой части (1.3.1.3) с учетом (1.3.1.1), получим

$$S(\cdot) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \| \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n \|^2 = \sum_{n \in \mathcal{N}} \| \mathbf{y}_n \|^2 - \sum_{j \in \mathcal{M}_1} \{2(\mathbf{y}_j, \mathbf{w}) - \| \mathbf{w} \|^2\} - \sum_{i \in \mathcal{M}_2} \{2(\mathbf{y}_i, \mathbf{v}) - \| \mathbf{v} \|^2\}. \tag{1.3.2.1}$$

Минимум функционала $S(\cdot)$ по неизвестному вектору $\mathbf{w}$ находится аналитически. Используя (1.3.2.1), нетрудно убедиться, что для любых непустых непересекающихся подмножеств $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{N}$ и $\mathcal{M}_2 \subset \mathcal{N}$ этот минимум доставляется вектором $\overline{\mathbf{w}} = \sum_{j \in \mathcal{M}_1} \mathbf{y}_j / |\mathcal{M}_1|$ и равен

$$S_{\min}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \,|\, \mathbf{v}) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \| \mathbf{y}_n \|^2 - \frac{1}{|\mathcal{M}_1|} \| \sum_{j \in \mathcal{M}_1} \mathbf{y}_j \|^2 - \sum_{i \in \mathcal{M}_2} \{2(\mathbf{y}_i, \mathbf{v}) - \| \mathbf{v} \|^2\}. \tag{1.3.2.2}$$

Заметим, что первый член в правой части этого равенства является константой. Следовательно, задача минимизации функционала $S(\cdot)$, сформулированная в п.1, сводится к

максимизации суммы двух последних членов в правой части выражения (1.3.2.2). Кроме того, заметим, что мощности двух искомых подмножеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ могут быть как фиксированными (известными), так и нефиксированными (неизвестными или оптимизируемыми) величинами. Поэтому возможно четыре варианта задачи. Наконец, заметим, что $\sum_{i\in\mathcal{M}_2}\|\mathbf{v}\|^2 = |\mathcal{M}_2|\cdot\|\mathbf{v}\|^2$. Следовательно, эта сумма, входящая в последний член правой части равенства (1.3.2.2), также является константой в случае, когда мощность множества $\mathcal{M}_2$ фиксирована.

Положим $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_n \mid n\in\mathcal{N}\}$, $\mathcal{Y}_1=\{\mathbf{y}_j \mid j\in\mathcal{M}_1\}$ и $\mathcal{Y}_2=\{\mathbf{y}_i \mid i\in\mathcal{M}_2\}$. Заменив в выражении (1.3.2.2) суммирование по индексам на суммирование по элементам множеств, с учетом сделанных замечаний получим четыре редуцированные экстремальные задачи.

Перед формулировкой задач поясним их краткие символьные обозначения, введенные ниже. Первые три символа – SVS – одинаковы во всех кратких названиях задач и образованы от английского словосочетания Search for Vector Subsets. Вторые два символа образованы от слов Fixed и Nonfixed для обозначения четырех комбинаций – FF, NF, FN и NN, соответсвующих возможным вариантам, которые индуцируются наличием или отсутствием ограничений на мощности пары множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ на входе задачи. Сформулируем редуцированные задачи в форме верификации свойств.

<u>Задача SVS-FF</u>

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$, натуральные числа M_1, M_2 и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, мощности которых равны M_1 и M_2 соответственно, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M_1}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}(\mathbf{y},\mathbf{v})\ge A? \qquad (1.3.2.3)$$

<u>Задача SVS-NF</u>

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}(\mathbf{y},\mathbf{v})\ge A, \qquad (1.3.2.4)$$

при ограничении $|\mathcal{Y}_2|=M$ на мощность подмножества $\mathcal{Y}_2$?

Задача SVS-FN

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v})-\|\mathbf{v}\|^2\}\ge A, \tag{1.3.2.5}$$

при ограничении $|\mathcal{Y}_1|=M$ на мощность подмножества $\mathcal{Y}_1$?

Задача SVS-NN

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$ и положительное число A. *Вопрос*: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v})-\|\mathbf{v}\|^2\}\ge A? \tag{1.3.2.6}$$

Основным результатом настоящей работы является установление статуса NP-полноты сформулированных выше задач.

1.3.3. Анализ сложности

Для доказательства факта труднорешаемости редуцированных задач приведем следующие вспомогательные NP-полные [49-[53] задачи.

Задача MLSVS (максимум длины суммы векторов из подмножества фиксированной мощности).

Дано: множество $\mathcal{U}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_L\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число D. *Вопрос*: существует ли такое непустое подмножество $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{U}$, мощность которого равна M, что имеет место неравенство

$$\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{B}}\mathbf{u}\|\ge D? \tag{1.3.3.1}$$

Задача MALSSVS (максимум среднего значения квадрата длины суммы векторов из подмножества).

Дано: множество $\mathcal{U}=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_L\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и положительное число D. *Вопрос*: существует ли такое непустое подмножество $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{U}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{B}|}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{B}}\mathbf{u}\|^2\ge D? \tag{1.3.3.2}$$

Напомним, что к задачам MLSVS и MALSSVS сводится поиск во множестве векторов евклидова пространства подмножества векторов, «похожих» между собой по критерию минимума суммы квадратов расстояний, в случаях, когда мощность искомого подмножества известна и неизвестна соответственно. Чтобы избежать повторений в изложении доказательств, сформулированных ниже утверждений, заметим сразу, что все редуцированные задачи, приведенные в п.2, очевидно, принадлежат к классу NP. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Задача SVS-FF NP-полна.

Доказательство. Покажем NP-полноту задачи SVS-FF путем полиномиального сведения задачи MLSVS к частному случаю задачи SVS-FF.

По произвольной индивидуальной задаче MLSVS построим следующий пример задачи SVS-FF. Обозначим через a наибольшую по модулю координату векторов из множества $\mathcal{U}$. Без ограничения общности будем считать, что $a > 0$. Для частного случая задачи SVS-FF положим $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \{\mathbf{z}\}$, $M_1 = M$, $M_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mathbf{z}/2$, где $\mathbf{z} = (a+1,\ldots,a+1) \in \mathcal{R}^q$, и $A = D^2/M + \|\mathbf{z}\|^2$.

Покажем, что для того, чтобы в задаче MLSVS существовало подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ мощности M, удовлетворяющее условию (1.3.3.1), необходимо и достаточно, чтобы в частном случае задачи SVS-FF существовали такие подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, мощности которых равны M и 1 соответственно, что имеет место неравенство (1.3.2.3).

Необходимость. Если в задаче MLSVS во множестве $\mathcal{U}$ существует подмножество $\mathcal{B}$ мощности M такое, что справедливо (1.3.3.1), то и в задаче SVS-FF во множестве $\mathcal{Y}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{B}$ и $\mathcal{Y}_2 = \{\mathbf{z}\}$ мощности $M_1 = M$ и $M_2 = 1$ соответственно, удовлетворяющие неравенству (1.3.2.3). В самом деле, опираясь на (1.3.3.1), для задачи SVS-FF имеем

$$\frac{1}{M_1}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2 + 2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}(\mathbf{y},\mathbf{v}) = \frac{1}{M}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{B}}\mathbf{u}\|^2 + 2(\mathbf{z},\frac{\mathbf{z}}{2}) \geq \frac{D^2}{M} + \|\mathbf{z}\|^2 = A.$$

Достаточность. Заметим сначала, что для всякого подмножества $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ такого, что $|\mathcal{X}| = 1$, и фиксированного $\mathbf{v} = \mathbf{z}/2$ имеет место неравенство

$$2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}(\mathbf{y},\mathbf{v}) \leq \|\mathbf{z}\|^2. \tag{1.3.3.3}$$

Действительно, если $\mathcal{X} = \{\mathbf{z}\}$, то

$$2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}(\mathbf{y},\mathbf{v}) = 2(\mathbf{z},\frac{\mathbf{z}}{2}) = \|\mathbf{z}\|^2.$$

Если же $\mathcal{X} \neq \{\mathbf{z}\}$, то $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}$. Поэтому, учитывая, что максимальная длина вектора в $\mathcal{U}$ не превосходит $a\sqrt{q}$, получим

$$2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}} (\mathbf{y},\mathbf{v}) \leq 2a\sqrt{q}\,\|\mathbf{v}\| = 2a\sqrt{q}\,\frac{\|\mathbf{z}\|}{2} < (a+1)\sqrt{q}\,\|\mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\|^2 .$$

Допустим теперь, что в задаче SVS-FF во множестве $\mathcal{Y}$ существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$ мощности M_1 и $M_2 = 1$ соответственно, удовлетворяющие неравенству (1.3.2.3). Тогда из (1.3.3.3) и (1.3.2.3) следует, что в задаче MLSVS во множестве $\mathcal{U}$ существует подмножество $\mathcal{B} = \mathcal{Y}_1$ мощности $M = M_1$ такое, что выполнено (1.3.3.1). В самом деле,

$$\frac{1}{M}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{B}}\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{M_1}\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{y}\|^2 \geq \frac{1}{M_1}\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{y}\|^2 + 2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}(\mathbf{y},\mathbf{v}) - \|\mathbf{z}\|^2 \geq A - \|\mathbf{z}\|^2 = \frac{D^2}{M},$$

а это значит, что в задаче MLSVS имеет место неравенство (1.3.3.1). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Задача SVS-NF NP-полна.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. При доказательстве устанавливается полиномиальная сводимость второй вспомогательной NP-полной задачи MALSSVS к частному случаю задачи SVS-NF, в которой, как и ранее, a – наибольшая по модулю координата векторов из множества $\mathcal{U}$ (считаем, что $a > 0$), $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \{\mathbf{z}\}$, $M_2 = 1$, $\mathbf{v} = \mathbf{z}/2$, где $\mathbf{z} = (a+1,\ldots,a+1) \in \mathcal{R}^q$, но $A = D + \|\mathbf{z}\|^2$.

При этом устанавливается, что для того, чтобы в задаче MALSSVS существовало подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию (3.2), необходимо и достаточно, чтобы в частном случае задачи SVS-NF при $A = D + \|\mathbf{z}\|^2$ существовали такие подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, мощность первого из которых не фиксирована, а мощность второго равна 1, что имеет место неравенство (1.3.2.4).

Теорема 3. Задача SVS-FN NP-полна.

Доказательство проводится аналогично приведенному ниже доказательству теоремы 4. Устанавливается полиномиальная сводимость задачи MLSVS к задаче SVS-FN.

Теорема 4. Задача SVS-NN NP-полна.

Доказательство. Покажем справедливость утверждения путем полиномиального сведения задачи MALSSVS к задаче SVS-NN.

По произвольной индивидуальной задаче MALSSVS построим следующий пример задачи SVS-NN. Как и ранее, обозначим через a наибольшую по модулю координату

векторов из множества $\mathcal{U}$ и, не ограничивая общность, будем считать, что $a > 0$. В примере задачи SVS-FF положим $\mathcal{Y} = \mathcal{U} \cup \{\mathbf{z}\}$, где $\mathbf{z} = (2a+1,\ldots,2a+1) \in \mathcal{R}^q$, $A = D + \|\mathbf{z}\|^2$ и $\mathbf{v} = \mathbf{z}$.

Покажем, что для того, чтобы в задаче MALSSVS существовало подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$, удовлетворяющее условию (1.3.3.2), необходимо и достаточно, чтобы в задаче SVS-NN существовали такие подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство (1.3.2.6).

Необходимость. Если в задаче MALSSVS существует подмножество $\mathcal{B}$ такое, что выполнено (1.3.3.2), то и в задаче SVS-NN существуют подмножества $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{B}$ и $\mathcal{Y}_2 = \{\mathbf{z}\}$, удовлетворяющие неравенству (1.3.2.6). Действительно, опираясь на (1.3.3.2), для задачи SVS-NN имеем

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\Big\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{y}\Big\|^2 + \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2\} = \frac{1}{|\mathcal{B}|}\Big\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{B}}\mathbf{u}\Big\|^2 + 2(\mathbf{z},\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\|^2 \ge D + \|\mathbf{z}\|^2 = A.$$

Достаточность. Покажем сначала, что для всякого непустого $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ и фиксированного $\mathbf{v} = \mathbf{z}$ справедливо неравенство

$$\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2\} \le \|\mathbf{z}\|^2. \tag{1.3.3.4}$$

В самом деле, если $\mathcal{X} = \{\mathbf{z}\}$, то

$$\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2\} = 2(\mathbf{z},\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2.$$

Если $\mathbf{z} \notin \mathcal{X}$, то учитывая, что максимальная длина вектора в $\mathcal{X}$ не превосходит $a\sqrt{q}$, имеем

$$\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2\} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\|^2\} \le |\mathcal{X}|\cdot\{2a\sqrt{q}\,\|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{z}\|^2\}$$

$$= |\mathcal{X}|\cdot\{2aq(2a+1) - q(2a+1)^2\} < 0 < \|\mathbf{z}\|^2.$$

Если же $\mathbf{z} \in \mathcal{X}$ и $|\mathcal{X}| \ge 2$, то, используя оценки для двух рассмотренных случаев, получим

$$\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v}) - \|\mathbf{v}\|^2\} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\|^2\} = \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{X}\setminus\{\mathbf{z}\}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\|^2\} + \sum_{\mathbf{y}\in\{\mathbf{z}\}}\{2(\mathbf{y},\mathbf{z}) - \|\mathbf{z}\|^2\}$$

$$\le (|\mathcal{X}| - 1)\cdot\{2a\sqrt{q}\,\|\mathbf{z}\| - \|\mathbf{z}\|^2\} + \|\mathbf{z}\|^2 < \|\mathbf{z}\|^2.$$

Допустим теперь, что в задаче SVS-NN существуют непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1$ и $\mathcal{Y}_2$, удовлетворяющие неравенству (1.3.2.6). Тогда из (1.3.3.4) и (1.3.2.6) следует, что в задаче MALSSVS существует подмножество $\mathcal{B} = \mathcal{Y}_1$ такое, что выполнено (1.3.3.2). Действительно,

$$\frac{1}{|\mathcal{B}|}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{B}}\mathbf{u}\|^2=\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{y}\|^2\ge\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{y}\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v})-\|\mathbf{v}\|^2\}-\|\mathbf{z}\|^2\ge A-\|\mathbf{z}\|^2=D\,.$$

Теорема 4 доказана.

1.3.4. Возможные пути решения проблем

Какие-либо эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для решения рассмотренных задач на сегодняшний день неизвестны. Построение таких алгоритмов не является предметом настоящей работы и представляется важным делом ближайшей перспективы. Тем не менее, можно указать на почти очевидные двухэтапные алгоритмические способы приближенного решения этих задач. Суть этих способов состоит в следующем. На первом этапе решается задача MLSVS или MALSSVS, т.е. отыскивается подмножество «близких» между собой векторов. Напомним, что для этих задач построены приближенные асимптотически точные алгоритмы, полиномиальные в случае фиксированной размерности пространства [50-53]. На втором этапе в оставшемся подмножестве ищется подмножество векторов «похожих» на заданный вектор. В другом способе очередность этапов меняется.

Ясно, что оба способа дадут лишь приближенное решение. Вопрос о точности подобных решений остается открытым.

Заключение

Показана NP-полнота экстремальных задач, к которым сводится поиск во множестве векторов евклидова пространства двух таких непустых непересекающихся подмножеств, что первое из них включает «близкие» между собой векторы, а второе – векторы, «похожие» на заданный вектор, по критерию минимума суммы квадратов расстояний. Из полученных результатов, в частности, следует NP–трудность соответствующих задач анализа данных и распознавания образов. Вместе с этим, очевидна актуальность рассмотренных редуцированных экстремальных задач не только в анализе данных и распознавании образов, но и, например, в компьютерной геометрии (при поиске пространственных структур с определенными свойствами), в задачах аппроксимации (при поиске наилучшего варианта приближения), в задачах математического программирования и др. Значимость полученных результатов состоит в том, что они, как базовые и справочные, позволяют устанавливать статус труднорешаемости тех обобщений рассмотренных задач, которые имеют место, как в разнообразных приложениях, так и в различных разделах современной вычислительной математики, а также в дискретной оптимизации.

1.3.5. Приближённый алгоритм для решения одной задачи поиска подмножества векторов

Объектом исследования настоящего раздела являются проблемы оптимизации в задачах анализа данных. Предметом исследования - труднорешаемая экстремальная задача, к которой сводится одна из проблем поиска подмножества векторов евклидова пространства. Цель исследования - обоснование приближённого алгоритма для решения этой задачи.

Содержательная проблема анализа данных состоит в следующем. Имеется таблица, содержащая результаты измерения набора числовых информационно значимых характеристик для совокупности некоторых материальных объектов. Часть объектов из этой совокупности идентичны и имеют одинаковые характеристики. Число идентичных объектов известно. Оставшиеся объекты различны и имеют отличающиеся характеристики. В каждом результате измерения, представленном в таблице, имеется ошибка, причем соответствие между объектом и набором неизвестно. Требуется, используя адекватный измеряемым характеристикам критерий, найти подмножество наборов, соответствующих идентичным объектам, и оценить по результатам измерения набор характеристик этих объектов (учитывая, что данные содержат ошибку измерения).

В работе [59] дана формулировка этой содержательной проблемы как задачи поиска во множестве векторов евклидова пространства такого подмножества векторов фиксированной мощности, что его элементы «близки» по критерию минимума суммы квадратов расстояний. Там же установлено, что её решение сводится к решению следующей NP-трудной задачи.

Задача VS-2 (Vector Subset 2).

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M>1$.

Найти: подмножество $C\subseteq\mathcal{Y}$ векторов такое, что целевая функция

$$F(C)=\sum_{\mathbf{y}\in C}\|\mathbf{y}-\overline{\mathbf{y}}(C)\|^2, \qquad (1.3.5.1)$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C)=\frac{1}{|C|}\sum_{y\in C}\mathbf{y}$, минимальна, при ограничении $|C|=M$ на мощность искомого подмножества.

Мотивацией исследований послужил тот факт, что какие-либо эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для решения этой задачи были неизвестны. Ниже обоснован эффективный 2-приближённый алгоритм для её решения.

Приближенный алгоритм решения задачи

Обозначим через C^* - оптимальное решение задачи VS-2. Положим $\mathbf{c}^* = \overline{\mathbf{y}}(C^*)$, где $\overline{\mathbf{y}}(\cdot)$ - функция, определенная в формулировке этой задачи. Свойство оптимального решения устанавливает следующая

Лемма 1. Для любого вектора $\mathbf{y} \in C^*$ и для любого вектора $\mathbf{z} \in \mathcal{Y} \setminus C^*$справедливо неравенство

$$\| \mathbf{y} - \mathbf{c} \| \leq \| \mathbf{z} - \mathbf{c}^* \|$$

Лемма 1 показывает, что оптимальное решение задачи VS-2 - подмножество $C^* \subseteq \mathcal{Y}$ - состоит из векторов, ближайших к вектору $\mathbf{c}^*$ в смысле расстояния. Она устанавливает необходимое условие минимума и указывает на изложенный ниже возможный подход к решению задачи.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача VSVN (Vector and Subset of Vectors which are Nearest to this vector).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{Y}$ векторов мощности M и вектор $\mathbf{b} \in \mathcal{Y}$ такие, что целевая функция

$$G(\mathcal{B}, \mathbf{b}) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \| \mathbf{y} - \mathbf{b} \|^2 \tag{1.3.5.2}$$

минимальна.

Построим алгоритм решения этой задачи. Обозначим через $\mathcal{B}^*$ и $\mathbf{b}^*$ подмножество и вектор, доставляющие минимум G^* целевой функции G.

Алгоритм $\mathcal{A}_1$.

Шаг 1. Для каждого вектора $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}$ найдем множество $\mathcal{B}(\mathbf{y})$, состоящее из вектора $\mathbf{y}$ и $M-1$ векторов множества $\mathcal{Y}$, ближайших (в смысле расстояния) к вектору $\mathbf{y}$. Вычислим значение целевой функции $G(\mathcal{B}(\mathbf{y}), \mathbf{y})$.

Шаг 2. Среди найденных на шаге 1 множеств выберем в качестве решения то множество $\mathcal{B}^*$ и вектор $\mathbf{b}^*$, для которых значение целевой функции G минимально. Если минимальному значению целевой функции соответствует несколько решений, то в качестве окончательного решения выберем любое из этих решений.

Оценку сложности и точности алгоритма устанавливает следующая

Лемма 2. Алгоритм $\mathcal{A}_1$ находит оптимальное решение задачи VSVN за время $O(qN^2)$.

Приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{Z}$ - непустое конечное множество векторов из $\mathcal{R}^q$, а $\bar{\mathbf{z}}(\mathcal{Z}) = \frac{1}{|\mathcal{Z}|}\sum_{z\in\mathcal{Z}} \mathbf{z}$. Тогда, если вектор $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^q$ удовлетворяет условиям

$$\| \mathbf{x} - \bar{\mathbf{z}} \| \le \| \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \|, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{Z},$$

то имеет место неравенство

$$\sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} \| \mathbf{x} - \mathbf{z} \| \le 2 \sum_{\mathbf{z}\in\mathcal{Z}} \| \mathbf{z} - \bar{\mathbf{z}} \|.$$

Лемма 4. Пусть $\mathcal{B}^*$, $\mathbf{b}^*$ - оптимальное решение задачи VSVN, а $\mathcal{C}^*$ - оптимальное решение задачи VS-2. Тогда $F(\mathcal{B}^*) \le 2F(\mathcal{C}^*)$.

Опираясь на лемму 4, представим алгоритм решения задачи VS-2.

Алгоритм $\mathcal{A}$.

Шаг 1. По заданному множеству $\mathcal{Y}$ и числу M находим оптимальное решение $\mathcal{B}^*$, $\mathbf{b}^*$ вспомогательной задачи VSVN с помощью алгоритма $\mathcal{A}_1$.

Шаг 2. Подмножество $\mathcal{B}^*$ объявляем решением задачи VS-2.

Теорема 1. Алгоритм $\mathcal{A}$ находит приближённое решение задачи VS-2 с гарантированной оценкой точности 2 за время $O(qN^2)$. Оценка 2 точности алгоритма достижима и неулучшаема.

Применение алгоритма к решению других задач

В работе [59] установлено, что задача VS-2 эквивалентна следующей NP-трудной задаче.

Задача MSSC-Case

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: такое разбиение множества $\mathcal{Y}$ на $N - M + 1$ непустых кластеров $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_{N-M+1}$, что мощность одного из этих кластеров равна M и

$$R(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_{N-M+1}) = \sum_{j=1}^{N-M+1} \sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{C}_j} \| \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}_j(\mathcal{C}_j) \|^2 \to \min,$$

где $\bar{\mathbf{y}}_j(\mathcal{C}_j) = \frac{1}{|\mathcal{C}_j|}\sum_{y\in\mathcal{C}_j} \mathbf{y},\ j = 1,\ldots, N - M + 1,$ - центр J -го кластера.

Эту задачу можно интерпретировать как разновидность задачи кластерного анализа данных. Для отыскания её приближённого решения можно применить алгоритм $\mathcal{A}$.

Действительно, пусть, например, мощность кластера C_1 равна M. Тогда из условий задачи следует, что мощность оставшихся $N-M$ кластеров равна 1. Поскольку центр кластера, имеющего мощность, равную 1, совпадает с единственным элементом - вектором из этого кластера, для целевой функции задачи MSSC-Case имеем

$$R(C_1, C_2, \ldots, C_{N-M+1}) = \sum_{j=1}^{N-M+1} \sum_{\mathbf{y} \in C_j} \| \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}_j(C_j) \|^2 = F(C_1). \qquad (1.3.5.3)$$

Отсюда получаем алгоритм приближённого решения задачи MSSC-Case:

Шаг 1. По заданному множеству $\mathcal{Y}$ и числу M находим приближённое решение $\mathcal{B}^*$ задачи VS-2 с помощью алгоритма $\mathcal{A}$.

Шаг 2. Решением задачи MSSC-Case объявляем кластер $C_1 = \mathcal{B}^*$ мощности M и совокупность $C_2, \ldots, C_{N-M+1}$ одноэлементных кластеров.

В силу (1.3.5.3) леммы 4 и теоремы 1 этот алгоритм гарантирует эффективное отыскание 2-приближённого решения задачи MSSC-Case.

Далее, алгоритм $\mathcal{A}$ можно использовать для эффективного приближённого решения следующей NP-трудной [1] задачи.

Задача VS-1 (Vector Subset 1).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что целевая функция

$$Q(C) = \frac{1}{|C|} \| \sum_{\mathbf{y} \in C} \mathbf{y} \|^2 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus C} \| \mathbf{y} \|^2$$

максимальна, при ограничении $|C| = M$ на мощность искомого подмножества.

Правомерность применения алгоритма $\mathcal{A}$ для решения этой задачи следует из связи между целевыми функциями задач VS-2 и VS-1, которая установлена в [59]. Эта связь выражается формулой

$$F(C) = \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}} \| \mathbf{y} \|^2 - Q(C),$$

в которой сумма является константой. Поэтому решение задачи VS-1 - максимизации $Q(C)$ - эквивалентно решению задачи VS-2 - минимизации $F(C)$. Следует, однако, заметить, что найденное с помощью алгоритма $\mathcal{A}$ решение задачи VS-1 не имеет каких-либо теоретических гарантий по точности решения.

Наконец, построенный алгоритм можно использовать для эффективного 2-приближённого решения следующей NP-трудной [59] задачи, тесно связанной с задачей VS-2.

Задача VS-3 (Vector Subset 3).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что целевая функция

$$H(C) = \sum_{\mathbf{z} \in C} \sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \mathbf{z} \|^2 \qquad (1.3.5.4)$$

минимальна, при ограничении $|C| = M$ на мощность искомого подмножества.

В самом деле, в силу известной [60] формулы

$$\sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}(C) \|^2 = \frac{1}{2|C|} \sum_{\mathbf{z} \in C} \sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \mathbf{z} \|^2,$$

из (1.3.5.1) и (1.3.5.4) имеем равенство $H(C) = 2|C| F(C)$. Поскольку $|C| = M = const$, для оптимального значения целевой функции задачи VS-3 справедливо равенство $H(C^*) = 2M \cdot F(C^*)$.

Возьмем в качестве приближённого решения этой задачи подмножество $\mathcal{B}^*$, найденное с помощью алгоритма $\mathcal{A}$. Для этого решения значение целевой функции задачи VS-3 равно $H(\mathcal{B}^*) = 2M \cdot F(\mathcal{B}^*)$. Поэтому в силу леммы 4 и теоремы 1 для точности решения задачи имеем оценку $H(\mathcal{B}^*) / H(C^*) = F(\mathcal{B}^*) / F(C^*) \le 2$.

Заключение

В работе построен эффективный приближённый алгоритм с константной оценкой точности 2 для решения NP-трудной задачи, к которой сводится поиск во множестве векторов евклидова пространства такого подмножества векторов, что оно имеет заданную мощность и включает векторы «близкие» между собой по критерию минимума суммы квадратов расстояний. Установлено, что оценка точности 2 этого алгоритма достижима и неулучшаема. Показано, что предложенный алгоритм применим для отыскания 2-приближённых решений некоторых родственных задач анализа данных.

Обоснование алгоритмов другого типа (асимптотически точных, рандомизированных и др.) для решения рассмотренной и родственных задач является делом ближайшей перспективы. Интерес представляют алгоритмические решения задачи VS-1, поскольку в настоящее время для этой задачи какие-либо эффективные алгоритмы с оценками точности неизвестны.

1.4. Анализ взаимосвязей между бент-функциями и двоичными кодами

Бент-функции – это булевы функции от четного числа переменных, максимально удаленные от класса аффинных функций. Впервые бент-функции были рассмотрены О. Ротхаусом в 1960-х годах. Бент-функции имеют большое число приложений: в криптографии, теории кодирования, теории информации. Тем не менее, для них до сих пор существует много нерешенных проблем.

Наиболее важная проблема – описание всех бент-функций. В частности, нахождение конструкций бент-функций.

В работах рассматривается построение бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции. Описываются все бент-функции на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции, а также показывается, что число таких бент-функций от 2k переменных равно $2^k \cdot (2^1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^k + 1)$.

Известно, что любая квадратичная бент-функция аффинно эквивалентна бент-функции из класса Мэйорана-Мак-Фарланда. Поэтому рассматривается также более общая задача нахождения нижней оценки количества бент-функций на минимальном расстоянии от произвольной бент-функции из класса Мэйорана-Мак-Фарланда. Приводятся некоторые факты и гипотеза об оценке количества бент-функций на расстоянии 2^k (минимальное возможное расстояние между двумя различными бент-функциями от 2k переменных) от произвольной бент-функции.

Также предлагается система для работы с булевыми функциями *Boolean Functions*. Эта система ориентирована на пользователей-программистов и представляет собой библиотеку классов и функций на языке C++. Она может быть полезна для проведения компьютерных экспериментов и тестов, связанных с булевыми функциями. Основное предназначение библиотеки – работа с булевыми функциями специального вида (бент-функциями).

В рамках работ третьего этапа реализации проекта полученные следующие новые результаты:

1. Получено описание всех бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции.

2. Подсчитано количество таких бент-функций.

3. Предложена нижняя оценка количества бент-функций на минимальном расстоянии от бент-функций из класса Мэйорана-Мак-Фарланда.

4. Разработана библиотека для работы с булевыми функциями.

1.5. Оценка параметров совершенных 2-раскрасок тернарного гиперкуба

В терминах совершенных структур охарактеризованы коды с параметрами трижды укороченных 1-совершенных двоичных кодов. Доказано, что соответствующие расширенные коды (с расстоянием 4) всегда порождают совершенную раскраску (регулярное разбиение) вершин гиперкуба в шесть цветов [62].

Разбиение вершин произвольного графа G на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_k$ называется совершенной k-раскраской этого графа, если для произвольных $i, j \in \{0,1, ..., k\}$ существует такое число α_{ij}, что любая вершина из V_i имеет ровно α_{ij} соседей из V_j.

Матрицу $A = (\alpha_{ij})$ будем называть матрицей параметров данной совершенной раскраски. Совершенная раскраска $V_0, V_1, \ldots, V_k$ называется дистанционно регулярной, если матрица ее параметров тридиагональна. Такая раскраска является дистанционной относительно множества вершин V_0 (в этом случае множество V_0 называется полностью регулярным кодом). Объектом нашего исследования является граф $G(\mathbf{Z^n})$ n- мерной квадратной решетки.

Назовем раскраску $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{Z^n}$ редуцируемой, если она может быть сведена к одномерной, т.е. для произвольного $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z^n}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_n x_n),$$

где φ_1– некоторая k-раскраска $\mathbf{Z}^1$и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \{0, \ 1, -1\}$ – произвольные константы. Редуцируемые раскраски и их параметры нетрудно выписать, они будут образовывать три серии с растущим количеством цветов. Нередуцируемые раскраски не поддаются столь простому описанию. В [63] доказана следующая теорема.

Теорема. Если φ – нередуцируемая дистанционно регулярная k-раскраска n-мерной квадратной решетки, то $k \leq 2n+1$, причем эта оценка достижима.

[

1.6. Анализ дискретных аналогов теоремы Коши для центрированных функций в n-кубе

Исследованы собственные функции n-мерного гиперкуба, точнее, его матрицы смежности. Собственные значения имеют вид $\lambda = n - 2i$, $i = 0, 1,..., n$, соответствующие им собственные функции назовем λ-функциями, для фиксированного λ они образуют подпространство во множестве всех функций, заданных на гиперкубе. λ-Функции являются удобным инструментом представления различных объектов в гиперкубе, таких как совершенные раскраски. В работе изучается следующий вопрос: насколько исчепывающе характеризуют λ-функцию (при произвольном фиксированном λ) ее значения в вершинах сферы радиуса h, $1 \leq h \leq n$? Ответ зависит от соотношения λ и h:

если $h \leq l(\lambda) = \min\{(n-\lambda)/2, (n+\lambda)/2\}$, то однозначно определены значения λ-функции во всех вершинах шара радиуса h с тем же центром;

если $l(\lambda) \leq h \leq n/2$, то однозначно определены значения λ-функции во всех вершинах гиперкуба.

Важно, что в обоих случаях имеются дополнительные необходимые условия частичной или полной восстановимости λ-функции, формулируемые в терминах значений многочленов Кравчука.

Отметим, что в случае $h > n/2$ ситуация аналогична.

1.7. Оценка числа совершенных кодов в терминах многомерного перманента специально построенной матрицы

H(*N*,*Q*,*W*,*T*)-дизайном называется набор из (*N*-*W*)-мерных граней гиперкуба Q_q^n, которые совершенным образом протыкают все (*N*-*T*)-мерные грани.

A(*N*,*Q*,*W*,*T*)-дизайном называется набор из (*N*-*T*)-мерных граней гиперкуба Q_q^n, которые совершенным образом покрывают все (*N*-*W*)-мерные грани.

Количества *H*- и *A*-дизайнов выражаются через многомерные перманенты.

Несколько конструкций *H*- и *A*-дизайнов приведены и существование *H*($2^{T+1}, S\cdot 2^T, 2^{T+1}-1, 2^{T+1}-2$)- дизайнов доказано для всех *S*, *T* больших 1 .

H-дизайн Ханани является обобщением системы Штейнера или *t*-дизайна. Определение *H*-дизайна дано Милсом. Пусть *X* – множество точек и пусть $C = \{C_1, \ldots, Cn\}$ – разбиение *X* на *n* наборов мощности *Q*. Трансверсаль *C* является подмножеством *X*, пересекающимся с каждым множеством C_i не более чем в одной точке. Набор *W*-элементных трансверсалей в *C* является *H*(*N*,*Q*,*W*,*T*)-дизайном (кратко, *H*-дизайн), если каждая *T*-элементная трансверсаль из *C* лежит ровно в одной из трансверсалей *H*-дизайна.

Мы предлагаем другое обобщение *t*-дизайна. Множество *T*–элементных трансверсалей из С является *A*(*N*,*Q*,*W*,*T*)-дизайном (кратко *A*-дизайн), если каждая *W*-элементная трансверсаль из *C* содержится ровно в одной из трансверсалей *A*-дизайна. Мы имеем в виду, что всюду $N > W > T$ и все эти числа целые. Идея рассмотрения *A*-дизайнов принадлежит С. В. Августиновичу.

Положим $Q_q = \{0,1,\ldots q\text{-}1\}$ и пусть Q_{q^*} – объединение множеств Q_q и звёздочки *. Ясно, что каждой *W*-трансверсали в *C* соответствует кодовое слово (a_1,..., *, …, a_i, …, *, …, a_n) в Q_{q^*}, где a_i – это номер элемента C_i, который принадлежит *W*-трансверсали. Позиция *j* кодового слова содержит *, если и только если *W*-трансверсаль не пересекается с C_j. Определим вес кодовых слов из Q_{q^*} как *N* минус число символов *, содержащихся в кодовом слове. Тогда множество *H*, состоящее из некоторых векторов веса *W*, является *H*(*N*,*Q*,*W*,*T*)-дизайном, если каждый вектор веса *T* покрывается ровно одним вектором из *H*. Аналогично, множество *A*, состоящее из векторов веса *T*, является *A*(*N*,*Q*,*W*,*T*)-дизайном, если каждый вектор веса *W* покрывает ровно один вектор из *A*.

Если $q = 1$, то *H*(*N*,1,*W*,*T*)- дизайн есть просто система Штейнера *S*(*T*,*W*,*N*) (здесь * заменяется на 1) и *A*(*N*,1,*W*,*T*)-дизайн – это всего лишь система Штейнера *S*(*N*-*W*,*N*-*T*,*N*)

(здесь * заменяется на 0 и 0 заменяется на 1). В статье Зиновьева и Рифы H-дизайн называется Q-ичной системой Штейнера. Множество A векторов веса W является (N,W,T)-системой Турана, если каждый вектор веса W покрывает по крайней мере один вектор веса T из A. Следовательно, $A(N,1,W,T)$-дизайн есть частный случай (N, W, T)-системы Турана [64].

1.8. Разработка нового метода глобальной маршрутизации на СБИС

Глобальная трассировка (или маршрутизация) является одним из важнейших этапов проектирования сверхбольших интегральных схем (СБИС), на котором для каждой цепи определяется множество используемых областей маршрутизации в условиях ограничений на трассировочные ресурсы и время прохождения сигнала. В литературе встречается несколько формулировок задачи глобальной трассировки (ЗГТ) с различными критериями и ограничениями, достаточно подробный обзор которых приведен в работе [65].

Основной целью глобальной трассировки является маршрутизация всех цепей СБИС без нарушения ограничений. При этом даже простейшая постановка, в которой требуется осуществить маршрутизацию двухтерминальных цепей в условиях ограниченности трассировочных ресурсов (без учета временных задержек), является NP-трудной задачей [66].

Для решения ЗГТ исследователями предложены различные подходы, в которых трассировка, как правило, осуществляется лишь на двух слоях СБИС. В основе этих подходов лежат алгоритмы последовательной маршрутизации [67], алгоритмы трассировки с разрывом связей и поиском новых соединений [68], алгоритмы, основанные на решении задач о многопродуктовом потоке [69], иерархические методы [70], [71], а также различные метаэвристики [72], [73], [74], [75], [76].

При проектировании современных СБИС на этапе глобальной маршрутизации, наряду с учетом трассировочных ресурсов, все большее внимание уделяется времени распространения сигнала [77], [78], [79]. При этом плотность соединений и временная задержка являются, как правило, конкурирующими критериями, и в литературе практически отсутствуют публикации, в которых эти критерии рассматриваются совместно.

На данном этапе выполнения проекта рассмотрена задача глобальной маршрутизации, которая заключается в построении на заданном *многослойном* графе совокупности деревьев Штейнера с учетом одновременно двух видов ограничений, отражающих требования к времени прохождения сигнала и плотности соединений элементов. Предложен новый подход к решению ЗГТ, который учитывает как трассировочные ресурсы, так и задержки прохождения сигнала, и применим при проектировании СБИС с произвольным количеством слоев маршрутизации. Проведен численный эксперимент на тестовых примерах Intel и IBM, который показал высокую эффективность метода.

Результаты исследований вошли в монографию [80].

1.9. Разработка новых подходов к анализу эффективности функционирования беспроводных сенсорных сетей

Сенсор – это автономное интеллектуальное устройство, которое предназначено для сбора, обработки, получения и передачи данных. Сенсор может находиться либо в активном состоянии, выполняя свои функции и расходуя энергию, либо в состоянии сна, когда расходом энергии можно пренебречь. В беспроводной сенсорной сети (СС) каждый сенсор обладает ограниченным невозобновляемым запасом энергии – ресурсом, измеряемым в количестве временных раундов, в течение которых сенсор может находиться в активном состоянии. Так как число сенсоров в СС существенно превышает минимальное количество, необходимое для сбора и обработки данных, то функции сенсорной сети может выполнять *подмножество* её элементов. Основной функцией СС является мониторинг, и объект (точка области) считается покрытым, если он находится в зоне мониторинга хотя бы одного сенсора. В связи с этим в литературе подмножество сенсоров, выполняющее функции сети, называют *покрытием*. Хотя один и тот же сенсор может входить в разные покрытия, общее время функционирования сенсора ограничено его ресурсом. Основной задачей СС является оптимизация энергопотребления, что влечёт увеличение времени функционирования (жизни) СС. Таким образом, одним из способов максимизации времени жизни СС является определение времени функционирования каждого покрытия с учётом максимального времени функционирования каждого сенсора.

Итак, *покрытием* назовём подмножество сенсоров, обеспечивающее функционирование СС. В зависимости от приложения, цели СС могут различаться. В некоторых случаях требуется покрыть заданную область, либо ее часть, в других – множество объектов. Часто на покрытия накладываются дополнительные ограничения (связность [81], наличие определённой структуры [82], [83] и др.).

В работе [84] сформулирована задача максимизации времени жизни СС в случае, когда множество покрытий не задано, а переменные, соответствующие временам функционирования покрытий, *непрерывны*, в виде частного случая задачи линейного программирования (packing linear program) и предлагается метод ее решения, основанный на алгоритме Гарга-Кёнеманна (Garg-Konemann) [85]. В работе [86] рассматривается более общая задача с регулируемыми радиусами мониторинга в аналогичной постановке. Для её приближенного решения авторам удалось обобщить метод, предложенный в [87]. В работе [88] рассматривается задача максимизации времени жизни СС в случае, когда ресурсы всех вершин одинаковые. Для приближенного решения задачи предложен алгоритм, который строит множество покрытий с минимальным количеством многократно покрываемых

объектов, используя метод ветвей и границ, и работает, пока сенсоры, ресурс которых не израсходован, покрывают все объекты. При этом время функционирования одного покрытия задано входным параметром w.

В ходе численного эксперимента предложенный алгоритм сравнивался с алгоритмом Greedy-MSC [89]. В работе [90] для каждого сенсора задано множество объектов, которые он покрывает, и требуется построить множество *непересекающихся* покрытий, суммарное время жизни которых максимально.

В рамках проекта рассматривалась задача, аналогичная по постановке задаче, сформулированной авторами работы [91], в условиях *заданного* избыточного множества покрытий и *целочисленных* переменных, соответствующих количеству временных раундов, в течение которых покрытие функционирует.

Для математической постановки задачи введём следующие обозначения. Пусть J – множество сенсоров, $|J| = n$, и каждый сенсор $j \in J$ обладает ограниченным ресурсом $r_j \in Z^+$. Предположим, что задано множество *различных* покрытий $C = \{C_1, \dots , C_m\}$, $C_i \subseteq J$. Введем параметры $b_{jk} = 1$, если сенсор $j \in C_k$ и $b_{jk} = 0$ в противном случае, а также вектор переменных $y = (y_1, \dots , y_m)$, где $y_k \in Z^+$ – время функционирования (жизни) покрытия C_k (т.е. количество временных раундов, в течении которых элементы покрытия C_k активны). Тогда задача максимизации времени жизни СС запишется следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{m} y_k \to \max_{y_k \in Z_0^+};$$

$$\sum_{k=1}^{m} b_{jk} y_k \le r_j, \quad j \in J.$$

Получены следующие результаты:

- ✓ доказана NP-трудность поставленной задачи в сильном смысле;
- ✓ предложены способы её упрощения;
- ✓ показано, что для любого $\varepsilon > 0$ задача в общем случае не аппроксимируема полиномиальными алгоритмами с точностью $O(m^{1-\varepsilon})$, где m – количество покрытий;
- ✓ найдены частные случаи, когда задача полиномиально разрешима;
- ✓ предложено несколько эвристических алгоритмов построения приближённого решения задачи и проведён апостериорный анализ.

По результатам исследований принята в печать журнала «Дискретный анализ и исследование операций» (http://www.math.nsc.ru/publishing/DAOR/daor.html) статья Ерзин А.И., Плотников Р.В. Максимизация времени функционирования беспроводных сенсорных сетей в условиях ограниченности ресурсов сенсоров.

2 Показатели

2.1. Защиты диссертаций

Исполнителями НИР представлено 3 кандидатских диссертации (см. Приложение В).

2.2. Список студентов, аспирантов, докторантов и молодых исследователей, закрепленных в сфере науки и образования.

Поступили в аспирантуру ИМ СО РАН:

1. Романченко С.М.
2. Мельников А.А.
3. Лисицына М.А.
4. Коломеец Н.А.

2.3. Количество подготовленных и опубликованных статей:

Опубликовано 35, принято к печати 13, сдано в печать 10 статей (см. Приложение А).

2.4. Количество сделанных докладов:

Сделано 11 докладов на отечественных и 14 докладов на международных научных форумах. (см. Приложение Б).

3. Заключение

В процессе выполнения 3 этапа НИР получены следующие основные результаты.

1) Впервые выполнен полный анализ сложности задачи построения расписания для n работ на одной машине с ограничениями на оборотные ресурсы и неодновременным поступлением работ. При задании исходной информации об оборотных ресурсах для каждой работы задаются две величины: количество ресурса (α_j), потребляемое работой j из ресурсного пула в момент начала работы, и количество ресурса (β_j), возвращаемое работой j в ресурсный пул в момент окончания работы. При равенстве этих двух величин (для каждой работы) оборотный ресурс ведёт себя как классический возобновимый, однако в общем случае он представляет собой его существенное обобщение.

Анализ сложности задачи ведётся в зависимости от её параметра m — числа различных времён поступления работ. Показано, что:

- если m является частью входа, то задача NP-трудна в сильном смысле;
- если m ограничено константой, то задача NP-трудна в простом смысле и допускает псевдополиномиальное решение; она остаётся NP-трудной при любом m >1;
- доказана полиномиальная разрешимость задачи в частном случае — когда вклад каждой работы в ресурсный пул (β_j-α_j)неотрицателен; в то же время, противоположный случай, когда вклад каждой работы отрицателен, является NP-трудным в сильном смысле.

Таким образом, проведён полный анализ сложности данной задачи в зависимости от выбранного параметра. Он представляет собой совокупность взаимосвязанных неулучшаемых результатов, дающих полную картину сложности задачи.

2) Выполнен полный анализ сложности четырёхпараметрического семейства цеховых задач (включающего классические задачи job shop и open shop, а также смешанную задачу mixed shop), определяемого всевозможными комбинациями ограничений на такие параметры как максимальное число операций работы, длительность операции, верхняя оценка на длину расписания. Показано, что этот бесконечный класс задач содержит так называемую базисную систему задач — конечное семейство задач, дающее «ключ» к определению сложности любой задачи из бесконечного класса. Установлено, что базисная система состоит из десяти задач, пять из которых полиномиально разрешимы, а пять других — NP-полны (рассматриваются задачи распознавания). Сложность двух задач из базисной системы была известна ранее, сложность остальных восьми задач установлена нами. Тем самым, в явном виде установлено свойство дихотомии бесконечного класса (свойство гласит, что класс задач

не содержит задач «промежуточной сложности» — труднее полиномиально разрешимых, но легче NP-полных).

3) Рассмотрены две версии задачи Джонсона с общим буфером, возникающие в мультимедийных приложениях, связанных с передачей данных через переносное транслирующее устройство с ограниченной памятью. Для обеих версий установлена NP-трудность возникающих задач. Для случая, когда в процессе загрузки разрешены прерывания, выделены нетривиальные полиномиально разрешимые классы. Для обеих версий предложены новые нижние оценки, основанные на сведении задачи к специальной ограниченной версии.

4) Доказана NP-полнота некоторых актуальных задач выбора подмножеств векторов в конечном множестве векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

5) Предложены 2-приближённые алгоритмы для нескольких NP-трудных задач поиска подмножества векторов евклидова пространства по критерию минимума суммы квадратов расстояний.

6) В терминах совершенных структур охарактеризованы коды с параметрами трижды укороченных 1-совершенных двоичных кодов. Доказано, что соответствующие расширенные коды (с расстоянием 4) всегда порождают совершенную раскраску (регулярное разбиение) вершин гиперкуба в шесть цветов.

7) Приведено несколько конструкций H- и A-дизайнов и доказано существование $H(2^{T+1}, S \cdot 2^{T}, 2^{T+1}-1, 2^{T+1}-2)$-дизайнов для всех S, T больших 1.

8) Получено описание всех бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции. Подсчитано количество таких бент-функций. Предложена нижняя оценка количества бент-функций на минимальном расстоянии от бент-функций из класса Мэйорана—Мак-Фарланда. Разработана библиотека для работы с булевыми функциями.

9) Доказано, что каждая нередуцируемая дистанционно регулярная раскраска n-мерной квадратной решетки содержит не более $2n+1$ цветов, причем эта оценка достижима.

10) Предложен новый эффективный метод построения приближенного решения задачи глобальной маршрутизации с учётом как временных, так и ресурсных ограничений. Проведен апостериорный анализ метода на тестовых примерах Intel и IBM, который показал высокую эффективность разработанного подхода.

11) Рассмотрена задача максимизации времени жизни сенсорной сети в условиях ограниченности ресурсов сенсоров в виде задачи целочисленного линейного программирования, в которой при заданном множестве покрытий требуется определить

время функционирования каждого покрытия. При этом ресурс сенсора задаётся количеством временных раундов, в течение которых он может находиться в активном состоянии. Доказана NP-трудность задачи в сильном смысле; предложены способы её упрощения; показано, что для любого $\varepsilon > 0$ задача в общем случае не аппроксимируема полиномиальными алгоритмами с точностью $O(m^{1-\varepsilon})$, где m – количество покрытий; найдены частные случаи, когда задача полиномиально разрешима; предложено несколько эвристических алгоритмов построения приближённого решения задачи и проведён апостериорный анализ.

Полученные результаты имеют мировой уровень, а исполнители представляют передовой фронт науки в указанных областях.

По результатам 3 этапа НИР напрашивается вывод о целесообразности продолжения работ.

4. Список использованных источников

1. Дискретные задачи размещения. Библиотека тестовых примеров. Конкурентная задача размещения предприятий http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Compet-FL/Compet-FL.html.
2. N. Bansal, M. Mahdian, and M. Sviridenko (). Minimizing makespan in no-wait job shops // Mathematics of Operations Research 30(4), 2005, P. 817-831.
3. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko. Integrality Property in Preemptive Shop Scheduling // Discrete Applied Mathematics 159(5), 2011, P. 272-280.
4. J. Blazewicz, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan . Scheduling subject to resource constraints: Classification and complexity // Discrete Applied Mathematics 5, 1983, P. 11-24.
5. P. Brucker, A. Drexl, R. Mohring, K. Neumann, and E. Pesch. Resource-constrained project scheduling: Notation, classification, models, and methods // European Journal of Operational Research 112(1), 1999, P. 3-41.
6. P. Brucker and S. Knust (2000). Operations research: Complexity results of scheduling problems, http://www.mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class/.
7. J. Carlier, E. Pinson (). An algorithm for solving the job-shop problem // Management Science 35(2), 1989, P. 164-176.
8. B. Chen, C. Potts, and G. Woeginger . A review of machine scheduling: complexity, algorithms and approximability // Handbook of combinatorial optimization, Vol. 3 (pp. 21-169), 1998, Boston, MA: Kluwer Acad. Publ.
9. T.C.E. Cheng and B.M.T. Lin. Johnson's rule, composite jobs and the relocation problem // European Journal of Operational Research 192(3), 2009, P. 1008-1013.
10. I.G. Drobouchevitch and V.A. Strusevich. A polynomial algorithm for the three-machine open shop with a bottleneck machine // Annals of Operations Research 92, 1999, P. 185-214.
11. H. Fisher and G.L. Thompson. Probabilistic Learning Combinations of Local Job-Shop Scheduling Rules // Muth, J.F. and Thompson, G.L. (Eds.), Industrial Scheduling (pp. 225-551), Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1963.
12. M.R. Garey and D.S. Johnson. Computer and intractability: a guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman. 1979.
13. T. Gonzalez and S. Sahni. Open shop scheduling to minimize finish time // Journal of the Association for Computing Machinery 23(4), 1976, P. 665-679.

14. R.L. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, and A.H.G. Rinnooy Kan. Optimization and approximation in determenistic sequencing and scheduling: A survey // Annals of Discrete Mathematics 5, 1979, P. 287-326.
15. P.L. Hammer. Scheduling under resource constraints - Deterministic models // Annals of Operations Research 7, 1986. J.C. Baltzer AG, Switzerland.
16. W. Herroelen, B. De Reyck, and E. Demeulemeester. Resource-constrained project scheduling: A survey of recent developments // Computers and Operations Research 25(4), 1998, P. 279-302.
17. J. Hoogeveen, J.K. Lenstra, and B. Veltman. Three, four, five, six, or the complexity of scheduling with communication delays // Operations Research Letters 16(3),1994, P. 129-137.
18. An extension of Jhonson's results on job lot scheduling // Navel Research Logistics Quartely 3(3), 1956, P. 201-203.
19. S.M. Johnson. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Research Logistics Quarterly 1, 1954, P. 61-67.
20. E.H. Kaplan. Relocation models for public housing redevelopment programs // Planning and Design 13(1), 1986, P. 5-19.
21. E.H. Kaplan and A. Amir. A fast feasibility test for relocation problems // European Journal of Operational Research 35, 1988. P. 201-205.
22. E.H. Kaplan and O. Berman. Orient Heights housing projects // Interfaces 18(6), 1988, P. 14-22.
23. A.V. Kononov and B.M.T. Lin. On the relocation problems with multiple identical working crews // Discrete Optimization 21(4), 2006, P. 368-381.
24. A.V. Kononov and B.M.T. Lin. Minimizing the total weighted completion time in the relocation problem // Journal of Scheduling 13(2), 2010, P. 123-129.
25. E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, and D.B. Shmoys. Sequencing and scheduling: algorithms and complexity // S. Graves, A.H.G. Rinnooy Kan and P. Zipkin (Eds.) Handbooks in Operations Research and Management Science, V. 4, Logistics of Production and Inventory. North Holland, Amsterdam: Elsevier. 1993, pp. 445-522.
26. J.K. Lenstra and Rinnooy Kan. Complexity of scheduling under precedence constraints // Operations Research 26(1), 1978, P. 22-35.
27. J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan and P. Brucker. Complexity of machine scheduling problems // Annals of Discrete Mathematics 1, 1977, P. 343-362.

28. J. Lenstra, D. Shmoys, and E. Tardos. Approximation algorithms for scheduling unrelated parallel machines // Mathematical Programming, Ser. A, 46(3), 1990, P. 259-271.
29. B.M.T. Lin and S.T. Liu. Maximizing the reward in the relocation problem with generalized due dates // International Journal of Production Economics 115(1), 2008, P. 55-63.
30. F.-C. Lin, J.-S. Hong, and B.M.T. Lin. A two-machine flow shop problem with processing time-dependent buffer constraints — an application in multimedia problem. Computers & Operations Research 36(4), 2008, P. 1158–1175.
31. A. Mingozzi, V. Maniezzo, S. Ricciardelli, and L. Bianco.. An exact algorithm for the resource-constrained project scheduling problem based on a new mathematical formulation // Management Science 44(5), 1998, P. 714-729.
32. M. Pinedo. Planning and Scheduling in Manufacturing and Services. Springer Verlag, New York. 2005.
33. T.J. Schaefer. The Complexity of Satisfiability Problems // STOC 1978, 1978, P.216-226.
34. S. Sevastianov. An introduction to multi-parameter complexity analysis of discrete problems // European Journal of Operational Research 165(2), 2005, P. 387-397.
35. N.V. Shakhlevich, Yu.N. Sotskov and F. Werner. Complexity of mixed shop scheduling problems: A survey // European Journal of Operational Research 120, 2000, P. 343-351.
36. V.G. Timkovsky. Identical parallel machines vs. unit-time shops and preemptions vs. chains in scheduling complexity // European Journal of Operational Research 149, 2003, P. 355-376.
37. D. Williamson, L. Hall, J. Hoogeveen, C. Hurkens, J.K. Lenstra, S. Sevastianov, and D. Shmoys. Short shop schedules // Operations Research 45(2), 1997, P. 288-294.
38. J.-X. Xie. Polynomial algorithms for single machine scheduling problems with financial constraints // Operations Research Letters 21(1), 1997, P. 39-42.
39. В.Г. Визинг. О раскраске инциденторов в частично упорядоченном мультирафе // Дискретный анализ и исследование операций. Т. 15, 2008, N 1, С. 17-22.
40. К.Н. Каширских, А.В. Кононов, С.В. Севастьянов, И.Д. Черных. Полиномиально разрешимый случай двухстадийной задачи open shop с тремя машинами // Дискретный анализ и исследование операций, 2001, сер. 1. Т. 8, N 1, С. 23-39.
41. К.Н. Каширских, С.В. Севастьянов, И.Д. Черных. Четырёхпараметрический анализ сложности задачи open shop // Дискретный анализ и исследование операций, 2000, Сер. 1. Т. 7, N 4. С. 59-77.

42. А.В. Кононов, С.В. Севастьянов. О сложности нахождения связной предписанной раскраски вершин графа // Дискретный анализ и исследование операций, 2000, Сер. 1. Т. 7, N 2. С. 21-46.
43. Ю.Д. Неумытов, С.В. Севастьянов. Приближённый алгоритм с точной оценкой для трёхмашинной задачи встречных маршрутов // Управляемые системы. 1993, Вып. 31, С. 53-65.
44. Aloise D., Hansen P. On the Complexity of Minimum Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2007-50. 2007. 12 p.
45. Aloise D., Deshpande A., Hansen P., Popat P. NP-Hardness of Euclidean Sum-of-Squares Clustering // Les Cahiers du GERAD, G-2008-33. 2008. 4 p.
46. Mahajan M., Nimbhorkar P., Varadarajan K. The Planar k-means Problem is NP-Hard // Lecture Notes in Computer Science. 2009. Vol. 5431. P. 284-285.
47. Долгушев А.В., Кельманов А.В. К вопросу об алгоритмической сложности одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17, №2. С. 39-45.
48. MacQueen J.B. Some Methods for Classification and Analysis of Multivariate Observations // Proc. 5-th Berkeley Symp. Of Mathematical Statistics and Probability. 1967. Vol. 1. P. 281-297.
49. Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 1(25). С. 55-74.
50. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Пяткин А.В. Задача отыскания подмножества векторов с максимальным суммарным весом // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т.14, №1. С. 32-42.
51. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности одного из вариантов задачи выбора подмножества «похожих» векторов // Доклады РАН. 2008. Т.421, №5. С. 590-592.
52. Кельманов А.В., Пяткин А.В. Об одном варианте задачи выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2008. Т.15, №5. С. 25-40.
53. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач поиска подмножеств векторов и кластерного анализа // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2009, Т.49, №11. С. 2059-2067.
54. Kel'manov A.V., Jeon B. A Posteriori Joint Detection and Discrimination of Pulses in a Quasiperiodic Pulse Train // IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 52, No. 3, March 2004, pp. 1-12.

55. Кельманов А.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2001. Т.41, №5. С. 807-820.
56. Кельманов А.В., Михайлова Л.В. Совместное обнаружение в квазипериодической последовательности заданного числа фрагментов из эталонного набора и ее разбиение на участки, включающие серии одинаковых фрагментов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т.46, №1. С. 172-189.
57. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в квазипериодической последовательности повторяющегося набора эталонных фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т.48, №12, С. 168-184.
58. Кельманов А.В. Полиномиально разрешимые и NP-трудные варианты задачи оптимального обнаружения в числовой последовательности повторяющегося фрагмента // Материалы Российской конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций». Владивосток, 7-14 сентября 2007. Новосибирск: Изд-во Института математики СО РАН, 2007. http://math.nsc.ru/conference/door07/DOOR_abstracts.pdf. С. 46-50.
59. Кельманов А. В., Пяткин А. В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций, 2010, т. 17, №5, С.37-45.
60. Edwards A. W.F., Cavalli-Sforza L. L. A Method for Cluster Analysis // Biometrics. 1965. Vol. 21. P. 362-375.
61. Wirth H. Algorithms + Data Structures = Programs // New Jersey: Prentice Hall. 1976. 366 p.
62. Krotov D.S.. On the binary codes with parameters of triply-shortened 1-perfect codes // Designs, Codes and Cryptography, 2011, accepted. DOI 10.1007/s10623-011-9574-1
63. Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 3. С. 3–10.
64. Potapov V. N. On the multidimensional permanent and q-ary design // Proceedings of 3rd International Castle Meeting on Coding Theory and Application (September 11-15, 2011, Cardona, Spain). 2011. P. 233—237.
65. Kastner R., Bozorgzadeh E., Sarrafzadeh M. Pattern routing: use and theory for increasing predictability and avoiding coupling // IEEE Trans. on CAD. 2002. V. 21, P. 777-791.

66. Kramer M. R., van Leeuwen J. The complexity of wire routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits // Advances in computing research. 1984. V. 2: VLSI theory. (F.P. Preparata, ed.), P. 129-146.
67. Chiang C., Wong C. K., Sarrafzadeh M. A weighted Steiner tree-based global router with simultaneous length and density minimization // IEEE Trans. on CAD. 1994. V. 13, P. 1461-1469.
68. Ting B., Tien B. Routing techniques for gate array // IEEE Trans. on CAD. 1983. V. CAD-2, P. 301-312.
69. Albrecht C. Global routing by new approximation algorithms for multicommodity flow // IEEE Trans. on CAD. 2001. V. 20, P. 622-632.
70. Burstein M., Pelavin R. Hierarchical wire routing // IEEE Trans. on CAD. V. CAD-2, P. 223-234.
71. Hayashi M., Tsukiyama S. A hybrid hierarchical approach for multi-layer global routing // Proc. European Design and Test Conference. Paris, 1995, P.492-496.
72. Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing // Science. 1983. V. 220, P. 671-680.
73. Sechen C., Sangiovanni-Vincentelli A. The Timber-Wolf placement and routing package // IEEE J. of Solid-State Circuits. 1985. V. SC-20, P. 510-522.
74. Chen Y.A., Liu Y.L., Hsu Y.C. A new global router for ASIC design based on simulated evolution // Proc. Int. Symp. on VLSI Technology, Systems and Applications. 1989, P. 261-265.
75. Esbensen H. A macro-cell global router based on two genetic algorithms // Proc. EDAC. Paris, 1994, P. 428-433.
76. Youssef H., Sait S.M. Timing-driven global routing for standard-cell VLSI design // Computer systems: Science and Engineering. 1999. V. 14, P. 175-185.
77. Kastner R., Bozorgzadeh E., Sarrafzadeh M. Pattern routing: use and theory for increasing predictability and avoiding coupling // IEEE Trans. on CAD. 2002. V. 21, P. 777-791.
78. Cong J., Madden P. Performance driven global routing for standard cell design // Proc. ACM ISPD. Napa Valley, California, 1997, P.73-80.
79. Wang D., Kuh E.S. Performance-driven interconnect global routing // Proc. Great Lake Symp. VLSI. Montreal, Canada, 1996, P. 132-136.
80. А. Ерзин. Оптимизационные задачи на СБИС. Оптимизация состава, структуры и функционирования интегральных схем. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Germany. – 2011.

81. Inanc M., Magdon-Ismail M., Yener B. Power Optimal Connectivity and Coverage in Wireless Sensor Networks // Department of Computer Science, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY, 2003.
82. Астраков С.Н., Ерзин А.И., Залюбовский В.В. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций, Т. 16, № 3, 2009, С. 3-19.
83. Segal, M. Improving Lifetime of Wireless Sensor Networks // Network Protocols and Algorithms ISSN 1943-3581 2009, Vol. 1, No. 2.
84. Berman P., Galinescu G., Shan C., Zelikovsky A. Power efficient monitoring management in sensor networks // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Atlanta, USA, 2004, P. 2329-2334.
85. Garg N., Konemann J. Faster and simpler algorithms for multicommodity flow and other fractional packing problems // Proc. of FOCS, 1997.
86. Dhawan A., Vu C.T., Zelikovsky A., Li Y., Prasad S.K. Maximum lifetime of sensor networks with adjustable sensing range // Proceedings of the Seventh ACIS International Conference on Software Engineering, 2006.
87. Berman P., Galinescu G., Shan C., Zelikovsky A. Power efficient monitoring management in sensor networks // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Atlanta, USA, 2004, P. 2329-2334.
88. Kim Y., Lee H., Han Y. Jeonge Y. A Branch and Bound Algorithm for extending the lifetime of wireless sensor networks // Vehicular Technology Conference, 2009.
89. Cardei M., Thai M.T., Li Y., Wu W. Energy-efficient target coverage in wireless sensor networks // In IEEE Infocom 2005, Vol. 3, 2005, P. 1976-1984.
90. Cardei M., Ding-Zhu D. Improving wireless sensor network Lifetime through power aware organization // Springer Science, Business Media, Wireless Networks 11, Netherlands, 2005, P. 333-340.
91. Berman P., Galinescu G., Shan C., Zelikovsky A. Power efficient monitoring management in sensor networks // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Atlanta, USA, 2004, P. 2329-2334.

Приложение А. Список публикаций исполнителей

Монографии и учебные пособия

1. А. Ерзин. Оптимизационные задачи на СБИС. Оптимизация состава, структуры и функционирования интегральных схем. – Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishing. GmbH & Co. KG. Germany. – 2011. – 143 стр.
2. Тахонов И.И. Динамические распределенные системы. Анализ процессов изменения состояний. – Изд-во LAP Lambert Academic Publishing. GmbH & Co. KG. Germany. – 2011. – 100 стр.

Опубликованные статьи:

1. Тахонов И.И., Астраков С.Н. Равновесное распределение ресурсов в модели групповых взаимодействий // Вестник НГУ. Серия математика, 11(3), С. 61-76.
2. Erzin A.I. Pseudoregular plane covering by mobile sensors with adjustable sensing and communication ranges // Abstracts of 2nd Int. conf. “Optimization and Applications” (OTIMA-2011), Petrovac, Montenegro, 2011, P. 73-76.
3. Глебов А.Н., Гордеева А.В., Замбалаева Д.Ж. Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Сибирские электронные математические известия (htpp://semr.math.nsc.ru). 2011. Т. 8. С. 296-309.
4. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 17-48.
5. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Приближенный алгоритм решения задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 5. С. 11–37.
6. Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Вероятностный анализ децентрализованной версии одного обобщения задачи о назначениях // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 11–20.
7. Гимади Э.Х. Задача об оптимальном назначении и ее некоторые труднорешаемые версии // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Т. 1, Пленарные доклады. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН – 2011, С. 17–22.
8. Глебов А.Н, Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В. Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и

их приложения", Т. 4.: Дискретная оптимизация. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН – 2011, С 82-87.

9. Истомин А.М., М., Залюбовский В.В. Вероятностный анализ одной задачи маршрутизации // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Т. 4.: Дискретная оптимизация. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН - 2011, С. 129-133.
10. Гимади Э.Х., Рыков И.А. Рандомизированный алгоритм отыскания подмножества векторов с максимальной нормой суммы в евклидовом пространстве // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Т. 2.: Дискретная оптимизация. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН - 2011, С. 76-81.
11. Курочкин А.А., Гимади Э.Х. Эффективный алгоритм решения двухэтапной задачи размещения на древовидной сети // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Т. 4.: Дискретная оптимизация. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН – 2011, С. 173-178.
12. Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи поиска подмножества векторов // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения", Т. 4.: Дискретная оптимизация. Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН – 2011, С. 238-243.
13. В. Л. Береснев, Е. Н. Гончаров, А. А. Мельников. Локальный поиск по обобщённой окрестности для задачи оптимизации псевдобулевых функций // Дискретный анализ и исследование операций. 2011, том 18, № 4. С. 3–16.
14. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т.51, №11. С. 2106-2112.
15. A.V.Kelmanov, A.V.Pyatkin. On the Complexity of Some Cluster Analysis Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2009, Vol. 51, No. 11, pp. 1983-1988.
16. Кельманов А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т.1: Пленарные доклады, Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. С. 55-60.
17. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Труды XV Байкальской международной школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения". Т.4: Дискретная оптимизация, Иркутск: РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. С. 144-149.

18. Кельманов А.В. NP-полнота некоторых задач кластеризации // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15), г. Петрозаводск, 11– 17 сентября 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 269-272.
19. Кельманов А.В., Романченко С.М. Алгоритмы с оценками для некоторых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15), г. Петрозаводск, 11– 17 сентября 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 273-276.
20. Кельманов А.В., Михайлова Л.В., Хамидуллин С.А. Об одной задаче поиска и идентификация векторных наборов в последовательности // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15), г. Петрозаводск, 11– 17 сентября 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 277-280.
21. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. 2-приближенный алгоритм для одной задачи поиска в векторной последовательности совокупности «похожих» элементов // Математические методы распознавания образов: 15-я Всероссийская конференция (ММРО-15), г. Петрозаводск, 11– 17 сентября 2011 г.: Сборник докладов. – М.: МАКС Пресс, 2011. – С. 281-283.
22. A.V.Kelmanov, A.V.Pyatkin. On the Complexity of Some Clustering Problems // Proceedings of II International Conference «Optimization and applications» (OPTIMA-2011), Petrovac, Montenegro, September 25 – October 2, 2011. – p. 121-124.
23. I.I. Eremin, E.Kh. Gimadi, A.V.Kelmanov, M.Yu. Khachay. Algorithm for Solving Discrete Optimization and Machine Learning Problems // Proceedings of II International Conference «Optimization and applications» (OPTIMA-2011), Petrovac, Montenegro, September 25 – October 2, 2011. – p. 69-72.
24. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko (2011), Integrality Property in Preemptive Shop Scheduling // Discrete Applied Mathematics, 159(5), P. 272-280.
25. Bertrand M.T. Lin, Sergey V. Sevastyanov, and H.L. Huang (2011), Tight Complexity Analysis of the Relocation Problem with Arbitrary Release Dates // Theoretical Computer Science, 412(35), P. 4536–4544.
26. Августинович С. В., Васильева А. Ю., Сергеева И. В. Дистанционно регулярные раскраски бесконечной квадратной решётки // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 3. С. 3–10.

27. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжёрах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 4. С. 17–48.
28. Глебов А. Н., Замбалаева Д. Ж. Приближённый алгоритм решения задачи о двух коммивояжёрах на минимум с различными весовыми функциями // Дискретный анализ и исследование операций. 2011. Т.18, № 5. С. 11–37.
29. Krotov D. S., Potapov V. N. On connection between reducibility on an n-ary quasigroup and that of its retracts // Discrete Math. 2011. V. 311, N 1. P. 58–66.
30. Потапов В. Н. Кликосочетания в k-значном n-мерном кубе // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, N 2. С. 384–392.
31. Potapov V. N. Clique matchings in the k-ary n-dimensional cube // Siberian Math. J. 2011. V. 52, N 2. P. 303–310.
32. Потапов В. Н. О совершенных 2-раскрасках q-значного гиперкуба // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2011. N 4. С. 18–20.
33. Лавлинский С.М., Паздникова О.И., Калгина И.С. Сценарный анализ демографических перспектив развития Забайкальского края // Вестник Читинского государственного университета. – 2011. – № 6 (73). – С. 3-10.
34. Лавлинский С.М., Руднев А.С. Задачи технологического планирования в нефтедобыче. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. XIV – № 3(47). – С. 58-66.
35. Лавлинский С.М. О некоторых проблемах стратегического планирования в ресурсном регионе. // Материалы международной конференции «Ресурсная экономика, изменение климата и рациональное природопользование — 2011», Красноярск: ООО «Поликор», 2011. – С. 176-181.

Статьи, принятые к печати:

1. Ерзин А.И., Плотников Р.В. Максимизация времени функционирования беспроводных сенсорных сетей в условиях ограниченности ресурсов сенсоров // Дискретный анализ и исследование операций, 2011, № 6.
2. Astrakov S.N., Takhonov I.I. A Dynamic Model of Group Interactions // The Int. J. of Biomedical Soft Computing and Human Sciences, 2011, Vol. 18, No. 1
3. Erzin A.I. Plane covering by mobile sensors // Тр. Межд. конф. «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвящ. 100-летию А.А. Ляпунова, Новосибирск, 2011, 6 стр.

4. Гимади Э.Х., Ивонина Е.В. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19, № 1.
5. Кельманов А.В., Романченко С.М. Псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подмножества векторов и кластерного анализа // Автоматика и телемеханика. 2011.
6. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач выбора подпоследовательности векторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011.
7. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. Приближённые алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2011.
8. A. Kononov, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko (2011), A complete 4-parametric complexity classification of short shop scheduling problems // Journal of Scheduling, DOI: 10.1007/s10951-011-0243-z.
9. A. Kononov, J-S. Hong, P. Kononova, F-C. Lin (2011), Quantity-based buffer-constrained two machinw flowshop problem: active and passive prefetch models for multimedia applications // Journal of Scheduling, DOI: 10.1007/s10951-011-0235-z.
10. Васильева А. Ю. О реконструктивных подмножествах вершин в булевом кубе. Принята к публикации в Дискретный анализ и исследование операций.
11. Воробьев К. В. Кратные совершенные коды в гиперкубе. Принята к публикации в искретный анализ и исследование операций.
12. Кротов Д. С., Потапов В. Н. О числе n-арных квазигрупп конечного порядка // arXiv.org eprint math., math.CO/0912.5453v1. Принята к публикации в Дискретную математику.
13. Потапов В. Н. О дополняемости частичных n-квазигрупп порядка 4. Принята к публикации в Математические труды. http://math.nsc.ru/$\sim$potapov/prdvsloev4.pdf

Статьи, сданные в печать:

1. Samanta R., Raha S., Erzin A., Takhonov I. Construction of a Statistical Variation Aware Version of a Timing Driven Congestion Aware Global Router // IET Computers & Digital Techniques.
2. Gimadi E.Kh. Assignment Problem and some its Hard-to Solve Versions // Специальный выпуск журнала "Studia Informatica Univeralis" (http://studia.complexica.net/) (submited).

3. Ph. Baptiste, J. Carlier, A. Kononov, M. Queyranne, S. Sevastyanov, and M. Sviridenko, Integrality Property in Preemptive Parallel Machine Scheduling // Operations Research Letters, submitted.
4. I. Chernykh, A. Kononov, S. Sevastyanov, Efficient Approximation Algorithms for the Routing Open Shop Problem // Computers & Operations Research, submitted.
5. Sergey Sevastyanov, Darya Chemisova, Ilya Chernykh, On some properties of optimal schedules in the job shop problem with preemption and an arbitrary regular criterion // Annals of Operations Research, submitted.
6. S. Sevastyanov and B.M.T. Lin, Efficient enumeration of optimal and approximate solutions for the two-machine flow-shop problem // Navel Research Logistics, submitted.
7. А.В. Кононов, О цеховой задаче открытого типа на двух машинах с маршрутизацией в двухвершинной сети // Дискретный Анализ и Исследование операций.
8. Августинович С.В., Васильев Ю. Л, Рычков К. Л. Формульная сложность тернарной линейной функции. Сдана в Дискретный анализ и исследование операций.
9. Коломеец Н.А. Построение бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции. Сдана в Дискретный анализ и исследование операций.
10. Потапов В.Н. Построение гамильтоновых циклов с заданным спектром направлений рёбер в булевом n-мерном кубе. Сдана в Дискретный анализ и исследование операций

Приложение Б. Список сделанных исполнителями докладов

На всероссийских конференциях и семинарах:

1. Гимади Э.Х. О работе А.А. Ляпунова в Новосибирском государственном университете: кафедра теоретической кибернетики ММФ // Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики-XVI», Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г (пленарный доклад).

2. Гимади Э.Х. Задача машрутизации с ограниченным числом клиентов в каждом маршруте // Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики-XVI», Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г (секционный доклад).

3. С. В. Августинович, А. Ю. Васильева. О дистанционно регулярных раскрасках многомерных квадратных решеток // Мальцевские чтения, 11-14 октября 2011 г., Новосибирск, Россия (секционный)

4. Васильева А.Ю. Сферическое восстановление собственных функций гиперкуба // Международная конференция "Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики", посвященная 100-летию со дня рождения чл.-корр. АН СССР А. А. Ляпунова, 11 - 14 октября 2011 г., Новосибирск, Россия (секционный).

5. К. В. Воробьев. О связи совершенных 2-раскрасок с кратными совершенными кодами в гиперкубе // Мальцевские чтения, 11-14 октября 2011 г., Новосибирск, Россия (секционный)

6. Е. В. Горкунов, Е. В. Сотникова. О группе перестановочных автоморфизмов циклического кода Хэмминга // Мальцевские чтения, 11-14 октября 2011 г., Новосибирск, Россия (секционный).

7. Kolomeec N.A. Constructions of bent functions on the minimal distance from the quadratic bent function // Proc. IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT'2011). Saint-Petersburg, Russia. July, 31 - August, 5. pp. 647-651. 2011 (секционный).

8. Н. А. Коломеец Количество бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции // 10 Сибирская научная школа-семинар с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография" (SIBECRYPT'11), г. Томск, 5-10 сентября 2011 г. (секционный). Прикладная дискретная математика. 2011. Приложение № 4. С. 9–11 .

9. Н. А. Коломеец, А. В. Павлов Boolean Functions – система для работы с булевыми функциями // Сибирская научная школа-семинар с международным участием "Компьютерная безопасность и криптография" (SIBECRYPT'11), г. Томск, 5-10 сентября 2011 г. (секционный). Прикладная дискретная математика. 2011. Приложение № 4. С. 67–68.

10. Mogilnykh, F. I. Solov’eva, J. Borges, J. Rifa. Groups from normalized propelinear perfect codes // Мальцевские чтения, 11-14 октября 2011 г., Новосибирск, Россия (секционный)

11. Потапов В. Н. О мощности компонент корреляционно-иммунных функций, совершенных раскрасок и кодов // Материалы XVI Международной конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Н.Новгород, 20--25 июня 2011 г.) Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. С. 376—379 (секционный).

На международных конференциях и семинарах:

1. Erzin A.I. Pseudoregular plane covering by mobile sensors with adjustable sensing and communication ranges. 2nd **Int.** conf. “Optimization and Applications” (OTIMA-2011), Petrovac, Montenegro, 24 Sept. – 2 Oct. 2011 (секционный).
2. Erzin A.I. Plane covering by mobile sensors. **Межд.** конф. «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвящ. 100-летию А.А. Ляпунова, Новосибирск, 10-14 октября 2011 (секционный).
3. Псевдорегулярные покрытия плоской области мобильными сенсорами с регулируемыми параметрами. 7 Межд. Азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем», Республика Узбекистан, г. Ташкент, 17-27 октября 2011 (пленарный).
4. Синтез оптимальной коммуникационной сети в беспроводных сенсорных сетях. 7 Межд**.** Азиатская школа-семинар **«**Проблемы оптимизации сложных систем», Республика Узбекистан, г. Ташкент, 17-27 октября 2011 **(**секционный**).**
5. Gimadi E.Kh. Approximation efficient algorithms with performance guarantees for some hard routing problems // Международная конференция «Optimization and Applications» (OPTIMA 2011), Petrovac, Montenegro, 25.09 – 02.10.2011 (секционный доклад).
6. Гимади Э.Х. Пленарный доклад на международной конференции «Современные проблемы математики, информатики и биоинформатики», посвященной 100-летию со дня рождения А.А.Ляпунова, Новосибирск, 11-14 октября 2011.
7. V. Beresnev. Local Search Algorithm for the Competitive Facility Location Problem. International conference on Operations Research. Switzerland. Zurich 30 August – 2 September 2011.
8. Sergey Sevastyanov, Efficient enumeration of optimal and approximate solutions of a scheduling problem // 10th Cologne-Twente Workshop (CTW’11), Frascati (Italy), June 14-16, 2011 (joint with B.M.T. Lin).
9. Sergey Sevastyanov, Efficient enumeration of optimal and approximate solutions of the two-machine flow-shop problem // 10th Workshop on Models and Algorithms for Planning and

Scheduling Problems (MAPSP 2011), Nymburk (Czech Republic), June 19-24, 2011 (joint with B.M.T. Lin).

10. Alexander Kononov, An exact polynomial time algorithm for the preemptive mixed shop problem with two unit operations per job // 10th Workshop on Models and Algorithms for Planning and Scheduling Problems (MAPSP 2011), Nymburk (Czech Republic), June 19-24, 2011 (joint with Aldar Dugarzhapov).

11. Alexander Kononov, Logarithmic-approximations for the relocation problem // 10th Workshop on Models and Algorithms for Planning and Scheduling Problems (MAPSP 2011), Nymburk (Czech Republic), June 19-24, 2011 (joint with Alexander Grigoriev and Maxim Sviridenko).

12. A. Kononov, Logarithmic approximations for the relocation problem // 1st International Symposium & 10th Balkan Conference on Operational Research, Thessaloniki, Greece, September 22-24, 2011 (joint with A. Grigoriev and M. Sviridenko)

13. Potapov V. N. On the multidimensional permanent and q-ary design // Proceedings of 3rd International Castle Meeting on Coding Theory and Application (September 11-15, 2011, Cardona, Spain). 2011. P. 233—237 (секционный).

14. Лавлинский С.М. О некоторых проблемах стратегического планирования в ресурсном регионе. Международная конференция «Ресурсная экономика, изменение климата и рациональное природопользование — 2011», Красноярск, 4-7 июля 2011 г., секционный доклад.

Приложение В. Список представленных диссертаций

1. Батуева Цындыма Чимит-Доржиевна «Некоторые алгебраические методы в комбинаторной теории слов и частично упорядоченных множеств», диссертация представлена 17.10.2011 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – «дискретная математика и математическая кибернетика» в спец. совет Д 003.015.01 при ИМ СО РАН.

2. Замбалаева Долгор Жамьяновна «Решение задач маршрутизации и путевых разбиений графов методами раскрасок и весовых перераспределений», диссертация представлена 17.10.2011 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – «дискретная математика и математическая кибернетика» в спец. совет Д 003.015.01 при ИМ СО РАН.

3. Долгушев Александр Васильевич «Алгоритмы с оценками точности для некоторых задач анализа данных», диссертация представлена 17.10.2011 на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.09 – «дискретная математика и математическая кибернетика» в спец. совет Д 003.015.01 при ИМ СО РАН.