Российская академия наук

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

(ИМ СО РАН)

УДК 519.7

№ госрегистрации 01201064560

Инв. № 5218/2012

УТВЕРЖДАЮ
Директор
член-корреспондент РАН
_____________ Гончаров С.С.
«19» октября 2012 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

шифр заявки «2010-1.1-113-130-032»
государственный контракт от 20 сентября 2012 г. № 14.740.11.0362

по теме:

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

(итоговый, этап № 5)

Наименование этапа: «Анализ полученных результатов»

Руководитель НИР,
член-корреспондент РАН В.Д. Мазуров

____

Новосибирск 2012

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Рук. темы, советник, член-корр. РАН	________________	В.Д. Мазуров (Введение, Заключение)
Отв. исполнитель темы, исп. директор НОЦ, д.т.н.	________________	С.М. Лавлинский (Реферат, Приложения А-Б)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Береснев В.Л. (раздел 1.1.3)
проф. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Гимади Э.Х. (раздел 1.1.4)
зав. кафедрой НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Ерзин А.И. (раздел 1.1.4)
гл.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	________________	Кельманов А.В. (раздел 1.1.2)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	________________	Соловьева Ф.И. (раздел 1.1.1)
в.н.с. ИМ СО РАН, д.ф.-м.н.	________________	Севастьянов С.В. (раздел 1.1.5)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Кононов А.В. (раздел 1.1.5)
н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Алексеева Е.В. (раздел 1.1.3)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	Пузынина С.В. (раздел 1.1.1)
инж. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Тахонов И.И. (раздел 1.1.4)
зав. лабораторией ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Августинович С.В. (раздел 1.1.1)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	Токарева Н.Н. (раздел 1.1.1)
доц. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Кротов Д.С. (раздел 1.1.1)
с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	________________	Потапов В. Н. (раздел 1.1.1)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	Могильных И.Ю. (раздел 1.1.1)

с.н.с. ИМ СО РАН, к.ф.-м.н.	_______________	Васильева А.Ю. (раздел 1.1.1)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_______________	Горкунов Е.В. (раздел 1.1.1)
аспирант ИМ СО РАН	_______________	Коломеец Н. А. (раздел 1.1.1)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_______________	Батуева Ц.Ч. (раздел 1.1.1)
асс. НГУ, к.ф.-м.н.	_______________	Салимов П.В. (раздел 1.1.1)
аспирант ИМ СО РАН	_______________	Павлов С.В. (раздел 1.1.5)
аспирант ИМ СО РАН	_______________	Сухорослов А.А. (раздел 1.1.5)
асп. НГУ	_______________	Плотников Р.В. (раздел 1.1.4)
аспирант ИМ СО РАН	_______________	Романченко С.М. (раздел 1.1.2)
аспирант ИМ СО РАН	_______________	Мельников А.А. (раздел 1.1.3)
асп. НГУ	_______________	Долгушев А.В. (раздел 1.1.2)
студент НГУ	_______________	Сотникова Е.В. (раздел 1.1.1)
Асп. НГУ	_______________	Валюженич А.А. (раздел 1.1.1)
студент НГУ	_______________	Семина Ю.Д. (раздел 1.1.1)
студент НГУ	_______________	Паршина О.Г. (раздел 1.1.1)
студент НГУ	_______________	Хандеев В.И. (раздел 1.1.2)
аспирант ИМ СО РАН	_______________	Ковалевская Д.И. (раздел 1.1.1)
нормоконтролер	_________	Кравченко С.В.

Реферат

Отчет 91 с., 1 ч., 89 источников, 1 табл., 2 прил.

Тема: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Ключевые слова: ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЁРА С НЕСКОЛЬКИМИ КОММИВОЯЖЁРАМИ, АЛГОРИТМЫ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА С ОБОБЩЕННОЙ ОКРЕСТНОСТЬЮ, ЭФФЕКТИВНЫе АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА, БЕНТ-ФУНКЦИИ, БЛОЧНЫЙ ШИФР, КОММУНИКАЦИОННОЕ ДЕРЕВО В БЕСПРОВОДНЫХ СЕНСОРНЫХ СЕТЯХ.

Основным объектом исследования являются актуальные проблемы теоретической кибернетики.

Основной целью проекта является получение научных результатов мирового уровня, позволяющих закрепить приоритет российской школы теоретической кибернетики, повысить уровень подготовки и способствовать закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формированию эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

В процессе работ использовались классические методы кластерного анализа, методы теории кодирования, методы оптимизации и дискретного анализа, аппарат теории расписаний.

В результате работ 5 этапа проведен анализ полученных за период проекта результатов, разработана программа их внедрения в образовательный процесс и проведен патентный поиск. Помимо этого в ходе работ получен ряд новых результатов мирового уровня:

1. Исследованы абелевы модификации критической факторизационной теоремы, а именно, рассмотрены связи между локальными абелевыми степенями и глобальной периодичностью бесконечных слов.

2. Установлено, что код с параметрами дважды или трижды укороченного кода Хэмминга порождает совершенную структуру с определёнными параметрами над булевым гиперкубом. Доказан критерий регулярности разбиения вершин графов для достаточно общего класса графов.

3. Приведена нижняя оценка числа неэквивалентных пропелинейных совершенных двоичных кодов, имеющих разные ранги. Доказано, что существует экспоненциальное число неэквивалентных пропелинейных расширенных совершенных кодов.

4. Изучено избегание рамочного шаблона в перестановках. Показано, что гипотеза Стенли-Вилфа, а также теорема Эрдеша и Секереша не выполняются в общем случае для таких шаблонов.

5. Для решения задачи отыскания m реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера на неориентированном графе на минимум суммарной длины обходов (задача m-PSP-min) предложен алгоритм с временной сложностью mn^2 (при $m<n/4$).

6. Построен приближенный полиномиальный алгоритм решения NP-трудной задачи двух коммивояжеров на неориентированном графе на минимум с весами рёбер 1 или 2 в случае, когда каждое ребро графа имеет пропускную способность, равную 2 (с вероятностью p) и 1 (с вероятностью 1–p). Доказано, что ожидаемая оценка точности данного алгоритма равна 2–(1+p)(1– r/2), где r – гарантированная точность решения симметричной задачи коммивояжера на минимум (TSP-min). С использованием алгоритма Пападимитриу и Яннакакиса, дающего оценку r =7/6, ожидаемая оценка точности построенного алгоритма равна величине (19–5p) /12

7. Для задачи 2-PSP-max, в котором веса ребер принимают значения из заданного промежутка (1,q) получена наилучшая на данный момент гарантированная оценка точности (7q+3)/(9q+1).

8. Для двухэтапной задачи размещения производства на древовидной сети, при условии, что затраты на транспортировку единицы продукции из пункта в пункт равны сумме длин ребер в цепи между этими пунктами, разработан точный алгоритм решения с трудоемкостью O(nm^3), где n – число пунктов спроса конечного продукта, m – ограничение сверху на число возможных пунктов размещения производства каждого этапа.

9. В контексте беспроводных сенсорных сетей рассмотрены задачи дискретной оптимизации и комбинаторной геометрии, заключающиеся в поиске наименее плотных регулярных покрытий плоскости и полосы эллипсами одного, двух и трёх типов. Предложены новые модели регулярных покрытий, использующие небольшое число эллипсов для покрытия типового многоугольника и имеющие рекордную плотность в своих классах.

10. Разработаны приближенные эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для ряда NP-трудных задач, к которым сводятся актуальные проблемы помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов.

11. Для нескольких экстремальных задач построены точные полиномиальные и псевдополиномиальные алгоритмы дискретной оптимизации, составляющие ядро новых методов распознавания, гарантирующих оптимальность принятия решения в условиях помех.

12. Для случая, когда число машин m не превосходит 9, доказана справедливость гипотезы Чена-Струсевича об оценке длины плотных расписаний в задаче Open Shop. А именно, для всех $m \leq 9$ доказано, что для любого заданного примера m-машинной задачи относительное удаление длины любого его плотного расписания от длины оптимального расписания не превосходит $(2-1/m)$. При тех же условиях на m доказана и более точная верхняя оценка на длину любого плотного расписания в задаче Open Shop, а также выявлены новые свойства плотных расписаний.

13. Рассмотрена задача построения оптимальных циклических расписаний для роботизированной ячейки, обслуживаемой одним роботом со строгой стратегией разгрузки в машинной среде flow shop, с критерием максимум производительности ячейки. Найдено оптимальное решение задачи в случае, когда число машин $m=5$, а время (p) выполнения одной операции находится в интервале $[4\delta,8\delta)$, где δ — время перемещения робота между соседними машинами. Гипотеза о том, что для p из данного интервала оптимальным является 2-цикл, была доказана ранее для всех значений m, за исключением $m=5$. Полученное нами подтверждение гипотезы для $m=5$ полностью закрывает проблему в случае $4\delta \leq p < 8\delta$.

14. Рассмотрена задача о выполнении n независимых работ на m параллельных идентичных машинах с допущением прерывания работ и их последующем возобновлении на любой из машин. (При смене какой-то работой машины-исполнителя работа может быть возобновлена с фиксированной задержкой d.) Для случая 4 машин получено подтверждение гипотезы Фишкина-Ситтерса о существовании для любого примера m-машинной задачи оптимального расписания с не более чем $m-1$ миграцией работ.

15. Для частного случая цеховой задачи смешанного типа (job shop и open shop) с допущением прерываний операций, в котором каждая работа имеет не более двух ненулевых операций единичной длины, построен точный полиномиальный алгоритм.

16. Для задачи передислокации с оборотным ресурсом построен полиномиальный алгоритм с не более чем логарифмической погрешностью от числа работ в худшем случае.

17. Рассмотрена цеховая задача открытого типа с маршрутизацией. Для случая двух машин в сети из двух вершин построена вполне полиномиальная приближенная схема. Для случая с произвольным числом машин в произвольной сети построен полиномиальный алгоритм с погрешностью не более чем логарифм от числа машин в худшем случае.

Степень внедрения – результаты, полученные в ходе реализации проекта, используются в образовательном процессе Новосибирского государственного университета при чтении таких курсов лекций, как «Исследование операций», «Совершенные структуры», «Теория расписаний», «Анализ данных и распознавание образов».

Полученные результаты фундаментального характера, прежде всего, являются вкладом в общую математическую теорию. Результаты исследований могут быть использованы в практической сфере, связанной с процессами управления.

Эффективность и значимость работ, помимо чисто научных результатов, заключается в подготовке молодых ученых, непосредственно участвовавших в работах наряду с признанными специалистами, и способствуют закреплению в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров.

В результате реализации проекта на протяжении всех пяти этапов авторами сформирован эффективный инструментарий исследования проблем теоретической кибернетики, использующего сформулированные подходы и новые постановки ключевых задач. По ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в статьях в высокорейтинговых журналах.

Обозначения и сокращения

ИМ СО РАН - Институт математики Сибирского отделения Российской академии наук.

НГУ – Новосибирский государственный университет.

НОЦ – научно-образовательный центр.

СБИС – сверхбольшие интегральные схемы.

Содержание

Введение

Выполнение НИР направлено на проведение фундаментальных исследований в области теоретической кибернетики, с целью получения научных результатов мирового уровня, на подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов.

Запланированные исследования 5 этапа играют важную роль в рамках всей НИР. В ходе работ предполагается проанализировать полученные за все этапы проекта результаты, произвести патентный поиск, зафиксированный в техническом задании в качестве обязательнго элемента.

Завершающий характер итогового отчета подчеркивает раздел, посвященный внедрению полученных результатов в образовательный процесс. Результаты выполнения проекта вошли в новые лекции читаемых в НГУ учебных курсов бакалавриата и магистратуры, а также спецкурсы, читаемые на факультетах. Это обстоятельство придает особое значение научным результатам проекта и перспективам организации новых научных коллективов молодых ученых, специализирующихся на проблемах теоретической кибернетики.

1. Анализ полученных результатов

На итоговом этапе выполнения госконтракта, согласно календарному плану, проведены работы по следующим направлениям.

1.1. Подведение итогов исследований. Оценка результатов.

Так как в рамках НИР получены фундаментальные результаты в различных областях теоретической кибернетики, мы разобьём данный раздел на подразделы, соответствующие областям проведённых исследований

1.1.1. Результаты, полученные в области дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации

В этой области получен ряд результатов мирового уровня.

I. Доказан признак разделимости n-арных квазигрупп произвольного порядка в терминах разделимости ретрактов. Охарактеризованы классы сублинейных n-арных квазигрупп порядков 5 и 7. Установлены новые нижняя и верхняя оценки числа n-арных квазигрупп конечного порядка, при помощи них установлена нижняя оценка числа q-ичных совершенных кодов.

Операция $f{:}S^n \rightarrow S$, где S – множество, называется *n-арной квазигруппой* порядка $|S|$, если в уравнении $x_0=f(x_1,\ldots,x_n)$ любые n переменных однозначно задают оставшуюся. *Ретрактом* n-арной квазигруппы f называется квазигруппа, получаемая из f фиксацией значений части аргументов. n-Арная квазигруппа называется *разделимой*, если она представима в виде суперпозиции квазигрупп меньшей арности. Доказано, что если все $(n-1)$- и $(n-2)$- арные ретракты n-арной квазигруппы f разделимы, то и сама f является разделимой. В случае конечного простого порядка получено более сильное утверждение: если все $(n-1)$-арные ретракты n-арной квазигруппы f разделимы, то и сама f является разделимой. Для произвольного порядка это утверждение неверно. Доказано, что все n-арные квазигруппы порядков $k=5$ и $k=7$, бинарные ретракты которых изотопны группе (т.е. имеют вид $g(h(x)+l(y) \bmod k)$), являются разделимыми, кроме случая $n=3$, $k=5$.

Пусть $Q(n,k)$ – число n-арных квазигрупп порядка k. Получена рекуррентная формула для чисел $Q(n,4)$. Доказано, что при любых $n>1$ и $k>4$ справедливы неравенства $((k-3)/2)^{n/2}$ $((k-1)/2)^{n/2} < log_2 Q(n,k) < c_k(k-2)^n$, где c_k не зависит от n. Таким образом, верхняя

асимптотическая граница для чисел $Q(n,k)$ улучшена при любых $k>4$, нижняя – при нечетных $k>6$. Оценки числа $Q(n,k)$ использованы для получения рекордной нижней оценки числа совершенных кодов в q-значном алфавите, $q>2$.

II. Получена полная характеризация возможных распределений локальных экстремумов произвольной целевой функции на вершинах произвольного связного графа.

Пусть $G(V, E)$ – связный граф с множеством вершин V и множеством ребер E, F – произвольная действительнозначная целевая функция, заданная на множестве вершин графа. Вершину v графа G будем называть локальным минимумом (максимумом) функции F, если $F(v) < F(u)$ (соответственно $F(v) > f(u)$) для всех u таких, что v и u соединены ребром. Множество локальных минимумов функции F обозначим через m, а множество локальных максимумов – через M. Пару (M, m) подмножеств множества V назовем допустимой для графа G, если найдется такая целевая функция F, для которой m и M в точности множества локальных экстремумов. Получена полная характеризация допустимых пар подмножеств для произвольного связного графа. Доказана

Теорема. *Пара подмножеств* (M,m) *множества вершин связного графа G является допустимой, если и только если выполняются условия*:

1. *Множества M и m не пересекаются и являются независимыми множествами в G.*
2. *Для всякой промежуточной вершины v найдется простой путь, проходящий через v, в котором первая и последняя вершины принадлежат соответственно множествам M и m, а все остальные вершины промежуточные.*

III. Для всех транзитивных кубических графов с числом вершин, не превосходящим 18, получено полное описание допустимых параметров совершенных 2-раскрасок. Перечислены параметры всех дистанционно регулярных раскрасок бесконечной квадратной решетки. Как следствие, получена полная классификация дистанционно регулярных кодов в бесконечной квадратной решетке.

Данная работа посвящена исследованию совершенных раскрасок в 2 цвета некоторых бесконечных серий транзитивных кубических графов. Раскраска вершин графа G называется совершенной, если для любых двух вершин одного цвета цветовые составы их окружения совпадают. Для удобства совершенные раскраски в 2 цвета будем называть совершенными 2-раскрасками, причем цвет 1 будем называть белым, а цвет 2 - черным. Матрица параметров совершенной 2-раскраски является квадратной и определяется четырьмя параметрами a, b, c и d. Параметры a и d называются внутренними, а b и c – внешними степенями белого и черного цветов соответственно.

Две матрицы совершенных раскрасок называются эквивалентными, если одна может быть получена из другой перестановкой строк и столбцов, соответствующей некоторому переобозначению цветов. Чтобы не рассматривать эквивалентные матрицы, мы ограничились рассмотрением матриц параметров совершенных 2-раскрасок, характеристический вектор которых удовлетворяет условию $b > c$. Основным инструментом исследования совершенных 2-раскрасок графа является понятие локально жесткого фрагмента. Подмножество вершин графа G называется локально жестким фрагментом, если всякая совершенная раскраска G однозначно восстанавливается по своему сужению на этот фрагмент. Для тех бесконечных серий кубических графов, которые пришлось рассмотреть, минимальные локально жесткие фрагменты содержали от 4 до 6 вершин, что позволило значительно сократить перебор вариантов.

IV. В терминах совершенных структур охарактеризованы коды с параметрами трижды укороченных 1-совершенных двоичных кодов. Доказано, что соответствующие расширенные коды (с расстоянием 4) всегда порождают совершенную раскраску (регулярное разбиение) вершин гиперкуба в шесть цветов.

V. Приведено несколько конструкций H- и A-дизайнов и доказано существование $H(2^{T+1}, S\cdot 2^{T}, 2^{T+1}-1, 2^{T+1}-2)$-дизайнов для всех S, T больших 1.

$H(N,Q,W,T)$-дизайном называется набор из $(N$-$W)$-мерных граней гиперкуба Q_q^n, которые совершенным образом протыкают все $(N$-$T)$-мерные грани, а $A(N,Q,W,T)$-дизайн – это набор из $(N$-$T)$-мерных граней гиперкуба Q_q^n, совершенным образом покрывающих все $(N$-$W)$-мерные грани. Количества H- и A-дизайнов выражаются через многомерные перманенты. Пусть X – множество точек и $C = \{C_1, \ldots, Cn\}$ – разбиение X на n наборов мощности Q. Трансверсаль C является подмножеством X, пересекающимся с каждым множеством C_i не более чем в одной точке. Множество T–элементных трансверсалей из C является $A(N,Q,W,T)$-дизайном (кратко A-дизайн), если каждая W-элементная трансверсаль из C содержится ровно в одной из трансверсалей A-дизайна. Имеется в виду, что всюду $N > W > T$ и все эти числа целые.

Положим $Q_q = \{0,1,\ldots q\text{-}1\}$. Тогда множество H, состоящее из некоторых векторов веса W, является $H(N,Q,W,T)$-дизайном, если каждый вектор веса T покрывается ровно одним вектором из H. Аналогично, множество A, состоящее из векторов веса T, является $A(N,Q,W,T)$-дизайном, если каждый вектор веса W покрывает ровно один вектор из

A. Если $q = 1$, то $H(N,1,W,T)$- дизайн есть просто система Штейнера $S(T,W,N)$ и $A(N,1,W,T)$-дизайн – это всего лишь система Штейнера $S(N\text{-}W,N\text{-}T,N$. В статье Зиновьева и Рифы H-дизайн называется Q-ичной системой Штейнера. Множество A векторов веса W является (N,W,T)- системой Турана, если каждый вектор веса W покрывает по крайней мере один вектор веса T из A. Следовательно, $A(N,1,W,T)$-дизайн есть частный случай (N, W, T)-системы Турана.

VI. Получено описание всех бент-функций на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции. Подсчитано количество таких бент-функций. Предложена нижняя оценка количества бент-функций на минимальном расстоянии от бент-функций из класса Мэйорана—Мак-Фарланда. Разработана библиотека для работы с булевыми функциями.

Бент-функции – это булевы функции от четного числа переменных, максимально удаленные от класса аффинных функций. Бент-функции имеют большое число приложений: в криптографии, теории кодирования, теории информации.

В работах построены все бент-функции на минимальном расстоянии от квадратичной бент-функции, а также показано, что число таких бент-функций от 2k переменных равно $2^k \cdot (2^1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^k + 1)$. Поскольку любая квадратичная бент-функция аффинно эквивалентна бент-функции из класса Мэйорана—Мак-Фарланда, интересной является задача нахождения нижней оценки количества бент-функций на минимальном расстоянии от произвольной бент-функции из этого класса. Приводятся некоторые факты и гипотеза об оценке количества бент-функций на расстоянии 2^k (минимальное возможное расстояние между двумя различными бент-функциями от 2k переменных) от произвольной бент-функции.

Предлагается также система для работы с булевыми функциями *Boolean Functions*. Эта система ориентирована на пользователей-программистов и представляет собой библиотеку классов и функций на языке C++. Она может быть полезна для проведения компьютерных экспериментов и тестов, связанных с булевыми функциями. Основное предназначение библиотеки – работа с булевыми функциями специального вида (бент-функциями).

VII. Доказано, что каждая нередуцируемая дистанционно регулярная раскраска n-мерной квадратной решетки содержит не более $2n$+1 цветов, причем эта оценка достижима.

Разбиение вершин графа G на подмножества $V_0, V_1, \ldots, V_k$ называется совершенной k-раскраской, если для произвольных $i, j \in \{0,1, ..., k\}$ существует такое число α_{ij}, что любая

вершина из V_i имеет ровно α_{ij} соседей из V_j. Матрица $A = (\alpha_{ij})$ называется матрицей параметров данной совершенной раскраски. Совершенная раскраска $V_0, V_1, \ldots, V_k$ – дистанционно регулярная, если матрица ее параметров тридиагональна. Такая раскраска является дистанционной относительно множества вершин V_0 (в этом случае множество V_0 называется полностью регулярным кодом).

Объектом нашего исследования является граф $G(\mathbf{Z^n})$ n- мерной квадратной решетки. Назовем раскраску $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{Z^n}$ редуцируемой, если она может быть сведена к одномерной, т.е. для произвольного $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{Z^n}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \ldots + \delta_n x_n),$$

где φ_1– некоторая k-раскраска $\mathbf{Z}^1$и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \in \{0,\ 1, -1\}$ – произвольные константы. Редуцируемые раскраски и их параметры нетрудно выписать, они будут образовывать три серии с растущим количеством цветов. Нередуцируемые раскраски не поддаются столь простому описанию. Доказана

Теорема. Если φ – нередуцируемая дистанционно регулярная k-раскраска n-мерной квадратной решетки, то $k \leq 2n+ 1$, причем эта оценка достижима.

VIII. Найдена нижняя оценка числа бент-функций на минимальном расстоянии от бент-функции из класса Мэйорана – МакФарланда.

Через Z_2^n обозначим n-мерное векторное пространство над Z_2, через $\oplus$ – сложение по модулю 2. Под расстоянием между двумя булевыми функциями будем понимать расстояние Хэмминга (число векторов, на которых функции различаются). Степень алгебраической нормальной формы булевой функции называется алгебраической степенью функции. Булева функция называется аффинной, если её алгебраическая степень не превосходит 1, и квадратичной, если её алгебраическая степень равна 2. Множество всех бент-функций от 2^k переменных обозначается через $\mathcal{B}_{2k}$. Задача построения бент-функций на расстоянии d_k от бент-функции f сводится к поиску аффинных подпространств размерности k в Z_2^k, на которых заданная бент-функция аффинна.

Поскольку любая квадратичная бент-функция от $2k$ переменных аффинно эквивалентна бент-функции $f_0^{2k}(x) = x_1x_{k+1} \oplus x_2x_{k+2} \oplus \ldots \oplus x_kx_{2k}$, , а бент-функция f_0^{2k} принадлежит классу Мэйорана – МакФарланда, все квадратичные бент-функции аффинно эквивалентны бент-функциям из этого класса. Поэтому рассмотрена более общая задача

нахождения нижней оценки числа бент-функций на расстоянии d_k от функции из этого класса. Доказана следующая

Теорема. Пусть f – бент-функция от $2k$ переменных из класса Мэйорана – МакФарланда. Тогда число бент-функций на расстоянии d_k от неё не меньше $2^{2k+1} - 2^k$. Доказано также, что число бент-функций на расстоянии d_k от функции $f \in \mathcal{B}_{2k}$ меньше 2^{k^2+2k}.

IX. В терминах преобразования Фурье введено понятие реконструктивного множества в булевом кубе. Получена характеризация реконструктивных множеств, являющихся линейными подпространствами. Установлены необходимые и достаточные условия реконструктивности сферы. Приведено достаточное условие реконструктивности двух концентрических сфер.

Исследуемый вопрос можно сформулировать так: какова минимальная информация (определённого рода) об объекте из заданного класса, однозначно определяющая этот объект? Этот вопрос рассматривается для класса всех действительнозначных функций, определённых на множестве всех двоичных наборов длины n. Произвольная такая функция однозначно определяется своими коэффициентами Фурье, которые, в свою очередь, однозначно определяются по функции.

Таким образом, функция полностью задаётся набором из 2^n значений либо набором из 2^n коэффициентов Фурье. Возникает вопрос об однозначности задания функции некоторым набором из k значений и m коэффициентов Фурье. Ясно, что в общем случае $k + m$ должно быть не меньше 2^n. Здесь исследуется экстремальный случай, когда $k + m = 2^n$ и в каждой вершине булева куба задано значение функции или коэффициент Фурье.

Исследуемый вопрос возник в результате изучения совершенных кодов и центрированных функций. Произвольная центрированная функция (т. е. функция, сумма значений которой в любом шаре радиуса 1 не зависит от выбора шара) может быть однозначно восстановлена по её значениям на наборах веса $(n + 1)/2$. Именно на этих наборах (и только на них) коэффициенты Фурье центрированной функции могут принимать ненулевые значения. В нашей терминологии это означает, что множество наборов веса $(n + 1)/2$ является реконструктивным. Совершенные коды являются важным частным случаем центрированных функций, когда функция булева, а сумма её значений в шаре равна 1.

Пополнен список реконструктивных множеств и изучены их свойства.

X. Спектром гамильтонова цикла (кода Грея) в булевом n-мерном кубе называется набор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, где a_i – число рёбер i-го направления в цикле. Известны необходимые условия существования кода Грея со спектром a: числа a_i чётные и для любого $k = 1, \ldots, n$ сумма k произвольных компонент набора a не меньше чем $2k$. Доказано существование такой размерности N, что если необходимые условия на спектр являются достаточными для существования гамильтонова цикла с таким спектром в булевом N-мерном кубе, то сформулированные выше условия являются достаточными и для всех размерностей n.

Задача состояла в том, чтобы выяснить, являются ли эти необходимые условия на спектр гамильтонова цикла достаточными для существования кода Грея с таким спектром. В данной работе предложено асимптотическое решение этой задачи, а именно, доказано, что любой допустимый набор является спектром гамильтонова цикла в любом булевом n-кубе, если это верно для булева N-куба при некотором достаточно большом N. В доказательстве применяется конструкция гамильтонова цикла, использующая представление булева n-куба как декартова произведения кубов размерности k и $n - k$.

Булевым n-кубом называется множество Q_n двоичных слов длины n, а также граф GQ_n, вершинами которого являются элементы Q_n, и пара вершин смежна, если и только если соответствующие слова различаются ровно в одной позиции. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Существует такое число N, что если любой допустимый целочисленный набор длины N является спектром некоторого гамильтонова цикла (полного ранга в случае, когда $\sum_{i=1}^{k} a_i > 2^k$ при любом $k < N$), то для любого целого $n > 2$ любой допустимый целочисленный набор длины n является спектром некоторого гамильтонова цикла в GQ_n.*

XI. Установлено, что сложность реализации в классе обобщённых (троичных) π-схем троичного счётчика кратности 3, зависящего от трёх переменных, равна 18.

Под q-ичной параллельно-последовательной контактной схемой (π-схемой) понимается обычная (двоичная) π-схема, контактам которой приписаны символы x_i^{δ}, $i = 1, \ldots, n$; $\delta = 0, 1, \ldots, q - 1$. При этом символ x_i^{δ} − это не булева переменная или её отрицание, а функция от x_i, определённая на $B_q = \{0, 1, \ldots, q - 1\}$ и принимающая значения из $\{0, 1\}$. Значение функции x_i^{δ} равно 1, если $x_i = \delta$, и равно 0, если $x_i \neq \delta$. Для определённых таким образом переменных естественно ввести операции дизъюнкции и конъюнкции. Поэтому любой обобщённой π-схеме будет соответствовать формула, сложность которой определяется числом вхождений в неё переменных.

Функция $f : B_q^{\,n} \to \{0, 1\}$ проводимости q-ичной π-схемы определяется по аналогии с двоичным случаем. Сложностью $L(S)$ q-ичной π-схемы S называется число контактов в S. Сложностью $L_\pi(f)$ функции $f : B_q^{\,n} \to \{0, 1\}$ в классе π-схем называется $\min_S L(S)$, где минимум берётся по всем q-ичным π-схемам, реализующим f. На множестве $B_q^{\,n}$ определим следующую функцию (линейную функцию, существенно зависящую от всех своих переменных):

$$\varphi_q(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_1 + \ldots + x_n = 0 \ (mod\ q), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Результатом настоящей работы является точное значение сложности функции $\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$.

Теорема. *Для функции* $\varphi_3(x_1, x_2, x_3)$ *справедливо равенство* $L_\pi(\varphi_3(x_1, x_2, x_3)) = 18$.

XII. Подмножество вершин графа называется k-кратным совершенным кодом радиуса r, если для каждой вершины шар радиуса r с центром в этой вершине содержит в точности k кодовых вершин. Получен критерий, который по параметрам совершенной 2-раскраски двоичного n-куба определяет, является ли она кратным совершенным кодом заданного радиуса $r > 1$ некоторой кратности.

Пусть H_n − это гиперкуб размерности n. Расстояние Хэмминга $d(x, y)$ между вершинами $x, y \in H_n$ − это число позиций, в которых x и y различны. Будем называть шаром радиуса r с центром в точке x множество $B(x, r) = \{y \in H_n \mid d(x, y) \le r\}$. Полиномом Кравчука степени r называется полином $P_r(x, n) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{x}{i}\binom{n-x}{r-i}$. Раскраска вершин куба в 2 цвета называется совершенной с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если каждая вершина первого цвета имеет a соседей первого цвета и b соседей второго цвета, а каждая вершина второго цвета имеет c соседей первого цвета и d соседей второго. Не теряя общности, будем считать, что $b \ge c$. Доказана

Теорема. *Совершенная раскраска с параметрами* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *является кратным совершенным кодом радиуса r тогда и только тогда, когда* $P_r(\frac{b+c}{2} - 1, n - 1) = 0$, *при этом кратность кода* $k = \frac{c}{b+c}\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}$.

Далее рассмотрены случаи $r = 1$, 2 и 3. Приведены все совершенные раскраски, являющиеся кратными совершенными кодами радиуса 2 в 10-мерном кубе и соответствующие им кратности.

Существуют конструкции, позволяющие строить большое число различных совершенных раскрасок с различными параметрами. Приведённые выше результаты позволяют искать среди них неизвестные ранее кратные совершенные коды. Описанные в

статье определения и задачи легко переносятся и на другие классы графов такие, как кубические транзитивные, циркулярные и графы Джонсона.

XIII. Исследованы абелевы модификации критической факторизационной теоремы, а именно рассмотрены связи между локальными абелевыми степенями и глобальной периодичностью бесконечных слов.

В современной комбинаторике слов актуальной проблемой является исследование абелевых свойств последовательностей. Два конечных слова одинаковой длины называются абелево эквивалентными, если для каждой буквы a из алфавита совпадает число букв a в этих словах; иными словами, одно слово получается из другого перестановкой букв. Понятие абелевой эквивалентности слов естественным образом порождает ряд задач, в том числе модификации классических результатов для бесконечных слов для абелева случая. Мы используем абелев подход для изучения свойства периодичности слов и для изучения слов Штурма, которые могут рассматриваться как самые простые слова среди непериодических слов. Мы исследовали абелевы аналоги критической факторизационной теоремы. Критическая факторизационная теорема дает необходимые и достаточные условия периодичности в терминах локальных квадратов. В работе исследуются связи между локальными абелевыми степенями в бесконечном слове и периодичностью.

IV. Установлено, что код с параметрами дважды или трижды укороченного кода Хэмминга порождает совершенную структуру с определёнными параметрами над булевым гиперкубом. Доказан критерий регулярности разбиения вершин графов для достаточно общего класса графов.

Изучаются свойства двоичных кодов, близких по параметрам к 1-совершенным. Произвольный двоичный ($n = 2^{m-3}$, 2^{n-m-1}, 4) -код, то есть код с параметрами трижды укороченного расширенного кода Хэмминга, является элементом регулярного разбиения (цветом совершенной раскраски) вершин n-куба на шесть частей (цветов). Произвольный двоичный (n= $n = 2^{m-4}$, 2^{n-m}, 3) -код, то есть код с параметрами трижды укороченного кода Хэмминга является элементом регулярного семейства (не обязательно разбиения) из шести подмножеств вершин n-куба.

Как следствие, коды C и D являются полностью полурегулярными, то есть весовое распределение такого кода зависит только от минимального и максимального веса кодовых слов и параметров кода. Более того, если код D самокомплиментарный (антиподальный), то он полностью регулярен.

В качестве вспомогательного результата доказывается, в терминах распределения расстояния, достаточно общий критерий регулярности разбиения вершин графов (для достаточно общего класса графов, включая дистанционно регулярные графы).

XV. Приведена нижняя оценка числа неэквивалентных пропелинейных совершенных двоичных кодов, имеющих разные ранги. Доказано, что существует экспоненциальное число неэквивалентных пропелинейных расширенных совершенных кодов.

Исследуются структурные свойства пропелинейных кодов, в частности, пропелинейных совершенных двоичных кодов. Исследуется связь транзитивных кодов с пропелинейными, в частности, показано, что существует двоичный код - известный код Беста длины 10, мощности 40, с кодовым расстоянием 4, который транзитивен, но не является пропелинейным. Предложено несколько конструкций пропелинейных кодов, и новый богатый класс пропелинейных совершенных двоичных кодов, названных нормализованными. Приведена нижняя оценка числа неэквивалентных пропелинейных совершенных двоичных кодов, имеющих разные ранги.

Доказано, что существует экспоненциальное число неэквивалентных пропелинейных расширенных совершенных кодов с ростом длины кодов. Показано, что все такие коды имеют малый ранг, который на единицу больше ранга расширенного линейного кода Хэмминга. Исследованы свойства этих кодов.

XVI. Изучено избегание рамочного шаблона в перестановках. Показано, что гипотеза Стенли-Вилфа, а также теорема Эрдеша и Секереша не выполняются в общем случае для таких шаблонов.

Введено понятие рамочного шаблона и изучено избегание таких шаблонов в перестановках. Доказано, что знаменитая гипотеза Стенли-Вилфа не верна для всех рамочных шаблонов, кроме одиннадцати, из которых семь удовлетворяют гипотезе, а для четырех (все они имеют длину 4) вопрос остается открытым.

Кроме того, доказано, что хорошо известная теорема Эрдеша и Секереша не выполняется для рамочных шаблонов длины больше двух. В заключение обсуждаются вопросы перечисления перестановок, одновременно избегающих двух или большего числа рамочных шаблонов длины три. Как результат получаются обобщенные числа Каталана.

Таким образом, области дискретного анализа и теории графов в задачах хранения, обработки, передачи и защиты информации проект дал целый ряд новых результатов мирового уровня.

1.1.2. Результаты, полученные в области актуальных проблем анализа данных и распознавания образов

Здесь проект позволил существенным образом продвинуться в данной предметной области. Получены следующие результаты.

I. Установлена NP-полнота следующих задач поиска подмножеств и кластерного анализа.

Задача MSSC-NN.

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число J и положительное число A.

Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1, C_2, \ldots, C_J$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B} = \mathcal{Y} \setminus ((\cup_j C_j) \cup (\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{\mathbf{y} \in C_j} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}(C_j) \|^2 + \sum_{k=1}^{K} \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}_k} \| \mathbf{y} - \mathbf{v}_k \|^2 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \| \mathbf{y} \|^2 \le A? \qquad (1.1.2.1)$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C_j) = \frac{1}{|C_j|} \sum_{\mathbf{y} \in C_j} \mathbf{y}$, $j = 1, 2, \ldots, J$, – центр j-го кластера?

Задача MSSC-FN.

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1, M_2, \ldots, M_J$ и положительное число A.

Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1, C_2, \ldots, C_J$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B} = \mathcal{Y} \setminus ((\cup_j C_j) \cup (\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что справедливо неравенство (1.1.2.1), при ограничениях $|C_j| = M_j$, $j = 1, 2, \ldots, J$, на мощности кластеров?

Задача MSSC-NF.

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $N_1, N_2, \ldots, N_K$ и положительное число A.

Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1, C_2, \ldots, C_J$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B} = \mathcal{Y} \setminus ((\cup_j C_j) \cup (\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что имеет место неравенство (1), при ограничениях $|\mathcal{B}_k| = N_k$, $k = 1,2,\ldots,K$, на мощности кластеров?

Задача MSSC-FF.

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ и алфавит $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_K\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральные числа $M_1, M_2, \ldots, M_J$, $N_1, N_2, \ldots, N_K$ и положительное число A.

Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{Y}$ на непустые кластеры $C_1, C_2, \ldots, C_J$, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_K$ и $\mathcal{B} = \mathcal{Y} \setminus ((\cup_j C_j) \cup (\cup_k \mathcal{B}_k))$ такое, что справедливо неравенство (1.1.2.1), при ограничениях $|C_j| = M_j$, $j = 1,2,\ldots,J$, и $|\mathcal{B}_k| = N_k$, $k = 1,2,\ldots,K$, на мощности кластеров?

Комбинации последних двух символов – FF, NF, FN и NN – в кратких названиях сформулированных выше задач обозначают четыре возможных варианта одной общей проблемы. Они обусловлены наличием или отсутствием ограничений на мощности элементов из пары семейств $\{C_1, C_2, \ldots, C_J\}$ и $\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots, \mathcal{B}_K\}$ искомых кластеров.

II. Установлена NP-трудность в сильном смысле следующих задач поиска подмножеств и кластерного анализа.

Задача VS-F (Vector Subset).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ мощности M такое, что целевая функция

$$S(C) = \sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}(C) \|^2 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus C} \| \mathbf{y} \|^2,$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{\mathbf{y} \in C} \mathbf{y}$, минимальна.

Задача VS-N (Vector Subset).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ мощности M такое, что целевая функция

$$S(C) = \sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \overline{\mathbf{y}}(C) \|^2 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus C} \| \mathbf{y} \|^2,$$

где $\overline{\mathbf{y}}(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{\mathbf{y} \in C} \mathbf{y}$, минимальна.

Построен эффективный приближённый алгоритм с константной оценкой точности 2 для решения для задачи VS-F.

III. Установлена NP-полнота следующих задач поиска подмножеств и кластерного анализа.

Задача SVS-FF.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$, натуральные числа M_1, M_2 и положительное число A.

Вопрос: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, мощности которых равны M_1 и M_2 соответственно, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M_1}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}(\mathbf{y},\mathbf{v})\geq A?$$

Задача SVS-NF.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A.

Вопрос: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+2\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}(\mathbf{y},\mathbf{v})\geq A,$$

при ограничении $|\mathcal{Y}_2|=M$ на мощность подмножества $\mathcal{Y}_2$?

Задача SVS-FN.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$, натуральное число M и положительное число A.

Вопрос: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1\subset\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{M}\|\sum_{\mathbf{u}\in\mathcal{Y}_1}\mathbf{u}\|^2+\sum_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y}_2}\{2(\mathbf{y},\mathbf{v})-\|\mathbf{v}\|^2\}\geq A,$$

при ограничении $|\mathcal{Y}_1|=M$ на мощность подмножества $\mathcal{Y}_1$?

Задача SVS-NN.

Дано: множество $\mathcal{Y}=\{\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$, вектор $\mathbf{v}\in\mathcal{R}^q$ и положительное число A.

Вопрос: существуют ли такие непустые непересекающиеся подмножества $\mathcal{Y}_1 \subset \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$, что имеет место неравенство

$$\frac{1}{|\mathcal{Y}_1|} \| \sum_{\mathbf{u} \in \mathcal{Y}_1} \mathbf{u} \|^2 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y}_2} \{2(\mathbf{y}, \mathbf{v}) - \| \mathbf{v} \|^2\} \geq A?$$

IV. Установлена NP-трудность в сильном смысле следующих задач поиска подмножеств и кластерного анализа.

<u>Задача VS-1</u> (Vector Subset 1).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что целевая функция

$$Q(C) = \frac{1}{|C|} \| \sum_{\mathbf{y} \in C} \mathbf{y} \|^2 + \sum_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus C} \| \mathbf{y} \|^2$$

максимальна, при ограничении $|C| = M$ на мощность искомого подмножества.

<u>Задача VS-2</u> (Vector Subset 2).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что целевая функция

$$F(C) = \sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}(C) \|^2,$$

где $\bar{\mathbf{y}}(C) = \frac{1}{|C|} \sum_{y \in C} \mathbf{y}$, минимальна, при ограничении $|C| = M$ на мощность искомого подмножества.

<u>Задача VS-3</u> (Vector Subset 3).

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: подмножество $C \subseteq \mathcal{Y}$ векторов такое, что целевая функция

$$H(C) = \sum_{\mathbf{z} \in C} \sum_{\mathbf{y} \in C} \| \mathbf{y} - \mathbf{z} \|^2$$

минимальна, при ограничении $|C| = M$ на мощность искомого подмножества.

<u>Задача MSSC-Case.</u>

Дано: множество $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N\}$ векторов из $\mathcal{R}^q$ и натуральное число $M > 1$.

Найти: такое разбиение множества $\mathcal{Y}$ на $N - M + 1$ непустых кластеров $C_1, C_2, \ldots, C_{N-M+1}$, что мощность одного из этих кластеров равна M и

$$R(C_1, C_2, \ldots, C_{N-M+1}) = \sum_{j=1}^{N-M+1} \sum_{\mathbf{y} \in C_j} \| \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}_j(C_j) \|^2 \to \min,$$

где $\bar{\mathbf{y}}_j(C_j) = \frac{1}{|C_j|} \sum_{y \in C_j} \mathbf{y},\ j = 1, ..., N - M + 1,$ - центр J -го кластера.

V. Показана NP-полнота в сильном смысле следующих параметрических вариантов оптимизационных задач поиска подпоследовательности в конечной последовательности векторов евклидова пространства. В приведенных ниже формулировках задач $T_{\min}$ и $T_{\max}$ - натуральные параметры, а $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, N\}$.

Задача VSS1 $(T_{\min}, T_{\max})$ (Vector Subsequence in a Sequence 1).

Дано: последовательность (набор) $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N)$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число $M > 1$ и положительное число A.

Вопрос: существует ли подмножество $\mathcal{M} = \{n_1, n_2, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N}$ номеров элементов набора $\mathcal{Y}$ такое, что

$$f_1(C) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \left\| \sum_{m=1}^{M} \mathbf{y}_{n_m} \right\|^2 + \sum_{m \notin \mathcal{M}} \| \mathbf{y}_m \|^2 \geq A,$$

при ограничениях

$$1 \leq T_{\min} \leq n_m - n_{m-1} \leq T_{\max} \leq N - 1, \quad m = 2, 3, \ldots, M, \tag{1.1.2.2}$$

на элементы подмножества $\mathcal{M}$?

Задача VSS2 $(T_{\min}, T_{\max})$ (Vector Subsequence in a Sequence 2).

Дано: последовательность $\mathcal{Y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_N)$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число $M > 1$ и положительное число B.

Вопрос: существует ли подмножество $\mathcal{M} = \{n_1, n_2, \ldots, n_M\} \subseteq \mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такое, что

$$f_2(\mathcal{M}) = \sum_{m=1}^{M} \| \mathbf{y}_{n_m} - \bar{\mathbf{y}}(\mathcal{M}) \|^2 \leq B,$$

где $\bar{\mathbf{y}}(\mathcal{M}) = \frac{1}{|\mathcal{M}|} \sum_{n \in \mathcal{M}} \mathbf{y}_n$, при ограничениях (1.1.2.2) на элементы искомого подмножества $\mathcal{M}$?

Задача VSS3 $(T_{\min}, T_{\max})$ (Vector Subsequence in a Sequence 3).

Дано: последовательность $\mathcal{Y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N)$ векторов из $\mathcal{R}^q$, натуральное число $M>1$ и положительное число C.

Вопрос: существует ли подмножество $\mathcal{M}=\{n_1,n_2,\ldots,n_M\}\subseteq\mathcal{N}$ номеров элементов последовательности $\mathcal{Y}$ такое, что

$$f_3(\mathcal{M})=\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\|\mathbf{y}_{n_i}-\mathbf{y}_{n_j}\|^2\le C,$$

при ограничениях (2) на элементы искомого подмножества $\mathcal{M}$?

<u>Задача MSSC</u>-Case-S$(T_{\min},T_{\max})$ (Minimum Sum-of-Squares Clustering, special Case for a Sequence).

Дано: последовательность $\mathcal{Y}=(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2,\ldots,\mathbf{y}_N)$ векторов из $\mathcal{R}^q$ натуральное число $M>1$ и положительное число D.

Вопрос: существует ли разбиение множества $\mathcal{N}$ на $J=N-M+1$ непустых подмножеств $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2,\ldots,\mathcal{M}_J$ такое, что $|\mathcal{M}_1|=M$ и

$$f_4(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2,\ldots,\mathcal{M}_J)=\sum_{j=1}^{J}\sum_{m\in\mathcal{M}_j}\|\mathbf{y}_m-\overline{\mathbf{y}}(\mathcal{M}_j)\|^2\le D,$$

где $\overline{\mathbf{y}}(\mathcal{M}_j)=\frac{1}{|\mathcal{M}_j|}\sum_{n\in\mathcal{M}_j}\mathbf{y}_n$, $j=1,2,\ldots,J$, при ограничениях (2) на элементы подмножества $\mathcal{M}_1$?

VI. Построены 2-приближенные полиномиальные алгоритмы для задач VS-N, VS-F, VS-2, VS-3, MSSC-Case.

VII. Построены точные псевдополиномиальные алгоритмы для задач VS-2, VS-3, MSSC-Case в случае, когда компоненты векторов целочисленны, а размерность пространства фиксирована.

VIII. Для этих же задач обоснованы приближенные полиномиальные схемы (PTAS).

IX. Обоснованы приближенные полиномиальные алгоритмы с оценкой точности 2 для задач VSS2, VSS3, MSSC-Case-S поиска подпоследовательностей.

1.1.3. Результаты, полученные в области задач размещения

В этой проблематике также получен ряд результатов мирового уровня.

I. Построена математическая модель конкурентного размещения предприятий как задача Лидера в игре Штакельберга, представленная в виде задачи двухуровневого математического программирования.

Задача конкурентного размещения предприятий записывается следующим образом:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})}\left\{-\sum_{i\in I} f_i x_i + \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} p_{ij}x_{ij}\right)\left(1-\sum_{i\in I}\tilde{z}_{ij}\right)\right\};$$

$$x_i + \sum_{k|i\succ_j k} x_{kj} \le 1,\ \ i\in I,\ \ j\in J;$$

$$x_i \ge x_{ij},\ \ i\in I,\ \ j\in J;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\},\ \ i\in I,\ \ j\in J;$$

$((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$ — оптимальное решение задачи**:**

$$\max_{(z_i),(z_{ij})}\left\{-\sum_{i\in I} g_i z_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}z_{ij}\right\};$$

$$x_i + z_i + \sum_{k|i\succ_j k} z_{kj} \le 1,\ \ i\in I,\ \ j\in J;$$

$$z_i \ge z_{ij},\ \ i\in I,\ \ j\in J;$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\},\ \ i\in I,\ \ j\in J.$$

Целевая функция сформулированной задачи выражает величину прибыли, получаемой Лидером с учетом потери части потребителей, «захваченных» Последователем.

Представленная задача является задачей двухуровневого математического программирования. Как и всякая такая задача, она включает задачу первого уровня, которую будем называть *задачей Лидера* и обозначать L, и задачу второго уровня, которую будем называть *задачей Последователя* и обозначать через F. Для задачи в целом будем использовать обозначение (L,F).

Представленная модель является новой и обобщает ряд формулировок, предложенных в мировой литературе. Подобные модели, описывающие принятие решений в игровой ситуации, являются малоисследованными математическими задачами и обладают огромным прикладным потенциалом.

II. Для задачи конкурентного размещения предприятий введены понятия оптимальных кооперативных и некооперативных решений.

Обозначим через $X = ((x_i), (x_{ij}))$ допустимое решение задачи L, а через $Z = ((z_i), (z_{ij}))$ и $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$ соответственно допустимое и оптимальное решение задачи F.

Пару $(X,\tilde{Z})$ назовем *допустимым решением* задачи (L, F), если X — допустимое решение задачи L, а $\tilde{Z}$ — оптимальное решение задачи F.

Обозначим через $L(X, Z)$ целевую функцию задачи (L, F).

Допустимое решение $(X,\bar{Z})$ задачи (L, F) назовем *допустимым некооперативным* решением задачи (L, F), если для всякого оптимального решения $\tilde{Z}$ задачи F выполняется неравенство $L(X,\bar{Z}) \le L(X,\tilde{Z})$.

Допустимое некооперативное решение $(X^*,\bar{Z}^*)$ задачи (L, F) назовем *оптимальным некооперативным* решением задачи (L, F), если для любого допустимого некооперативного решения $(X,\bar{Z})$ задачи (L, F) выполняется неравенство $L(X^*,\bar{Z}^*) \ge L(X,\bar{Z})$. При этом величину $L(X^*,\bar{Z}^*)$ будем называть оптимальным значением целевой функции задачи (L, F).

Введенные понятия являются новыми и позволяют дать корректное определение оптимального решения рассматриваемой задачи двухуровневого математического программирования.

III. Для задачи конкурентного размещения предприятий разработан метод вычисления верхней границы для оптимальных значений целевой функции.

Для вычисления верхней границы значений целевой функции на допустимых кооперативных решениях строится система подмножеств I_j, $j \in J$, *определённая нестрогими ослабленными неравенствами*.

Содержательный смысл множества I_j поясняет следующая лемма, устанавливающая, что если Лидер планирует получить прибыль от потребителя $j \in J$ и при этом не открывает ни одного предприятия из множества I_j, то этот потребитель будет «захвачен» Последователем.

Рассмотрим ненулевой (0,1)-вектор $w = (w_i)$, $i \in I$, и обозначим через $I_0(w)$ множество $\{i \in I \mid w_i = 1\}$. Для всякого $j \in J$ обозначим через $i_j(w)$ элемент $i_0 \in I_0(w)$, такой, что $i_0 \succcurlyeq_j i$ для всякого $i \in I_0(w)$. Если $u = (u_i)$ и $v = (v_i)$ — два (0,1)-вектора, то через $u \bigcup v$ обозначим (0,1)-вектор $w = (w_i)$, где $w_i = \max\{u_i, v_i\}$, $i \in I$.

Лемма 1. *Пусть* $\{I_j\}$, $j \in J$, *— система подмножеств, определённая нестрогими ослабленными неравенствами. При любом допустимом некооперативном решении* $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, *задачи* (*L*, *F*) *для всякого* $j_0 \in J$, *такого что* $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$ *для некоторого* $i_0 \notin I_{j_0}$, *выполняется равенство* $\sum\limits_{i \in I} \tilde{z}_{ij_0} = 1$.

Отсюда получаем

Лемма 2. *Пусть* $\{I_j\}$, $j \in J$, *— система подмножеств, определённая нестрогими ослабленными неравенствами. При любом допустимом решении* $(X, \tilde{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\tilde{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, *задачи* (*L*, *F*) *для всякого* $j \in J$ *справедливо равенство*

$$\left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij}\right) = \left(\sum_{i \in I_j} p_{ij} x_{ij}\right)\left(1 - \sum_{i \in I} \tilde{z}_{ij}\right).$$

Рассмотрим следующую задачу, которую будем называть *оценочной*:

$$\max_{(x_i),(x_{ij})} \left\{ -\sum_{i \in I} f_i x_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right\};$$

$$x_i + \sum_{k:\, i \succ_j k} x_{ij} \le 1,\ i \in I,\, j \in J;$$

$$x_i \ge x_{ij},\ i \in I,\, j \in J;$$

$$x_i, x_{ij} \in \{0,1\},\ i \in I,\, j \in J.$$

Из леммы 1следует, что если $(X, \tilde{Z})$ — допустимое решение задачи (*L*, *F*), то величина $L(X, \tilde{Z})$ не превосходит значения целевой функции оценочной задачи на решении

X. Поэтому оптимальное значение B_0 целевой функции оценочной задачи будет верхней границей для величины $L(X,\tilde{Z})$ при любом допустимом решении $(X,\tilde{Z})$ задачи (*L*, *F*). Таким образом, получаем

Теорема 1. *Для любого допустимого решения* $(X,\tilde{Z})$ *задачи* (*L*, *F*) *выполняется неравенство* $L(X,\tilde{Z}) \le B_0$.

Для вычисления верхней границы значений целевой функции задачи (*L*, *F*) на допустимых некооперативных решениях рассмотрим систему подмножеств I_j, $j \in J$, *определённую строгими ослабленными неравенствам*.

По аналогии с леммой 1 справедлива

Лемма 3. *Пусть* $\{I_j\}$, $j \in J$, *— система подмножеств, определённая строгими ослабленными неравенствами. При любом допустимом некооперативном решении* $(X,\bar{Z})$, $X = ((x_i),(x_{ij}))$, $\bar{Z} = ((\tilde{z}_i),(\tilde{z}_{ij}))$, *задачи* (*L*, *F*) *для всякого* $j_0 \in J$, *такого что* $p_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} > 0$ *для некоторого* $i_0 \notin I_{j_0}$, *выполняется равенство* $\sum_{i \in I} \bar{z}_{ij_0} = 1.$

Обозначим через B оптимальное значение целевой функции оценочной задачи, построенной с использованием системы подмножеств $\{I_j\}$, $j \in J$, определённой строгими ослабленными неравенствами.

По аналогии с теоремой 1 получаем

Теорема 2. *Для любого допустимого некооперативного решения* $(X,\bar{Z})$ *задачи* (*L*, *F*) *выполняется неравенство* $L(X,\bar{Z}) \le B$.

Доказанные оценки являются новыми и позволяют оценивать точность приближенных решений задачи конкурентного размещения предприятий.

IV. Показана сводимость задачи конкурентного размещения предприятий к задаче максимизации псевдобулевых функций.

Сводимость оказывается возможной в силу того,что всякое допустимое кооперативное (некооперативное) решение $(X,\bar{Z})$ задачи (*L*, *F*) или определяется допустимым решением *X* задачи *L*. Для любого допустимого решения *X* значение целевой функции $L(X,\bar{Z})$ на соответствующем допустимом кооперативном (некооперативном) решении $(X,\bar{Z})$ определяется однозначно.

Действительно, рассмотрим задачу (*L*, *F*) и допустимое решение $X = ((x_i), (x_{ij}))$ задачи *L*. Соответствующее допустимое кооперативное решение $(X,\bar{Z})$ задачи (*L*, *F*) определяется алгоритмом, включающим два этапа.

На этапе 1 при фиксированном решении X решается задача F и вычисляется оптимальное значение $F'(\tilde{Z})$ ее целевой функции.

На этапе 2 при фиксированном решении X решается следующая вспомогательная задача:

$$\max_{(z_i)(z_{ij})} \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} z_{ij} \right);$$

$$x_i + z_i + \sum_{k | i \succ_j k} z_{kj} \le 1, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$z_i \ge z_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J;$$

$$-\sum_{i \in I} g_i z_i + \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \ge F(\tilde{Z});$$

$$z_i, z_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \in I, \; j \in J.$$

Оптимальное решение $\bar{Z} = ((\bar{z}_i), (\bar{z}_{ij}))$ этой задачи дает искомое допустимое кооперативное решение $(X, \bar{Z})$ задачи (L, F).

Допустимое некооперативное решение $(X, \bar{Z})$ задачи $(L,\ F)$ строится аналогичным образом. Отличие состоит в том, что на этапе 2 рассматривается вспомогательная задача, в которой требуется найти

$$\min_{(z_i)(z_{ij})} \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} p_{ij} x_{ij} \right) \left(1 - \sum_{i \in I} z_{ij} \right);.$$

Показанная сводимость позволяет унифицировать построение алгоритмов поиска решений для различных концепций оптимальности.

V. Разработаны алгоритмы поиска локально-оптимальных решений задачи максимизации псевдобулевых функций, связанных с задачей конкурентного размещения предприятий.

Алгоритмы включают два этапа. На первом вычисляется верхняя граница для значений рассматриваемых псевдобулевых функций и одновременно строится некоторое начальное решение. На втором этапе это решение улучшается до локально-оптимального решения. Соответствующий алгоритм представляет собой стандартную процедуру локального поиска с окрестностью специального вида.

Предложенные алгоритмы являются работоспособными и, как показывают вычислительные эксперементы, позволяют за практически приемлемое время строить хорошие приближенные решения задачи конкурентного размещения предприятий.

VI. Предложена общая схема алгоритма ветвей и границ для задачи конкурентного размещения предприятий.

На основе предложенной вычислительной схеме могут быть построены алгоритмы для получения приближенных решений задачи конкурентного размещения предприятий с гарантированными оценками точности.

1.1.4. . Результаты, полученные в области актуальных проблем маршрутизации

В рамках проекта были проведены исследования в области проблем маршрутизации и получены следующие результаты.

I. Рассмотрена проблема наименее плотного покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. Предложены и исследованы новые регулярные покрытия. Разработанные методы и полученные результаты имеют теоретическое значение, а также могут быть использованы как инструментарий для энергоэффективного мониторинга протяженных объектов сенсорными сетями.

Проблемы поиска эффективных покрытий плоских областей кругами различного радиуса возникают во многих практических приложениях. Исполнителями эта проблема рассматривалась в контексте сенсорных сетей, осуществляющих мониторинг полосы. При этом предполагалось, что область мониторинга сенсора является кругом определённого (регулируемого) радиуса с центром в месте расположения сенсора. Говорят, что сенсор *покрывает* часть плоскости находящуюся внутри его круга мониторинга. Плоская область считается покрытой множеством сенсоров C, если каждая точка области покрыта хотя бы одним сенсором из C.

Плотностью покрытия плоской области кругами называется отношение суммы площадей элементов покрытия к площади области. Очевидно, что плотность не может быть меньше единицы, и отклонение её значения от единицы характеризует эффективность покрытия. Так как энергозатраты сенсора на мониторинг пропорциональны покрытой им площади, основная задача сенсорных сетей – максимизация жизни – сводится к решению задач построения наименее плотных покрытий.

Существует бесконечное число способов покрытия плоской области кругами различного радиуса. В связи с этим в большинстве работ по данной тематике рассматриваются *регулярные* покрытия, что существенно сужает множество допустимых покрытий и позволяет упростить анализ определённого класса покрытий. В регулярном покрытии плоская область (виртуально) замощается правильными многоугольниками (*плитками*), и все многоугольники покрываются одинаково. При этом сенсоры (центры

кругов) располагаются в определённых местах плиток, а также определяются оптимальные радиусы мониторинга сенсоров.

Значительное число публикаций посвящено покрытию кругами всей плоскости. При покрытии *ограниченных* областей основные трудности возникают на границе области. Нами рассмотрена практически не изученная проблема наименее плотного покрытия бесконечной *полосы* кругами. Предложены покрытия, использующие круги одного, двух и трёх радиусов. Учтены возникающие при этом граничные эффекты и проведен анализ эффективности предложенных покрытий.

Назовем покрытие *n-слойным*, если центры всех кругов покрытия располагаются на n прямых параллельных границам полосы. Нами предложены и исследованы регулярные многослойные покрытия полосы кругами одного, двух и трёх радиусов. При этом радиусы кругов – это регулируемые параметры покрытий. В каждом классе покрытий выделены наиболее эффективные и показаны их преимущества. Приведенные результаты, не претендуя на полный анализ многообразия возможных вариантов покрытий, демонстрируют общие методы построения эффективных покрытий, которые могут быть использованы при решении практических задач.

Детально рассмотрены покрытия полосы кругами одного радиуса. Существует большое число регулярных покрытий полосы кругами одного радиуса. При этом эффективность покрытия зависит как от числа слоев, так и от расположения кругов. Нами рассмотрены наиболее перспективные однослойные покрытия, двухслойные покрытия и многослойные покрытия. В частности, для оптимального двухслойного покрытия, которое использует треугольную решётку, получен нетривиальный результат. Треугольник, образованный центрами трёх соседних кругов не является правильным, как в покрытии плоскости одинаковыми кругами, он равнобедренный! Это обусловлено граничным эффектом. В случае правильной треугольной решётки плотность покрытия больше. В многослойном покрытии плотность стремится к 1.2, что согласуется с классическим результатом для покрытия всей плоскости одинаковыми кругами.

Покрытие полосы кругами двух и трех радиусов даёт ещё большее разнообразие. В рамках проекта рассмотрено несколько моделей таких покрытий и проведена их классификация.

II. Исследованы регулярные покрытия всей плоскости.

Ранее нами были рассмотрены классы покрытий $COV_3(4, 4)$ и $COV_4(5, 2)$. В своих изысканиях мы неявно опирались на предположение, что радиусы входящих в покрытие кругов «не слишком велики»: $r_{\max} \leq \sqrt{3}/2$ для покрытий из $COV_3(4, 4)$ и $r_{\max} \leq \sqrt{2}/2$ для

покрытий из $COV_4(5, 2)$. В этих предположениях были найдены покрытия Т3 $\in COV_3(4, 4)$ с плотностью $\rho(\text{T3}) \approx 1.108$ и Q3$\in COV_4(5, 2)$, плотность которого $\rho(\text{Q3}) = 3\pi/8 \approx 1.178$ оптимальные в своих классах. При выполнении 5 этапа НИР проведен поиск наименее плотных покрытий в классах $COV_3(5, 5)$, $COV_4(4, 4)$ и $COV_4(5, 5)$. Уточнены оценки плотности покрытий из классов $COV_3(3, 3)$ и $COV_3(4, 4)$ для случая, когда радиусы покрывающих кругов не ограничены сверху. Получены следующие результаты.

Для покрытий из класса $COV_4(4, 4)$:

1. Показано, что при $r_{\max} \le \sqrt{2}/2$ наименее плотным в $COV_4(4, 4)$ является покрытие Q1$\in$ $COV_4(4, 1)$, в котором радиусы всех дисков равны $\sqrt{2}/2$. Плотность $\rho(\text{Q1})=\pi/2 \approx 1.571$.
2. При $r_{\max} > \sqrt{2}/2$ показано, что наименее плотное покрытие в $COV_4(4, 4)$ имеет «симметричную» структуру и фактически принадлежит классу $COV_4(4, 2)$. Кроме того, оно изоморфно покрытию Q3 и имеет плотность $\rho(\text{Q3}) \approx 1.178$.
3. Также для $r_{\max} > \sqrt{2}/2$ показано, что если ослабить определение регулярности и рассматривать покрытия, в которых некоторые вершины плитки могут не быть центрами дисков, то плотность может быть уменьшена. Построено покрытие, изоморфное покрытию Q6$\in COV_4(6, 6)$, $\rho(\text{Q6}) \approx 1.094$.

Для покрытий из $COV_4(5, 5)$:

1. Показано, что при $r_{\max} \le \sqrt{2}/2$ покрытие Q3$\in COV_4(5, 2)$ наименее плотно и в большем классе $COV_4(5, 5)$.
2. Рассмотрен случай $r_{\max} \in \left(\sqrt{2}/2, 1\right]$ и найдено оптимальное покрытие Q5, $\rho(\text{Q5}) \approx 1.143$. Два круга в этом покрытии имеют одинаковые радиусы, поэтому можно считать его оптимальным и в $COV_4(5, 4)$.
3. При $r_{\max} > 1$ наименее плотное регулярное покрытие изоморфно Q3. Однако, если рассмотреть покрытия, в которых некоторые из вершин плитки не являются центрами дисков, то оптимальная плотность будет меньше 1.094.

Для покрытий из $COV_4(6, 6)$:

1. Показано, что при $r_{\max} \le \sqrt{2}/2$ наименее плотное покрытие имеет «симметричную» структуру и фактически принадлежит классу $COV_4(6, 3)$. Найдено покрытие Q4, $\rho(\text{Q4}) \approx 1.149$, оптимальное для этого случая.
2. В случае $r_{\max} \in \left(\sqrt{2}/2, 1\right]$ также найдено оптимальное покрытие Q6, $\rho(\text{Q6}) \approx 1.094$. Оно «симметрично» и лежит в классе $COV_4(6, 3)$.

3. В виду симметричности, покрытие Q6 можно рассматривать как «регулярное» с плиткой в виде равнобедренного прямоугольного треугольника. При этом Q6 оказывается «аналогом» покрытия T3 $\in$ $COV_3(4, 4)$. Заметим, что плотность Q6 меньше, чем плотность T3.
4. Показано, что при $r_{\max} > 1$ в наименее плотном регулярном покрытии один из кругов имеет радиус 0. Таким образом, в этом случае оптимальное регулярное покрытие изоморфно Q3. Однако, плотность может быть существенно уменьшена, если допустить, что некоторые вершины плитки не являются центрами кругов.

Для покрытий из $COV_3(5, 5)$:

1. Показано, что при $r_{\max} \le \sqrt{3}/2$ оптимальное покрытие должно иметь «симметричную» структуру (центры трех дисков располагаются на одной из высот треугольника-плитки) и принадлежать классу $COV_3(5, 4)$. Найдено оптимальное покрытие T4$\in COV_3(5, 5)$, ρ(T4) ≈ 1.096.
2. Для $r_{\max} > \sqrt{3}/2$ найдено оптимальное покрытие T5, ρ(T5) ≈ 1.061. Это покрытие также симметрично относительно одной из высот треугольника-плитки и принадлежит классу $COV_3(5, 3)$.

Для покрытий из $COV_3(4, q)$:

2. Показано, что при $r_{\max} > \sqrt{3}/2$ покрытие T3 уже не является оптимальным в классе $COV_3(4, 4)$: найдено оптимальное покрытие с плотностью ≈ 1.09 < ρ(T3). Покрытие симметрично и фактически лежит в классе $COV_3(4, 3)$.
3. Вместе с тем, T3 оптимально в $COV_3(4, 2)$ при любых значениях радиусов, а не только при $r_{\max} \le \sqrt{3}/2$.

Для покрытий из $COV_3(3, 3)$:

1. Показано, что при $r_{\max} > \sqrt{3}/2$ покрытие T1 уже не является оптимальным в классе: найдено оптимальное покрытие, изоморфное T3. Покрытие симметрично и фактически лежит в классе $COV_3(3, 2)$.

III. Предложен новый эффективный метод построения приближенного решения задачи глобальной маршрутизации с учётом как временных, так и ресурсных ограничений. Проведен апостериорный анализ метода на тестовых примерах Intel и IBM, который показал высокую эффективность разработанного подхода.

Глобальная трассировка (или маршрутизация) является одним из важнейших этапов проектирования сверхбольших интегральных схем (СБИС), на котором для каждой цепи

определяется множество используемых областей маршрутизации в условиях ограничений на трассировочные ресурсы и время прохождения сигнала. В литературе встречается несколько формулировок задачи глобальной трассировки (ЗГТ) с различными критериями и ограничениями.

Основной целью глобальной трассировки является маршрутизация всех цепей СБИС без нарушения ограничений. При этом даже простейшая постановка, в которой требуется осуществить маршрутизацию двухтерминальных цепей в условиях ограниченности трассировочных ресурсов (без учета временных задержек), является NP-трудной задачей.

Для решения ЗГТ исследователями предложены различные подходы, в которых трассировка, как правило, осуществляется лишь на двух слоях СБИС. В основе этих подходов лежат алгоритмы последовательной маршрутизации, алгоритмы трассировки с разрывом связей и поиском новых соединений, алгоритмы, основанные на решении задач о многопродуктовом потоке, иерархические методы, а также различные метаэвристики.

При проектировании современных СБИС на этапе глобальной маршрутизации, наряду с учетом трассировочных ресурсов, все большее внимание уделяется времени распространения сигнала. При этом плотность соединений и временная задержка являются, как правило, конкурирующими критериями, и в литературе практически отсутствуют публикации, в которых эти критерии рассматриваются совместно.

Нами рассмотрена задача глобальной маршрутизации, которая заключается в построении на заданном *многослойном* графе совокупности деревьев Штейнера с учетом одновременно двух видов ограничений, отражающих требования к времени прохождения сигнала и плотности соединений элементов. Предложен новый подход к решению ЗГТ, который учитывает как трассировочные ресурсы, так и задержки прохождения сигнала, и применим при проектировании СБИС с *произвольным* количеством слоев маршрутизации. Проведен численный эксперимент на тестовых примерах Intel и IBM, который показал высокую эффективность метода.

Результаты исследований вошли в монографию А. Ерзин. Оптимизационные задачи на СБИС. Оптимизация состава, структуры и функционирования интегральных схем. – LAP LAMBERT Academic Publishing. Germany. – 2011.

IV. Рассмотрена задача максимизации времени жизни сенсорной сети в условиях ограниченности ресурсов сенсоров в виде задачи целочисленного линейного программирования, в которой при заданном множестве покрытий требуется определить время функционирования каждого покрытия. При этом ресурс сенсора задаётся количеством временных раундов, в течение которых он может находиться в активном состоянии.

Доказана NP-трудность задачи в сильном смысле; предложены способы её упрощения; показано, что для любого $\varepsilon > 0$ задача в общем случае не аппроксимируема полиномиальными алгоритмами с точностью $O(m^{1-\varepsilon})$, где m – количество покрытий; найдены частные случаи, когда задача полиномиально разрешима; предложено несколько эвристических алгоритмов построения приближённого решения задачи и проведён апостериорный анализ.

Сенсор – это автономное интеллектуальное устройство, которое предназначено для сбора, обработки, получения и передачи данных. Сенсор может находиться либо в активном состоянии, выполняя свои функции и расходуя энергию, либо в состоянии сна, когда расходом энергии можно пренебречь. В *беспроводной* сенсорной сети (СС) каждый сенсор обладает ограниченным невозобновляемым запасом энергии – ресурсом, измеряемым в количестве временных раундов, в течение которых сенсор может находиться в активном состоянии. Так как число сенсоров в СС существенно превышает минимальное количество, необходимое для сбора и обработки данных, то функции сенсорной сети может выполнять *подмножество* её элементов. Основной функцией СС является мониторинг, и объект (точка области) считается покрытым, если он находится в зоне мониторинга хотя бы одного сенсора. В связи с этим в литературе подмножество сенсоров, выполняющее функции сети, называют *покрытием*. Хотя один и тот же сенсор может входить в разные покрытия, общее время функционирования сенсора ограничено его ресурсом. Основной задачей СС является оптимизация энергопотребления, что влечёт увеличение времени функционирования (жизни) СС. Таким образом, одним из способов максимизации времени жизни СС является определение времени функционирования каждого покрытия с учётом максимального времени функционирования каждого сенсора.

Итак, *покрытием* назовём подмножество сенсоров, обеспечивающее функционирование СС. В зависимости от приложения, цели СС могут различаться. В некоторых случаях требуется покрыть заданную область, либо ее часть, в других – множество объектов. Часто на покрытия накладываются дополнительные ограничения (связность, наличие определённой структуры и др.).

В работе [Berman P., Galinescu G., Shan C., Zelikovsky A. Power efficient monitoring management in sensor networks // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Atlanta, USA, 2004, 2329-2334] сформулирована задача максимизации времени жизни СС в случае, когда множество покрытий не задано, а переменные, соответствующие временам функционирования покрытий, *непрерывны*, в виде частного случая задачи линейного программирования (packing linear program) и предлагается метод ее решения, основанный на алгоритме Гарга-Кёнеманна (Garg-Konemann) [Garg N., Konemann J. Faster

and simpler algorithms for multicommodity flow and other fractional packing problems // Proc. of FOCS, 1997]. В работе [Dhawan A., Vu C.T., Zelikovsky A., Li Y., Prasad S.K. Maximum lifetime of sensor networks with adjustable sensing range // Proceedings of the Seventh ACIS International Conference on Software Engineering, 2006] рассматривается более общая задача с регулируемыми радиусами мониторинга в аналогичной постановке. Для её приближенного решения авторам удалось обобщить метод, предложенный в [Berman P., Galinescu G., Shan C., Zelikovsky A. Power efficient monitoring management in sensor networks // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Atlanta, USA, 2004, 2329-2334]. В работе [Kim Y., Lee H., Han Y. Jeonge Y. A Branch and Bound Algorithm for extending the lifetime of wireless sensor networks // Vehicular Technology Conference, 2009] рассматривается задача максимизации времени жизни СС в случае, когда ресурсы всех вершин одинаковые. Для приближенного решения задачи предложен алгоритм, который строит множество покрытий с минимальным количеством многократно покрываемых объектов, используя метод ветвей и границ, и работает, пока сенсоры, ресурс которых не израсходован, покрывают все объекты. При этом время функционирования одного покрытия задано входным параметром w. В ходе численного эксперимента предложенный алгоритм сравнивался с алгоритмом Greedy-MSC [Cardei M., Thai M.T., Li Y., Wu W. Energy-efficient target coverage in wireless sensor networks // In IEEE Infocom 2005, Vol. 3, 2005, 1976-1984]. В работе [Cardei M., Ding-Zhu D. Improving wireless sensor network Lifetime through power aware organization // Springer Science, Business Media, Wireless Networks 11, Netherlands, 2005, 333-340] для каждого сенсора задано множество объектов, которые он покрывает, и требуется построить множество *непересекающихся* покрытий, суммарное время жизни которых максимально.

Исполнителями рассматривалась задача, аналогичная по постановке задаче, сформулированной авторами работы [Berman P., Galinescu G., Shan C., Zelikovsky A. Power efficient monitoring management in sensor networks // Proc. of IEEE Wireless Communications and Networking Conference. Atlanta, USA, 2004, 2329-2334], в условиях *заданного* избыточного множества покрытий и *целочисленных* переменных, соответствующих количеству временных раундов, в течение которых покрытие функционирует. Доказана NP-трудность поставленной задачи в сильном смысле; предложены способы её упрощения; показано, что для любого $\varepsilon > 0$ задача в общем случае не аппроксимируема полиномиальными алгоритмами с точностью $O(m^{1-\varepsilon})$, где m – количество покрытий; найдены частные случаи, когда задача полиномиально разрешима; предложено несколько эвристических алгоритмов построения приближённого решения задачи и проведён апостериорный анализ.

V. Для задачи построения оптимального коммуникационного дерева в беспроводной сенсорной сети найдены частные случаи полиномиальной разрешимости; показано, что минимальный остов, веса рёбер которого принадлежат отрезку $[a, b]$, является $\left(2 - \frac{2a}{a + b + 2b/(n-2)}\right)$-приближенным решением и, что задача построения 1,00048-приближенного решения NP-трудна; предложен эвристический полиномиальный алгоритм и осуществлён его апостериорный анализ.

Рассмотрена следующая NP-трудная в сильном смысле задача построения коммуникационного дерева, которая возникает в беспроводных сенсорных сетях. В произвольном неориентированном n-вершинном графе с неотрицательными весами ребер требуется построить остовное дерево, в котором сумма по всем вершинам максимальных весов инцидентных вершине рёбер минимальна.

Элементы многих коммуникационных сетей используют беспроводную связь для обмена информацией. При этом потери энергии элемента пропорциональны d^s, где $s \geq 2$, а d – дальность передачи. В некоторых сетях, например, в беспроводных сенсорных сетях, элементы (сенсоры) имеют ограниченный запас энергии, и эффективное использование энергии сенсоров позволяет продлить время функционирования (жизни) сети. Для рационального использования энергии современные сенсоры способны регулировать дальность радиопередачи, и тогда актуальной становится проблема определение дальности передачи каждого элемента сети таким образом, чтобы минимизировать общую энергию, затрачиваемую на поддержание связного графа. Если предположить, что радиосигнал одинаково распространяется во всех направлениях, то все элементы, находящиеся в зоне передачи (не далее, чем дальность передачи), получат сообщение. В этом случае можно считать, что коммуникационная сеть (остовный подграф по рёбрам которого осуществляется передача) – это полный граф. Однако не всегда сигнал распространяется одинаково во всех направлениях и на любое расстояние. Поэтому в общем случае следует считать, что коммуникационный граф $G = (V, E)$ может быть произвольным остовным подграфом, как и потери энергии по обеспечению передачи по ребру графа. Таким образом, если $c_{ij} \geq 0$ – потери энергии, связанные с передачей данных из $i \in V$ в $j \in V$, то в связном подграфе $T = (V, E'),\ E' \subseteq E$ потери энергии вершины $i \in V$ равны $E_i(T) = \max_{j:(i,j)\in E'} c_{ij}$. Целью исследований является решение задачи построения такого остовного подграфа T, в котором сумма $\sum_{i \in V} E_i(T)$ минимальна. Без ограничения общности подграф T можно считать остовным деревом.

VI. Для решения задачи отыскания m реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера на неориентированном графе на минимум суммарной длины обходов (задача m-PSP-min) предложен алгоритм с временной сложностью mn^2 (при m<n/4).

Теорема. *Пусть веса ребер графа – независимые равномерно распределенные в интервале (a_n, b_n) случайные величины. Тогда алгоритм асимптотически точен при выполнении следующих условий:* $b_n/a_n = o(n / \ln n)$, *если* $1 < m < \ln n$; ; $b_n/a_n = o(n^{\lambda})$¸ *если* $\ln n < m < n^{1-\lambda}$ *(для любой константы* λ , $0< \lambda <1$*).*

Ранее рассматривалась m-слойная (при m<n/2) трехиндексная планарная задача о назначениях, которая является модификацией классической трёхиндексной планарной задачи (3-ПЗН). Эта задача NP-трудна при m>1. В случае, когда элементы трёхиндексной матрицы (c_{ijk}) размера m×n×n являются случайными независимыми величинами, принимающими значения из отрезка [a_n, b_n], где $b_n > a_n > 0$, с общей функцией равномерного распределения, был предложен приближённый алгоритм с временной сложностью $O(mn^2+m^{7/2})$ и получены условия его асимптотической точности: m< ln n при $b_n/a_n = o(n / \ln n)$. Крарупом была поставлена задача об m бродячих торговцах (m-peripatetic salesman problem, или m-PSP), которая является m-слойной трёхиндексной планарной задачей на одноциклических подстановках (3-ПЗНО) в случае, когда все слои трёхиндексной матрицы представлены одинаковой двухиндексной матрицей. Алгоритм для решения m-PSP-min, предложенный в рамках проекта, строит частичные пути (цепи) в слоях матрицы с использованием принципа выбора "ближайшего (допустимого) города", а также процедуры достройки частичных путей до реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов. Результатом анализа является существенное расширение области условий асимптотической точности алгоритма в случае равномерно распределенных входных данных: $b_n/a_n = o(n / \ln n)$ при $1< m < \ln n$ и $b_n/a_n = o(n^{\lambda})$ при $\ln n < m < n^{1-\lambda}$ для любой константы λ, $0< \lambda <1$. При m < n/4 временная сложность алгоритма равна $O(mn^2)$. Обзор результатов исследований в области построения полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности для решения задач 2-PSP на минимум и на максимум при различных предположениях на весовые функции маршрутов коммивояжера можно найти в работе [Гимади Э.Х. О некоторых алгоритмах с оценками для задач маршрутизации // Труды 5-й Всероссийской конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск-2012].

VII. Обоснованы условия полиномиальности и асимптотической точности алгоритма решения задачи m реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера на максимум (m-PSP-max) с детерминированными исходными данными в многомерном евклидовом пространстве R^k, где k-размерность пространства.

Теорема. *При $m=o(n)$ алгоритм находит асимптотически точное решение задачи m-PSP-max в графе с расстояниями в R^k. При этом, если $m<n^{1/2}$, то алгоритм имеет временную сложность $O(n^3)$.*

Для задачи об m реберно непересекающихся маршрутах коммивояжера на графах в многомерном евклидовом пространстве построен приближенный алгоритм с временной сложностью $O(n^3)$ и установлены условия асимптотической точности алгоритма. Результаты построения алгоритма и его анализа существенно опираются на более ранние работы, связанные с обоснованием возможности асимптотически точного решения в пространстве R^k задачи коммивояжера на максимум, а также задачи 2-PSP-max. Отправной точкой алгоритма является построение максимального взвешенного паросочетания, которое представляется в виде совокупности [n/2] прямолинейных отрезков в многомерном евклидовом пространстве R^k. Существенным отличием алгоритма, предложенного в рамках проекта, является то, что ребра максимального взвешенного паросочетания не используются в самом решении (как в алгоритме Сердюкова), а используются только как бы в качестве "строительных лесов", с помощью которых происходит построение искомых реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера $H_1, H_2, \ldots, H_m$.

VIII Построен алгоритм кубической трудоемкости с гарантированной оценкой точности (3q+2)/(4q+1) для задачи двух коммивояжеров с весами ребер в интервале [1,q] (2-PSP-max[1,q]).

Следствие. *Для соответствующей подзадачи 2-PSP-max с весами ребер 1 и 2 из указанного результата теоремы следует оценка точности 8/9*.

Важным подклассом задачи двух коммивояжеров на полном неориентированном графе (2-PSP-max) является случай, когда веса ребер графа принимают значения из заданного промежутка [1,q]. Ранее для этой подзадачи авторами проекта был построен ряд приближенных алгоритмов для решения соответствующей задачи на минимум. Так для задачи 2-PSP-min [1,q] алгоритм из [Гимади, Глазков, Глебов–2007], далее [ГГГ], дает оценку точности (q+4)/5, что позволяет построить на его основе алгоритм с оценкой 5/(q+4) для задачи 2-PSP-max[1,q]. Совместное применение результатов работ [ГГГ] и [Агеев, Бабурин, Гимади–2006], далее [АБГ], позволило получить для этой же задачи алгоритм с улучшенной оценкой (3q+2)/(4q+1).

IX. Построен алгоритм $A_{7/9}$ кубической трудоемкости с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум (2-PSP-max). Алгоритм улучшает ранее полученную в [АБГ] для данной задачи оценку 3/4. В случае весов ребер, принимающих значения в

заданном промежутке [1,q], получена модификация алгоритма $A_{7/9}$, имеющая оценку точности (7q+3)/(9q+1), также наилучшую на сегодняшний день. В частности, для соответствующей подзадачи 2-PSP-max с весами ребер 1 и 2 построенный алгоритм имеет оценку точности 17/19, что на 1/153 лучше предыдущей оценки 8/9.

Оценка 3/4 в [АБГ] для задачи о двух коммивояжерах на максимум (2-PSP-max) улучшена до 7/9 Глебовым и Замбалаевой за счет развития структурных идей, ранее использованных в работе [ГГГ], при построении приближенного алгоритма с оценкой 6/5 для задачи о двух коммивояжерах на минимум с весами ребер 1 и 2 (задача 2-PSP-min(1,2)). Интересно отметить, что оценка точности 7/9 для задачи 2-PSP-max превосходит наилучшую на сегодняшний день оценку (25/33-eps) для аналогичной задачи одного коммивояжера, полученную в [Van Zuylen–2010]. Отправной точкой предлагаемого ниже алгоритма $A_{7/9}$ является обращение к алгоритму Габова [Gabow–1983], с помощью которого в графе G находится остовный 4-регулярный подграф G_4 с максимальным суммарным весом ребер. В общем случае алгоритм Габова позволяет отыскать в полном взвешенном n-вершинном графе G(V,E) такой подграф максимального реберного веса, что степени d(v) его вершин v входят в заданный диапазон $[l_v, h_v]$. При этом временная сложность алгоритма Габова оценивается сверху величиной $O(D_G \min(|E| \log n, n^2))$, где D_G – сумма верхних ограничений на степени вершин графа. Ясно, что при $l_v = h_v = 4$ для всякой вершины графа алгоритм Габова за время $O(n^3)$ находит в G остовный 4-регулярный подграф G_4 максимального реберного веса.

Дальнейший ход алгоритма $A_{7/9}$ связан с применением процедуры из статьи [ГГГ], позволяющей в каждой компоненте связности G_4 найти пару реберно-непересекающихся туров специального вида с большим числом ребер. Далее найденные туры преобразуются в туры T_1^*, T_2^* в G со свойством $w(T_1^*)+w(T_2^*) >= (7/9)OPT$. На завершающей стадии алгоритма туры T_1^*, T_2^* достраиваются до пары реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов H_1 и H_2 в G, представляющих из себя искомое приближенное решение задачи 2-PSP-max.

Отметим, что все рассмотренные до этого алгоритмы и оценки корректны лишь в том случае, когда весовые функции ребер у первого и второго маршрутов коммивояжера одинаковы. Построение соответствующих алгоритмов в случае, когда весовые функции различны, представляет из себя существенно более трудную задачу. Дополнительные трудности при разработке и анализе алгоритма (по сравнению со случаем двух одинаковых весовых функций) связаны с тем, что в рассматриваемом случае невозможна свободная переброска ребер из одного тура в другой. Из-за этого оказались неприменимыми многие

методы, ранее использовавшиеся в задаче о двух коммивояжерах с весами ребер 1 и 2 (см. [АБГ] и [ГГГ]).

X. Построены эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задачи о двух коммивояжерах на минимум с двумя весовыми функциями, принимающими значения 1 и 2 (задача 2-PSP-min-2w-(1,2)). Для этой задачи представлены два приближенных алгоритма, первый из которых имеет гарантированную оценку 7/5 и кубическую временную сложность, а второй – лучшую оценку точности 4/3, но худшую трудоемкость $O(n^5)$. Оба алгоритма улучшают ранее полученную для задачи 2-PSP-min-2w-(1,2) оценку точности 11/7.

При разработке и анализе указанных алгоритмов активно используются методы теории графов. В основе представленных алгоритмов лежит метод построения пары гамильтоновых циклов из так называемых частичных туров, т.е. подграфов специального вида в данном графе. Работа алгоритмов основана на последовательных локальных преобразованиях туров, улучшающих их ``качество''.

В случае двух различных весовых функций (задача 2-PSP(1,2)-min-2w) в статье [Бабурин и др. в Discrete Applied Mathematics, 2009], далее [DAM], был предложен алгоритм с оценкой 11/7.

Усиление этого результата было получено в статье [Глебов, Гордеева, Замбалаева – 2011], а именно, построение для задачи 2-PSP(1,2)-min-2w <u>*алгоритма с оценкой точности 7/5*</u> (без учета аддитивной константы) и оценкой временной сложности $O(n^3)$. В основу алгоритма положена идея метода из статьи [Бермана, Карпински–2006], далее [БК], заключающаяся в построении и последовательном "улучшении" двух реберно непересекающихся частичных туров наборов цепей и циклов, покрывающих все вершины графа) из ребер единичного веса, и последующем замыкании этих туров в непересекающиеся гамильтоновы циклы. Под "улучшением" туров понимается такое их локальное преобразование, при котором уменьшается либо общее число цепей и циклов, составляющих туры, либо число одновершинных цепей (синглов). Для того, чтобы гарантировать возможность улучшающего преобразования в случае, если нужное качество решения еще не достигнуто, применяется введенная в работе [БК] техника так называемых зарядов вершин, т.е. чисел, определяемых для каждой вершины графа на основе туров оптимального решения, и последующего перераспределения этих зарядов между вершинами графа с сохранением их суммы. Доказательство результата было сопряжено со значительным объемом просмотра большого числа случаев, соответствующих различным типам вершин графа. Тип вершины определяется тем, является ли она в туре концевой или внутренней вершиной цепи, вершиной цикла или синглом (независимо для каждого тура).

Важной отличительной <u>*чертой алгоритма с оценкой 4/3*</u> является существенное расширение понятия частичного тура за счет включения в тур наряду с цепями и циклами принципиально новых объектов, называемых (s,q)-деревьями. Понятие частичного тура, традиционно используемое в большинстве работ, посвященных построению приближенных алгоритмов для задач одного и двух коммивояжеров, существенно модифицировано за счет включения в туры наряду с цепями и циклами так называемых (s,q)-деревьев (обобщение синглов) и входящих в них Q-вершин. Есть все основания полагать, что разработанные методы, связанные с применением раскрасок вершин и ребер, перераспределением зарядов и использованием (s,q)-деревьев, окажется полезными при разработке других алгоритмов решения задач маршрутизации, в первую очередь, задач одного, двух и более коммивояжеров на минимум и на максимум.

XI. Построен эффективный алгоритм с гарантированной оценкой точности для задачи о двух коммивояжерах на минимум с двумя весовыми функциями, принимающими значения 1 и 2 (задача 2-PSP-max-2w-(1,2)).

Теорема. *Если имеются r_1-приближенный алгоритм для задачи 2-PSP-min-{1,2} и r_2 -приближенный алгоритм для задачи 2-PSP-min-2w-{1,2}, то на его основе для задачи 2-PSP-max-2w-{1,2} можно построить алгоритм с оценкой*

$$(7r_2-5+(r_2-1)/(12\, r_1-11))/(12\, r_2-10).$$

С использованием известного 7/6-приближенного алгоритма [Пападимитриоу, Яннакакис-1993], далее [ПЯ], а для задачи 2-PSP-min-{1,2} получаем оценку $(11\, \mathbf{r_2}-8)/(18\, \mathbf{r_2}-15)$ для решения задачи 2-PSP-max-2w-{1,2}. С одной стороны, результат основан на очевидной связи между задачами <u>*2-PSP-max-2w-(1,2)*</u> и <u>*2-PSP-min-2w-(1,2)*</u> на минимум и максимум**.** С другой стороны, идеи работы [DAM] вместе с алгоритмами для TSP-min-(1,2) позволили получить предложенную оценку точности для 2-PSP-max-2w-{1,2}. Исходя из известного 7/6-приближенного алгоритма [ПЯ] для задачи 2-PSP-min-{1,2} и алгоритмов решения 2-PSP-min-2w-{1,2} с оценками r = 11/7 [DAM], 7/5 [Глебов, Замбалаева, 2012] и оценкой 4/3 [Глебов, Замбалаева, 2012], можно получить следующие оценки точности для комбинированного алгоритма решения 2-PSP-max-2w-{1,2}: 65/113 < 37/51 < 20/27, соответственно.

XII. Построен приближенный полиномиальный алгоритм решения NP-трудной задачи двух коммивояжеров на неориентированном графе на минимум с весами рёбер 1 или 2 в случае, когда пропускная способность каждого ребро графа равна 2 (с вероятностью p) и 1 (с вероятностью 1–p).

Теорема. *Ожидаемая оценка точности алгоритма равна 2–(1+p)(1– r/2), где r – гарантированная точность решения симметричной задачи коммивояжера на минимум (TSP-min-{1,2}).*

Рассматривается задача m коммивояжёров с ограничениями пропускной способности рёбер (m-Capacitated Peripatetic Salesman Problem, m-CPSP). В полном неориентированном взвешанном графе G, каждое ребро e которого имеет заданную пропускную способность C_e со значениями из множества {1, … , m}, требуется найти m гамильоновых циклов наименьшего суммарного веса с использованием каждого ребра e не более C_e раз. Задача m-CPSP NP-трудна, поскольку в частном случае единичных пропускных способностей каждого ребра имеем задачу m-Peripatetic Salesman Problem (m-PSP), которая NP-трудна при m>1 даже на графе с весами рёбер со значения 1 и 2.

Для задачи 2-CPSP-min-{1,2} в случае, когда каждое ребро e графа имеет пропускную способность C_e=2 с вероятностью p и C_e=1 с вероятностью 1-p построен алгоритм с математическим ожиданием оценки точности (19-5p)/12. Алгоритм основан на идеях работы [DAM] и с использованием 7/6-приближенного алгоритма [ПЯ] для решения TSP-min-{1,2} ожидаемая оценка точности построенного алгоритма принимает величину (19–5p) /12 [Гимади, Истомин, Рыков–2012].

XIII. Проведено исследование задачи k-VRP – маршрутизации многих транспортных средств (ТС) с ограниченным числом клиентов в каждом маршруте.

В полном графе выделена вершина-депо, в которой изначально содержатся ТС. Остальные вершины – клиенты, расстояния между которыми и с вершиной-депо представлены ребрами графа. Множество клиентов представлено вершинами полного графа. Расстояния между клиентами и вершиной-депо представлены ребрами графа. Каждый клиент обслуживается только одним ТС, которое стартует из депо, посещает (обслуживает) не более k клиентов и возвращается в депо. При этом минимизируется общая длина маршрутов. Для задачи с одним депо в работе [Гимади, Шахшнейдер – 2012] представлены алгоритмы с временной сложностью $O(n^2)$ на случайных входах. Для усеченно-нормального и экспоненциального распределений с параметрами σ_n и λ_n, равномерного распределения в интервале $[a_n,b_n]$ и мажорирующего распределения входных данных представлены условия асимптотической точности, верные как в случае неориентированных, так и ориентированных графов.

Теорема. Приближенное решение задачи k-VRP на рассматриваемых классах входов может быть получено с оценкой относительной погрешности $O(\beta_n/a_n)$ *и вероятности несрабатывания* $O(\exp(n/k)\ /\ n^2)$, *где параметр* β_n *в случае усеченно-нормального и экспоненциального распределений равен соответствующим параметрам* σ_n *и* λ_n, *а в случае равномерного распределения равен* b_n.

Следствие. Имеют место следующие условия асимптотической точности:
$\beta_n/a_n = o(n\ /\ \ln n)$; $k>3n\ /\ \ln n$.

В задаче k-VRP с несколькими депо транспортные средства распределены по s депо и число ТС в каждом депо не более m=]n/ks[. При этом рассмотрены варианты задачи как с требованием возврата ТС в исходное депо, так и без такого требования.

1.1.5. Результаты, полученные в теории расписаний

Здесь получены следующие результаты мирового уровня.

I. Исследованы задачи на построение расписаний с разрешением прерываний операций, в которых каждая операция может быть прервана и возобновлена позднее без какого-либо штрафа. Изучены фундаментальные свойства оптимальных решений таких задач – существование, конечность/полиномиальность числа прерываний и целочисленность/ рациональность моментов прерываний в оптимальном решении. Для двух специальных классов целевых функций (включающих, тем не менее, все классические целевые функции) доказано существование оптимального решения, обладающего специальной «рациональной» структурой.

Описана достаточно общая задача на построение расписания в условиях допущения прерываний операций (полная формулировка этой задачи занимает несколько страниц, поэтому здесь не приводится). Отмечено, что в подавляющем большинстве исследований, встречающихся в литературе по теории расписаний, игнорируются фундаментальные вопросы, с которых следовало бы начинать всякое такое исследование. В частности, речь идёт о вопросе существования оптимального расписания (в тех случаях, когда множество допустимых расписаний непусто). Приведено два примера, для которых доказано *несуществование* оптимального расписания. В одном случае причиной этого явления послужило отсутствие монотонности целевой функции от моментов окончания операций. В другом – разрывный характер целевой функции (точнее, отсутствие непрерывности слева). В то же время, показано, что если оба эти отрицательных фактора отсутствуют, т.е. если целевая функция, зависящая от моментов окончания операций, монотонно неубывает и непрерывна слева, то этого достаточно для существования оптимального решения в любом примере рассматриваемой (довольно общей) задачи, обладающем непустым множеством допустимых решений.

Имеются и другие интересные вопросы, характерные лишь для задач с прерываниями. Например, для каких задач гарантировано конечное/полиномиальное число прерываний в оптимальном расписании (и таким образом, задача алгоритмически/полиномиально разрешима)? В каких случаях можно гарантировать, что все прерывания в оптимальном расписании происходят в целые (или рациональные) моменты времени? Вопросы такого типа исследуются нами для широкого круга моделей теории расписаний и широкого спектра целевых функций, включающего все классические.

Получены две *Теоремы о Рациональной Структуре* (для двух различных классов целевых функций, в совокупности покрывающих все классические целевые функции), согласно которым для любого примера с непустым множеством допустимых решений существует оптимальное расписание со следующими свойствами:

(1) суммарное число прерываний не превосходит полинома от числа операций и от числа фиксированных дат, заданных на входе;

(2) все точки переключения в расписании (т.е. моменты начала, завершения, прерывания и возобновления операций) совпадают с моментами времени, кратными некоторому рациональному числу $\delta>0$; при этом длина записи числа δ ограничена полиномом от длины записи входа задачи;

(3) оптимальное значение целевой функции является числом, кратным числу δ, при этом длина записи коэффициента кратности также ограничена полиномом от длины записи входа.

II. Для цеховых задач и задач на параллельных машинах исследованы структурные свойства оптимальных расписаний и приведены условия существования оптимального решения с целочисленными прерываниями. Построены примеры, в которых такие решения не существуют, если хотя бы одно из достаточной совокупности условий нарушено. Получены новые, улучшенные по сравнению с известными верхние оценки на число прерываний в оптимальном решении.

Наиболее сильным структурным свойством является свойство *редукции прерываний*, когда показывается, что можно вообще обойтись без прерываний, т.е. для любого примера данной задачи существует оптимальное расписание, в котором ни одна из операций не прерывается. Такое свойство показано нами для задачи на идентичных параллельных машинах, с неодновременным поступлением работ и ограничениями предшествования на множестве работ в виде изолированных цепей. При этом предполагается, что длительности всех работ единичны, т.е. каждая работа состоит из единственной единичной операции. В случае, когда это не так, т.е. когда длительности работ — произвольные целые числа, свойство редукции прерываний преобразуется в свойство целочисленности моментов прерываний. В качестве критерия оптимальности рассматривается минимизация произвольной регулярной единично-вогнутой функции от моментов окончания работ. В стандартной системе нотации такая задача кратко записывается как $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j = 1 \mid F(C_1, \ldots C_n) \rangle$.

Определение. Функция $F(x)$ $(x \in R^n)$ называется *единично-вогнутой*, если для любого $\lambda \in [0,1]$ и любых векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, где $x_i, y_i \in [t_i, t_i + 1]$ для некоторого единичного целочисленного интервала $[t_i, t_i + 1]$, $i = 1, \ldots, n$ (t_i — целые), выполняется неравенство $F(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y)$.

*Теорема 1***.** Для любого примера задачи $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j = 1 \mid F(C_1, \ldots C_n) \rangle$ с целочисленными длительностями и моментами появления работ, на минимум произвольной регулярной единично-вогнутой функции $F(C_1, \ldots C_n)$ от моментов завершения работ, существует оптимальное расписание, в котором все прерывания, также как и моменты начала и завершения работ происходят в целочисленные моменты времени.

Непосредственным следствием данного результата является свойство редукции прерываний для широкого класса задач теории расписаний с единичными длительностями работ. В частности, это закрывает две открытые проблемы о выполнимости свойства редукции прерываний для задач $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j = 1 \mid \sum w_j T_j \rangle$ и $\langle P \mid r_j, pmtn, chains, p_j = 1 \mid \sum w_j U_j \rangle$. Из этого свойства также следует, что каждая такая задача (с единичными длительностями и прерываниями операций) эквивалентна своей «беспрерывной» версии как с точки зрения значений их оптимумов, так и с точки зрения сложности этих задач. Эта эквивалентность предоставляет также новое, более простое доказательство некоторых известных результатов по сложности. В частности, из нашей Теоремы 1 следует NP-трудность задач $\langle Pm \mid pmtn, chains, p_j = 1 \mid \sum w_j C_j \rangle$ и $\langle Pm \mid pmtn, chains, p_j = 1 \mid \sum U_j \rangle$ (доказанная ранее в работах (Baptiste et al., 1994), (Du, Leung, and Young, 1991) и (Timkovsky, 2003)) и полиномиальная разрешимость задачи $\langle P \mid r_j, pmtn, p_j = 1 \mid \sum w_j T_j \rangle$, установленная Баптистом (2002).

Аналогичное свойство целочисленности всех прерываний в оптимальном расписании устанавливается нами для так называемых *цеховых* задач теории расписаний, рассматривающих проблемы оптимизации работы многостадийных производств со специализированными цехами. Задачи из данного класса включают в себя такие известные классические задачи как задачи *job shop, flow shop* и *open shop*. В общем виде модель цехового производства представляется следующим образом.

Цеховая задача. Заданы множество *работ* $J = \{J_1, \ldots, J_n\}$, множество *машин* $M = \{M_1, \ldots, M_m\}$ и множество *операций* $O = \{O_1, \ldots, O_\eta\}$. Каждая операция $o_k \in O$ принадлежит определённой работе $J(o_k) \in J$ и должна быть выполнена на определённой

машине $M(o_k) \in M$ в течение заданного времени p_k (где p_k — неотрицательное целое). В любой момент времени (за исключением, быть может, конечного их числа) может выполняться не более одной операции на каждой машине и не более одной операции каждой работы. Каждая операция может быть прервана в любой момент времени и возобновлена позднее без какого-либо штрафа. На множестве операций каждой работы могут быть установлены предписанные *ограничения предшествования*.

Дальнейшая классификация цеховых задач основана на детализации вида ограничений предшествования. В общем виде эти ограничения могут быть заданы ориентированным ациклическим графом $G = (O,U)$, вершинами которого являются операции, а наличие дуги $(o_i, o_j) \in U$ между двумя вершинами графа G, задающими операции одной и той же работы, означает, что операция o_j может начаться только после завершения операции o_i. Если не задаётся каких-либо дальнейших ограничений на граф G, то мы имеем дело с наиболее общей цеховой задачей *dag shop*. Её частный случай, когда граф G пуст (и следовательно, операции каждой работы могут выполняться в произвольном порядке), известен как задача *open shop*. В другом (противоположном) частном случае, известном как задача *job shop*, на множестве операций каждой работы задан полный (линейный) порядок. Используя стандартные трёхпольные обозначения для этих задач, мы будем писать в первом поле одну из букв $J, F, \hat{O}$ для обозначения задач job shop, flow shop и open shop, соответственно, оставляя букву O для обозначения классической задачи open shop, в которой каждая работа имеет в точности одну операцию на каждой машине.

Для сформулированных выше задач нами получены результаты двух типов. Во-первых, мы получаем верхние оценки на число прерываний в оптимальном расписании задачи dag shop. После этого мы устанавливаем свойство целочисленности прерываний для общей задачи job shop и двухмашинной задачи dag shop для целевых функций довольно общего вида. Мы также показываем, что для трёхмашинной задачи dag shop свойство целочисленности прерываний не выполняется уже для такого частного критерия как минимум длины расписания, причём – уже в частном случае, когда каждая работа имеет не более двух операций.

Теорема 2. Для любого примера задачи dag shop с разрешением прерываний операций, m машинами и регулярным критерием $F(C_1, \ldots, C_\eta)$ существует активное оптимальное расписание с не более чем $O(\min\{\xi^2 m, \xi m^3\})$ прерываниями, где ξ — число ненулевых операций.

Теорема 3. Пусть $F(x_1,\ldots,x_\eta)$ — неубывающая функция, принимающая лишь конечное число значений. Тогда для любого примера задачи dag shop с разрешением прерываний операций и m машинами, на минимум функции $F(C_1,\ldots,C_\eta)$ от моментов окончания работ существует активное оптимальное расписание с не более чем $O(\min\{\xi^2 m, \xi m^3\})$ прерываниями, где ξ — число ненулевых операций.

Нетрудно убедиться, что все классические целевые функции удовлетворяют условиям, налагаемым на целевую функцию в Теореме 2. Более того, такая целевая функция как суммарное взвешенное число опоздавших работ $\sum w_j U_j$ удовлетворяет как условиям Теоремы 2 (она неубывающая и непрерывна слева), так и условиям Теоремы 3 (поскольку она может принимать лишь конечное число значений).

Далее мы рассматриваем классическую задачу job shop на минимум произвольной регулярной функции от моментов окончания операций. Мы показываем, что для этой общей задачи выполнено свойство целочисленности прерываний.

Теорема 4. Для любого примера задачи job shop с разрешением прерываний операций и регулярным критерием $F(C_1,\ldots,C_\eta)$ существует оптимальное S расписание со следующими свойствами:

(a) *S* является активным расписанием с прерываниями;

(b) Множество всех точек переключения в расписании *S* совпадает с множеством моментов окончания операций;

(c) Если все длительности операций – целые числа, то все точки переключения в расписании *S* – также целые.

III. Впервые выполнен полный анализ сложности задачи построения расписания для *n* работ на одной машине с ограничениями на оборотные ресурсы и неодновременным поступлением работ. Он представляет собой совокупность взаимосвязанных неулучшаемых результатов, дающих полную картину сложности задачи.

Рассматриваемая задача (в несколько более простой форме, с одновременным поступлением всех работ) была впервые представлена в 1986-88 гг. в работах Каплана, Амира и Бермана, и была названа ими (ввиду конкретного экономического приложения) *задачей передислокации*. Они доказали полиномиальную разрешимость той, более простой задачи.

При выполнении проекта нами рассматривалась более общая задача, подразумевающая, что моменты поступления работ в систему могут различаться. Как и следовало ожидать, эта более сложная задача оказалась NP-трудной в сильном смысле. Мы,

однако, не ограничились одной лишь констатацией этого факта, а попытались выяснить точные границы «сильной NP-трудности», а также границы «простой NP-трудности» и обнаружить возможные полиномиально разрешимые случаи. Иначе говоря, был проведён довольно полный анализ сложности этой задачи, в результате которого удалось получить точное «размежевание» множества подзадач на области с различной сложностью.

Говоря формально, мы решаем задачу о выполнении работ из заданного конечного множества $N = \{1, \dots, n\}$ на одной машине. Исходно в ресурсном пуле имеется Q_0 единиц ресурса. Каждая работа $i \in N$ появляется в системе в заранее заданный момент времени r_i (лишь только после этого момента работа может быть «поставлена в расписание на выполнение») и имеет заданную длительность p_i. Для того, чтобы можно было начать выполнение этой работы, требуется изъять из ресурсного пула (в момент начала выполнения работы) заданное количество α_i единиц ресурса. В то же время, по окончании выполнения работы она «возвращает» в ресурсный пул β_iединиц ресурса. Без ограничения общности мы можем предполагать, что эти величины неотрицательны. Машина выполняет в каждый момент времени не более одной работы. Прерывания работ запрещены. Таким образом, работа i может начать выполнение в момент t, только если (1) она уже появилась в системе$(t > r_i)$, (2) уровень ресурса в ресурсном пуле достаточен (не меньше величины α_i), и (3) машина не занята другой работой. Все упомянутые параметры принимают неотрицательные целые значения (за исключением *суммарного вклада* работы в ресурсный пул, определяемого как $\delta_i = \beta_i - \alpha_i$ и могущего принимать отрицательные значения). При заданном начальном уровне ресурса в ресурсном пуле, расписание выполнения работ считается допустимым, если оно удовлетворяет ограничениям на моменты поступления работ и выполнение никакой из работ не «заблокировано» вследствие отсутствия необходимого количества ресурса. Целью решения задачи является построение допустимого расписания минимальной длины (C_{max}).

Получены следующие результаты. Во-первых, выявлены некоторые базовые свойства допустимых и оптимальных последовательностей работ исходного примера нашей задачи. На основе этих свойств разработан комбинаторный алгоритм решения задачи в общем случае. Затем мы преобразуем этот алгоритм в алгоритм динамического программирования с $3m$ независимыми динамическими параметрами, где m есть число различных моментов появления работ. Таким образом, когда число различных моментов появления работ ограничено константой, алгоритм ДП работает псевдо-полиномиальное время. В дополнение к этому, доказано, что если параметр m является переменной, то задача становится NP-трудной в сильном смысле. Таким образом, никакого псевдо-полиномиального алгоритма не может существовать в случае переменного m (если справедлива гипотеза о $P \neq NP$). Кроме

того, доказано, что наш результат не может быть улучшен до полиномиального по времени алгоритма при m, ограниченном любой константой, поскольку даже при $m = 2$ задача остаётся NP-трудной. Наконец, задача исследуется по отношению к положительным/отрицательным вкладам работ в ресурсный пул. Мы показываем, что если все работы имеют неотрицательные вклады, то задача решаема за полиномиальное время, тогда как противоположный случай (когда вклады всех работ отрицательны) является NP-трудной в сильном смысле задачей.

IV. Выполнен полный анализ сложности четырёхпараметрического семейства цеховых задач (включающего классические задачи job shop и open shop, а также смешанную задачу mixed shop), определяемого всевозможными комбинациями ограничений на такие параметры как максимальное число операций работы, длительность операции, верхняя оценка на длину расписания. Показано, что этот бесконечный класс задач содержит так называемую базисную систему задач — конечное семейство задач, дающее «ключ» к определению сложности любой задачи из бесконечного класса. Установлено, что базисная система состоит из десяти задач, пять из которых полиномиально разрешимы, а пять других — NP-полны (рассматриваются задачи распознавания). Сложность двух задач из базисной системы была известна ранее, сложность остальных восьми задач установлена авторами. Тем самым, в явном виде установлено свойство дихотомии бесконечного класса (свойство гласит, что класс задач не содержит задач «промежуточной сложности» — труднее полиномиально разрешимых, но легче NP-полных).

Для начала приведём формулировки некоторых из рассматриваемых здесь задач. Формулировки остальных упоминаемых задач (таких как *job shop*, *open shop* и *обобщённая open shop*) приведены выше, в п. 2 этого отчёта.

В *смешанной задаче* (mixed shop) каждый пример может содержать как работы типа job shop (с фиксированным порядком операций), так и работы типа open shop (со свободным порядком операций).

Целью является нахождение расписания минимальной длины. Иначе говоря, ставится задача минимизации момента (C_{max}) завершения наиболее поздней операции. В задачах распознавания нашей целью является проверка существования допустимого расписания, длина которого не превосходит заданного параметра C. (В этом случае значение параметра является частью входа.)

Как правило, каждая задача на составление расписания может быть описана в терминах многих параметров. Кроме уже упомянутого параметра C, в анализе сложности наших задач мы будем использовать такие параметры как максимальная длительность

операции (p_{max}) и максимальное число операций одной работы (η). Ясно, что ограничения, накладываемые на длину расписания, ограничивают также параметры p_{max} и η (по крайней мере, C ограничивает число ненулевых операций каждой работы). С другой стороны, два последних параметра могут рассматриваться как независимые (в том числе, независимые от C, что в большой степени верно для «длинных» расписаний). Четвёртым параметром, взятым нами для анализа сложности, является *тип задачи*, принимающий значения из частично упорядоченного множества $\{J, O, \hat{O}, (J + O), (J + \hat{O})\}$, где $J, \hat{O}$ и O обозначают задачи job shop, open shop и классическую open shop соответственно, тогда как $(J + O)$ и $(J + \hat{O})$ обозначают их смешения.

Рассматривается бесконечный класс задач распознавания, каждая из которых является подзадачей смешанной задачи $(J + \hat{O})$ с заданной верхней границей на длину расписания. Вопросом в этих задачах распознавания является вопрос о существовании допустимого расписания, удовлетворяющего заданному набору ограничений на выбранные нами *ключевые параметры*. В качестве ограничений на эти параметры рассматриваются их верхние границы (так называемые «ограничители»). Ограничители на параметры «тип задачи», p_{max}, η и C обозначаются $\overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{p}$, $\bar{\eta}$ и $\bar{C}$ соответственно. Они образуют 4-мерный *вектор-ограничитель* ($\overline{\mathfrak{M}}$, $\bar{p}$, $\bar{\eta}$, $\bar{C}$), чьи конкретные значения определяют отдельных представителей в исследуемом нами бесконечном классе задач. Такое обозначение вектора-ограничителя используется нами в приводимой ниже таблице результатов. Таблица перечисляет десять подзадач, составляющих базисную систему бесконечного 4-параметрического класса подзадач исходной смешанной цеховой задачи.

Таблица 1 – Базисная система бесконечного 4-параметрического класса подзадач исходной смешанной цеховой задачи.

Table 2 The basis system of subproblems of class $\mathcal{P}(\bar{\mathcal{X}})$

No.	Problem $\mathcal{P}_{\bar{x}^i}$, $\bar{x}^i = (\overline{\mathfrak{M}}, \bar{p}, \bar{\nu}, \bar{C})$	Complexity	References
$\bar{x}^1$	$((J + \widehat{O}), 1, 2, \infty)$	P	Theorem 2
$\bar{x}^2$	$((J + \widehat{O}), \infty, \infty, 2)$	P	Theorem 3
$\bar{x}^3$	$(J, \infty, \infty, 3)$	P	Corollary 1
$\bar{x}^4$	$(\widehat{O}, \infty, \infty, 3)$	P	Corollary 2
$\bar{x}^5$	$(\widehat{O}, 1, \infty, \infty)$	P	Gonzalez and Sahni (1976)
$\bar{x}^6$	$((J + O), 1, 3, 3)$	NP-compl.	Theorem 4
$\bar{x}^7$	$((J + O), 2, 2, 3)$	NP-compl.	Theorem 5
$\bar{x}^8$	$(O, 2, 2, 4)$	NP-compl.	Theorem 11
$\bar{x}^9$	$(J, 2, 2, 4)$	NP-compl.	Theorem 8
$\bar{x}^{10}$	$(J, 1, 3, 4)$	NP-compl.	Williamson et al. (1997)

V. Рассмотрены две версии задачи Джонсона с общим буфером, возникающие в мультимедийных приложениях, связанных с передачей данных через переносное транслирующее устройство с ограниченной памятью. Для обеих версий установлена NP-трудность возникающих задач. Для случая, когда в процессе загрузки разрешены прерывания, выделены нетривиальные полиномиально разрешимые классы. Для обеих версий предложены новые нижние оценки, основанные на сведении задачи к специальной ограниченной версии.

Рассматривается задача потокового типа с буфером, которая может применяться для построения расписания представления (презентации) медиа-объектов (файлов) в автоматизированной презентации. Медиа-объекты загружаются из удаленной базы данных и могут транслироваться в произвольном порядке. Для каждого объекта или работы заданы время его загрузки и время его обработки (воспроизведения). Воспроизведение объекта не может начаться раньше окончания его загрузки. При загрузке медиа-объект поступает в буфер транслирующего устройства и покидает его сразу после завершения его воспроизведения. Для обеспечения хорошего качества презентации требуется составить расписание загрузки и представления объектов, так чтобы минимизировать общее время презентации, то есть минимизировать время окончания представления последнего медиа-объекта. Такие задачи имеют большое значение в создании электронно-цифровых библиотек и музеев.

Предлагаемая модель оптимизации последовательности обработки медиа-объектов может быть рассмотрена как задача потокового типа на двух машинах $F2||C_{\max}$, также известная как *двухмашинная задача Джонсона*. Но помимо стандартных ограничений здесь необходимо учитывать и размер буфера, позволяющего хранить загруженные объекты. Для конфигурации сетей с достаточно стабильной скоростью передачи (например, когда пропускная способность сети ограничена медленной пропускной способностью самого устройства) время загрузки объекта (то есть длина операции работы на первой машине) пропорционально его размеру. Следовательно, и количество объема буфера, занимаемого загруженной работой, линейно пропорционально времени её выполнения на первой машине. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что время загрузки объекта просто равно его размеру. Действительно, всегда можно выбрать такой масштаб, что единица размера объекта загружается за единицу времени. Кроме того, предполагается, что загрузка и воспроизведение объекта не могут быть прерваны, то есть все операции выполняются без прерывания.

Задачи с буфером стали популярны в последнее десятилетие и часто встречаются как объект исследования в статьях по теории расписаний. Однако большинство статей

рассматривает так называемый промежуточный буфер, то есть работа покидает буфер в момент начала её выполнения на второй машине. В нашей задаче, как было описано выше, работа покидает буфер в момент завершения её выполнения на второй машине; то есть работа, которая выполняется на второй машине, всё ещё оккупирует буферное пространство. Такие задачи впервые были рассмотрены в статье (Лин и др. 2008).

Мы рассматриваем задачу потокового типа на двух машинах с буфером на второй машине и двумя различными способами загрузки и изучаем сложность подзадач, возникающих в обеих моделях при дополнительных ограничениях. В (Лин и др. 2008) рассматривался случай, когда новый объект не загружается, пока свободное пространство в буфере недостаточно для помещения этого объекта. То есть, если размер загружаемого файла больше размера свободного пространства буфера, то требуется подождать до завершения презентации одного или более загруженных объектов. Мы будем ссылаться на такую модель как на модель с *пассивной загрузкой* и обозначать соответствующую задачу *PP*-задачей. В *PP*-задаче загрузка задерживается до того момента, пока размер загружаемого файла не станет меньше размера свободного пространства в буфере.

Активная модель загрузки предполагает более агрессивное использование свободного пространства, путём занятия этого пространства входящим объектом без нарушения непрерывности загрузки. Поскольку предполагается, что размер загруженного файла равен времени, потраченному на загрузку, требуется, чтобы в каждый момент времени общий размер загруженных и частично загруженных объектов не превышал размера буфера. Мы будем ссылаться на такую модель как на модель с *активной загрузкой* и обозначать соответствующую задачу *AP*-задачей. Заметим, что любое допустимое решение *PP*-задачи также является допустимым решением *AP*-задачи. Следовательно, оптимальное решение задачи с активной загрузкой всегда не хуже, и может быть лучше, чем оптимальное решение задачи с пассивной загрузкой. Мы показываем, что вторая модель имеет и другие хорошие свойства.

Для обеих моделей (с пассивной и с активной загрузкой) рассмотрено по две подзадачи, в которых множество входных примеров ограничено неравенствами $a_i + b_i \le \Omega$, выполняемыми для всех $i \in N$, а также соотношениями $a_i < b_i$ -- в первой подзадаче и соотношениями $a_i > b_i$ -- во второй подзадаче. Нами показано, что две этих подзадачи в модели с пассивной загрузкой -- NP-трудны, тогда как аналогичные подзадачи в модели с активной загрузкой – полиномиально разрешимы.

VI Для задачи об инвестировании проектов с неодновременным поступлением проектов в систему построен алгоритм, основанный на идее многопараметрического динамического

программирования. Трудоёмкость алгоритма становится псевдополиномиальной в случае, когда число (m) различных моментов поступления проектов в систему ограничено константой. Доказана неулучшаемость полученного результата: невозможность избавиться от псевдополиномиального характера оценки трудоёмкости (поскольку даже при $m=2$ задача NP-трудна) и невозможность построения аналогичного псевдополиномиального алгоритма для случая неограниченного m, поскольку в этом случае задача NP-трудна в сильном смысле.

Кроме того, для частного случая задачи, когда вклад каждого проекта в общий ресурсный пул неотрицателен, разработан полиномиальный алгоритм точного решения. В то же время, «симметричная» задача, в которой вклад каждого проекта в общий ресурсный пул неположителен, является (как показано нами) NP-трудной в сильном смысле, а значит, вряд ли допускает точное решение за полиномиальное время (если верна гипотеза о несовпадении классов P и NP).

В этом пункте описываются результаты, иллюстрирующие ситуацию, когда тщательный предварительный анализ свойств оптимальных решений позволяет легко перейти к конструированию этих решений наиболее экономным способом (из возможных). Поскольку в данном случае речь идёт об NP-трудной проблеме, то понятно, что нет никаких оснований ожидать, что нам удастся построить полиномиальный алгоритм точного решения. И проведённый подсчёт трудоёмкости построенного алгоритма наглядно это демонстрирует: она имеет явно выраженный экспоненциальный характер от выбранного нами ключевого параметра – числа (m) *различных* моментов поступления работ в систему. При этом в основании экспоненты находится величина, псевдополиномиально зависящая от длины входа задачи. Однако полученная оценка трудоёмкости имеет и положительную сторону: поскольку мы добились того, чтобы показатель экспоненты не содержал никаких других параметров, кроме m, мы можем утверждать, что при m, ограниченном константой, алгоритм становится псевдополиномиальным (что в некоторых случаях – не так уж и плохо). И как показал выполненный нами анализ сложности, полученная оценка трудоёмкости алгоритма является наилучшей возможной (по порядку), какую только можно ожидать для данной задачи. Анализ показал, что нельзя избавиться от псевдополиномиальности в основании экспоненты (поскольку даже при $m=2$ задача остаётся NP-трудной) и нельзя, видимо, избавиться от присутствия m в показателе экспоненты, поскольку показана NP-трудность задачи в сильном смысле в случае, когда m не ограничено константой.

VII Установлена полиномиальная разрешимость смешанной задачи $(J+\bar{O})|p_{ij}=1,\eta\leq 2|C_{max}$, т.е задачи, обобщающей классические задачи job shop и

обобщённую задачу open shop (на минимум длины расписания) на случай, когда в примере могут присутствовать работы обоих типов (как job shop, так и open shop). При этом рассматривается частный случай этого обобщения, когда длины всех операций равны 1 либо 0, причём каждая работа имеет не более двух ненулевых операций. Установлено также, что данный результат (построение эффективного алгоритма точного решения) применительно к задачам такого типа является наиболее общим, поскольку любая попытка расширения сферы его применения путём ослабления какого-либо из ограничений на входные данные задачи приводит к потере свойства её эффективной разрешимости.

Алгоритм основывается на алгоритме рёберной раскраски двудольного графа. Как показывает 4-параметрический анализ сложности данной задачи, этот результат является наилучшим возможным. Действительно, при увеличении ограничения на число операций до 3 задача становится NP-полной (даже если от оптимизационной задачи перейти к задаче распознавания существования расписания длины $C_{max} \leq 3$). NP-полную распознавательную задачу (с проверкой неравенства $C_{max} \leq 3$) получаем также в случае, если попытаемся немного расширить область входов путём замены ограничения $p_{ij}=1$ на ($p_{ij}=1 \vee p_{ij}=2$).

VIII. Установлено, что оптимальное расписание в задаче job shop с разрешением прерываний, на минимум произвольной регулярной функции от моментов завершения операций может быть найдено простым жадным алгоритмом, при условии, что найдены (угаданы) подходящие приоритеты выполнения операций на каждой из машин. Таким образом, впервые описан конструктивный метод решения данной задачи.

В данном случае важен сам факт алгоритмической разрешимости данной задачи за конечное время. Полученный результат может быть применён при построении полиномиальных аппроксимационных схем приближённого решения задачи job shop (когда, например, для константного числа так называемых «больших» работ требуется за конечное время построить оптимальное расписание).

С методологической точки зрения интересен и тот факт, что оптимальное расписание находится *жадным алгоритмом*. Для некоторых задач (например, для задачи open shop без прерываний операций) это заведомо не так.

IX. Построен алгоритм $A(\rho)$, который для любого заданного примера двухмашинной задачи flow shop с n работами и для любого заданного $\rho \geq 1$ перечисляет (без повторений) все ρ-приближённые перестановки из n работ, затрачивая не более чем $O(n \log n)$ единиц времени на отыскание каждой ρ-приближённой перестановки и на остановку алгоритма

после отыскания последнего решения. При этом на каждом шаге алгоритма используется не более чем $O(n)$ ячеек памяти вычислительной машины. Таким образом, алгоритм эффективен, поскольку имеет полиномиальную задержку и обходится полиномиальной памятью.

Речь идёт о классической двухмашинной задаче Джонсона, эффективный алгоритм решения которой (в смысле отыскания ОДНОЙ оптимальной перестановки работ) был построен Сэлмером Джонсоном одновременно с рождением Теории Расписаний – в 1953 году. Однако проблема эффективного перечисления ВСЕХ оптимальных перестановок работ для данной задачи долгое время оставалась открытой, несмотря на попытки отыскания подходов к её решению со стороны отдельных исследователей. Полученный нами результат закрывает эту проблему – построен перечислительный алгоритм, являющийся эффективным как по критерию *полиномиальной задержки*, так и по критерию *полиномиальной памяти*. Более того, построенный алгоритм способен перечислять не только оптимальные перестановки, но и все ρ-приближённые перестановки для любого заданного $\rho \geq 1$.

X. Установлено свойство связности множества ρ-приближённых перестановок: доказано, что любая ρ-приближённая перестановка может быть получена из любой другой ρ-приближённой перестановки последовательной транспозицией двух соседних элементов, так что при этом все промежуточные перестановки также ρ-приближённы.

Данное свойство является весьма любопытным теоретическим фактом, проясняющим структуру подмножества перестановок работ, определяющих ρ-приближённые решения задачи при заданном значении границы (ρ) относительного уклонения от оптимума. Данный факт является полезным и для всяческих прикладных методов решения задачи (например, с использованием алгоритмов локального поиска).

XI. Для случая, когда число машин m не превосходит 9, доказана справедливость гипотезы Чена-Струсевича об оценке длины плотных расписаний в задаче Open Shop. А именно, для всех $m \leq 9$ доказано, что относительное удаление длины любого плотного расписания для этой задачи от длины оптимального расписания не превосходит $(2-1/m)$. Доказана и более точная верхняя оценка на длину любого плотного расписания при тех же условиях, а также обнаружены новые свойства плотных расписаний для задачи Open Shop.

Задача Open shop на минимум длины расписания (обозначается $Om||C_{max}$) – одна из трёх «классических» многостадийных задач теории расписаний. Эта задача впервые была представлена в 1976 году авторами Gonazales и Sahni. Она может быть описана следующим образом. Дано m машин $\{M_1,...,M_m\}$, n работ $\{J_1,...,J_n\}$ и m операций каждой работы – по

одной операции на каждой машине. Обозначим операцию i-й работы на j-й машине за O_{ij}. Порядок выполнения операций не фиксирован, и каждая операция выполняется без прерываний. Кроме того, никакие две операции одной работы не должны выполняться одновременно, и каждая машина в любой момент времени может выполнять не более одной операции. *Расписанием* в задаче Open Shop называется множество $S=\{s_{ij}\}$ моментов начала выполнения операций соответствующих операций O_{ij}.. *Допустимым расписанием* задачи Open Shop называется расписание S, удовлетворяющее вышеперечисленным условиям. Задача $Om||C_{max}$ заключается в построении допустимого расписания минимальной длины.

Плотным расписанием в задаче Open Shop называется такое допустимое расписание S, в котором машина может простаивать в некотором интервале времени лишь тогда, когда нет работ, готовых выполняться в эти моменты времени на данной машине.

Концепция плотных расписаний для задачи Open Shop была впервые упомянута в работе венгерских математиков Barany и Fiala в 1982 году. В своей работе они приводят доказательство соотечественницы Anna Racsmany оценки $C_{max}(S) - C^* \le (m - 1)\cdot p_{max}$, где p_{max} – максимальная длина операции, C^* − тривиальная нижняя оценка на длину любого допустимого расписания, а $C_{max}(S)$ – длина произвольного плотного расписания S. В 1988 году Аксёнов доказал первую, хотя и достаточно очевидную верхнюю оценку 2 на величину относительного удаления длины любого плотного расписания в рассматриваемой задаче от оптимума. Эта оценка была далее улучшена Ченом и Струсевичем (B. Chen, Strusevich), опубликовавшими в 1993 году статью, где они доказали верхнюю оценку 5/3 для 3-машинной задачи $O3||C_{max}$. На основе своего результата они высказали гипотезу (именуемую в дальнейшем «гипотезой Чена-Струсевича»), что для любого m относительное удаление длины любого плотного расписания от оптимума не превышает $(2\text{-}1/m)$. Эта оценка достижима для любого значения m.

Проблема заключается в ответе на вопрос о справедливости этой гипотезы. То есть требуется либо доказать эту гипотезу для всех значений m, либо найти контрпример.

Дальнейшие шаги в доказательстве гипотезы Чена-Струсевича были сделаны в 1998-2004 годах, когда ряд ученых (B. Chen and Yu, X. Chen and Yu, R. Chen and Yu, Севастьянов) доказали эту гипотезу для 4,5,6 и 7 машин, соответственно. После ещё одного временного перерыва, в 2009-2010 годах появились доказательства гипотезы для $m \le 8$. Важно заметить, что Севастьянов перешёл к доказательству более точной гипотезы, нежели изначальная гипотеза Чена-Струсевича. А именно, он доказывает, что длина произвольного плотного расписания не превосходит $l_{max}+ (1\text{-}1/m)\cdot d_{max}$, где l_{max} – максимальная машинная нагрузка, d_{max} – максимальная длительность работы. Из этой улучшенной оценки следует оценка из гипотезы Чена-Струсевича, но не наоборот. Более того, Севастьянов доказывает эту

улучшенную оценку для всех тех m, для которых ранее была доказана изначальная гипотеза Чена-Струсевича.

В отчётной работе продолжено подтверждение улучшенной оценки Севастьянова — она доказана для числа машин $m \leq 9$. Как следствие, получено подтверждение гипотезы Чена-Струсевича для случая $m \leq 9$ машин. Кроме того, получены новые свойства плотных расписаний в задаче Open Shop.

XII. Рассмотрена задача построения оптимальных циклических расписаний для роботизированной ячейки, обслуживаемой одним роботом со строгой стратегией разгрузки в машинной среде flow shop, с критерием максимум производительности ячейки. Найдено оптимальное решение задачи в случае, когда число машин $m=5$, а время (p) выполнения одной операции находится в интервале $[4\delta, 8\delta)$, где δ — время перемещения робота между соседними машинами.

Рассматриваются циклические расписания для роботизированной ячейки, обслуживаемой одним роботом. Идентичные детали проходят машины в среде flow shop таким образом, что их обработка выполняется без задержек, т.е. сразу после окончания обработки детали на какой-то машине она должна освободить машину и начать перемещение на следующую машину. Перемещение деталей между машинами осуществляется (за некоторое фиксированное время) роботом, который может переносить только одну деталь одновременно.

В процессе выполнения циклического расписания робот движется по замкнутому маршруту, выполняя действия по переносу деталей. Последовательность действий робота в рамках одного периода расписания называется «циклом». У циклов есть «степень», которая определяется как количество деталей, которые начали свою обработку за время выполнения цикла. Циклы степени k называют «k-циклами».

Известны результаты о том, что если рассматривать некоторые ограниченные классы расписаний, то за полиномиальное время можно получить оптимальное в данном классе решение задачи. Например, известно, что можно найти наилучший 1-цикл для широкого класса задач о роботизированной ячейке. Кроме того, в работе (Che& Chu 2009) был представлен алгоритм, позволяющий определить наилучший k-цикл для фиксированного k, если рассматривается задача о роботизированной ячейке со строгой стратегией разгрузки. Тем не менее, открытым остаётся вопрос о верхней границе степени оптимального цикла даже для простых постановок задачи.

В работе Агнетиса (Agnetis 2000) высказывается гипотеза (впоследствии получившая название «гипотезы Агнетиса») о том, что степень оптимального цикла в роботизированной

ячейке со строгой стратегией разгрузки не превосходит m-1, где m — число машин, и приводится её доказательство для случаев m=2 и 3. Позднее в работе (Mangione et al. 2003) была представлена гипотеза о структуре оптимальных расписаний в случае регулярной (расстояние между соседними машинами одинаковое) сбалансированной (время выполнения всех операций одинаковое) роботизированной ячейки со строгой стратегией разгрузки. Эта гипотеза согласуется с гипотезой Агнетиса и более детально представляет возможное точное решение рассматриваемой задачи.

Как показывает анализ, проведённый в упомянутых выше статьях, для рассматриваемой постановки задачи вид оптимального решения существенно зависит от времени выполнения операции (p), времени перемещения робота между соседними машинами (δ) и числа машин (m). В частности, важную роль играют интервалы значений параметра p, кратные 4δ, поскольку при пересечении параметром p границ этих интервалов изменяется множество допустимых решений. Случай $p < 4\delta$ является давно исследованным. Следующий интервал значений параметра p ($4\delta \le p < 8\delta$) представляет собой первый не до конца исследованный случай. Гипотеза о том, что в этом случае оптимальным является 2-цикл, была доказана ранее для всех значений m, за исключением m=5. Именно этот подслучай рассматривается в нашей работе. Получено подтверждение гипотезы и в этом случае, что полностью закрывает проблему в случае $4\delta \le p < 8\delta$.

XIII. Рассмотрена задача о выполнении n независимых работ на m параллельных идентичных машинах с допущением прерывания работ и их последующем возобновлении на любой из машин. (При смене какой-то работой машины-исполнителя работа может быть возобновлена с фиксированной задержкой d.) Для случая 4 машин получено подтверждение гипотезы Фишкина-Ситтерса о существовании для любого примера m-машинной задачи оптимального расписания с не более чем m-1 миграциями.

Для рассмотренной задачи ранее была доказана её NP-трудность в сильном смысле, что делает малоперспективным отыскание эффективных алгоритмов её точного решения. Однако построение для неё алгоритма псевдополиномиальной трудоёмкости, а также эффективных алгоритмов приближённого решения вполне реально, и немалую роль в этом направлении может сыграть более тщательный анализ свойств оптимального решения. В частности, если бы удалось доказать, что число миграций в оптимальном расписании можно ограничить какой-то функцией от числа машин, это позволило бы построить точный алгоритм псевдополиномиальной трудоёмкости. В 2005 году Фишкиным и Ситтерсом была высказана гипотеза о том, что для любого примера данной задачи существует оптимальное расписание с не более чем m-1 миграциями работ. Эта гипотеза была подтверждена её

авторами для задачи с 2 и 3 машинами. Попытки её подтверждения для задач большей размерности наталкивались на трудности комбинаторного характера. С этими трудностями удалось справиться в случае 4 машин. Показано, что для любого примера 4-машинной задачи существует оптимальное расписание с не более чем 3 миграциями работ, что подтверждает вышеназванную гипотезу.

XIV. Для частного случая цеховой задачи смешанного типа (job shop и open shop) с допущением прерываний операций, в котором каждая работа имеет не более двух ненулевых операций единичной длины, построен точный полиномиальный алгоритм.

Эта работа является логическим продолжением выполненных ранее исследований аналогичной задачи, но без прерываний операций. Несмотря на то, что в смешанной цеховой задаче, как было показано ранее, нет редукции прерываний, тем не менее, в указанном частном случае удалось построить полиномиальный алгоритм точного решения задачи.

XV. Для задачи передислокации с оборотным ресурсом построен полиномиальный алгоритм с не более чем логарифмической погрешностью от числа работ в худшем случае.

Данная задача отличается от рассмотренной выше задачи передислокации тем, что снято ограничение на число одновременно выполняемых работ. Если в той задаче (ввиду её «одномашинности») в любой момент времени могло выполняться не более одной работы, то теперь число одновременно выполняемых работ ограничено лишь количеством имеющегося в наличии ресурса. Поскольку для данной задачи была ранее доказана её «неприближаемость» с любой оценкой относительного уклонения, лучшей 3/2, то построение для неё алгоритма с не более чем логарифмической погрешностью от числа работ может рассматриваться как существенный шаг вперёд.

Помимо упомянутого алгоритма получен также эффективный алгоритм с оценкой относительного уклонения от оптимума, не превышающей $O(\log p_{max})$, где p_{max} — максимальная длительность одной работы. Нетрудно видеть, что данный алгоритм может иметь преимущество перед упомянутым ранее в тех случаях, когда длительности всех работ невелики. Трудоёмкость обоих разработанных нами алгоритмов не превосходит $O(n \log n)$, где n — число работ.

XVI. Рассмотрена цеховая задача открытого типа с маршрутизацией. Для случая двух машин в сети из двух вершин построена вполне полиномиальная приближенная схема. Для случая с произвольным числом машин в произвольной сети построен полиномиальный алгоритм с погрешностью не более чем логарифм от числа машин в худшем случае.

Построение вполне полиномиальной приближенной схемы (FPTAS) для указанной задачи является несомненным продвижением, поскольку ранее была доказана NP-трудность даже такой ограниченной версии задачи, как задача для двух машин в сети из двух вершин. Данный алгоритм существенно усиливает полученный ранее результат (приближённый алгоритм с оценкой относительного уклонения 6/5).

Алгоритм, построенный нами для общей задачи (с произвольным числом машин m в произвольной сети) превосходит по точности наилучший известный до этого приближённый алгоритм китайских авторов. Если для последнего гарантировалась точность $O(\log m (\log \log m)^{1+\varepsilon})$, то уклонение от оптимума нашего алгоритма не превосходит $O(\log m)$.

1.2. Разработка программы внедрения результатов НИР в образовательный процесс

С момента основания Сибирского отделения (СО) РАН и НГУ преподавателями механико-математического факультета (ММФ), факультета информационных технологий, экономического факультета были активно работающие *учёные* институтов СО РАН. В результате читаемые в НГУ курсы, непрерывно пополнялись материалом, основанным на новых результатах, получаемых сотрудниками СО РАН. Эта исторически сложившаяся традиция не была нарушена и в настоящем проекте – результаты исследований непрерывно внедрялись в учебный процесс Новосибирского государственного университета в течение всего периода реализации проекта с 2010 по 2012 гг.

Результаты, полученные в рамках выполнения проекта, вошли в программы читаемых в НГУ курсов. Среди них следующие учебные курсы бакалавриата и магистратуры НГУ , а также спецкурсы, читаемые на факультетах и включаюшие новые лекции, построенные на основе результатов проекта.

А. Курс «Исследование операций»

В исходный курс включено дополнение в виде новых лекций (8 часов):

1. Задачи маршрутизации, в которых строятся связывающие деревья. (4 ч.).
2. Глобальная маршрутизация с учётом временных и ресурсных ограничений (2ч.).
3. Задачи размещения – новые постановки и приближенные алгоритмы решения (2ч.).

В. Спецкурс«Совершенные структуры»

В исходный курс включено дополнение в виде новых лекций (12 часов):

1. Интерпретация понятия “Совершенная структура” в терминах групповых алгебр (2ч.).
2. Дискретное уравнение свертки (2ч.).
3. Собственные функции на графах Кели неабелевых групп (2ч.).
4. Совершенные 2-раскраски транзитивных графов (2ч.).
5. Теорема о периодизуемости дискретных центрированных функций (2ч.).
6. Метод трансфер-матрицы в перечислении раскрасок (2ч.).

С. Спецкурс «Теория расписаний»

В исходный курс включено дополнение в виде новых лекций (8 часов):

1. Многопараметрический анализ сложности задач теории расписаний (2 ч.).
2. Задачи теории расписаний с ресурсными ограничениями (2 ч.).

3. Общие свойства оптимальных решений в задачах теории расписаний с прерываниями операций (2 ч.)

4. Свойства оптимальных решений в цеховых задачах теории расписаний с прерываниями операций (2 ч.)

D. Спецкурс «Принятие решений»

В исходный курс включено дополнение в виде новых лекций (6 часов):

1. Задача коммивояжёра в различных постановках (2 ч.).

2. Задача коммивояжера с несколькими коммивояжёрами. (2 ч.).

3. Оценка сложности и алгоритмы решения задачи коммивояжера. (2 ч.)

E. Спецкурс «Анализ данных и распознавание образов»

В исходный курс включено дополнение в виде новых лекций (8 часов):

1. NP-полнота некоторых задач выбора подмножеств «похожих» векторов (2ч.).

2. NP-полнота некоторых задач кластерного анализа (2ч.).

3. 2-приближенный алгоритм для задачи поиска подмножества «похожих» векторов (2ч.).

4. Псевдополиномиальный алгоритм для задачи поиска подмножества «похожих» векторов (2ч.).

1.3. Патентные исследования

Выполнение НИР направлено на проведение *фундаментальных* исследований в области теоретической кибернетики, с целью получения научных результатов мирового уровня и опубликования их в открытой печати.

В результате научных исследований получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые вошли в кандидатские диссертации и дипломные работы исполнителей, доложены на различных научных форумах и опубликованы в открытой печати.

Результаты, полученные при выполнении НИР, носят фундаментальный характер и опубликованы в открытой печати. Создание объектов интеллектуальной собственности, требующих патентной защиты не планировалось и не создано. Несмотря на фундаментальность исследований, согласно Календарному плану был проведён патентный поиск с целью определения возможности применения полученных результатов в патентоспособных объектах.

Продуктом, разрабатываемым в ходе данной НИР, является цикл работ в области теоретической кибернетики. Направления, по которым проводился поиск, определялись исходя из состояния исследуемой области и задействованной в проекте тематики. Такими направлениями стали:

1. Теория расписаний с прерываниями; цеховые расписания с ресурсными ограничениями и маршрутизацией.

2. Кластерный анализ; подмножества «похожих» векторов; алгоритмы с оценками точности для задач кластерного анализа.

3. Дистанционно регулярные коды; совершенные 2-раскраски гиперкуба; n-арные квазигруппы; бент-функция; тернарный гиперкуб; центрированные функции в n-кубе; бент-функции; блочный шифр.

4. Покрытия сенсорами плоских областей; методы глобальной маршрутизации на сбис; коммуникационное дерево в беспроводных сенсорных сетях.

5. Игра Штакельберга; модели конкурентного размещения предприятий; алгоритмы локального поиска с обобщенной окрестностью.

6. Задача коммивояжёра с несколькими коммивояжёрами.

Соответственно этому определились и разделы международной патентной классификации, по которым был проведен поиск патентов. Поиск патентной информации проводился в патентных базах данных Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам Российской Федерации (Роспатент,

www.fips.ru) и Европейского патентного бюро (EPO, ep.espacenet.com). В результате исследования существующих патентов было решено исследовать раздел международной патентной классификации G06F 17/16. Поиск дал отрицательный результат: не было найдено патентов.

Этот результат можно было предвидеть. В соответствии с техническим заданием, в результате выполнения госконтракта должны быть разработаны и представлены постановки и математические модели, алгоритмы и методы решения поставленных задач. Указанные результаты интеллектуальной деятельности (РИД) не охраняются нормами патентного права. Согласно п.5, 2) ст.1350 гл.72 части IV Гражданского кодекса «не являются изобретениями научные теории и математические методы»

Таким образом, проведение патентных исследований на основе патентного поиска нецелесообразно, поскольку. патентных документов, защищающих подобные РИД, не может быть в принципе. К тому же ГОСТ Р15.011-96 регламентирует проведение патентных исследований в русле «СИСТЕМЫ РАЗРАБОТКИ И ПОСТАНОВКИ ПРОДУКЦИИ НА ПРОИЗВОДСТВО», в то время как предполагается использование проектных результатов исключительно в учебном процессе.

2. Показатели

2.1. Защиты диссертаций

2.2. Список студентов, аспирантов, докторантов и молодых исследователей, закрепленных в сфере науки и образования.

2.3. Количество подготовленных и опубликованных статей:

Опубликовано 25, принято к печати 9, сдано в печать 14 статей (см. Приложение А).

2.4. Количество сделанных докладов:

Сделано 18 докладов на всероссийских и 29 на международных научных форумах. (см. Приложение Б).

3. Заключение

В процессе выполнения 5 этапа НИР получены следующие основные результаты.

1. Исследованы абелевы модификации критической факторизационной теоремы, а именно, рассмотрены связи между локальными абелевыми степенями и глобальной периодичностью бесконечных слов.
2. Установлено, что код с параметрами дважды или трижды укороченного кода Хэмминга порождает совершенную структуру с определёнными параметрами над булевым гиперкубом. Доказан критерий регулярности разбиения вершин графов для достаточно общего класса графов.
3. Приведена нижняя оценка числа неэквивалентных пропелинейных совершенных двоичных кодов, имеющих разные ранги. Доказано, что существует экспоненциальное число неэквивалентных пропелинейных расширенных совершенных кодов.
4. Изучено избегание рамочного шаблона в перестановках. Показано, что гипотеза Стенли-Вилфа, а также теорема Эрдеша и Секереша не выполняются в общем случае для таких шаблонов.
5. Для решения задачи отыскания m реберно-непересекающихся маршрутов коммивояжера на неориентированном графе на минимум суммарной длины обходов (задача m-PSP-min) предложен алгоритм с временной сложностью mn^2 (при $m<n/4$). Пусть веса ребер графа – независимые равномерно распределенные в интервале (a_n, b_n) случайные величины. Тогда алгоритм асимптотически точен при выполнении следующих условий: $\underline{b_n/a_n = o(n/\ln n)}$, если $1 < m < \ln n$; $\underline{b_n/a_n = o(n^{\tau})}$, если $\ln n < m < n^{1-\tau}$ (для любой константы τ , $0<\tau<1$).
6. Построен приближенный полиномиальный алгоритм решения NP-трудной задачи двух коммивояжеров на неориентированном графе на минимум с весами рёбер 1 или 2 в случае, когда каждое ребро графа имеет пропускную способность, равную 2 (с вероятностью p) и 1 (с вероятностью 1–p). Доказано, что ожидаемая оценка точности данного алгоритма равна $\underline{2-(1+p)(1-r/2)}$, где r – гарантированная точность решения симметричной задачи коммивояжера на минимум (TSP-min). С использованием алгоритма Пападимитриу и Яннакакиса, дающего оценку r =7/6, ожидаемая оценка точности построенного алгоритма равна величине $\underline{(19-5p)/12}$

7. Для задачи 2-PSP-max, в котором веса ребер принимают значения из заданного промежутка (1,q) получена наилучшая на данный момент гарантированная оценка точности (7q+3)/(9q+1).
8. Для двухэтапной задачи размещения производства на древовидной сети, при условии, что затраты на транспортировку единицы продукции из пункта в пункт равны сумме длин ребер в цепи между этими пунктами, разработан точный алгоритм решения с трудоемкостью O(nm^3), где n – число пунктов спроса конечного продукта, m – ограничение сверху на число возможных пунктов размещения производства каждого этапа.
9. В контексте беспроводных сенсорных сетей рассмотрены задачи дискретной оптимизации и комбинаторной геометрии, заключающиеся в поиске наименее плотных регулярных покрытий плоскости и полосы эллипсами одного, двух и трёх типов. Предложены новые модели регулярных покрытий, использующие небольшое число эллипсов для покрытия типового многоугольника и имеющие рекордную плотность в своих классах.
10. Разработаны приближенные эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для ряда NP-трудных задач, к которым сводятся актуальные проблемы помехоустойчивого анализа данных и распознавания образов.
11. Для нескольких экстремальных задач построены точные полиномиальные и псевдополиномиальные алгоритмы дискретной оптимизации, составляющие ядро новых методов распознавания, гарантирующих оптимальность принятия решения в условиях помех.
12. Для случая, когда число машин m не превосходит 9, доказана справедливость гипотезы Чена-Струсевича об оценке длины плотных расписаний в задаче Open Shop. А именно, для всех $m \leq 9$ доказано, что для любого заданного примера m-машинной задачи относительное удаление длины любого его плотного расписания от длины оптимального расписания не превосходит $(2-1/m)$. При тех же условиях на m доказана и более точная верхняя оценка на длину любого плотного расписания в задаче Open Shop, а также выявлены новые свойства плотных расписаний.
13. Рассмотрена задача построения оптимальных циклических расписаний для роботизированной ячейки, обслуживаемой одним роботом со строгой стратегией разгрузки в машинной среде flow shop, с критерием максимум производительности ячейки. Найдено оптимальное решение задачи в случае,

когда число машин $m=5$, а время (p) выполнения одной операции находится в интервале $[4\delta, 8\delta)$, где δ — время перемещения робота между соседними машинами. Гипотеза о том, что для p из данного интервала оптимальным является 2-цикл, была доказана ранее для всех значений m, за исключением $m=5$. Полученное нами подтверждение гипотезы для $m=5$ полностью закрывает проблему в случае $4\delta \leq p < 8\delta$.

14. Рассмотрена задача о выполнении n независимых работ на m параллельных идентичных машинах с допущением прерывания работ и их последующем возобновлении на любой из машин. (При смене какой-то работой машины-исполнителя работа может быть возобновлена с фиксированной задержкой d.) Для случая 4 машин получено подтверждение гипотезы Фишкина-Ситтерса о существовании для любого примера m-машинной задачи оптимального расписания с не более чем $m-1$ миграцией работ.
15. Для частного случая цеховой задачи смешанного типа (job shop и open shop) с допущением прерываний операций, в котором каждая работа имеет не более двух ненулевых операций единичной длины, построен точный полиномиальный алгоритм.
16. Для задачи передислокации с оборотным ресурсом построен полиномиальный алгоритм с не более чем логарифмической погрешностью от числа работ в худшем случае.
17. Рассмотрена цеховая задача открытого типа с маршрутизацией. Для случая двух машин в сети из двух вершин построена вполне полиномиальная приближенная схема. Для случая с произвольным числом машин в произвольной сети построен полиномиальный алгоритм с погрешностью не более чем логарифм от числа машин в худшем случае.

Намеченный в календарном плане фронт работ выполнен полностью. По ряду направлений получены новые фундаментальные результаты мирового уровня, которые доложены на различных научных форумах и опубликованы в монографиях и статьях.

Отчет 5 этапа является итоговым и завершает описание предлагаемого подхода к основной задаче проекта – изучению современных проблем теоретической кибернетики. Полученные результаты имеют мировой уровень, а исполнители представляют передовой фронт науки в указанных областях.

4. Список использованных источников

1. Агеев А.А., Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 3/4 для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса //Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер.1. – 2006. – Т.12, №2. – С.11–20.

2. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х., Коркишко Н.М. Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального веса // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер 2. – 2004. – Т.11, №1. – С.11–25.

3. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Приближенный алгоритм отыскания d-однородного регулярного остовного связного подграфа максимального веса в полном графе со случайными весами ребер // Дискрет. анализ и исслед. операций. Серия 2. – 2006. – Т. 13, N 2, С. 3-20.

4. Бабурин А.Е., Гимади Э.Х. Об асимптотической точности эффективного алгоритма решения задачи m-PSP на максимум в многомерном евклидовом пространстве // Тр. ИММ УрО РАН – 2010 – Т. 6. № 3 – С. 12–24.

5. Гимади Э.Х. Новая версия асимптотически точного алгоритма решения евклидовой задачи коммивояжера // Труды XII Байкальской международной конференции. Методы оптимизации и их приложения. Том 1, Иркутск, 2001. С. 117–124.

6. Гимади Э.Х. Асимптотически точный алгоритм отыскания одного и двух реберно непересекающихся маршрутов коммивояжера максимального веса в евклидовых пространствах // Труды ИММ УрО РАН. – 2008. – Т.14. № 2. – С. 23–32.

7. Гимади Э.Х., Глазков Ю.В., Глебов А.Н. Приближённые алгоритмы решения задачи о двух коммивояжёрах в полном графе с весами рёбер 1 и 2 // Дискретный анализ и исследование операций. Сер. 2. 2007. Т.14. № 2. С. 41-61.

8. Гимади Э.Х., Шахшнейдер А.В. Приближенные алгоритмы с оценками для задач маршрутизации на случайных входах с ограниченным числом клиентов в каждом маршруте // Автоматика и телемеханика. 2012. Вып. 2. С. 126-140.

9. Гимади Э.Х., Ивонина Е.В. Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19, № 1. С. 17-32.

10. Глебов А.Н, Замбалаева Д.Ж., Ивонина Е.В. Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками точности для задач одного и двух коммивояжеров на максимум // Сб. трудов XV Байкальской школы-семинара "Методы оптимизации и их приложения" - 2011, 6 стр.

11. Глебов А.Н., Гордеева А.В., Замбалаева Д.Ж. Алгоритм с оценкой 7/5 для задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Сибирские электронные математические известия. 2011. Т. 8. С. 296-309.

12. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 7/9 для задачи о двух коммивояжерах на максимум // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 4. С. 17-48.

13. Глебов А.Н., Замбалаева Д.Ж. Приближенный алгоритм решения задачи о двух коммивояжерах на минимум с различными весовыми функциями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2011. Т. 18, № 5. С. 11-37.

14. Сердюков А.И. Асимптотически точный алгоритм для задачи коммивояжера на максимум в евклидовом пространстве // Методы целочисленной оптимизации (Управляемые системы). Новосибирск, 1987. Вып. 27. С. 79-87.

15. A.E. Baburin, E.Kh.Gimadi. On the asymptotic optimality of an algorithm for solving the maximum m-PSP in a multidimensional Euclidean space // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2011, Vol. 272, Suppl. 1, P. 1-13.

16. A.E. Baburin, F. Della Croce, E.K. Gimadi, Y.V. Glazkov and V.Th. Paschos. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics, Vol. 157, No 9, 2009, P. 1988-1992.

17. Berman P., Karpinski M. 8/7-approximation algorithm for (1,2)-TSP // Proc. 17th ACM-SIAM SODA, 2006. P. 641-648.

18. Edward Kh. Gimadi, Alexey M. Istomin, Ivan A. Rykov. On Approximation Polynomial Algorithm for the Capacitated Peripatetic Salesman Problem. International Symposium on Combinatorial Optimization (CO 2012), 17–19 September 2012, University of Oxford, UK, 2012.

19. Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // Technical Report CS-93-13, Carnegie Mellon University, 1976.

20. De Brey M. J. D., Volgenant A. Well-solved cases of the 2-peripatetic salesman problem // Optimization. 1997. V. 39, N 3. P. 275-293.

21. De Kort J.~B. J.~M. Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems // Optimization. 1991. V. 22, N 1. P. 113-122.

22. Duchenne E., Laporte G., Semet F. Branch-and-cut algorithms for the undirected m-peripatetic salesman problem // European J. Oper. Res. 2005. V. 162, N 3. P. 700—712

23. Gabow H.~N. An efficient reduction technique for degree-constrained subgraph and bidirected network flow problems // Proc. of the 15th annual ACM symposium on theory of computing (Boston, April 25-27). New York: ACM Press, 1983. P. 48-456.

24. Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved Problems // Combinatorial programming: methods and applications (Proc. NATO Advanced Study Inst., Versailles, 1974). Dordrecht: Reidel, 1975. P. 173-178.

25. Papadimitriou C.H., Yannakakis M. The travelling salesman problem with distances One and Two // Math. Oper. Res. 1993. V. 18, N 1. P. 1-11.

26. The Traveling Salesman Problem and its variations (ed. by A. Punnen and G. Gutin). Kluwer Academic Publishers. Dortrecht/Boston/London. 2002.

27. A. van Zuylen. Multiplying Pessimistic Estimators: Deterministic Approximation of Max TSP and Maximum Triangle Packing // Computing and Combinatorics, 16th Annual International Conference (COCOON 2010). – Nha Trang, Vietnam, July 19-21, 2010. – Proceedings. Lecture Notes in Computer Science. – V. 6196. – P. 60-69.

28. Дискретные задачи размещения. Библиотека тестовых примеров. Конкурентная задача размещения предприятий http://math.nsc.ru/AP/benchmarks/Compet-FL/Compet-FL.html

29. I. Averbakh, O. Berman, and I. Chernykh. A 6/5-approximation algorithm for the two-machine routing open shop problem on a 2-node network // European Journal of Operational Research, 166(1). 2005. P. 3-24.

30. I. Averbakh, O. Berman, and I. Chernykh. The Routing Open-Shop Problem on a Network: Complexity and Approximation // European Journal of Operational Research, 173(2). 2006. P. 521-539.

31. R. Bellman, A.O. Esogbue, and I. Nabeshima. Mathematical aspects of scheduling and applications // Pergamon Press, Oxford. 1982.

32. J.C. Billaut and P. Lopez. New results for the enumeration of optimal job sequences, Unpublished manuscript. 1997.

33. T.C.E. Cheng. Efficient implementation of Johnson's rule for the $n/2/F/F_{\max}$ scheduling problem // Computers and Industrial Engineering, 1992, № 22. P. 495- 499.

34. M. Garey and D. Johnson. Computers and Intractability, A Guide to the theory of NP-completeness. W.H. Freemann and Company, San Francisco, CA, 1979.

35. M.R. Garey, D.S. Johnson, and R. Sethi. The Complexity of Flowshop and Jobshop Scheduling // Mathematics of Operations Research, 1976, № 1. P. 117-129.

36. T. Gonzalez and S. Sahni. Open shop scheduling to minimize finish time // Journal of the Association for Computing Machinery,1976, № 23(4). P. 665-679.

37. R.L. Graham, E.L. Lawler, J.K. Lenstra, and A.H.G. Rinnoy Kan. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey // Annals of Discrete Mathematics, 1979, № 5. P. 287-326.

38. O. Ibarra and C.E. Kim. Fast approximation algorithms for the knapsack and sum of subset problems Vehicle Scheduling on a Tree with Release and Handling Times // Journal of the Association for Computing Machinery, 1975, № 22. P. 463-468.

39. S.M. Johnson. Optimal two- and three-stage production schedules with setup times included // Naval Research Logistics Quarterly, 1954, № 1. P. 61-67.

40. D.S. Johnson, M. Yannakakis, and C.H. Papadimitriou. On generating all maximal independent sets // Information Processing Letters, 1988, № 27. P. 119-123.

41. Y. Lin and J. Deng. On the structure of all optimal solutions of the two-machine flowshop scheduling problem // OR Transactions, 1999, № 3(2). P. 10-20.

42. S.N.N. Pandit and Y.V. Subrahmanyam. Enumeration of all sequences // Opsearch, 1975, № 12. P. 35-39.

43. W. Szwarc. Extreme solutions of the two machine flow shop problem // Naval Research Logistics Quarterly, 1981, № 28(1). P. 103-114.

44. D.P. Williamson, L.A. Hall, J.A. Hoogeveen, C.A.J. Hurkens, J.K. Lenstra, S.V. Sevastianov, and D.B. Shmoys. Short shop schedules // Operations Research, 1997, № 45(2). P. 288-294.

45. Кононов А.В. О цеховой задаче открытого типа на двух машинах с маршрутизацией в двухвершинной сети // Дискретный анализ и исследование операций, 2012, № 19(2). С. 54-74.

46. Пяткин А.В., Черных И.Д. Задача открытого типа с маршрутизацией и разрешением прерываний на двухвершинной сети // Дискретный анализ и исследование операций, 2012, принята к печати.

47. С.В. Севастьянов, Д.А. Чемисова, И.Д. Черных. О некоторых свойствах оптимальных расписаний в задаче Джонсона с прерываниями // Дискретный анализ и исследование операций, 2006, Сер. 1. Т. 13, N 3. С. 83-102.

48. Кельманов А.В., Пяткин А.В. NP-полнота некоторых задач выбора подмножества векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т.17, №5. С. 37-45.

49. Кельманов А.В., Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение заданного числа одинаковых подпоследовательностей в квазипериодической последовательности // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 2001, Т.41, № 5, С. 807-820.

50. Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Кельманова М.А. Хамидуллин С.А. Апостериорное обнаружение в числовой последовательности квазипериодического фрагмента при заданном числе повторов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т.9 №1(25). С.55-74.

51. Кельманов А.В., Михайлова Л.В. Совместное обнаружение в квазипериодической последовательности заданного числа фрагментов из эталонного набора и ее разбиение на участки, включающие серии одинаковых фрагментов // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 2006, Т.46, №1, С. 172-189.

52. Кельманов А.В., Михайлова Л.В. Хамидуллин С.А. Об одной задаче поиска упорядоченных наборов фрагментов в числовой последовательности // Дискретный анализ и исследование операций. 2009. Т.16. № 4. С. 31-46.

53. Kel'manov A.V., Jeon B. A Posteriori Joint Detection and Discrimination of Pulses in a Quasiperiodic Pulse Train // IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, Vol. 52, No. 3, pp. 1-12.

54. Kel'manov A.V., Khamidullin S.A. An Algorithm for Recognition of a Vector Alphabet Generating a Sequence with a Quasi-Periodic Structure // Pattern Recognition and Image Analysis. 2010. Vol. 20, No.4, pp. 451-458.

55. Papadimitriou C.H. Computational Complexity. New-York: Addison-Wesley, 1994. 523 P.

56. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 314 P.

57. С.Н. Астраков, А.И. Ерзин, В.В. Залюбовский. Сенсорные сети и покрытие плоскости кругами // Дискретный анализ и исследование операций, 2009, т. 16, \No 3, с. 3-19.

58. Л.Ф. Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. – М.: Изд. Физ.-мат. литературы. 1958. 365 с.

59. E. Althaus, et al. Power Efficient Range Assignment for Symmetric Connectivity in Static Ad Hoc Wireless Networks // Wireless Networks, 2006, v. 12, No. 3, p. 287-299.

60. P. Berman, M. Karpinski. On some tighter inapproximability results // Tech. Report TR98-065, 1998, ECCC.

61. A.E.F. Clementi, P. Penna, R. Silvestri. On the Power Assignment Problem in Radio Networks // Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC), (054), 2000.

62. P. Carmi, M.L. Katz. Power Assignment in Radio Networks with Two Power Levels // Algorithmica, 2007, No. 47, p. 183-201.

63. M. Diane, J. Plesnik. An Integer Programming Formulation of the Steiner Problem in Fraphs // Methods and Models of Opetations Research, 1993, No. 37, p. 107-111.

64. R. Kershner. The Number of Circles Covering a Set // American Journal of Mathematics, 1939, v. 61, No. 3, p. 665-671.

65. L.M. Kirousis, E. Kranakis, D. Krizanc, A. Pelc. Power consumption in packet radio networks // Theoretical Computer Science, 2000, No. 243, p. 289-305.

66. G.J. Pottie, W.J. Kaiser. Wireless Integrated Network Sensors // Communications ACM, 2000, v. 43, No. 5, p. 51-58.

67. F.G. Toth. Covering the Plane with Two Kinds of Circles // Discrete & Computational Geometry, 1995, v. 13, No. 3, p. 445-457.

68. J. Wu, F. Dai. Virtual Backbone Construction in MANETs using Adjustable Transmission Ranges // IEEE Trans. On Mobile Computing, 2006, v. 5, No. 9, p. 1188-1200.

69. J. Wu, S. Yang. Energy-Efficient Node Scheduling Models in Sensor Networks with Adjustable Ranges // Int. J. of Foundations of Computer Science, 2005, v. 16, No. 1, p. 3-17.

70. H. Zhang, J.C. Hou. Maintaining Sensing Coverage and Connectivity in Large Sensor Networks // Ad Hoc \& Sensor Wireless Networks, 2005, v. 1, No. 1-2, p. 89-124.

71. Kastner R., Bozorgzadeh E., Sarrafzadeh M. Pattern routing: use and theory for increasing predictability and avoiding coupling // IEEE Trans. on CAD. 2002. V. 21. P. 777-791.

72. Kramer M. R., van Leeuwen J. The complexity of wire routing and finding minimum area layouts for arbitrary VLSI circuits // Advances in computing research. 1984. V. 2: VLSI theory. (F. P. Preparata, ed.). P. 129-146.

73. Chiang C., Wong C. K., Sarrafzadeh M. A weighted Steiner tree-based global router with simultaneous length and density minimization // IEEE Trans. on CAD. 1994. V. 13. P. 1461-1469.

74. Ting B., Tien B. Routing techniques for gate array // IEEE Trans. on CAD. 1983. V. CAD-2. P. 301-312.

75. Albrecht C. Global routing by new approximation algorithms for multicommodity flow // IEEE Trans. on CAD. 2001. V. 20. P. 622-632.

76. Burstein M., Pelavin R. Hierarchical wire routing // IEEE Trans. on CAD. V. CAD-2. P. 223-234.

77. Hayashi M., Tsukiyama S. A hybrid hierarchical approach for multi-layer global routing // Proc. European Design and Test Conference. Paris, 1995. P. 492-496.

78. Kirkpatrick S., Gelatt C.D., Vecchi M.P. Optimization by simulated annealing // Science. 1983. V. 220. P. 671-680.

79. Sechen C., Sangiovanni-Vincentelli A. The Timber-Wolf placement and routing package // IEEE J. of Solid-State Circuits. 1985. V. SC-20. P. 510-522.

80. Chen Y.A., Liu Y.L., Hsu Y.C. A new global router for ASIC design based on simulated evolution // Proc. Int. Symp. on VLSI Technology, Systems and Applications. 1989. P. 261-265.

81. Esbensen H. A macro-cell global router based on two genetic algorithms // Proc. EDAC. Paris, 1994. P. 428-433.

82. Youssef H., Sait S.M. Timing-driven global routing for standard-cell VLSI design // Computer systems: Science and Engineering. 1999. V. 14. P. 175-185.

83. Cong J., Madden P. Performance driven global routing for standard cell design // Proc. ACM ISPD. Napa Valley, California, 1997. P. 73-80.

84. Wang D., Kuh E.S. Performance-driven interconnect global routing // Proc. Great Lake Symp. VLSI. Montreal, Canada, 1996. P. 132-136.

85. Elmore W.C. The transient response of damped linear networks with particular regards to wide-band amplifies // J. Appl. Phys. 1948. V. 19. P. 55 – 63.

86. Rubinstein J., Penfield P., Horowitz M.A. Signal delay in RC tree networks // IEEE Trans. on CAD. 1983. V. 2. P. 201 – 211.

87. Hanan M. On Steiner’s problem with rectilinear distance // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1966. V. 14. P. 255-265.

88. http://www.ece.ucsb.edu/~kastner/labyrinth

89. Terlaky T., Vannelli A., Zhang H. On routing in VLSI design and communication networks // X. Deng and D. Du (eds.): ISAAC 2005. LNCS 3827. 2005. P. 1051-1060.

Приложение А. Список публикаций исполнителей

Опубликованные статьи:

1. Alexander Kononov, Sergey Sevastyanov, Maxim Sviridenko. A complete 4-parametric complexity classification of short shop scheduling problems // Journal of Scheduling, 2012, 15(4), p. 427-446.
2. A. Kononov, J-S. Hong, P. Kononova, F-C. Lin. Quantity-based buffer-constrained two machine flowshop problem: active and passive prefetch models for multimedia applications // Journal of Scheduling, 2012, 15(4), p. 487-497.
3. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. Приближённые алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. Т. 19, № 3. С. 27-38.
4. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач выбора подпоследовательности векторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2012, Т.52, №12, С. 1-8.
5. Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Приближенная полиномиальная схема для одной задачи кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.: Сборник докладов. – М.: Торус Пресс, 2012. – С. 242-244.
6. Кельманов А.В. О некоторых NP-трудных задачах кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.: Сборник докладов. – М.: Торус Пресс, 2012. – С. 263-266.
7. Кельманов А.В., Михайлова Л.В. Распознавание последовательности как структуры, содержащей серии повторяющихся векторов из алфавита // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.: Сборник докладов. – М.: Торус Пресс, 2012. – С. 267-270.
8. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач кластеризации векторных последовательностей // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.: Сборник докладов. – М.: Торус Пресс, 2012. – С. 271-274.

9. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.М. Точные псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.: Сборник докладов. – М.: Торус Пресс, 2012. – С. 275-278.
10. Кельманов А.В., Хандеев В.И. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 2 для решения одной задачи кластерного анализа// Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г.: Сборник докладов. – М.: Торус Пресс, 2012. – С. 279-282.
11. Кельманов А.В. О некоторых труднорешаемых задачах кластерного анализа // Материалы V Всероссийской конференции «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Пленарные доклады. Омск, 2-6 июля 2012. С. 33-37.
12. Ерзин А.И. Беспроводные сенсорные сети и наименее плотные покрытия плоских областей эллипсами // Материалы 9 Межд. конф. «Интеллектуализация обработки информации». Черногория, Будва. 2012, с. 253-256.
13. Н.И. Пляскина, В.Н. Харитонова, Э.Х. Гимади, Е.Н. Гончаров. Сетевые модели координации принятия решений в межотраслевых мегапроектах освоения нефтегазовых регионов // Вестник НГУ-2012, Серия: социально-экономические науки,Том 12, С. 96–109.
14. Гимади Э.Х. Алгоритмы с оценками для некоторых трудных задач дискретной оптимизации в исследовании операций // Сборник докладов 9-й междун. конференции. Интеллектуализация обработки информации: Черногория, г. Будва, 2012. М.: Торус Пресс, 718 с. ISBN 978-5-94588-119-8, С. 234–237.
15. Береснев В.Л. Алгоритмы локального поиска для задачи конкурентного размещения предприятий // Автоматика и телемеханика. 2012 № 3 С. 12–27.
16. Алексеева А.В. Построение математических моделей целочисленного линейного программирования. Примеры и задачи / Учеб. пособие. Новосиб. Гос. ун-т: Новосибирск, 2012. 131 с.
17. V. L. Beresnev Local search algorithms for the problem of competitive location of enterprises // Automation and Remote Control. 2012. Vol. 73, N 3. P 425–439.

18. Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И. О системах четверок Штейнера малого ранга, вложимых в расширенные совершенные коды // Дискрет. анализ и исслед. операций (ISSN 1560-7542). – 2012. Т.19, № 5. – С. 47–62.
19. Кротов Д. С., Потапов В. Н. О числе *n*-арных квазигрупп конечного порядка // Дискрет. математика (ISSN 0234-0860). – 2012. Т. 24, N 1. – С. 60–69.
20. Avgustinovich S., Karhumäki J., Puzynina S. On abelian versions of Critical Factori-zation Theorem // RAIRO-Theor. Inf. Appl. (ISSN: 0988-3754) – 2012, V 46, N 1. – P. 3–15.
21. Borges Q., Mogilnykh I. Yu., Rifa` J., Solov'eva F. I. Structural properties of binary propelinear codes // Advances in Math. of Communications (ISSN 1930-5346). – 2012, V. 6. N 3. – P. 329–346.
22. Frid A. E. Fine and wilf's theorem for permutations // Siberian Electronic Mathematical Reports (ISSN 1813-3304). – 2012, V. 9. P. 377–381.
23. Karhumäki J., Puzynina S., Saarela A. Fine and Wilf's Theorem for k-Abelian Periods // Lecture Notes in Computer Science (LNCS), (ISSN: 0302-9743) – 7410 (DLT 2012). – 2012. – P. 296–307.
24. Krotov D. S. On the Binary Codes with Parameters of Triply-Shortened 1-Perfect Codes // Designs, Codes and Cryptography (ISSN: 0925-1022). – 2012, V. 64. N 3. – P. 275–283.
25. Rifa J., Solov'eva F. I., Villanueva M. Intersection of Hamming codes avoiding Hamming subcodes // Designs, codes and Cryptography (ISSN: 0925-1022) – 2012, V. 62, Iss. 2. – P. 209–223.

Статьи, принятые к печати:

1. A. Kononov, S. Sevastyanov, I. Chernykh. Efficient approximation algorithms for the routing open shop problem // *Computers and Operations Research*, 2012; DOI: 10.1016/j.cor.2012.01.006.
2. A. Kononov, S. Sevastyanov, Ph. Baptiste, J. Carlier, M. Queyranne, and M. Sviridenko. Integrality Property in Preemptive Parallel Machine Scheduling // *Operations Research Letters*, 2012; DOI: 10.1016/j.orl.2012.06.011.
3. Кельманов А.В., Хандеев В.И. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 2 для решения одной задачи кластерного анализа // Дискретный анализ и исследование операций 2012. ISSN 1560-7542.

4. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. Точные псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. ISSN 0044-4669.
5. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // Дискретный анализ и исследование операций. 2012. ISSN 1560-7542.
6. Ерзин А.И., Плотников Р.В., Шамардин Ю.В. О некоторых полиномиально разрешимых случаях и приближенных алгоритмах для задачи построения оптимального коммуникационного дерева // Дискретный анализ и исследование операций, ISSN 1560-7542.
7. Гимади Э.Х., Курочкин А.А. Эффективный алгоритм решения двухэтапной задачи размещения на древовидной сети // Дискретный анализ и исследование операций. 2012, Том 19, № 6.
8. Avgustinovich S., Kitaev S., Valyuzhenich A. Avoidance of boxed mesh patterns on permutations // Discrete Applied Mathematics (ISSN: 0166-218X). – 2013, V. 161. – P. 43–51 (to appear).
9. Puzynina S., Zamboni L. Q. Abelian returns in Sturmian words // Journal of Combinatorial Theory, Series A (ISSN: 0097-3165). – 2013, V. 120, Issue 2. – P. 390–408 (to appear).

Статьи, сданные в печать:

1. С.В. Павлов, Об оптимальных циклах для регулярной сбалансированной роботизированной ячейки без задержек // *Дискретный анализ и исследование операций*.
2. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Сенсорные сети и покрытие плоскости эллипсами // Дискретный анализ и исследование операций.
3. Астраков С.Н., Ерзин А.И. Сенсорные сети и покрытие полосы эллипсами // Вычислительные технологии.
4. Alekseeva E., Kochetov Yu. Mathheuristics and exact method for the discrete (r|p)-ctntrois problem In: E.G. Talbi (Ed.) Methaheuristics for bilevel optimization. Springer
5. Васильева А. Ю. Локальные распределения и восстановление собственных функций гиперкуба // Проблемы передачи информации, сдана в печать.

6. Гуськов Г.К., Соловьёва Ф.И. О разбиениях n-куба на совершенные двоичные коды // Дискретный анализ и исследование операций, сдана в печать.
7. Гуськов Г.К., Соловьёва Ф.И. О расширенных совершенных транзитивных в узком смысле кодах // Дискретный анализ и исследование операций, сдана в печать.
8. Ковалевская Д.И., Соловьева Ф.И., Филимонова Е.С. О системах троек Штейнера малого ранга, вложимых в совершенные двоичные коды // Дискретный анализ и исследование операций, сдана в печать.
9. Axenovich M., Person Yu., Puzynina S. A regularity lemma and twins in words. Submitted, http://arxiv.org/abs/1204.2180.
10. Borges Q., Mogilnykh I. Yu., Rifa` J., Solov'eva F. I. On the number of nonequivalent propelinear extended perfect codes // Advances in Math. of Communications, 2012, submitted.
11. Kim H. K., Krotov D. S., Lee J.Y. Poly-Bernoulli numbers and lonesum matrices // Advances in Mathematics. Submitted, arXiv:1103.4884.
12. Valyuzhenich A. On permutation complexity of fixed points of uniform binary morphisms // Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, submitted.
13. Gimadi E.K., Ivonina Eugeniya. Approximation algorithms for maximum-weight 2-Peripatetic Salesman Problem in complete graph with restricted distances // Discrete Applied Mathematics. Elsevier (submited).
14. Aleksey Glebov, Dolgor Zambalaeva. Approximation algorithm for 2-PSP on minimum with weights valued 1 and 2 // Discrete Applied Mathematics. Elsevier (submited).

Приложение Б. Список сделанных исполнителями докладов

На Всероссийских конференциях:

1. С.В. Севастьянов, Многопараметрический анализ сложности задач дискретной оптимизации // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск, 2-6 июля 2012 г., пленарный.
2. А.В. Кононов, Маршрутизация в цеховых задачах теории расписаний // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения», Омск, 2-6 июля 2012 г., пленарный.
3. Кельманов А.В. О некоторых труднорешаемых задачах кластерного анализа // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (пленарный).
4. Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Аппроксимационная схема для одной задачи кластерного анализа // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
5. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач кластерного анализа векторных последовательностей // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
6. Кельманов А.В., Михайлова Л.В. Об одной задаче распознавания последовательности, имеющей серийную структуру // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
7. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.А. Точный псевдополиномиальный алгоритм для одной NP-трудной задачи поиска подпоследовательности векторов // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
8. Кельманов А.В., Хандеев В.И. 2-Приближенный полиномиальный алгоритм для одной задачи кластерного анализа // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
9. Ерзин А.И. Сенсорные сети и покрытие плоских областей эллипсами // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (пленарный).

10. Плотников Р.В. Об одной задаче построения коммуникационного остовного дерева // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
11. Тахонов И.И. Поиск наименее плотного регулярного покрытия плоскости кругами различных радиусов // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (секционный).
12. Гимади Э.Х. О некоторых алгоритмах с оценками для задач маршрутизации // 5-я Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения», 2–6 июля 2012, Омск (пленарный доклад).
13. Гимади Э.Х., Истомин А.М., Рыков И.А. О задаче маршрутизации с ограничениями на пропускные способности рёбер графа // 5-я Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения», 2–6 июля 2012, Омск (секционный доклад).
14. В.Л. Береснев. Алгоритм ветвей и границ для задачи конкурентного размещения предприятий // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012. (пленарный доклад).
15. Е.В. Алексеева Один точный метод для дискретной задачи об (r|p)-центроиде // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012 (секционный доклад).
16. А.А. Мельников. Результаты экспериментального исследования алгоритма ветвей и границ для задачи конкурентного размещения предприятий // V Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения». Омск, 2-6 июля 2012 (секционный доклад).
17. Гуськов Г. К., Соловьёва Ф. И. Об одной каскадной конструкции разбиений n-куба на совершенные двоичные коды // «Информационные технологии и системы - 2012» (35-я конференция молодых ученых и специалистов, 19 - 25 августа 2012, Петрозаводск, Россия). http://www.itas2012.iitp.ru/pdf/1569600947.pdf (секционный).
18. Ковалевская Д. И., Соловьева Ф. И., Филимонова Е. С. Системы троек Штейнера малого ранга и совершенные двоичные коды // «Информационные технологии и системы - 2012» (35-я конференция молодых ученых и специалистов, 19 - 25 августа 2012, Петрозаводск, Россия). http://www.itas2012.iitp.ru/pdf/1569601371.pdf (секционный).

На международных конференциях:

1. Кельманов А.В. О некоторых NP-трудных задачах кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г. (пленарный).
2. Долгушев А.В., Кельманов А.В., Шенмайер В.В. Приближенная полиномиальная схема для одной задачи кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г. (секционный).
3. Кельманов А.В., Михайлова Л.В. Распознавание последовательности как структуры, содержащей серии повторяющихся векторов из алфавита // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г. (секционный).
4. Кельманов А.В., Пяткин А.В. О сложности некоторых задач кластеризации векторных последовательностей // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г. (секционный).
5. Кельманов А.В., Романченко С.М., Хамидуллин С.М. Точные псевдополиномиальные алгоритмы для некоторых труднорешаемых задач поиска подпоследовательности векторов // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г. (секционный).
6. Кельманов А.В., Хандеев В.И. Полиномиальный алгоритм с оценкой точности 2 для решения одной задачи кластерного анализа // Интеллектуализация обработки информации: 9-я международная конференция. Республика Черногория, г. Будва, 16–22 сентября 2012 г. (секционный).
7. Ерзин А.И. Сенсорные сети и наименее плотные покрытия плоских фигур эллипсами // 8 Межд. Азиатская школа «Проблемы оптимизации сложных систем». Омск. 2-12 июля 2012, пленарный доклад.
8. Ерзин А.И. Беспроводные сенсорные сети и наименее плотные покрытия плоских областей эллипсами // 9 Межд. конф. «Интеллектуализация обработки информации». Черногория, Будва. 16-22 сентября 2012 г. (секционный).
9. Гимади Э.Х. Алгоритмы с оценками для некоторых трудных задач дискретной оптимизации в исследовании операций // 9-я междун. конференции. Интеллектуализация обработки информации: Черногория, г. Будва, 2012. (секционный доклад).

10. Edward Kh. Gimadi, Yury Glazkov, Oksana Tsidulko Asymptotically exact algorithm for m-layer planar 3-dimensional assignment problem on single-cyclic permutations // International Symposium on Combinatorial Optimization (CO 2012), 17–19 September 2012, University of Oxford, UK (секц. доклад).
11. Edward Kh. Gimadi, Alexey M. Istomin, Ivan A. Rykov. On Approximation Polynomial Algorithm for the Capacitated Peripatetic Salesman Problem // International Symposium on Combinatorial Optimization (CO 2012), 17–19 September 2012, University of Oxford, UK (секц. доклад)..
12. Alexander Kurochkin, Edward Gimadi. Effective Algorithms for some hard Facility Location Problems // International Symposium on Combinatorial Optimization (CO 2012), 17–19 September 2012, University of Oxford, UK (секц. доклад).
13. E. Alekseeva, Y. Kochetov An improved exact method for the discrete (r|p)-centroid problem // 32nd National Operations Research and Industrial Engineering Congress. Turkey, Istanbul, June 20-22, 2012 (секционный доклад).
14. V. Beresnev, A. Melnikov Branch and bound method for the competitive facility location problem // 25th European Conference on Operational Research Vilnius, Lithuania July, 8-11, 2012 (секционный доклад).
15. V. Beresnev: Algorithms for discrete competitive facility location problem // 21st International Symposium on Mathematical Programming (ISMP 2012) Berlin, Germany, August 19–24, 2012 (секционный доклад).
16. Потапов В. Н., Кротов Д. С. Построение транзитивных МДР-кодов на основе диэдральной группы // XI межд. семинар "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, 18-23 июля 2012г.) (секционный).
17. Avgustinovich S., Vasil’eva A. Distance regular colorings of n-dimensional rectangular grid. (Дистанционно регулярные раскраски n –мерной прямоугольной решетки) // XIII Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Pomorie, Bulgaria, June 15-21, 2012) (секционный).
18. Avgustinovich S. V., Gorkunov E. V. Strong isometries of codes (Сильные изометрии кодов) // XIII Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Pomorie, Bulgaria, June 15–21, 2012) (секционный).
19. Borges Q., Mogilnykh I. Yu., Rifa` J., Solov'eva F. I. Lower bound on the number of nonequivalent propelinear extended perfect codes (Нижняя оценка числа неэквивалентных пропелинейных расширенных совершенных кодов) // XIII Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Pomorie, Bulgaria. June 1521, 2012). (секционный).

20. Bucci M., Hindman N., Puzynina S., Zamboni L. On additive properties of sets defined by the Thue-Morse word (Аддитивные свойствах множеств, задаваемых через последовательность Туэ-Морса) // JM2012, Louvain, Belgium, September 11 - 14, 2012 (секционный).
21. Frid A., Puzynina S., Zamboni L. On minimal factorizations of words as products of palindromes (О минимальных разложениях слов на палиндромы) // JM2012, Louvain, Belgium, September 11 - 14, 2012 (секционный).
22. Karhumäki J., Puzynina S. Turtle graphics and locally catenative sequences (Графика черепахи и рекуррентные последовательности с конкатенациями) // Outstanding Challenges in Combinatorics on Words, Banff, Canada, Feb. 19 – 24, 2012 (секцонный).
23. Karhumäki J., Puzynina S. A., Saarela A. Fine and Wilf's Theorem for k-Abelian Periods (k-Абелев аналог теоремы Файна и Вильфа) // DLT 2012, Taipei, Taiwan, Au 14-17, 2012 (секционный).
24. Kovalevskaya D. I., Filimonova E.S., Solov'eva F. I. Steiner triple (quadruple) systems of small ranks embedded into perfect (extended perfect) binary codes (Вложимость систем троек (четверок) Штейнера в совершенные двоичные коды) // XIII Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Pomorie, Bulgaria. June 1521, 2012). (секционный).
25. Krotov D. S. On calculation of the interweight distribution of an equitable partition. (Способ вычисления межвесового распределения совершенной раскраски) // 2012 KIAS Int. Conference on Coding Theory and Applications, Nov. 15~17, 2012, Seoul (секционный).
26. Valyuzhenich A. Permutation complexity of the fixed points of comparable binary morphisms (Перестановочная сложность неподвижных точек сравнимых бинарных форфизмов) // RuFiDiM – Second Russian Finnish Symposium on Discrete Mathemtics, Turku (Finland), Sept. 25-28, 2012 (секционный).
27. Паршина О. Г. О совершенных 2-раскрасках некоторых циркулянтов // 50-я Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс" (13–19 апреля 2012 г.), НГУ, Новосибирск, 2012 (секционный).
28. Семина Ю. Д. К исследованию свойства антиподальности совершенных раскрасок графа // 50-я Международная научная студенческая конференция "Студент и научно-технический прогресс" (13–19 апреля 2012 г.), НГУ, Новосибирск, 2012 (секционный).

29. Сотникова Е. В. О линейной жесткости (3, 2)-кодов, порожденных треугольниками // 50-я Международная научная студенческая конференция “Студент и научно-технический прогресс” (13–19 апреля 2012 г.), НГУ, Новосибирск, 2012 (секционный).