

Пространство Тейхмюллера для детей до 18

Саша Ананьин

UNICAMP, лаборатория Богомолова

05 сентября 2012

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$.

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

— голоморфный 1- или 2-шар и его идеальная граница.

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

— голоморфный 1- или 2-шар и его идеальная граница.

В точках $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ имеем (псевдо)эрмитову метрику

$$T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V = \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, V/p) \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, p^{\perp}) = \langle -, p \rangle p^{\perp} \leq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V).$$

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

— голоморфный 1- или 2-шар и его идеальная граница.

В точках $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ имеем (псевдо)эрмитову метрику

$$T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V = \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, V/p) \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, p^{\perp}) = \langle -, p \rangle p^{\perp} \leq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V).$$

$$\text{Aut}^{\text{hol}} B V = \text{PU } V = \text{Isom}^{\text{hol}} B V \leq \text{Isom } B V$$

— подгруппа индекса 2.

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

— голоморфный 1- или 2-шар и его идеальная граница.

В точках $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ имеем (псевдо)эрмитову метрику

$$T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V = \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, V/p) \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, p^{\perp}) = \langle -, p \rangle p^{\perp} \leq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V).$$

$$\text{Aut}^{\text{hol}} B V = \text{PU } V = \text{Isom}^{\text{hol}} B V \leq \text{Isom } B V$$

— подгруппа индекса 2. (В случае $+-$ получается сфера Римана, склеенная из двух дисков Пуанкаре.)

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

— голоморфный 1- или 2-шар и его идеальная граница.

В точках $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ имеем (псевдо)эрмитову метрику

$$T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V = \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, V/p) \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, p^{\perp}) = \langle -, p \rangle p^{\perp} \leq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V).$$

$$\text{Aut}^{\text{hol}} B V = \text{PU } V = \text{Isom}^{\text{hol}} B V \leq \text{Isom } B V$$

— подгруппа индекса 2. (В случае $+-$ получается сфера Римана, склеенная из двух дисков Пуанкаре.)

Дистанция — монотонная функция **танции** $\text{ta}(q_1, q_2) := \frac{\langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle \langle q_2, q_2 \rangle}$.

Голоморфные 1- и 2-шары

Пусть V — \mathbb{C} -линейное пространство с эрмитовой формой $\langle -, - \rangle$ сигнатуры $+-$ или $++-$. Тогда

$$B V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle < 0\}, \quad S V := \{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \mid \langle p, p \rangle = 0\}$$

— голоморфный 1- или 2-шар и его идеальная граница.

В точках $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ имеем (псевдо)эрмитову метрику

$$T_p \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V = \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, V/p) \simeq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(p, p^{\perp}) = \langle -, p \rangle p^{\perp} \leq \text{Lin}_{\mathbb{C}}(V, V).$$

$$\text{Aut}^{\text{hol}} B V = \text{PU } V = \text{Isom}^{\text{hol}} B V \leq \text{Isom } B V$$

— подгруппа индекса 2. (В случае $+-$ получается сфера Римана, склеенная из двух дисков Пуанкаре.)

Дистанция — монотонная функция **танции** $\text{ta}(q_1, q_2) := \frac{\langle q_1, q_2 \rangle \langle q_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle \langle q_2, q_2 \rangle}$.
Геодезические имеют вид $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} W$, где $W \leq V$ — 2-мерное \mathbb{R} -линейное подпространство такое, что ненулевая на W форма $\langle -, - \rangle$ принимает лишь вещественные значения.

Голоморфные 1- и 2-шары

Ориентированная площадь (геодезического) треугольника равна $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) = 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})$, где $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ (ошибочная 2-ка написана для красоты вместо $\frac{1}{2}$).

Голоморфные 1- и 2-шары

Ориентированная площадь (геодезического) треугольника равна $\text{area } \Delta(p_1, p_2, p_3) = 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})$, где $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ (ошибочная 2-ка написана для красоты вместо $\frac{1}{2}$). Вычисление по модулю 2π показывает, что площадь многоугольника $\text{area}(p_1, \dots, p_n) := \sum_i \text{area } \Delta(c, p_i, p_{i+1})$ не зависит от выбора точки c .

Голоморфные 1- и 2-шары

Ориентированная площадь (геодезического) треугольника равна $\text{area} \Delta(p_1, p_2, p_3) = 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})$, где $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ (ошибочная 2-ка написана для красоты вместо $\frac{1}{2}$). Вычисление по модулю 2π показывает, что площадь многоугольника $\text{area}(p_1, \dots, p_n) := \sum_i \text{area} \Delta(c, p_i, p_{i+1})$ не зависит от выбора точки c . (Ясно, что эту площадь можно получить, интегрируя кэлерову 2-форму по соответствующему (сингулярному) диску, или же интегрируя первообразную 1-форму по соответствующему замкнутому кусочно-геодезическому пути.)

Голоморфные 1- и 2-шары

Ориентированная площадь (геодезического) треугольника равна $\text{area} \Delta(p_1, p_2, p_3) = 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})$, где $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ (ошибочная 2-ка написана для красоты вместо $\frac{1}{2}$). Вычисление по модулю 2π показывает, что площадь многоугольника $\text{area}(p_1, \dots, p_n) := \sum_i \text{area} \Delta(c, p_i, p_{i+1})$ не зависит от выбора точки c . (Ясно, что эту площадь можно получить, интегрируя кэлерову 2-форму по соответствующему (сингулярному) диску, или же интегрируя первообразную 1-форму по соответствующему замкнутому кусочно-геодезическому пути.)

Любая изометрия из $\text{PU } V$ — произведение инволюций. Любая инволюция происходит из отражения $R(q) \in \text{SU } V$ в неизотропной точке $q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$, заданного формулой

$$R : x \mapsto i \left(2 \frac{\langle x, q \rangle}{\langle q, q \rangle} q - x \right), \quad R : x \mapsto 2 \frac{\langle x, q \rangle}{\langle q, q \rangle} q - x,$$

Голоморфные 1- и 2-шары

Ориентированная площадь (геодезического) треугольника равна $\text{area} \Delta(p_1, p_2, p_3) = 2 \arg(-g_{12}g_{23}g_{31})$, где $g_{ij} := \langle p_i, p_j \rangle$ (ошибочная 2-ка написана для красоты вместо $\frac{1}{2}$). Вычисление по модулю 2π показывает, что площадь многоугольника $\text{area}(p_1, \dots, p_n) := \sum_i \text{area} \Delta(c, p_i, p_{i+1})$ не зависит от выбора точки c . (Ясно, что эту площадь можно получить, интегрируя кэлерову 2-форму по соответствующему (сингулярному) диску, или же интегрируя первообразную 1-форму по соответствующему замкнутому кусочно-геодезическому пути.)

Любая изометрия из $\text{PU } V$ — произведение инволюций. Любая инволюция происходит из отражения $R(q) \in \text{SU } V$ в неизотропной точке $q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$, заданного формулой

$$R : x \mapsto i \left(2 \frac{\langle x, q \rangle}{\langle q, q \rangle} q - x \right), \quad R : x \mapsto 2 \frac{\langle x, q \rangle}{\langle q, q \rangle} q - x,$$

при этом $R(q)^2 = -1$ и $R(q)^2 = 1$ в случаях $+-$ и $++-$, соответственно.

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций.

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение?

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями?

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- Сокращение: $R(q)R(q) = 1$.

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- **Сокращение:** $R(q)R(q) = 1$.
- **Ортогональные соотношения:** $R(q_n) \dots R(q_1) = 1$ и $R(q_i)$ коммутируют между собой для любого ортогонального базиса $q_1, \dots, q_n \in V$.

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- **Сокращение:** $R(q)R(q) = 1$.
- **Ортогональные соотношения:** $R(q_n) \dots R(q_1) = 1$ и $R(q_i)$ коммутируют между собой для любого ортогонального базиса $q_1, \dots, q_n \in V$. (В случае $++-$, сохраняя $R(q_2)R(q_1)$, можем одновременно изменить знаки точек q_1, q_2 , если q_1, q_2 порождают проективную прямую сигнатуры $+-$.)

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- **Сокращение:** $R(q)R(q) = 1$.
- **Ортогональные соотношения:** $R(q_n) \dots R(q_1) = 1$ и $R(q_i)$ коммутируют между собой для любого ортогонального базиса $q_1, \dots, q_n \in V$. (В случае $++-$, сохраняя $R(q_2)R(q_1)$, можем одновременно изменить знаки точек q_1, q_2 , если q_1, q_2 порождают проективную прямую сигнатуры $+-$.)
- **Бендинг:** Предположим, что q_1, q_2 различны и неортогональны.

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- **Сокращение:** $R(q)R(q) = 1$.
- **Ортогональные соотношения:** $R(q_n) \dots R(q_1) = 1$ и $R(q_i)$ коммутируют между собой для любого ортогонального базиса $q_1, \dots, q_n \in V$. (В случае $++-$, сохраняя $R(q_2)R(q_1)$, можем одновременно изменить знаки точек q_1, q_2 , если q_1, q_2 порождают проективную прямую сигнатуры $+-$.)
- **Бендинг:** Предположим, что q_1, q_2 различны и неортогональны. Двигая q_1, q_2 вдоль геодезической их соединяющей и сохраняя $\text{ta}(q_1, q_2)$, получаем точки q'_1, q'_2 .

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $PU(V)$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- **Сокращение:** $R(q)R(q) = 1$.
- **Ортогональные соотношения:** $R(q_n) \dots R(q_1) = 1$ и $R(q_i)$ коммутируют между собой для любого ортогонального базиса $q_1, \dots, q_n \in V$. (В случае $++-$, сохраняя $R(q_2)R(q_1)$, можем одновременно изменить знаки точек q_1, q_2 , если q_1, q_2 порождают проективную прямую сигнатуры $+-$.)
- **Бендинг:** Предположим, что q_1, q_2 различны и неортогональны. Двигая q_1, q_2 вдоль геодезической их соединяющей и сохраняя $\text{ta}(q_1, q_2)$, получаем точки q'_1, q'_2 . При этом, $R(q'_2)R(q'_1) = R(q_2)R(q_1)$.

Короткие соотношения между отражениями

Любая изометрия из $\text{PU } V$ — произведение инволюций. Насколько неоднозначно такое произведение? Другими словами, каковы соотношения $R_n \dots R_1 = 1$ между отражениями? Ответ для $n \leq 4$:

- **Сокращение:** $R(q)R(q) = 1$.
- **Ортогональные соотношения:** $R(q_n) \dots R(q_1) = 1$ и $R(q_i)$ коммутируют между собой для любого ортогонального базиса $q_1, \dots, q_n \in V$. (В случае $++-$, сохраняя $R(q_2)R(q_1)$, можем одновременно изменить знаки точек q_1, q_2 , если q_1, q_2 порождают проективную прямую сигнатуры $+-$.)
- **Бендинг:** Предположим, что q_1, q_2 различны и неортогональны. Двигая q_1, q_2 вдоль геодезической их соединяющей и сохраняя $\text{ta}(q_1, q_2)$, получаем точки q'_1, q'_2 . При этом, $R(q'_2)R(q'_1) = R(q_2)R(q_1)$.

Фактически мы изучаем представления $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ гипер-эллиптической группы $H_n := \langle r_1, \dots, r_n \mid r_i^2 = 1, r_n \dots r_1 = 1 \rangle$.

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление.

Инвариант Толедо

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление. Произвольно выбирая точку p_1 , определим площадь представления $\mathrm{area}(p_1; \varrho) := \mathrm{area}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i := \varrho(r_i)p_{i-1}$ (индексы рассматриваются по модулю n).

Инвариант Толедо

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление. Произвольно выбирая точку p_1 , определим площадь представления $\mathrm{area}(p_1; \varrho) := \mathrm{area}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i := \varrho(r_i)p_{i-1}$ (индексы рассматриваются по модулю n).

Лемма. $\mathrm{area}(p_1; \varrho)$ не зависит от выбора p_1 . Если $\varrho(r_i) \neq 1$ для всех i , то $\mathrm{area}(p_1; \varrho) \equiv n\pi \pmod{2\pi}$.

Инвариант Толедо

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление. Произвольно выбирая точку p_1 , определим площадь представления $\mathrm{area}(p_1; \varrho) := \mathrm{area}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i := \varrho(r_i)p_{i-1}$ (индексы рассматриваются по модулю n).

Лемма. $\mathrm{area}(p_1; \varrho)$ не зависит от выбора p_1 . Если $\varrho(r_i) \neq 1$ для всех i , то $\mathrm{area}(p_1; \varrho) \equiv n\pi \pmod{2\pi}$.

Доказательство. В $\mathrm{SU} V$ имеем $R(q_n) \dots R(q_1) = \varepsilon$ с $\varepsilon = \pm 1$.

Инвариант Толедо

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление. Произвольно выбирая точку p_1 , определим площадь представления $\mathrm{area}(p_1; \varrho) := \mathrm{area}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i := \varrho(r_i)p_{i-1}$ (индексы рассматриваются по модулю n).

Лемма. $\mathrm{area}(p_1; \varrho)$ не зависит от выбора p_1 . Если $\varrho(r_i) \neq 1$ для всех i , то $\mathrm{area}(p_1; \varrho) \equiv n\pi \pmod{2\pi}$.

Доказательство. В $\mathrm{SU} V$ имеем $R(q_n) \dots R(q_1) = \varepsilon$ с $\varepsilon = \pm 1$. Поскольку $p_i = R(q_i)p_{i-1} \in V$, то $p_{i+n} = \varepsilon p_i$.

Инвариант Толедо

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление. Произвольно выбирая точку p_1 , определим площадь представления $\mathrm{area}(p_1; \varrho) := \mathrm{area}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i := \varrho(r_i)p_{i-1}$ (индексы рассматриваются по модулю n).

Лемма. $\mathrm{area}(p_1; \varrho)$ не зависит от выбора p_1 . Если $\varrho(r_i) \neq 1$ для всех i , то $\mathrm{area}(p_1; \varrho) \equiv n\pi \pmod{2\pi}$.

Доказательство. В $\mathrm{SU} V$ имеем $R(q_n) \dots R(q_1) = \varepsilon$ с $\varepsilon = \pm 1$. Поскольку $p_i = R(q_i)p_{i-1} \in V$, то $p_{i+n} = \varepsilon p_i$. Ввиду

$$\langle p_i, p_{i+1} \rangle = \langle p_i, R(q_{i+1})p_i \rangle = \langle R(q_{i+1})p_i, R(q_{i+1})^2 p_i \rangle = -\langle p_{i+1}, p_i \rangle,$$

Инвариант Толедо

Рассмотрим случай $+-$. Пусть $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление. Произвольно выбирая точку p_1 , определим площадь представления $\mathrm{area}(p_1; \varrho) := \mathrm{area}(p_1, \dots, p_n)$, где $p_i := \varrho(r_i)p_{i-1}$ (индексы рассматриваются по модулю n).

Лемма. $\mathrm{area}(p_1; \varrho)$ не зависит от выбора p_1 . Если $\varrho(r_i) \neq 1$ для всех i , то $\mathrm{area}(p_1; \varrho) \equiv n\pi \pmod{2\pi}$.

Доказательство. В $\mathrm{SU} V$ имеем $R(q_n) \dots R(q_1) = \varepsilon$ с $\varepsilon = \pm 1$. Поскольку $p_i = R(q_i)p_{i-1} \in V$, то $p_{i+n} = \varepsilon p_i$. Ввиду

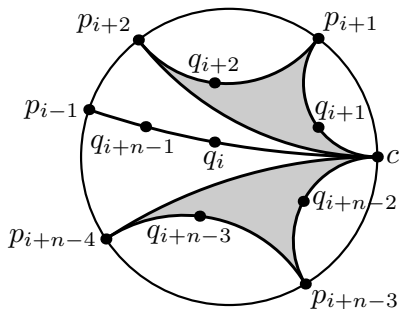
$$\langle p_i, p_{i+1} \rangle = \langle p_i, R(q_{i+1})p_i \rangle = \langle R(q_{i+1})p_i, R(q_{i+1})^2 p_i \rangle = -\langle p_{i+1}, p_i \rangle,$$

получаем

$$\mathrm{area}(p_1; \varrho) \equiv 2 \arg (\langle p_1, p_2 \rangle \langle p_2, p_3 \rangle \dots \langle p_n, p_{n+1} \rangle) \equiv 2 \arg i^n \pmod{2\pi} \blacksquare$$

Инвариант Толедо

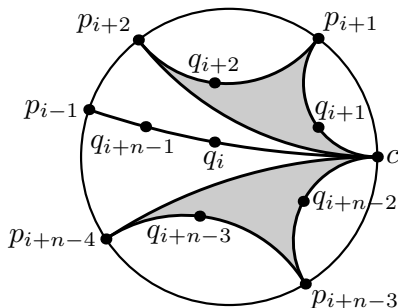
Выбирая подходящие p_1, c , видим,



что $\text{area } \varrho \leq (n-4)\pi$.

Инвариант Толедо

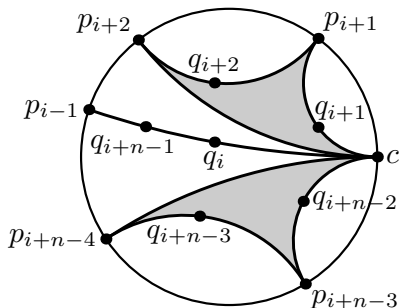
Выбирая подходящие p_1, c , видим,



что $\text{area } \varrho \leq (n-4)\pi$. При этом, если площадь максимальна, т.е., $\text{area } \varrho = (n-4)\pi$, то точки расположены на окружности в правильном циклическом порядке.

Инвариант Толедо

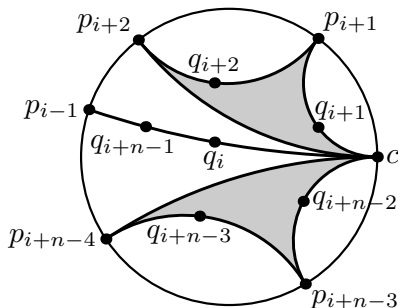
Выбирая подходящие p_1, c , видим,



что $\text{area } \varrho \leq (n-4)\pi$. При этом, если площадь максимальна, т.е., $\text{area } \varrho = (n-4)\pi$, то точки расположены на окружности в правильном циклическом порядке. Эта же картинка показывает, что $\text{area } \varrho$ не меняется при бендингах последовательных отражений.

Инвариант Толедо

Выбирая подходящие p_1, c , видим,

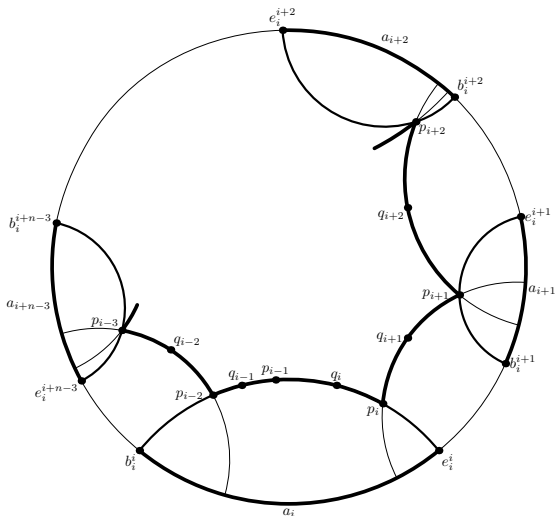


что $\text{area } \varrho \leq (n-4)\pi$. При этом, если площадь максимальна, т.е., $\text{area } \varrho = (n-4)\pi$, то точки расположены на окружности в правильном циклическом порядке. Эта же картинка показывает, что $\text{area } \varrho$ не меняется при бендингах последовательных отражений.

Подобного рода рассмотрения позволяют увидеть, что представления с максимальной площадью являются точными и дискретными,

Инвариант Толедо

поскольку по каждому такому представлению можно построить канонический фундаментальный многоугольник:



Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема Голдмана

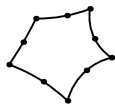
Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\rho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \rho| = (n - 4)\pi$.

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\rho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \rho| = (n - 4)\pi$.

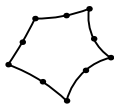


Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π .

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \varrho| = (n - 4)\pi$.

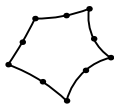


Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π . Отражения в серединах его сторон задают представление $\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V$, которое является точным и дискретным в силу леммы и теоремы.

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\rho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \rho| = (n - 4)\pi$.

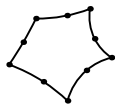


Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π . Отражения в серединах его сторон задают представление $\rho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V$, которое является точным и дискретным в силу леммы и теоремы. Это соотношение между отражениями не следует из более коротких соотношений!

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \varrho| = (n - 4)\pi$.



Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π . Отражения в серединах его сторон задают представление $\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V$, которое является точным и дискретным в силу леммы и теоремы. Это соотношение между отражениями не следует из более коротких соотношений!

Определение. Пусть G — группа (с дискретной топологией) и \mathcal{L} — группа Ли.

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \varrho| = (n - 4)\pi$.



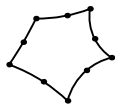
Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π . Отражения в серединах его сторон задают представление $\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V$, которое является точным и дискретным в силу леммы и теоремы. Это соотношение между отражениями не следует из более коротких соотношений!

Определение. Пусть G — группа (с дискретной топологией) и \mathcal{L} — группа Ли. Обозначим через $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} G$ пространство всех точных дискретных представлений $G \rightarrow \mathcal{L}$.

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\varrho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \varrho| = (n - 4)\pi$.



Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π . Отражения в серединах его сторон задают представление $\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V$, которое является точным и дискретным в силу леммы и теоремы. Это соотношение между

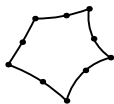
отражениями не следует из более коротких соотношений!

Определение. Пусть G — группа (с дискретной топологией) и \mathcal{L} — группа Ли. Обозначим через $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} G$ пространство всех точных дискретных представлений $G \rightarrow \mathcal{L}$. **Пространство Тейхмюллера** — это $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} G := \mathcal{R}_{\mathcal{L}} G / \mathcal{L}$ (\mathcal{L} действует на $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} G$ сопряжениями).

Теорема Голдмана

Мы доказали частный случай теоремы Голдмана

Теорема. Представление $\rho : H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно тогда, и только тогда, когда $|\mathrm{area} \rho| = (n - 4)\pi$.



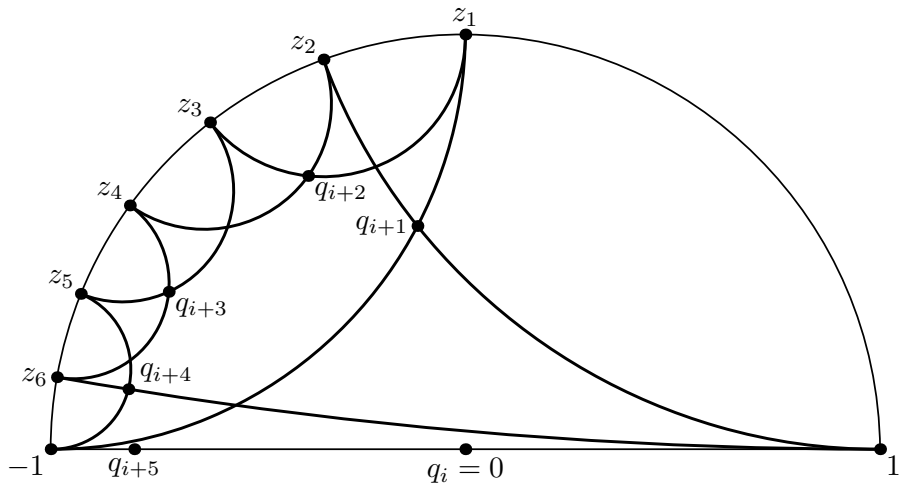
Рассмотрим пятиугольник с суммой углов 2π . Отражения в серединах его сторон задают представление $\rho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V$, которое является точным и дискретным в силу леммы и теоремы. Это соотношение между

отражениями не следует из более коротких соотношений!

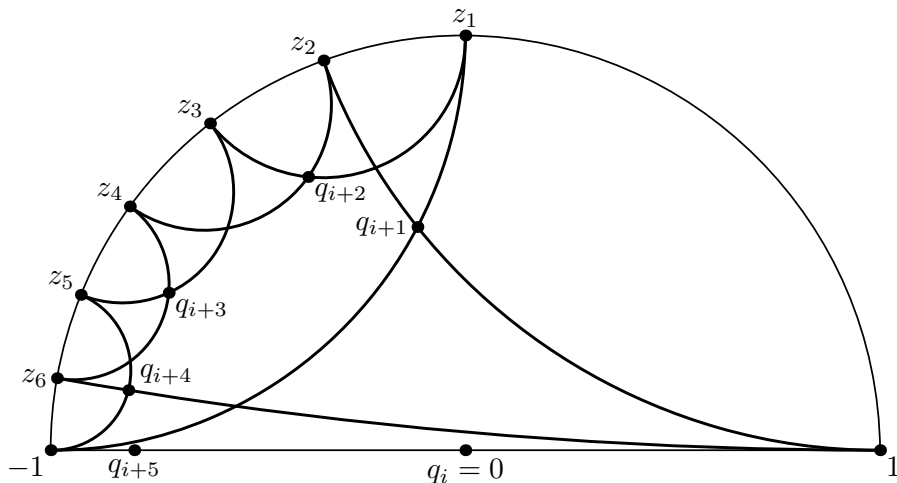
Определение. Пусть G — группа (с дискретной топологией) и \mathcal{L} — группа Ли. Обозначим через $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} G$ пространство всех точных дискретных представлений $G \rightarrow \mathcal{L}$. **Пространство Тейхмюллера** — это $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} G := \mathcal{R}_{\mathcal{L}} G / \mathcal{L}$ (\mathcal{L} действует на $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} G$ сопряжениями).

Оказывается, что мы уже имеем простое описание гиперэллиптического пространства Тейхмюллера $\mathcal{H}_n := \mathcal{T}_{\mathrm{PU} V} H_n$:

Гиперэллиптическое пространство Тейхмюллера

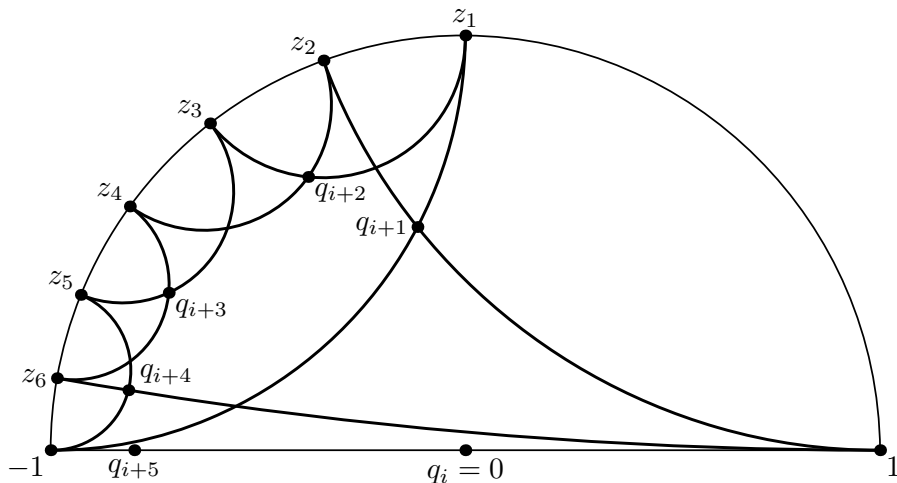


Гиперэллиптическое пространство Тейхмюллера



Было бы замечательно описать также ясно комплексную структуру гиперэллиптического пространства Тейхмюллера.

Гиперэллиптическое пространство Тейхмюллера



Было бы замечательно описать также ясно комплексную структуру гиперэллиптического пространства Тейхмюллера. (Уверен, что это несложная задача.)

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре,

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU V$ с максимальной площадью к любому другому.

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU V$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника.

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $Aut H_n$ и $Out H_n \dots$

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $Aut H_n$ и $Out H_n \dots$ (Хотя D. Krammer и доказал, что группа $Out H_n$ вкладывается в матрицы, его доказательство — слишком алгебраично).

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкарэ, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $Aut H_n$ и $Out H_n \dots$ (Хотя D. Krammer и доказал, что группа $Out H_n$ вкладывается в матрицы, его доказательство — слишком алгебраично. А вот если найти хорошее геометрическое доказательство,

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $Aut H_n$ и $Out H_n \dots$ (Хотя D. Krammer и доказал, что группа $Out H_n$ вкладывается в матрицы, его доказательство — слишком алгебраично. А вот если найти хорошее геометрическое доказательство, то оно скорее всего докажет (мы обсудим как), что группа Тейхмюллера $Out G$ (где G — группа поверхности рода > 2) тоже вкладывается в матрицы.

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $Aut H_n$ и $Out H_n \dots$ (Хотя D. Krammer и доказал, что группа $Out H_n$ вкладывается в матрицы, его доказательство — слишком алгебраично. А вот если найти хорошее геометрическое доказательство, то оно скорее всего докажет (мы обсудим как), что группа Тейхмюллера $Out G$ (где G — группа поверхности рода > 2) тоже вкладывается в матрицы. — Это известная старая проблема.)

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкаре, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $\text{Aut } H_n$ и $\text{Out } H_n \dots$ (Хотя D. Krammer и доказал, что группа $\text{Out } H_n$ вкладывается в матрицы, его доказательство — слишком алгебраично. А вот если найти хорошее геометрическое доказательство, то оно скорее всего докажет (мы обсудим как), что группа Тейхмюллера $\text{Out } G$ (где G — группа поверхности рода > 2) тоже вкладывается в матрицы. — Это известная старая проблема.)

Эксплуатируя одну странную по своей глупости идею, мы сначала обсудим как можно доказать теорему Голдмана в общем случае, а потом еще пару интересных фактов.

Решив “идиотскую” задачу для диска Пуанкарэ, можно доказать, что конечное число бендингов соседних порождающих позволяют перейти от любого представления $H_n \rightarrow PU(V)$ с максимальной площадью к любому другому. Более того, все соотношения между отражениями следуют из уже описанных коротких соотношений и из одного-единственного соотношения пятиугольника. Можно также описать группы $\text{Aut } H_n$ и $\text{Out } H_n \dots$ (Хотя D. Krammer и доказал, что группа $\text{Out } H_n$ вкладывается в матрицы, его доказательство — слишком алгебраично. А вот если найти хорошее геометрическое доказательство, то оно скорее всего докажет (мы обсудим как), что группа Тейхмюллера $\text{Out } G$ (где G — группа поверхности рода > 2) тоже вкладывается в матрицы. — Это известная старая проблема.)

Эксплуатируя одну странную по своей глупости идею, мы сначала обсудим как можно доказать теорему Голдмана в общем случае, а потом еще пару интересных фактов.

Риманова поверхность Σ , обладающая голоморфной инволюцией, фактор по которой — сфера Римана, называется гиперэллиптической.

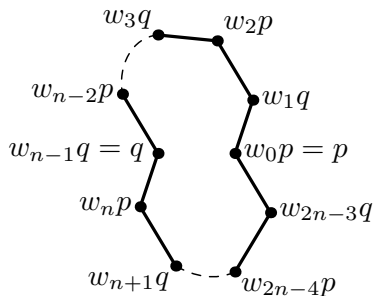
Теорема Голдмана

Инволюция поднимается до изометрии универсального накрытия (диска Пуанкаре) и вместе с фундаментальной группой $G := \pi_1 \Sigma$ порождает дискретную подгруппу, изоморфную H_n с четным n (если g — род Σ , то $n = 2g + 2$), причем $G \leq H_n$ подгруппа индекса 2 (состоящая из слов четной длины от r_1, \dots, r_n).

Теорема Голдмана

Инволюция поднимается до изометрии универсального накрытия (диска Пуанкаре) и вместе с фундаментальной группой $G := \pi_1 \Sigma$ порождает дискретную подгруппу, изоморфную H_n с четным n (если g — род Σ , то $n = 2g + 2$), причем $G \leq H_n$ подгруппа индекса 2 (состоящая из слов четной длины от r_1, \dots, r_n).

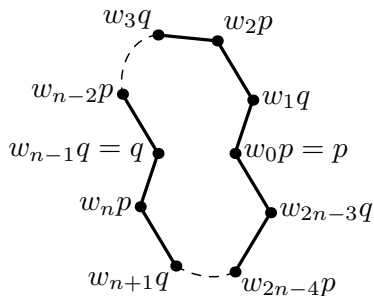
Пусть $\varrho : G \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление.



Теорема Голдмана

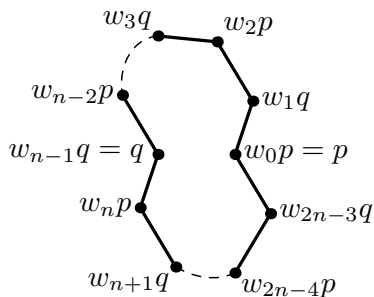
Инволюция поднимается до изометрии универсального накрытия (диска Пуанкаре) и вместе с фундаментальной группой $G := \pi_1 \Sigma$ порождает дискретную подгруппу, изоморфную H_n с четным n (если g — род Σ , то $n = 2g + 2$), причем $G \leq H_n$ подгруппа индекса 2 (состоящая из слов четной длины от r_1, \dots, r_n).

Пусть $\varrho : G \rightarrow \mathrm{PU} V$ — представление.
 “Идея” состоит в том, чтобы
 притвориться будто ϱ индуцировано
 представлением $H_n \rightarrow \mathrm{PU} V$.



Теорема Голдмана

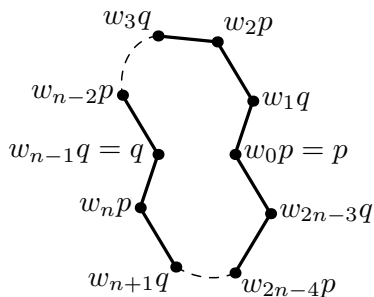
Инволюция поднимается до изометрии универсального накрытия (диска Пуанкаре) и вместе с фундаментальной группой $G := \pi_1 \Sigma$ порождает дискретную подгруппу, изоморфную H_n с четным n (если g — род Σ , то $n = 2g + 2$), причем $G \leq H_n$ подгруппа индекса 2 (состоящая из слов четной длины от r_1, \dots, r_n).



Пусть $\varrho : G \rightarrow \text{PU } V$ — представление. “Идея” состоит в том, чтобы притвориться будто ϱ индуцировано представлением $H_n \rightarrow \text{PU } V$. Единственное, о чем следует беспокоиться, — это чтобы в геометрических построениях мы действовали на точки словами четной длины от r_1, \dots, r_n .

Теорема Голдмана

Инволюция поднимается до изометрии универсального накрытия (диска Пуанкаре) и вместе с фундаментальной группой $G := \pi_1 \Sigma$ порождает дискретную подгруппу, изоморфную H_n с четным n (если g — род Σ , то $n = 2g + 2$), причем $G \leq H_n$ подгруппа индекса 2 (состоящая из слов четной длины от r_1, \dots, r_n).



Пусть $\varrho : G \rightarrow \text{PU } V$ — представление. “Идея” состоит в том, чтобы притвориться будто ϱ индуцировано представлением $H_n \rightarrow \text{PU } V$. Единственное, о чем следует беспокоиться, — это чтобы в геометрических построениях мы действовали на точки словами четной длины от r_1, \dots, r_n .

Произвольно выбрав две точки p, q , определим площадь $\text{area } \varrho$ и, предполагая ее максимальной, обнаружим множество точек, на

Теорема жесткости Тоledo

окружности (неподвижных точек соответствующих изометрий),
расположенных в правильном циклическом порядке ...

Теорема жесткости Толедо

окружности (неподвижных точек соответствующих изометрий), расположенных в правильном циклическом порядке ...

В случае $++-$ тот факт, что кэлерова площадь треугольника $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ максимальна ($= \pi$) эквивалентен тому, что точки p_1, p_2, p_3 расположены в правильном циклическом порядке на окружности $L \cap S V$, где L — проективная прямая. Это простое замечание влечет теорему жесткости Толедо:

Теорема жесткости Толедо

окружности (неподвижных точек соответствующих изометрий), расположенных в правильном циклическом порядке ...

В случае $++-$ тот факт, что элерова площадь треугольника $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ максимальна ($= \pi$) эквивалентен тому, что точки p_1, p_2, p_3 расположены в правильном циклическом порядке на окружности $L \cap S V$, где L — проективная прямая. Это простое замечание влечет теорему жесткости Толедо:

Теорема. Если инвариант Толедо представления $\rho : G \rightarrow \mathrm{PU} V$ группы поверхности G максимален, то представление стабилизирует некоторую проективную прямую и является точным и дискретным.

Теорема жесткости Толедо

окружности (неподвижных точек соответствующих изометрий), расположенных в правильном циклическом порядке ...

В случае $++-$ тот факт, что кэлерова площадь треугольника $\Delta(p_1, p_2, p_3)$ максимальна ($= \pi$) эквивалентен тому, что точки p_1, p_2, p_3 расположены в правильном циклическом порядке на окружности $L \cap S V$, где L — проективная прямая. Это простое замечание влечет теорему жесткости Толедо:

Теорема. Если инвариант Толедо представления $\rho : G \rightarrow \mathrm{PU} V$ группы поверхности G максимален, то представление стабилизирует некоторую проективную прямую и является точным и дискретным.

(Для группы G действующей дискретно и кокомпактно на плоскости Π и стягиваемого кэлерова многообразия M , инвариант Толедо представления $\rho : G \rightarrow \mathrm{Isom} M$ определяется как интеграл формы Кэлера по фундаментальной области $P \subset \Pi$ группы G относительно произвольно выбранного ρ -эквивариантного непрерывного отображения $\varphi : \Pi \rightarrow M$.)

Вернемся к случаю $+-$.

Вернемся к случаю $+-$. В терминах порождающих $g_i := r_n r_i$ группа поверхности $G \leq H_n$ (n четно) задана определяющими соотношениями

$$g_{n-1}g_{n-2}^{-1}g_{n-3}\cdots g_2^{-1}g_1 = 1, \quad g_{n-1}^{-1}g_{n-2}g_{n-3}^{-1}\cdots g_2g_1^{-1} = 1.$$

Вернемся к случаю $+-$. В терминах порождающих $g_i := r_n r_i$ группа поверхности $G \leq H_n$ (n четно) задана определяющими соотношениями

$$g_{n-1}g_{n-2}^{-1}g_{n-3}\cdots g_2^{-1}g_1 = 1, \quad g_{n-1}^{-1}g_{n-2}g_{n-3}^{-1}\cdots g_2g_1^{-1} = 1.$$

Пусть $\varrho : G \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно.

Вернемся к случаю $+-$. В терминах порождающих $g_i := r_n r_i$ группа поверхности $G \leq H_n$ (n четно) задана определяющими соотношениями

$$g_{n-1}g_{n-2}^{-1}g_{n-3}\cdots g_2^{-1}g_1 = 1, \quad g_{n-1}^{-1}g_{n-2}g_{n-3}^{-1}\cdots g_2g_1^{-1} = 1.$$

Пусть $\varrho : G \rightarrow \mathrm{PU} V$ точно и дискретно. Обозначим через Γ ось изометрии ϱg_1 и через t_i , $1 < i < n$, отражение в точке пересечения Γ с осью изометрии ϱg_i .

Вернемся к случаю $+-$. В терминах порождающих $g_i := r_n r_i$ группа поверхности $G \leq H_n$ (n четно) задана определяющими соотношениями

$$g_{n-1}g_{n-2}^{-1}g_{n-3}\dots g_2^{-1}g_1 = 1, \quad g_{n-1}^{-1}g_{n-2}g_{n-3}^{-1}\dots g_2g_1^{-1} = 1.$$

Пусть $\varrho : G \rightarrow \text{PU } V$ точно и дискретно. Обозначим через Γ ось изометрии ϱg_1 и через t_i , $1 < i < n$, отражение в точке пересечения Γ с осью изометрии ϱg_i . Пусть $t_1 := t_{n-1}$, $s_n := t_{n-1}$ и отражения s_i , $1 \leq i < n$, заданы равенствами $\varrho g_i = t_i s_i$.

Вернемся к случаю $+-$. В терминах порождающих $g_i := r_n r_i$ группа поверхности $G \leq H_n$ (n четно) задана определяющими соотношениями

$$g_{n-1}g_{n-2}^{-1}g_{n-3}\dots g_2^{-1}g_1 = 1, \quad g_{n-1}^{-1}g_{n-2}g_{n-3}^{-1}\dots g_2g_1^{-1} = 1.$$

Пусть $\varrho : G \rightarrow \text{PU } V$ точно и дискретно. Обозначим через Γ ось изометрии ϱg_1 и через t_i , $1 < i < n$, отражение в точке пересечения Γ с осью изометрии ϱg_i . Пусть $t_1 := t_{n-1}$, $s_n := t_{n-1}$ и отражения s_i , $1 \leq i < n$, заданы равенствами $\varrho g_i = t_i s_i$. Теперь соотношения имеют вид

$$s_n s_{n-1} s_{n-2} t_{n-2} t_{n-3} \dots s_3 s_2 t_2 t_1 s_1 = 1,$$

$$s_n s_{n-1} t_{n-1} t_{n-2} s_{n-2} s_{n-3} \dots t_3 t_2 s_2 s_1 = 1.$$

Вернемся к случаю $+-$. В терминах порождающих $g_i := r_n r_i$ группа поверхности $G \leq H_n$ (n четно) задана определяющими соотношениями

$$g_{n-1}g_{n-2}^{-1}g_{n-3}\dots g_2^{-1}g_1 = 1, \quad g_{n-1}^{-1}g_{n-2}g_{n-3}^{-1}\dots g_2g_1^{-1} = 1.$$

Пусть $\varrho : G \rightarrow \text{PU } V$ точно и дискретно. Обозначим через Γ ось изометрии ϱg_1 и через t_i , $1 < i < n$, отражение в точке пересечения Γ с осью изометрии ϱg_i . Пусть $t_1 := t_{n-1}$, $s_n := t_{n-1}$ и отражения s_i , $1 \leq i < n$, заданы равенствами $\varrho g_i = t_i s_i$. Теперь соотношения имеют вид

$$s_n s_{n-1} s_{n-2} t_{n-2} t_{n-3} \dots s_3 s_2 t_2 t_1 s_1 = 1,$$

$$s_n s_{n-1} t_{n-1} t_{n-2} s_{n-2} s_{n-3} \dots t_3 t_2 s_2 s_1 = 1.$$

Сопрягая изометриями $h_i := t_i t_{i-1}$ с осью Γ и замечая, что изометрия типа hs_1 — это отражение, получаем 2 представления группы H_n

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_3 a_2 a_1 = 1, \quad c_n c_{n-1} c_{n-2} c_{n-3} \dots c_2 c_1 = 1.$$

Мы обнаружили

“Удивительное” вложение

$$\mathcal{T}G \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n,$$

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение.

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение. Обе проекции являются вещественно-алгебраическими расслоениями (слои можно описать явно)

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение. Обе проекции являются вещественно-алгебраическими расслоениями (слои можно описать явно) и, в терминах модели Клейна, даже вещественно-рациональными расслоениями.

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение. Обе проекции являются вещественно-алгебраическими расслоениями (слои можно описать явно) и, в терминах модели Клейна, даже вещественно-рациональными расслоениями.

Заметим, что неподвижные точки элементов ϱG плотны на окружности и имеют одинаковый циклический порядок для любой точки пространства Тейхмюллера.

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение. Обе проекции являются вещественно-алгебраическими расслоениями (слои можно описать явно) и, в терминах модели Клейна, даже вещественно-рациональными расслоениями.

Заметим, что неподвижные точки элементов ϱG плотны на окружности и имеют одинаковый циклический порядок для любой точки пространства Тейхмюллера. Поэтому группа Тейхмюллера $\text{Out } G$ вкладывается в группу $\text{Diff } \mathbb{S}^1$ диффеоморфизмов окружности.

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение. Обе проекции являются вещественно-алгебраическими расслоениями (слои можно описать явно) и, в терминах модели Клейна, даже вещественно-рациональными расслоениями.

Заметим, что неподвижные точки элементов ρG плотны на окружности и имеют одинаковый циклический порядок для любой точки пространства Тейхмюллера. Поэтому группа Тейхмюллера $\text{Out } G$ вкладывается в группу $\text{Diff } S^1$ диффеоморфизмов окружности.

Вопрос. Может быть образ вложения содержится в подгруппе Ли с конечным числом компонент?

“Удивительное” вложение

$TG \hookrightarrow \mathcal{H}_n \times \mathcal{H}_n$, причем на уровне $\mathcal{H}_n \subset TG$ это просто диагональное отображение. Обе проекции являются вещественно-алгебраическими расслоениями (слои можно описать явно) и, в терминах модели Клейна, даже вещественно-рациональными расслоениями.

Заметим, что неподвижные точки элементов ρG плотны на окружности и имеют одинаковый циклический порядок для любой точки пространства Тейхмюллера. Поэтому группа Тейхмюллера $\text{Out } G$ вкладывается в группу $\text{Diff } S^1$ диффеоморфизмов окружности.

Вопрос. Может быть образ вложения содержится в подгруппе Ли с конечным числом компонент?

Положительный ответ решает упомянутую выше старую проблему.