

Пространство Тейхмюллера для детей после 18

Саша Ананьин

UNICAMP, лаборатория Богомолова

06 сентября 2012

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$.

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$.

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$.

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$. Другими словами, произвольный кусочно-гладкий путь $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ единственным образом поднимается до кусочно-гладкого пути $g : [a, b] \rightarrow PU V$ с $g(a) = 1$ и $g(t)\alpha(a) = \alpha(t)$ для всех t .

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$. Другими словами, произвольный кусочно-гладкий путь $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ единственным образом поднимается до кусочно-гладкого пути $g : [a, b] \rightarrow PU V$ с $g(a) = 1$ и $g(t)\alpha(a) = \alpha(t)$ для всех t .

Будем называть $g(b)$ **изометрией сопровождающей** путь α .

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$. Другими словами, произвольный кусочно-гладкий путь $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ единственным образом поднимается до кусочно-гладкого пути $g : [a, b] \rightarrow PU V$ с $g(a) = 1$ и $g(t)\alpha(a) = \alpha(t)$ для всех t .

Будем называть $g(b)$ **изометрией сопровождающей** путь α . (Если c — геодезическая, то $g(b)$ — произведение 2-х отражений в точках геодезической.)

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$. Другими словами, произвольный кусочно-гладкий путь $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ единственным образом поднимается до кусочно-гладкого пути $g : [a, b] \rightarrow PU V$ с $g(a) = 1$ и $g(t)\alpha(a) = \alpha(t)$ для всех t .

Будем называть $g(b)$ **изометрией сопровождающей** путь α . (Если c — геодезическая, то $g(b)$ — произведение 2-х отражений в точках геодезической.)

Это определение можно проиллюстрировать при помощи улитки, которая ползет вдоль α .

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$. Другими словами, произвольный кусочно-гладкий путь $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ единственным образом поднимается до кусочно-гладкого пути $g : [a, b] \rightarrow PU V$ с $g(a) = 1$ и $g(t)\alpha(a) = \alpha(t)$ для всех t .

Будем называть $g(b)$ **изометрией сопровождающей** путь α . (Если c — геодезическая, то $g(b)$ — произведение 2-х отражений в точках геодезической.)

Это определение можно проиллюстрировать при помощи улитки, которая ползет вдоль α . Даже если ее домик — это все пространство $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$, он не сломается из-за изменений геометрии окружающего пространства, которые происходят во время движения.

“Улитка” Картана

Отныне рассматриваем лишь случай $++-$. Пусть $p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Касательные подпространства ортогональные (в смысле формы Киллинга) смежным классам определяют связность Картана в расслоении $PU V \rightarrow PU V / \text{Stab } p$. Другими словами, произвольный кусочно-гладкий путь $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ единственным образом поднимается до кусочно-гладкого пути $g : [a, b] \rightarrow PU V$ с $g(a) = 1$ и $g(t)\alpha(a) = \alpha(t)$ для всех t .

Будем называть $g(b)$ **изометрией сопровождающей** путь α . (Если c — геодезическая, то $g(b)$ — произведение 2-х отражений в точках геодезической.)

Это определение можно проиллюстрировать при помощи улитки, которая ползет вдоль α . Даже если ее домик — это все пространство $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$, он не сломается из-за изменений геометрии окружающего пространства, которые происходят во время движения. (Слова “однородное пространство” не очень хорошо объясняют этот феномен, например, потому, что в случае положительной точки p не все направления геометрически равноправны.)

Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S$ кусочно-гладкий путь и пусть

Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

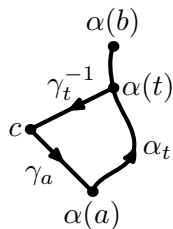
★ точка с неортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

★ точка c неортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

В силу ★ можно соединить c и $\alpha(t)$ кратчайшей геодезической γ_t для всех $t \in [a, b]$.

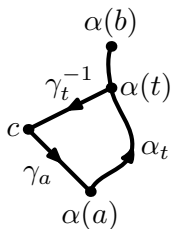


Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

★ точка c неортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

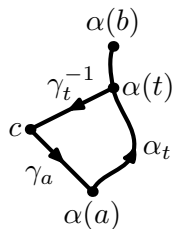
В силу ★ можно соединить c и $\alpha(t)$ кратчайшей геодезической γ_t для всех $t \in [a, b]$. Изометрия g_t сопровождающая замкнутый путь $\gamma_a \cup \alpha_t \cup \gamma_t^{-1}$ принадлежит $\text{Stab } c$.



Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

★ точка c не ортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

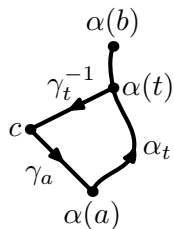


В силу ★ можно соединить c и $\alpha(t)$ кратчайшей геодезической γ_t для всех $t \in [a, b]$. Изометрия g_t сопровождающая замкнутый путь $\gamma_a \cup \alpha_t \cup \gamma_t^{-1}$ принадлежит $\text{Stab } c$. Мы получили путь $g : [a, b] \rightarrow \text{Stab } c$ начинающийся в 1. Если изометрия сопровождающая путь α равна 1 (в частности, путь α замкнут), то путь g замкнут.

Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

★ точка c неортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.

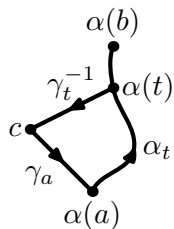


В силу ★ можно соединить c и $\alpha(t)$ кратчайшей геодезической γ_t для всех $t \in [a, b]$. Изометрия g_t сопровождающая замкнутый путь $\gamma_a \cup \alpha_t \cup \gamma_t^{-1}$ принадлежит $\text{Stab } c$. Мы получили путь $g : [a, b] \rightarrow \text{Stab } c$ начинающийся в 1. Если изометрия сопровождающая путь α равна 1 (в частности, путь α замкнут), то путь g замкнут. Так получается элемент фундаментальной группы $\pi_1 \text{Stab } c$.

Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

★ точка c неортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.



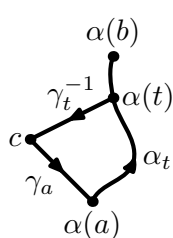
В силу ★ можно соединить c и $\alpha(t)$ кратчайшей геодезической γ_t для всех $t \in [a, b]$. Изометрия g_t сопровождающая замкнутый путь $\gamma_a \cup \alpha_t \cup \gamma_t^{-1}$ принадлежит $\text{Stab } c$. Мы получили путь $g : [a, b] \rightarrow \text{Stab } c$ начинающийся в 1. Если изометрия сопровождающая путь α равна 1 (в частности, путь α замкнут), то путь g замкнут. Так получается элемент фундаментальной группы $\pi_1 \text{Stab } c$.

Имеем $\pi_1 \text{Stab } c \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\pi_1 \text{Stab } c \simeq \mathbb{Z}$ в случаях, когда точка c — положительная и отрицательная, соответственно.

Инварианты типа Толедо

Пусть $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$ кусочно-гладкий путь и пусть

★ точка c неортогональна $\alpha(t)$ для всех $t \in [a, b]$.



В силу ★ можно соединить c и $\alpha(t)$ кратчайшей геодезической γ_t для всех $t \in [a, b]$. Изометрия g_t сопровождающая замкнутый путь $\gamma_a \cup \alpha_t \cup \gamma_t^{-1}$ принадлежит $\text{Stab } c$. Мы получили путь $g : [a, b] \rightarrow \text{Stab } c$ начинающийся в 1. Если изометрия сопровождающая путь α равна 1 (в частности, путь α замкнут), то путь g замкнут. Так получается элемент фундаментальной группы $\pi_1 \text{Stab } c$.

Имеем $\pi_1 \text{Stab } c \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ и $\pi_1 \text{Stab } c \simeq \mathbb{Z}$ в случаях, когда точка c — положительная и отрицательная, соответственно.

Точки c , для которых условие ★ не выполнено, образуют гиперповерхность H , разделяющую $\mathbb{P}_{\mathbb{C}} V$ на **камеры**.

Инварианты типа Толедо

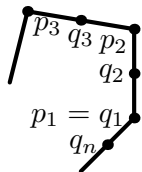
Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится c .

Инварианты типа Толедо

Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$.

Инварианты типа Толедо

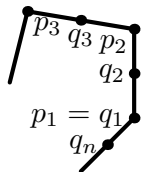
Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .



В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы.

Инварианты типа Толедо

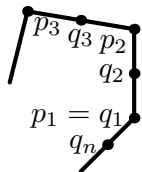
Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .



В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n .

Инварианты типа Толедо

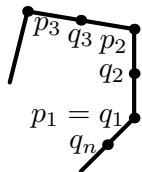
Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .



В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n . Пусть $\varrho r_i = R(q_i)$, причем все точки q_i — положительные.

Инварианты типа Толедо

Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .

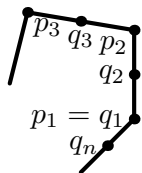


В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n . Пусть $\varrho r_i = R(q_i)$, причем все точки q_i — положительные.

Определим $p_1 := q_1$ и $p_i := R(q_i)p_{i-1}$ для $i > 1$.

Инварианты типа Толедо

Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .

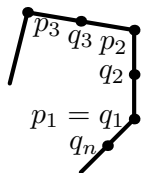


В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n . Пусть $\varrho r_i = R(q_i)$, причем все точки q_i — положительные.

Определим $p_1 := q_1$ и $p_i := R(q_i)p_{i-1}$ для $i > 1$. Соединяя p_i и p_{i+1} кратчайшей геодезической, получим замкнутый путь α .

Инварианты типа Толедо

Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .

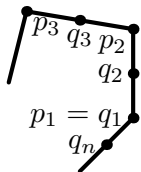


В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n . Пусть $\varrho r_i = R(q_i)$, причем все точки q_i — положительные.

Определим $p_1 := q_1$ и $p_i := R(q_i)p_{i-1}$ для $i > 1$. Соединяя p_i и p_{i+1} кратчайшей геодезической, получим замкнутый путь α . Изометрия, сопровождающая α , равна $R(q_n) \dots R(q_2)R(q_1) = 1$.

Инварианты типа Толедо

Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .

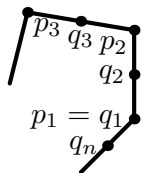


В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n . Пусть $\varrho r_i = R(q_i)$, причем все точки q_i — положительные.

Определим $p_1 := q_1$ и $p_i := R(q_i)p_{i-1}$ для $i > 1$. Соединяя p_i и p_{i+1} кратчайшей геодезической, получим замкнутый путь α . Изометрия, сопровождающая α , равна $R(q_n) \dots R(q_2)R(q_1) = 1$. Оказывается, что число $n_1 + n_2$ — это инвариант Толедо.

Инварианты типа Толедо

Элемент $(n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ или $n \in \mathbb{Z}$ связанный с α зависит только от камеры, где находится s . Когда положительная точка s протыкает H трансверсально в гладкой точке, попадая тем самым в другую камеру, (n_1, n_2) меняется на $\pm(1, -1)$. Поэтому, $n_1 + n_2$ не зависит от s .



В приложениях путь α связан с дискретным представлением группы таким образом, что вдоль α как бы прочитывается определяющее соотношение этой группы. Возьмем в качестве примера точное дискретное представление $\varrho : H_n \rightarrow \text{PU } V$ с четным n . Пусть $\varrho r_i = R(q_i)$, причем все точки q_i — положительные.

Определим $p_1 := q_1$ и $p_i := R(q_i)p_{i-1}$ для $i > 1$. Соединяя p_i и p_{i+1} кратчайшей геодезической, получим замкнутый путь α . Изометрия, сопровождающая α , равна $R(q_n) \dots R(q_2)R(q_1) = 1$. Оказывается, что число $n_1 + n_2$ — это инвариант Толедо. (Если бы мы имели дело с отрицательными точками, получили бы инвариант Толедо n .)

Инварианты типа Тоledo

Известно, что инвариант Тоledo — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Для изучения пространств Тейхмюллера (например, гиперэллиптической группы) необходимо прежде всего знать дискретные инварианты дискретных представлений.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Для изучения пространств Тейхмюллера (например, гиперэллиптической группы) необходимо прежде всего знать дискретные инварианты дискретных представлений.

Деформируем представление ρ , оставляя его дискретным.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Для изучения пространств Тейхмюллера (например, гиперэллиптической группы) необходимо прежде всего знать дискретные инварианты дискретных представлений.

Деформируем представление ρ , оставляя его дискретным. Если какая-то камера выживает при всех таких деформациях, мы получаем новый дискретный инвариант $n_1 - n_2$.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Для изучения пространств Тейхмюллера (например, гиперэллиптической группы) необходимо прежде всего знать дискретные инварианты дискретных представлений.

Деформируем представление ρ , оставляя его дискретным. Если какая-то камера выживает при всех таких деформациях, мы получаем новый дискретный инвариант $n_1 - n_2$. Очень правдоподобно, что деформации сохраняющие дискретность ρ сохраняют большинство камер и имеется несколько конкретных примеров, которые можно было бы различить такого рода инвариантами.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Для изучения пространств Тейхмюллера (например, гиперэллиптической группы) необходимо прежде всего знать дискретные инварианты дискретных представлений.

Деформируем представление ρ , оставляя его дискретным. Если какая-то камера выживает при всех таких деформациях, мы получаем новый дискретный инвариант $n_1 - n_2$. Очень правдоподобно, что деформации сохраняющие дискретность ρ сохраняют большинство камер и имеется несколько конкретных примеров, которые можно было бы различить такого рода инвариантами. К сожалению мы пока плохо понимаем, как полноценно использовать дискретность.

Инварианты типа Толедо

Известно, что инвариант Толедо — единственный дискретный инвариант представления группы поверхности. Это означает, что компоненты связности пространства представлений задаются в точности инвариантом Толедо.

Для изучения пространств Тейхмюллера (например, гиперэллиптической группы) необходимо прежде всего знать дискретные инварианты дискретных представлений.

Деформируем представление ρ , оставляя его дискретным. Если какая-то камера выживает при всех таких деформациях, мы получаем новый дискретный инвариант $n_1 - n_2$. Очень правдоподобно, что деформации сохраняющие дискретность ρ сохраняют большинство камер и имеется несколько конкретных примеров, которые можно было бы различить такого рода инвариантами. К сожалению мы пока плохо понимаем, как полноценно использовать дискретность. Поэтому пока нет строгих доказательств.

Гипотеза 1. Не существует такого соотношения между отражениями, что центры соседних (по циклу) отражений порождают проективные прямые сигнатуры $++$ и эта ситуация сохраняется после конечного числа бендингов соседних отражений.

Гипотеза 1. Не существует такого соотношения между отражениями, что центры соседних (по циклу) отражений порождают проективные прямые сигнатуры $++$ и эта ситуация сохраняется после конечного числа бендингов соседних отражений.

По модулю этой гипотезы, используя короткие соотношения, мы можем добиться того, чтобы максимум один из центров отражений в соотношении был положительным. Мы ожидаем, что ситуация редуцируется к конечному числу таких **базисных соотношений** :

Гипотеза 1. Не существует такого соотношения между отражениями, что центры соседних (по циклу) отражений порождают проективные прямые сигнатуры $++$ и эта ситуация сохраняется после конечного числа бендингов соседних отражений.

По модулю этой гипотезы, используя короткие соотношения, мы можем добиться того, чтобы максимум один из центров отражений в соотношении был положительным. Мы ожидаем, что ситуация редуцируется к конечному числу таких **базисных соотношений** :

Гипотеза 2. Существует конечное число базисных соотношений, каждое из которых задает точное дискретное представление группы H_n , причем это представление остается точным и дискретным после конечного числа бендингов соседних отражений.

Гипотеза 1. Не существует такого соотношения между отражениями, что центры соседних (по циклу) отражений порождают проективные прямые сигнатуры $++$ и эта ситуация сохраняется после конечного числа бендингов соседних отражений.

По модулю этой гипотезы, используя короткие соотношения, мы можем добиться того, чтобы максимум один из центров отражений в соотношении был положительным. Мы ожидаем, что ситуация редуцируется к конечному числу таких **базисных соотношений** :

Гипотеза 2. Существует конечное число базисных соотношений, каждое из которых задает точное дискретное представление группы H_n , причем это представление остается точным и дискретным после конечного числа бендингов соседних отражений.

Обе гипотезы оказались справедливыми для 1-шара.

Гипотеза 1. Не существует такого соотношения между отражениями, что центры соседних (по циклу) отражений порождают проективные прямые сигнатуры $++$ и эта ситуация сохраняется после конечного числа бендингов соседних отражений.

По модулю этой гипотезы, используя короткие соотношения, мы можем добиться того, чтобы максимум один из центров отражений в соотношении был положительным. Мы ожидаем, что ситуация редуцируется к конечному числу таких **базисных соотношений** :

Гипотеза 2. Существует конечное число базисных соотношений, каждое из которых задает точное дискретное представление группы H_n , причем это представление остается точным и дискретным после конечного числа бендингов соседних отражений.

Обе гипотезы оказались справедливыми для 1-шара. Если гипотеза 2 справедлива для 2-шара, то мы немедленно получаем инварианты типа Толедо для базисных соотношений.

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (пятиугольники).

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (пятиугольники). Поднимая пятиугольник в $\mathrm{SU} V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$$\delta^3 = 1.$$

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (пятиугольники). Поднимая пятиугольник в $\mathrm{SU} V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$\delta^3 = 1$. Можно доказать, что пятиугольники с одинаковым δ с точностью до сопряжения связаны посредством конечного числа бендингов соседних отражений.

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (пятиугольники). Поднимая пятиугольник в $SU V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$\delta^3 = 1$. Можно доказать, что пятиугольники с одинаковым δ с точностью до сопряжения связаны посредством конечного числа бендингов соседних отражений. Другими словами, каждое δ задает связную компоненту пространства пятиугольников.

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (**пятиугольники**). Поднимая пятиугольник в $SU V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$\delta^3 = 1$. Можно доказать, что пятиугольники с одинаковым δ с точностью до сопряжения связаны посредством конечного числа бендингов соседних отражений. Другими словами, каждое δ задает связную компоненту пространства пятиугольников. Со случаем $\delta = 1$ мы фактически знакомы:

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (**пятиугольники**). Поднимая пятиугольник в $\mathrm{SU} V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$\delta^3 = 1$. Можно доказать, что пятиугольники с одинаковым δ с точностью до сопряжения связаны посредством конечного числа бендингов соседних отражений. Другими словами, каждое δ задает связную компоненту пространства пятиугольников. Со случаем $\delta = 1$ мы фактически знакомы: для всех таких пятиугольников точки p_j принадлежат \mathbb{R} -плоскости и являются отрицательными, а сами пятиугольники точны и дискретны.

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (**пятиугольники**). Поднимая пятиугольник в $SU V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$\delta^3 = 1$. Можно доказать, что пятиугольники с одинаковым δ с точностью до сопряжения связаны посредством конечного числа бендингов соседних отражений. Другими словами, каждое δ задает связную компоненту пространства пятиугольников. Со случаем $\delta = 1$ мы фактически знакомы: для всех таких пятиугольников точки p_j принадлежат \mathbb{R} -плоскости и являются отрицательными, а сами пятиугольники точны и дискретны. Поэтому при деформациях такого пятиугольника все время существует \mathbb{R} -плоскость инвариантная относительно действия ϱH_5 , причем ϱ отстает точным и дискретным.

В качестве первого шага рассмотрим представления

$$\varrho : H_5 \rightarrow \mathrm{PU} V, \quad \varrho : r_j \mapsto R(p_j), \quad p_j \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$$

с максимум одним положительным p_j (**пятиугольники**). Поднимая пятиугольник в $SU V$, получаем соотношение

$$R(p_5)R(p_4)R(p_3)R(p_2)R(p_1) = \delta,$$

$\delta^3 = 1$. Можно доказать, что пятиугольники с одинаковым δ с точностью до сопряжения связаны посредством конечного числа бендингов соседних отражений. Другими словами, каждое δ задает связную компоненту пространства пятиугольников. Со случаем $\delta = 1$ мы фактически знакомы: для всех таких пятиугольников точки p_j принадлежат \mathbb{R} -плоскости и являются отрицательными, а сами пятиугольники точны и дискретны. Поэтому при деформациях такого пятиугольника все время существует \mathbb{R} -плоскость инвариантная относительно действия ϱH_5 , причем ϱ отстает точным и дискретным. (Похоже на теорему жесткости Толедо?)

Можно построить точный дискретный пятиугольник с $\delta \neq 1$.

Можно построить точный дискретный пятиугольник с $\delta \neq 1$.
Подгруппа индекса 4 в таком пятиугольнике задает многообразие с геометрией, которая локально является геометрией голоморфного 2-шара, и с топологией тривиального расслоения на диски над поверхностью рода 2.

Можно построить точный дискретный пятиугольник с $\delta \neq 1$.
Подгруппа индекса 4 в таком пятиугольнике задает многообразие с геометрией, которая локально является геометрией голоморфного 2-шара, и с топологией тривиального расслоения на диски над поверхностью рода 2. Это решает известную старую проблему.

Можно построить точный дискретный пятиугольник с $\delta \neq 1$.
Подгруппа индекса 4 в таком пятиугольнике задает многообразие с геометрией, которая локально является геометрией голоморфного 2-шара, и с топологией тривиального расслоения на диски над поверхностью рода 2. Это решает известную старую проблему.

Гипотеза 3. Каждый пятиугольник точен и дискретен.

Можно построить точный дискретный пятиугольник с $\delta \neq 1$.
Подгруппа индекса 4 в таком пятиугольнике задает многообразие с геометрией, которая локально является геометрией голоморфного 2-шара, и с топологией тривиального расслоения на диски над поверхностью рода 2. Это решает известную старую проблему.

Гипотеза 3. Каждый пятиугольник точен и дискретен.

Мы думаем, что пятиугольники удовлетворяют аналогу теоремы жесткости Толедо.

Можно построить точный дискретный пятиугольник с $\delta \neq 1$.
Подгруппа индекса 4 в таком пятиугольнике задает многообразие с геометрией, которая локально является геометрией голоморфного 2-шара, и с топологией тривиального расслоения на диски над поверхностью рода 2. Это решает известную старую проблему.

Гипотеза 3. Каждый пятиугольник точен и дискретен.

Мы думаем, что пятиугольники удовлетворяют аналогу теоремы жесткости Тоledo. Аналогия будет полнее, если в случае $\delta \neq 1$ найти голоморфный диск инвариантный относительно действия ϱH_5 и содержащий все точки p_j (такой диск видимо даст голоморфное сечение топологического расслоения на диски).

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Обозначим

$F := R(p_3)R(p_2)R(p_1) \in \mathrm{SU} V$, $\alpha := \mathrm{Im} \frac{g_{12}g_{23}g_{31}}{g_{11}g_{22}g_{33}}$ и $\beta := \frac{\det[g_{jl}]}{g_{11}g_{22}g_{33}}$, где $g_{jk} := \langle p_j, p_k \rangle$ компоненты матрицы Грама точек p_j .

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Обозначим

$F := R(p_3)R(p_2)R(p_1) \in \mathrm{SU} V$, $\alpha := \mathrm{Im} \frac{g_{12}g_{23}g_{31}}{g_{11}g_{22}g_{33}}$ и $\beta := \frac{\det[g_{jl}]}{g_{11}g_{22}g_{33}}$, где $g_{jk} := \langle p_j, p_k \rangle$ компоненты матрицы Грама точек p_j . Можно доказать, что $\mathrm{tr} F = 8i\alpha + 4\beta - 1$.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Обозначим

$F := R(p_3)R(p_2)R(p_1) \in \mathrm{SU} V$, $\alpha := \mathrm{Im} \frac{g_{12}g_{23}g_{31}}{g_{11}g_{22}g_{33}}$ и $\beta := \frac{\det[g_{jl}]}{g_{11}g_{22}g_{33}}$, где $g_{jk} := \langle p_j, p_k \rangle$ компоненты матрицы Грама точек p_j . Можно доказать, что $\mathrm{tr} F = 8i\alpha + 4\beta - 1$.

Будем предполагать, что тройка p_1, p_2, p_3 **регулярна**, т.е., p_1, p_2, p_3 не лежат на одной геодезической, точка p_2 не ортогональна точкам p_1, p_3 и максимум одна из точек p_1, p_2, p_3 является положительной.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Обозначим

$F := R(p_3)R(p_2)R(p_1) \in \mathrm{SU} V$, $\alpha := \mathrm{Im} \frac{g_{12}g_{23}g_{31}}{g_{11}g_{22}g_{33}}$ и $\beta := \frac{\det[g_{jl}]}{g_{11}g_{22}g_{33}}$, где $g_{jk} := \langle p_j, p_k \rangle$ компоненты матрицы Грама точек p_j . Можно доказать, что $\mathrm{tr} F = 8i\alpha + 4\beta - 1$.

Будем предполагать, что тройка p_1, p_2, p_3 **регулярна**, т.е., p_1, p_2, p_3 не лежат на одной геодезической, точка p_2 не ортогональна точкам p_1, p_3 и максимум одна из точек p_1, p_2, p_3 является положительной.

Регулярная тройка p_1, p_2, p_3 называется **строго регулярной** если p_1, p_2, p_3 не лежат на одной проективной прямой и при $\alpha = 0$ (что означает, что точки p_1, p_2, p_3 принадлежат какой-то \mathbb{R} -плоскости) все p_1, p_2, p_3 являются отрицательными.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

В случае 1-шара, “идиотская” задача играла ключевую роль при изучении пространства Тейхмюллера гиперэллиптической группы.

Поэтому мы решим ее для 2-шара и 3-х точек. (Похоже, что доказательство работает для ≥ 3 точек.)

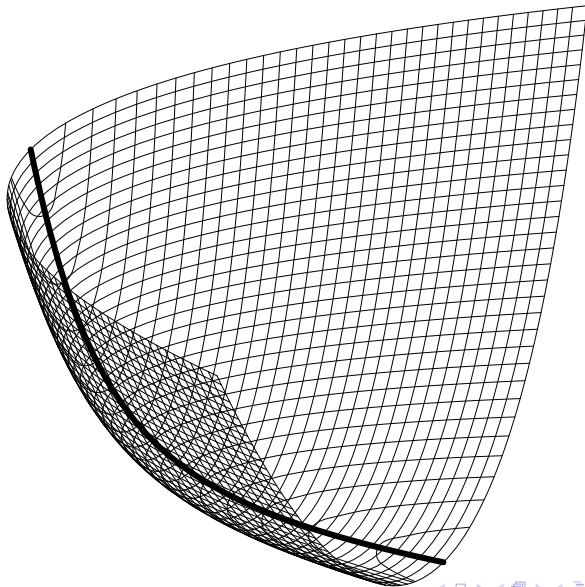
Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}} V \setminus S V$. Обозначим

$F := R(p_3)R(p_2)R(p_1) \in \mathrm{SU} V$, $\alpha := \mathrm{Im} \frac{g_{12}g_{23}g_{31}}{g_{11}g_{22}g_{33}}$ и $\beta := \frac{\det[g_{ij}]}{g_{11}g_{22}g_{33}}$, где $g_{jk} := \langle p_j, p_k \rangle$ компоненты матрицы Грама точек p_j . Можно доказать, что $\mathrm{tr} F = 8i\alpha + 4\beta - 1$.

Будем предполагать, что тройка p_1, p_2, p_3 **регулярна**, т.е., p_1, p_2, p_3 не лежат на одной геодезической, точка p_2 не ортогональна точкам p_1, p_3 и максимум одна из точек p_1, p_2, p_3 является положительной.

Регулярная тройка p_1, p_2, p_3 называется **строго регулярной** если p_1, p_2, p_3 не лежат на одной проективной прямой и при $\alpha = 0$ (что означает, что точки p_1, p_2, p_3 принадлежат какой-то \mathbb{R} -плоскости) все p_1, p_2, p_3 являются отрицательными. Изометрия $F \in \mathrm{SU} V$ называется **регулярной** если $\dim_{\mathbb{C}}\{v \in V \mid Fv = cv\} \leq 1$ для любого $c \in \mathbb{C}$.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара



Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Предложение. *Изометрия $F \in \text{SU } V$ имеет вид $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$, где p_1, p_2, p_3 — регулярная тройка, тогда, и только тогда, когда изометрия F регулярна и $\text{tr } F \neq -1$.*

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Предложение. *Изометрия $F \in \text{SU } V$ имеет вид $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$, где p_1, p_2, p_3 — регулярная тройка, тогда, и только тогда, когда изометрия F регулярна и $\text{tr } F \neq -1$.*

Из картинки на предыдущем слайде, которая изображает пространство S геометрических конфигураций строго регулярных троек (или, что то же самое, пространство, происходящее из соответствующих матриц Грама) фиксированных знаков и с фиксированными α и β , тонкие линии соответствуют бендингам пар точек p_1, p_2 и p_2, p_3 .

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Предложение. *Изометрия $F \in \text{SU } V$ имеет вид $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$, где p_1, p_2, p_3 — регулярная тройка, тогда, и только тогда, когда изометрия F регулярна и $\text{tr } F \neq -1$.*

Из картинки на предыдущем слайде, которая изображает пространство S геометрических конфигураций строго регулярных троек (или, что то же самое, пространство, происходящее из соответствующих матриц Грама) фиксированных знаков и с фиксированными α и β , тонкие линии соответствуют бендингам пар точек p_1, p_2 и p_2, p_3 . Таким образом, мы уже доказали часть следующей теоремы.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Предложение. *Изометрия $F \in \mathrm{SU} V$ имеет вид $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$, где p_1, p_2, p_3 — регулярная тройка, тогда, и только тогда, когда изометрия F регулярна и $\mathrm{tr} F \neq -1$.*

Из картинки на предыдущем слайде, которая изображает пространство S геометрических конфигураций строго регулярных троек (или, что то же самое, пространство, происходящее из соответствующих матриц Грама) фиксированных знаков и с фиксированными α и β , тонкие линии соответствуют бендингам пар точек p_1, p_2 и p_2, p_3 . Таким образом, мы уже доказали часть следующей теоремы.

Теорема. *Если строго регулярные тройки имеют одинаковые знаки, α, β и изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$ бендинги могут геометрически превратить одну в другую. Даны 2 геометрически одинаковые строго регулярные тройки с одинаковой изометрией F . Если $\alpha = 0$, предполагаем, что тройки находятся в одной и той же \mathbb{R} -плоскости. Бендинги физически превращают одну тройку в другую тогда, и только тогда, когда тройки связаны элементом централизатора изометрии F .*

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β .

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β . Имеем отображение $f : E \rightarrow \mathrm{SU} V$, подсчитывающее изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β . Имеем отображение $f : E \rightarrow \mathrm{SU} V$, подсчитывающее изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$. Ясно, что получилось главное $\mathrm{PU} V$ -расслоение $\pi : E \rightarrow S$, причем действие $\mathrm{PU} V$ на E превращается в сопряжение на уровне F .

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β . Имеем отображение $f : E \rightarrow \mathrm{SU} V$, подсчитывающее изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$. Ясно, что получилось главное $\mathrm{PU} V$ -расслоение $\pi : E \rightarrow S$, причем действие $\mathrm{PU} V$ на E превращается в сопряжение на уровне F .

Тот факт, что тонкие линии на S соответствуют бендингам, означает, что эти линии поднимаются в E .

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β . Имеем отображение $f : E \rightarrow \mathrm{SU} V$, подсчитывающее изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$. Ясно, что получилось главное $\mathrm{PU} V$ -расслоение $\pi : E \rightarrow S$, причем действие $\mathrm{PU} V$ на E превращается в сопряжение на уровне F .

Тот факт, что тонкие линии на S соответствуют бендингам, означает, что эти линии поднимаются в E . Поэтому получаем связность над $S \setminus L$, где L — жирная линия.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β . Имеем отображение $f : E \rightarrow \text{SU } V$, подсчитывающее изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$. Ясно, что получилось главное $\text{PU } V$ -расслоение $\pi : E \rightarrow S$, причем действие $\text{PU } V$ на E превращается в сопряжение на уровне F .

Тот факт, что тонкие линии на S соответствуют бендингам, означает, что эти линии поднимаются в E . Поэтому получаем связность над $S \setminus L$, где L — жирная линия. Поскольку бендинги сохраняют изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$, расслоение и связность редуцируются к $\pi : E_F \rightarrow S$, где $E_F := f^{-1}F$.

Решение “идиотской” задачи для 2-шара

Доказательство. Обозначим через E многообразие всех строго регулярных троек p_1, p_2, p_3 фиксированных знаков и с фиксированными α и β . Имеем отображение $f : E \rightarrow \mathrm{SU} V$, подсчитывающее изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$. Ясно, что получилось главное $\mathrm{PU} V$ -расслоение $\pi : E \rightarrow S$, причем действие $\mathrm{PU} V$ на E превращается в сопряжение на уровне F .

Тот факт, что тонкие линии на S соответствуют бендингам, означает, что эти линии поднимаются в E . Поэтому получаем связность над $S \setminus L$, где L — жирная линия. Поскольку бендинги сохраняют изометрию $F = R(p_3)R(p_2)R(p_1)$, расслоение и связность редуцируются к $\pi : E_F \rightarrow S$, где $E_F := f^{-1}F$.

Остается проделать некоторую техническую работу ■