Изгибаемые многогранники и кузнечные мехи

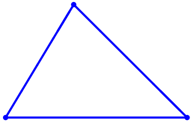
А. А. Гайфуллин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Сколковский институт науки и технологий

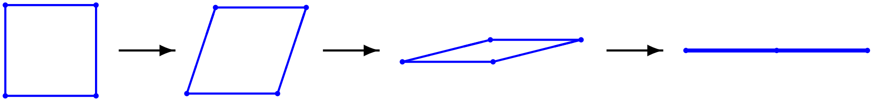
Новосибирск, 3 марта 2017 г.

Изгибания многоугольников

Рассмотрим многоугольник, стороны которого — жёсткие стержни, а в вершинах — шарниры.

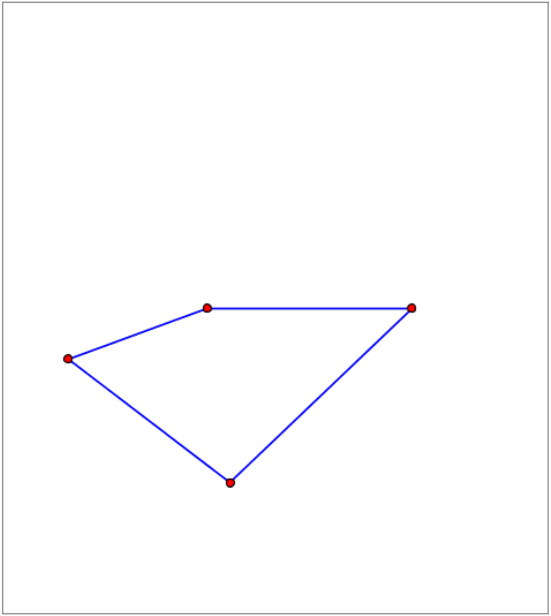


Неизгибаем



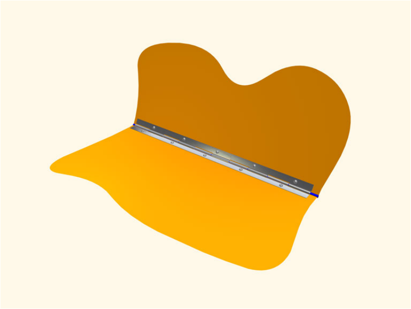
Треугольники неизгибаемы, а все многоугольники с четырьмя и более сторонами — изгибаемы.

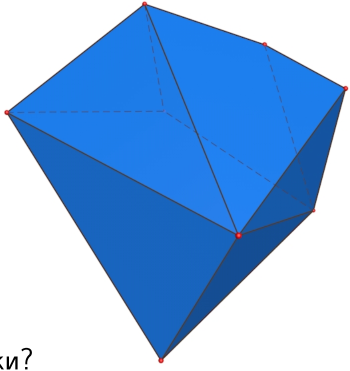
Изгибания четырёхугольника



Изгибания многогранников

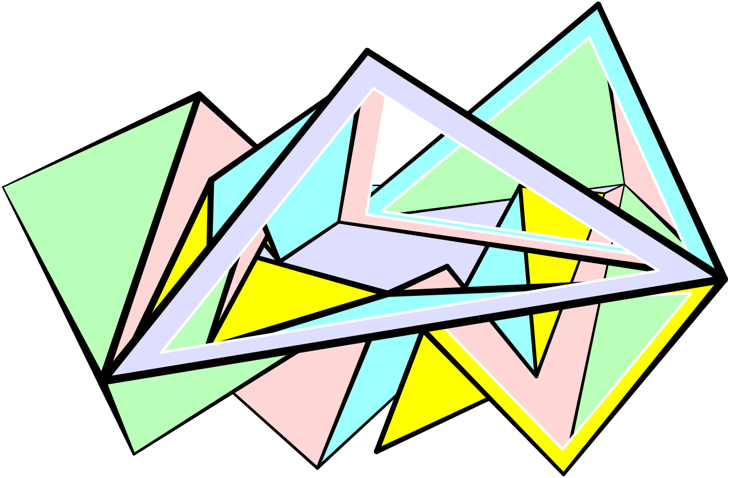
Теперь рассмотрим многогранник:
грани — жёсткие пластины,
рёбра — шарниры “типа дверных петель”.



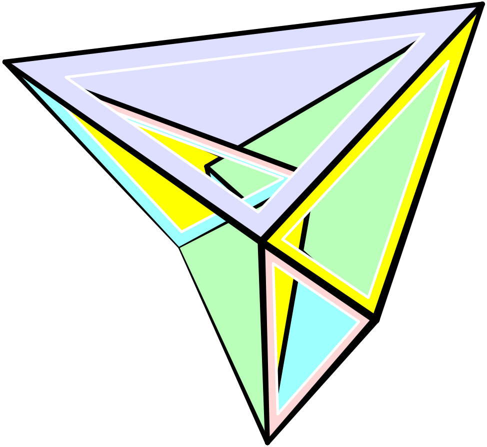


Бывают ли изгибаемые многогранники?

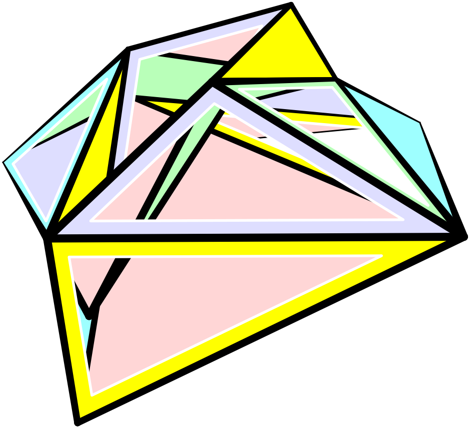
Изгибаемый многогранник Коннелли – первый пример несамопересекающегося изгибаемого многогранника (1977)



Изгибаемый многогранник Штеффена – простейший из известных несамопересекающихся изгибаемых многогранников



Изгибаемый многогранник Делиня



Выпуклость

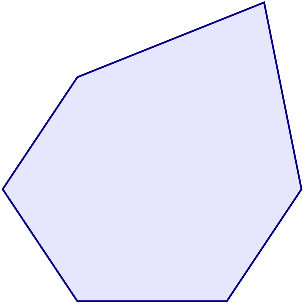
Определение

Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек соединяющий их отрезок тоже полностью лежит в этой фигуре.

Выпуклость

Определение

Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек соединяющий их отрезок тоже полностью лежит в этой фигуре.

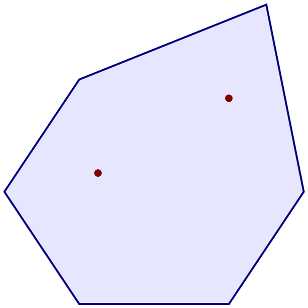


выпуклый многоугольник

Выпуклость

Определение

Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек соединяющий их отрезок тоже полностью лежит в этой фигуре.

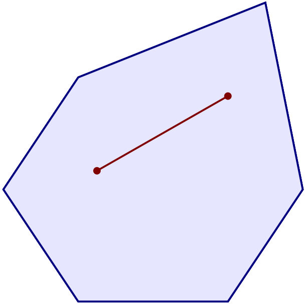


выпуклый многоугольник

Выпуклость

Определение

Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек соединяющий их отрезок тоже полностью лежит в этой фигуре.

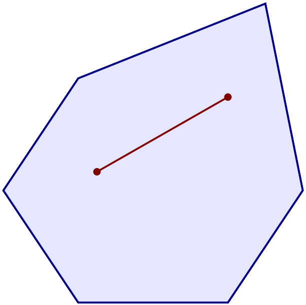


выпуклый
многоугольник

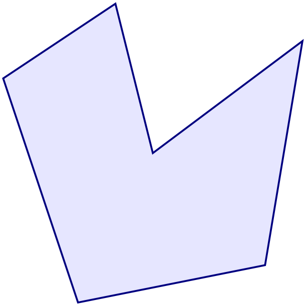
Выпуклость

Определение

Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек соединяющий их отрезок тоже полностью лежит в этой фигуре.



выпуклый
многоугольник

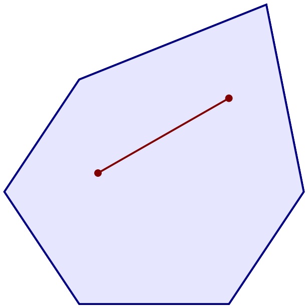


невыпуклый
многоугольник

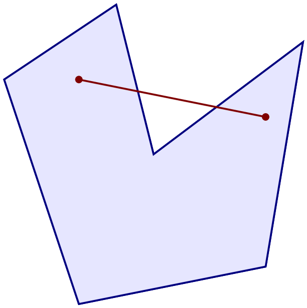
Выпуклость

Определение

Фигура называется выпуклой, если для любых двух её точек соединяющий их отрезок тоже полностью лежит в этой фигуре.



выпуклый многоугольник



невыпуклый многоугольник

Теорема Коши

Теорема (О. Коши, 1813)

Любой выпуклый многогранник неизгибаем.

Теорема Коши: более сильная формулировка

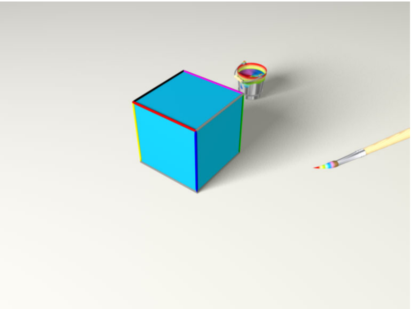
Теорема (О. Коши, 1813)

Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.

Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

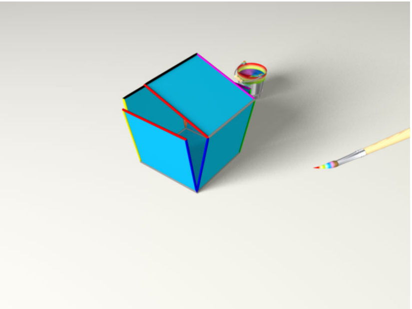
Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

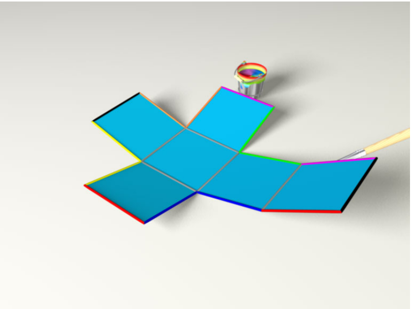
Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

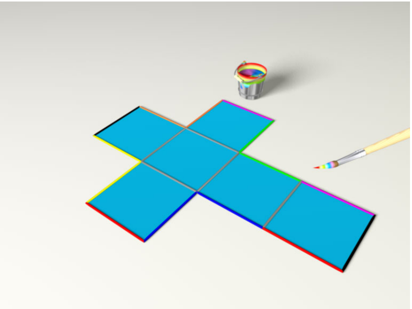
Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

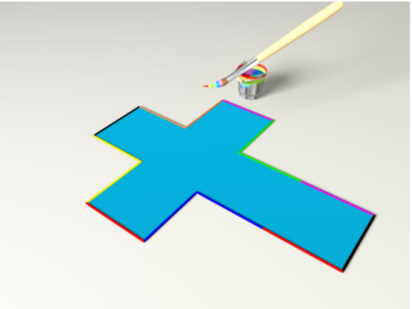
Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

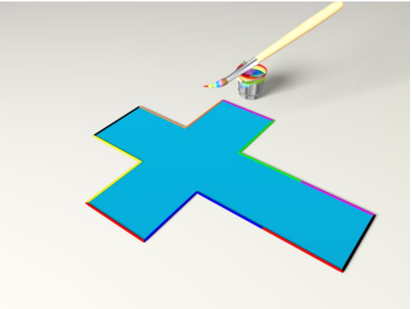
Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



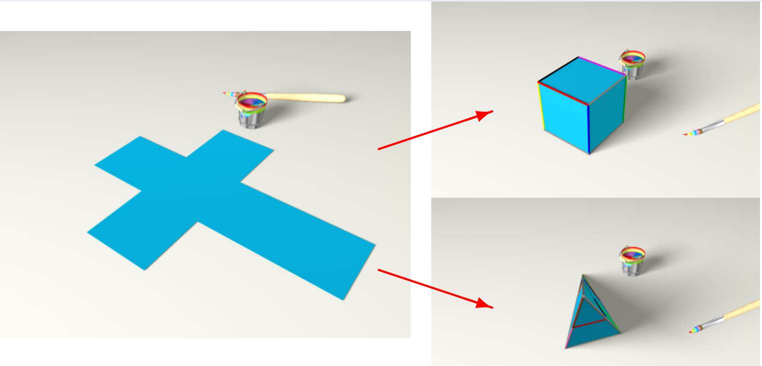
Это и есть развёртка:

Многоугольник с раскраской границы

Теорема Коши: более сильная формулировка

Теорема (О. Коши, 1813)

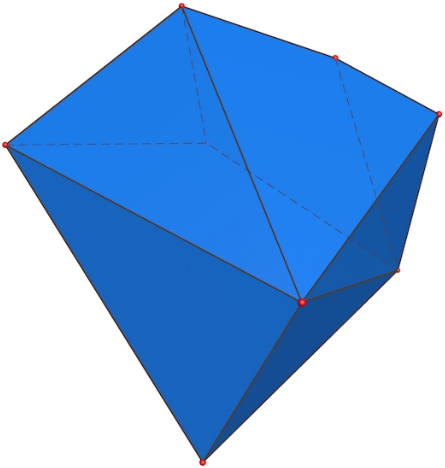
Выпуклый многогранник однозначно восстанавливается по своей развёртке.



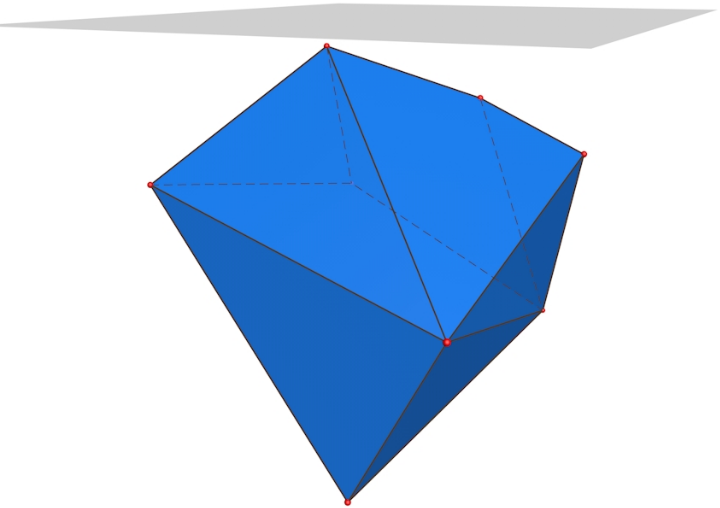
А только многоугольника недостаточно!

(см. http://www.etudes.ru/ru/etudes/razvertka/)

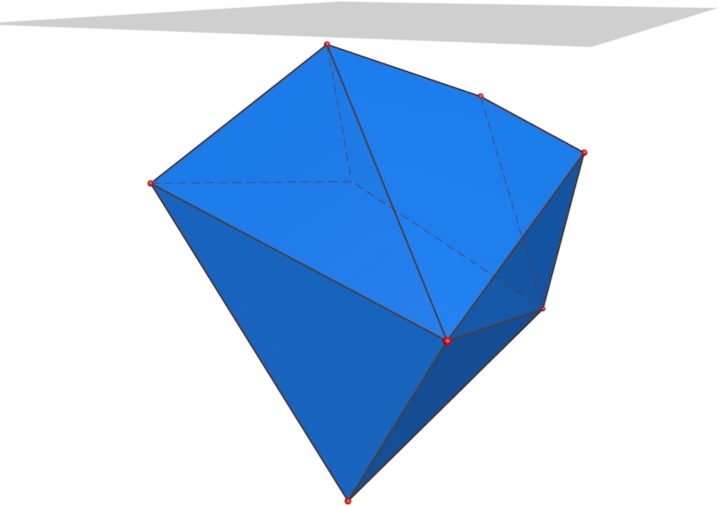
Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$

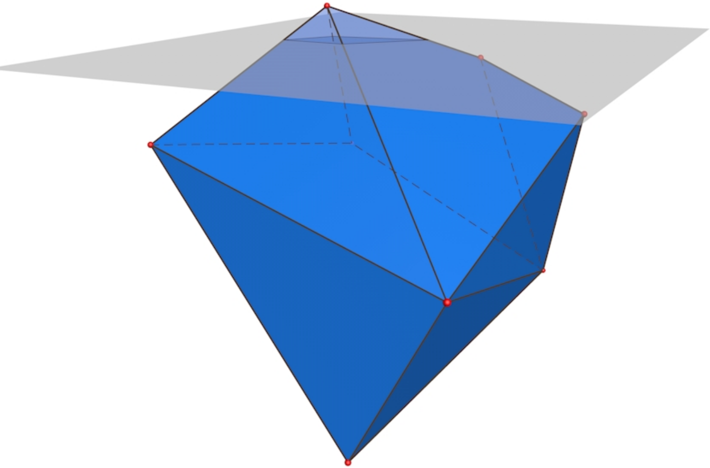


Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



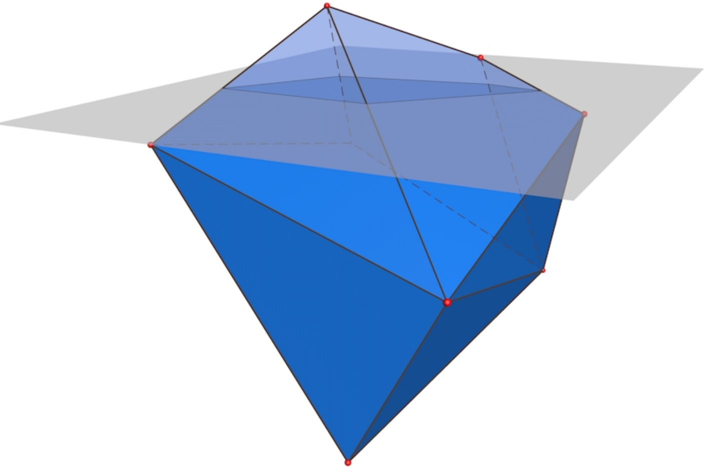
B	P	Γ

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



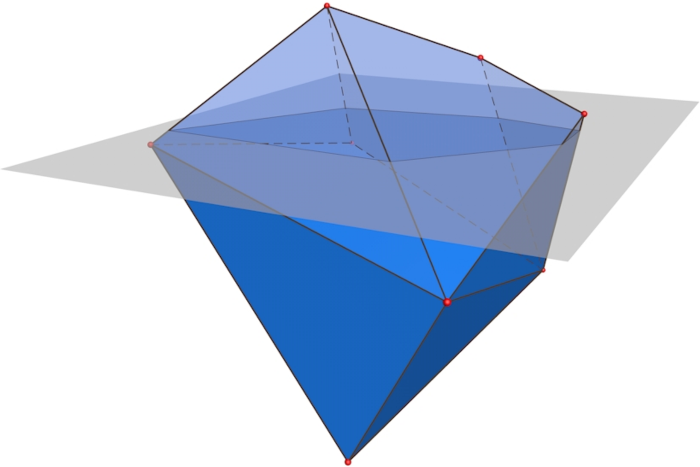
B	P	Γ	
1	4	4	1

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



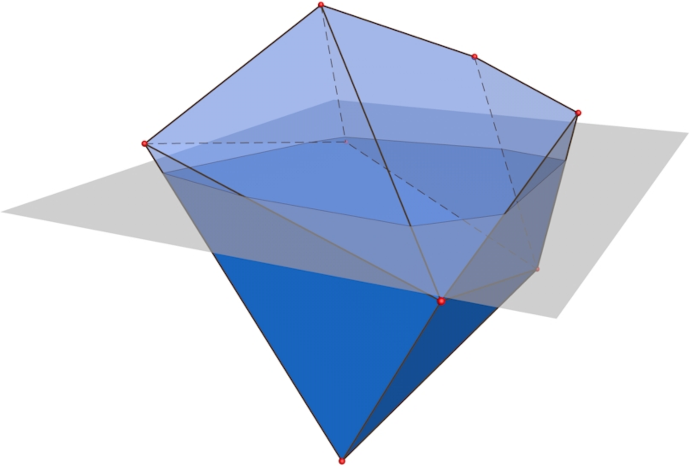
B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



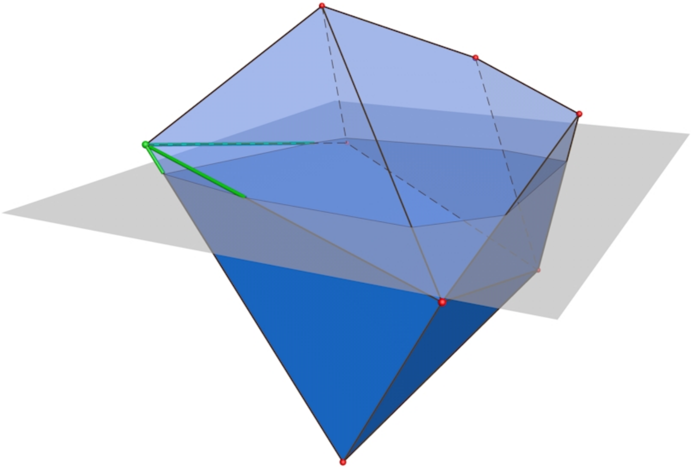
B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



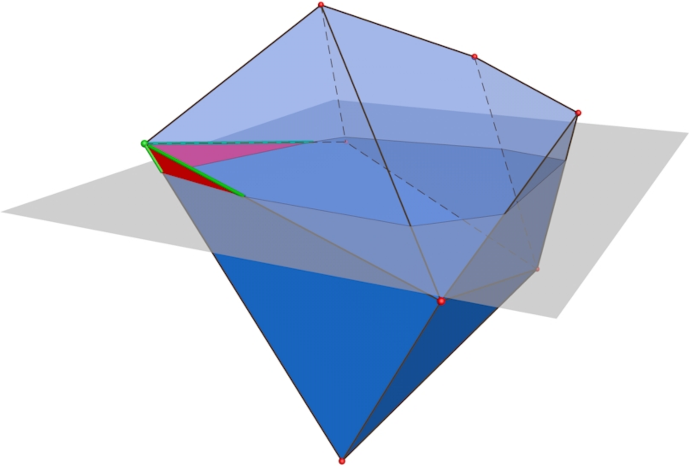
B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



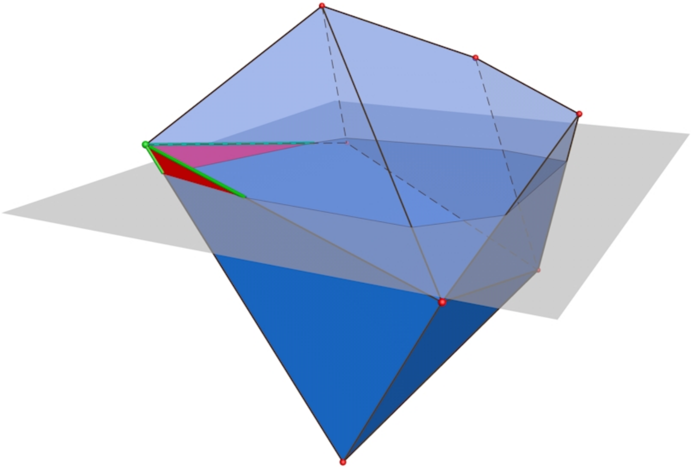
B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1

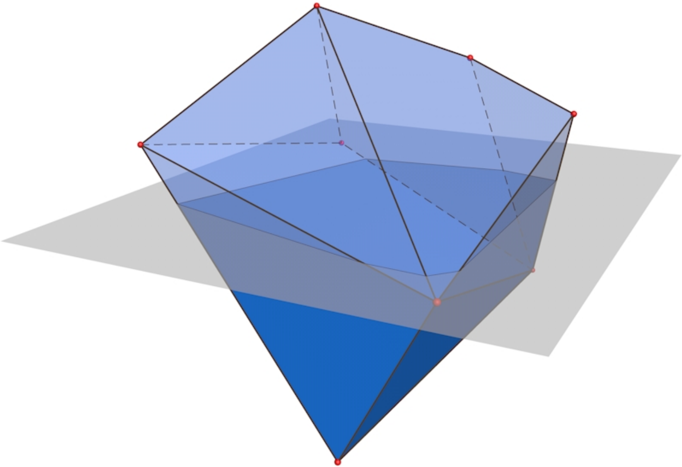
Формула Эйлера: $В - Р + Г = 2$



$В$	$Р$	$Г$	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1

На каждом шаге, кроме первого и последнего, число добавляемых рёбер ровно на один больше числа добавляемых граней!

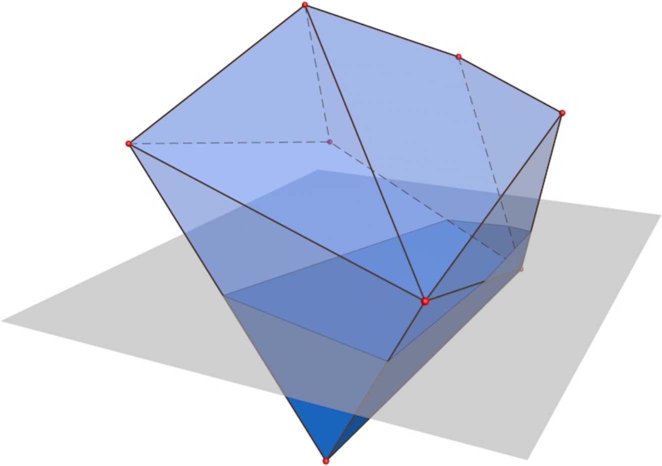
Формула Эйлера: $В - Р + Г = 2$



$В$	$Р$	$Г$	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1
5	12	8	1

На каждом шаге, кроме первого и последнего, число добавляемых рёбер ровно на один больше числа добавляемых граней!

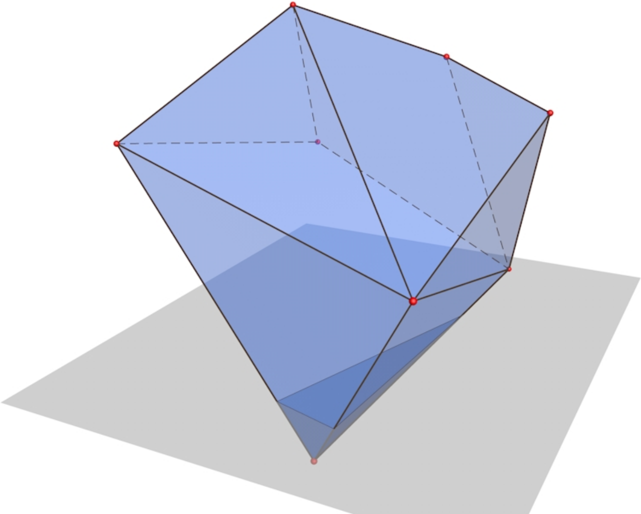
Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1
5	12	8	1
6	14	9	1

На каждом шаге, кроме первого и последнего, число добавляемых рёбер ровно на один больше числа добавляемых граней!

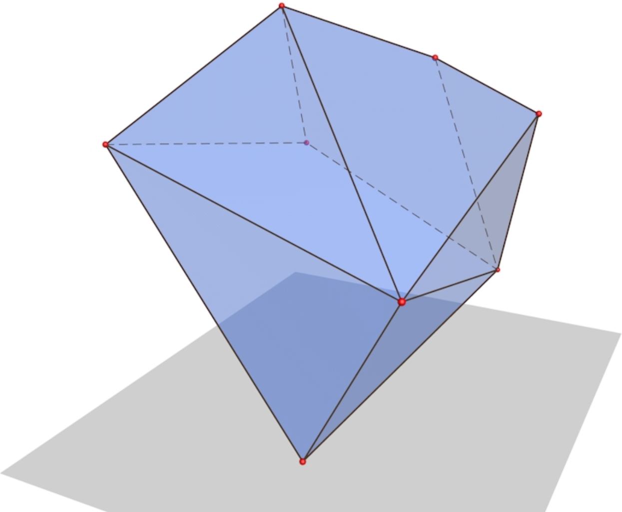
Формула Эйлера: $В - Р + Г = 2$



$В$	$Р$	$Г$	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1
5	12	8	1
6	14	9	1
7	15	9	1

На каждом шаге, кроме первого и последнего, число добавляемых рёбер ровно на один больше числа добавляемых граней!

Формула Эйлера: $B - P + \Gamma = 2$



B	P	Γ	
1	4	4	1
2	6	5	1
3	8	6	1
4	11	8	1
5	12	8	1
6	14	9	1
7	15	9	1
8	**15**	**9**	2

На каждом шаге, кроме первого и последнего, число добавляемых рёбер ровно на один больше числа добавляемых граней!

Следствие формулы Эйлера

Следствие

Пусть Γ_k *— число* k*-угольных граней. Тогда*

$$P = \frac{3}{2}\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \frac{5}{2}\Gamma_5 + 3\Gamma_6 + \frac{7}{2}\Gamma_7 + \dots \tag{1}$$

$$B = 2 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_5 + 2\Gamma_6 + \frac{5}{2}\Gamma_7 + \dots \tag{2}$$

Следствие формулы Эйлера

Следствие

Пусть Γ_k *— число* k*-угольных граней. Тогда*

$$P = \frac{3}{2}\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \frac{5}{2}\Gamma_5 + 3\Gamma_6 + \frac{7}{2}\Gamma_7 + \dots \tag{1}$$

$$B = 2 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_5 + 2\Gamma_6 + \frac{5}{2}\Gamma_7 + \dots \tag{2}$$

Доказательство. В каждой k-угольной грани k рёбер. Сложим количества рёбер во всех гранях. Каждое ребро лежит ровно в двух гранях, поэтому мы посчитаем его ровно два раза.

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 7\Gamma_7 + \dots \implies (1)$$

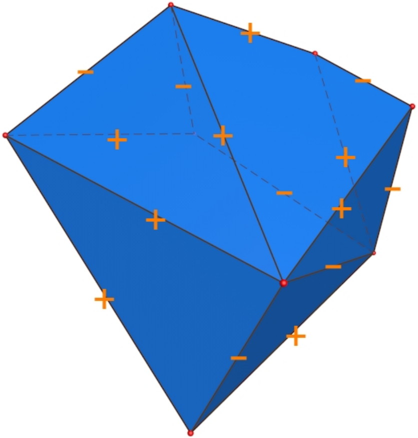
$$\Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \Gamma_6 + \Gamma_7 + \dots$$

$$B = 2 + P - \Gamma = \implies (2)$$

Теорема Коши: набросок доказательства

От противного. Предположим, что существует изгибаемый выпуклый многогранник.

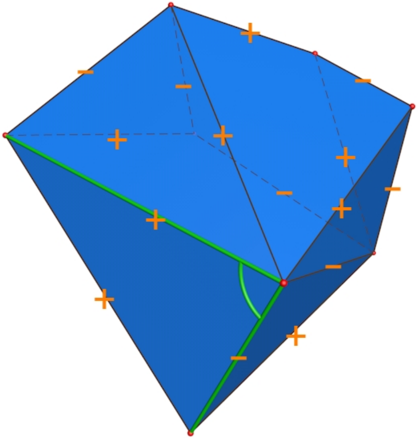
Начнём его изгибать. Тогда некоторые его двугранные углы начинают увеличиваться ($+$), а некоторые – уменьшаться ($-$).



Теорема Коши: набросок доказательства

От противного. Предположим, что существует изгибаемый выпуклый многогранник.

Начнём его изгибать. Тогда некоторые его двугранные углы начинают увеличиваться ($+$), а некоторые – уменьшаться ($-$).

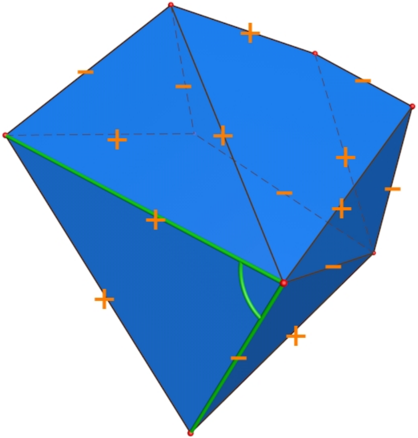


Перемена знака

Теорема Коши: набросок доказательства

От противного. Предположим, что существует изгибаемый выпуклый многогранник.

Начнём его изгибать. Тогда некоторые его двугранные углы начинают увеличиваться ($+$), а некоторые – уменьшаться ($-$).



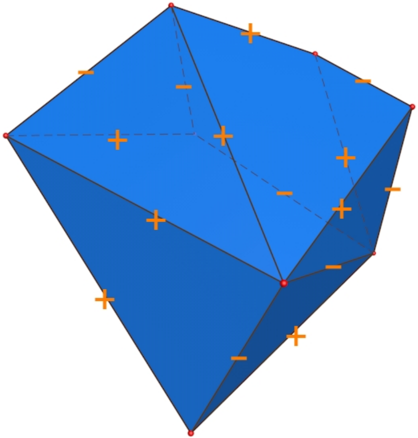
Перемена знака

Оценим число N перемен знака двумя способами: по вершинам и по граням

Оценка числа перемен знака по вершинам

Лемма

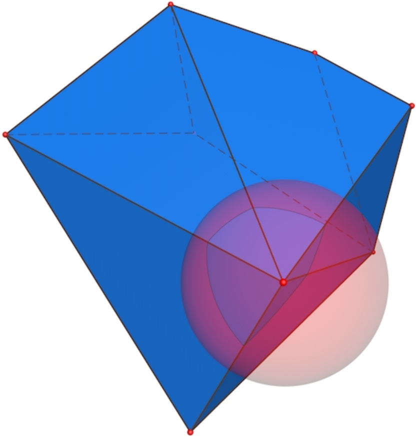
В каждой вершине есть хотя бы четыре перемены знака.



Оценка числа перемен знака по вершинам

Лемма

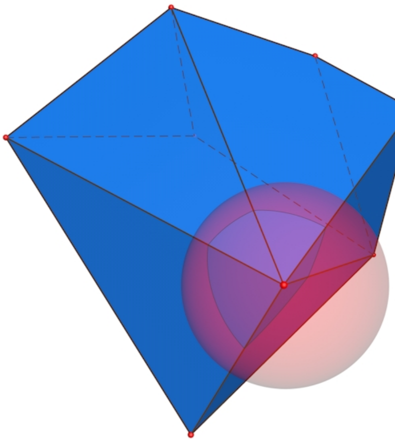
В каждой вершине есть хотя бы четыре перемены знака.

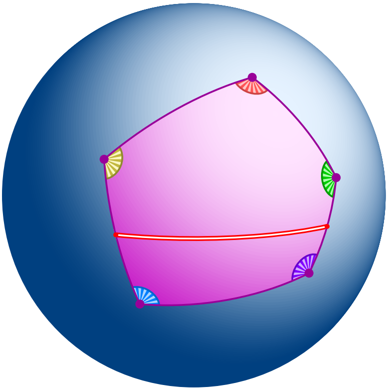


Оценка числа перемен знака по вершинам

Лемма

В каждой вершине есть хотя бы четыре перемены знака.

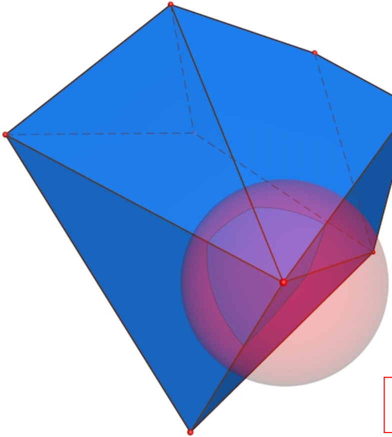


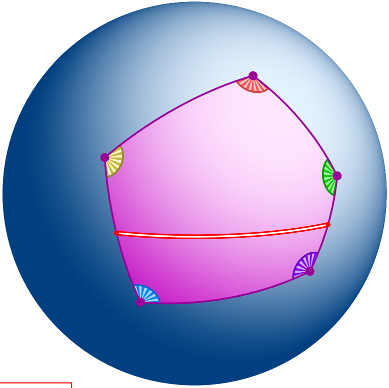


Оценка числа перемен знака по вершинам

Лемма

В каждой вершине есть хотя бы четыре перемены знака.





$$\boxed{N \geqslant 4B}$$

Оценка числа перемен знака по граням

1. В каждой $2k$-угольной грани не более $2k$ перемен знака.
2. В каждой $(2k+1)$-угольной грани не более $2k$ перемен знака.

$$\boxed{N \leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \dots}$$

Оценка числа перемен знака по граням

1. В каждой $2k$-угольной грани не более $2k$ перемен знака.
2. В каждой $(2k+1)$-угольной грани не более $2k$ перемен знака.

$$\boxed{N \leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \dots}$$

Следствие из формулы Эйлера:

$$B = 2 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_5 + 2\Gamma_6 + \frac{5}{2}\Gamma_7 + \dots$$

Оценка числа перемен знака по граням

1. В каждой $2k$-угольной грани не более $2k$ перемен знака.
2. В каждой $(2k+1)$-угольной грани не более $2k$ перемен знака.

$$\boxed{N \leqslant 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 4\Gamma_5 + 6\Gamma_6 + 6\Gamma_7 + \ldots}$$

Следствие из формулы Эйлера:

$$B = 2 + \frac{1}{2}\Gamma_3 + \Gamma_4 + \frac{3}{2}\Gamma_5 + 2\Gamma_6 + \frac{5}{2}\Gamma_7 + \ldots$$

$$4B = 8 + 2\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 6\Gamma_5 + 8\Gamma_6 + 10\Gamma_7 + \ldots$$

Противоречие с тем, что $N \geqslant 4B$.

Неизгибаемость многогранников общего положения

Теорема (Глак, 1975 для типа сферы; Фогельзангер, 1988)

Многогранник общего положения любого комбинаторного типа неизгибаем.

Неизгибаемость многогранников общего положения

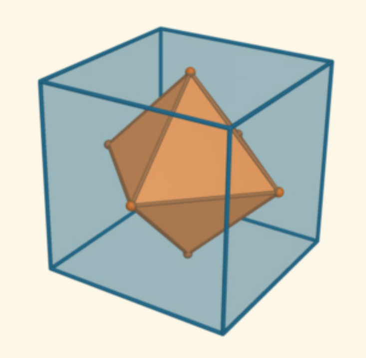
Теорема (Глак, 1975 для типа сферы; Фогельзангер, 1988)

Многогранник общего положения любого комбинаторного типа неизгибаем.

Идея доказательства (в случае топологического типа сферы):

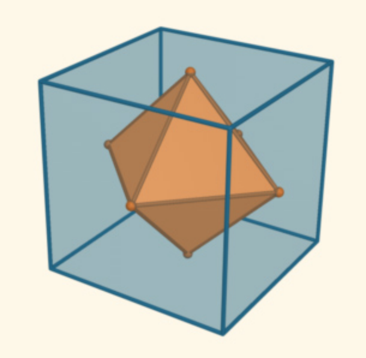
1. Добавив новые шарниры, можно считать, что все грани – треугольники.
2. Многогранник в трёхмерном пространстве с B вершинами задаётся $3B$ параметрами – координатами вершин. С точностью до движений пространства остаётся $3B-6$ параметров.
3. Многограник с треугольными гранями и B вершинами имеет $3B-6$ рёбер.
4. Зафиксировав длины рёбер, получим $3B-6$ алгебраических уравнений с $3B-6$ переменными. В общем положении она имеет конечное число решений.

Октаэдры

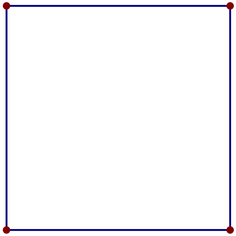


Правильный октаэдр:
$B = 6,\ P = 12,\ \Gamma = 8$

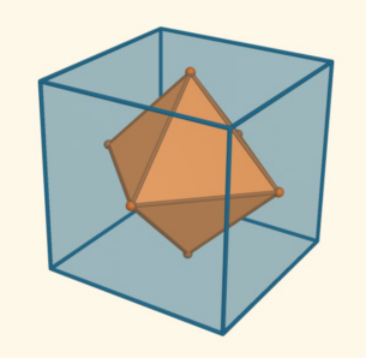
Октаэдры



Правильный октаэдр:
$B = 6$, $P = 12$, $\Gamma = 8$

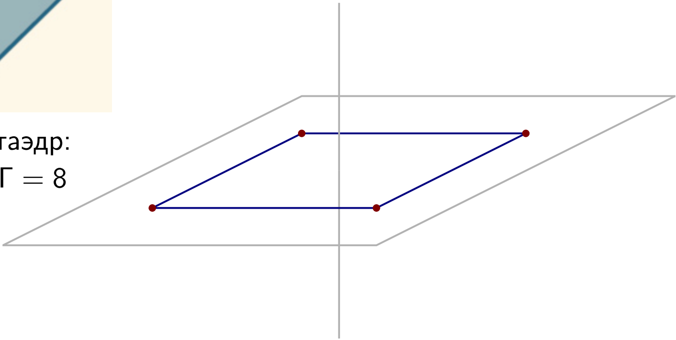


Октаэдры

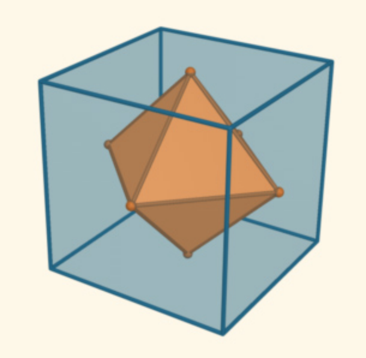


Правильный октаэдр:

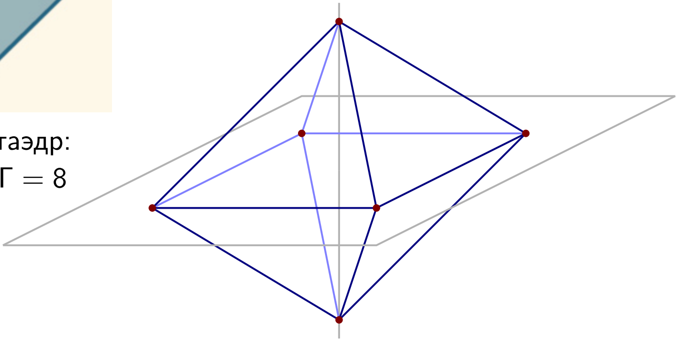
$B = 6,\ P = 12,\ \Gamma = 8$



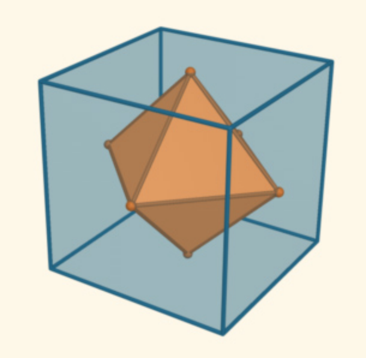
Октаэдры



Правильный октаэдр:
$B = 6,\ P = 12,\ \Gamma = 8$

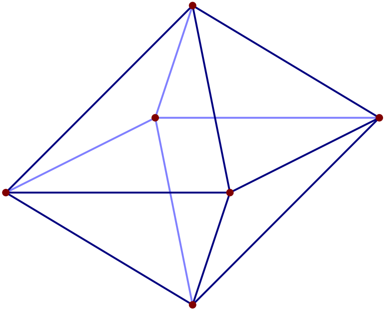


Октаэдры

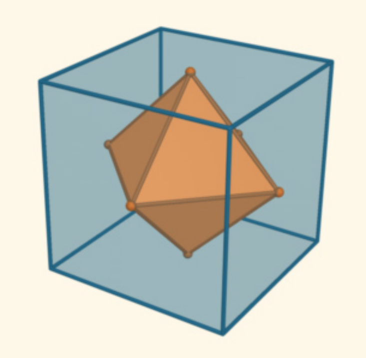


Правильный октаэдр:

$B = 6,\ P = 12,\ \Gamma = 8$

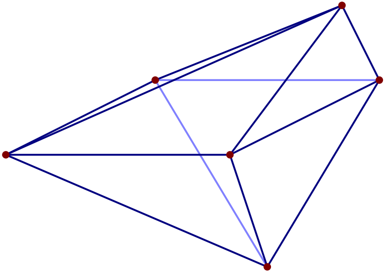


Октаэдры

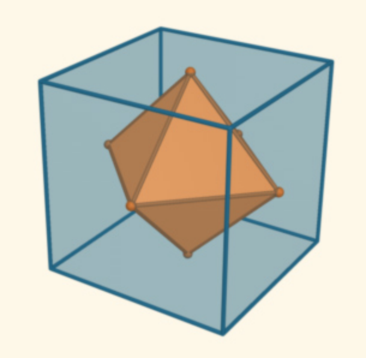


Правильный октаэдр:
$B = 6,\ P = 12,\ \Gamma = 8$

Неправильный октаэдр:

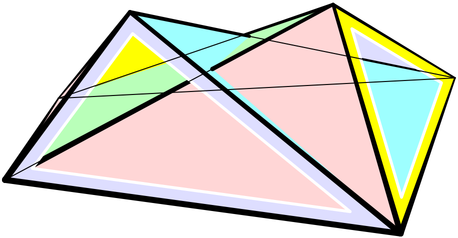


Октаэдры

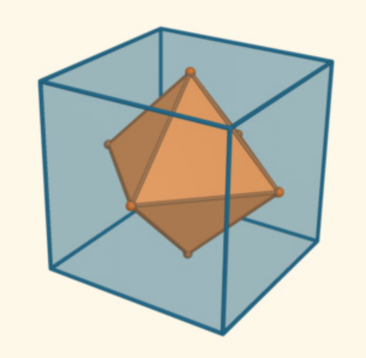


Правильный октаэдр:
$B = 6,\ P = 12,\ \Gamma = 8$

Самопересекающийся октаэдр:

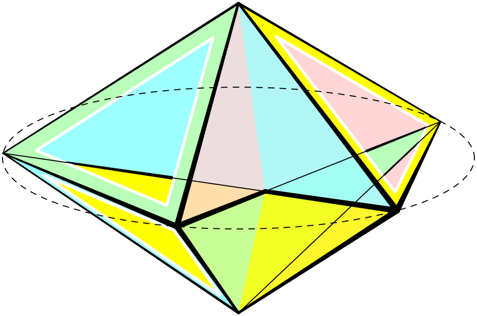


Октаэдры

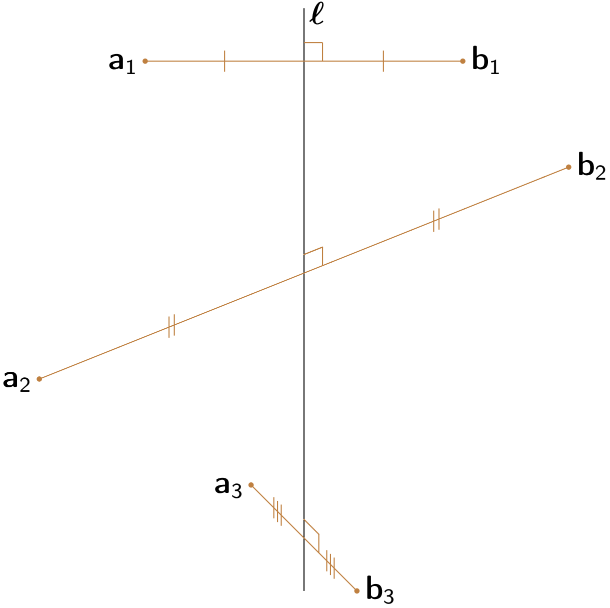


Правильный октаэдр:
$B = 6$, $P = 12$, $\Gamma = 8$

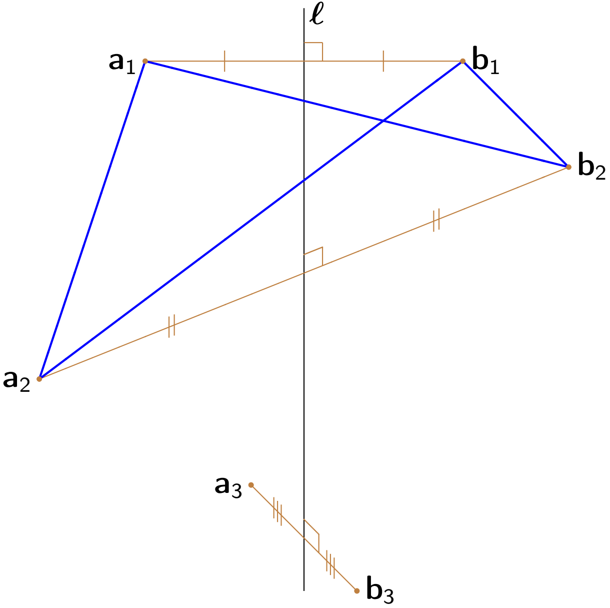
Самопересекающийся октаэдр:



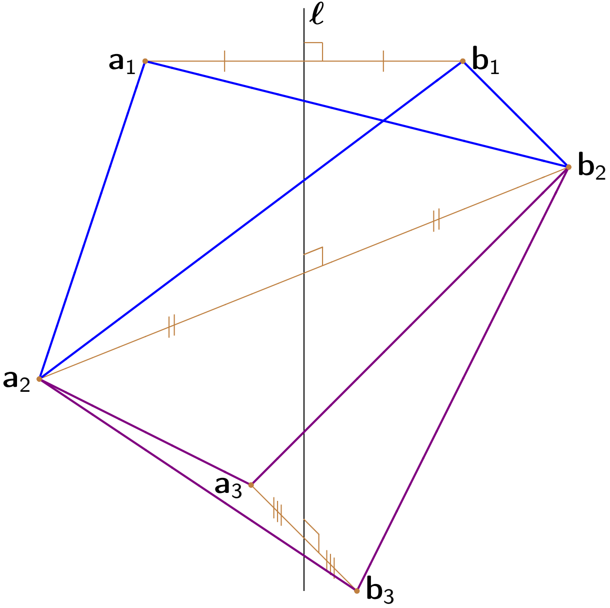
Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа



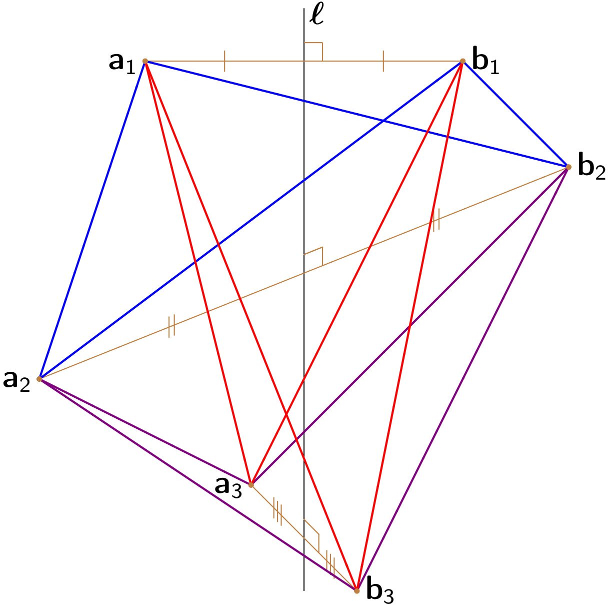
Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа



Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа



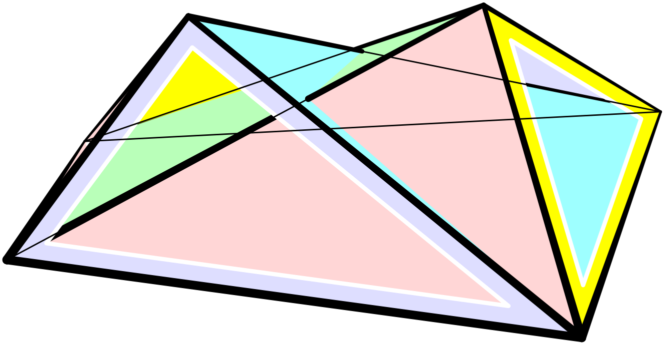
Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа



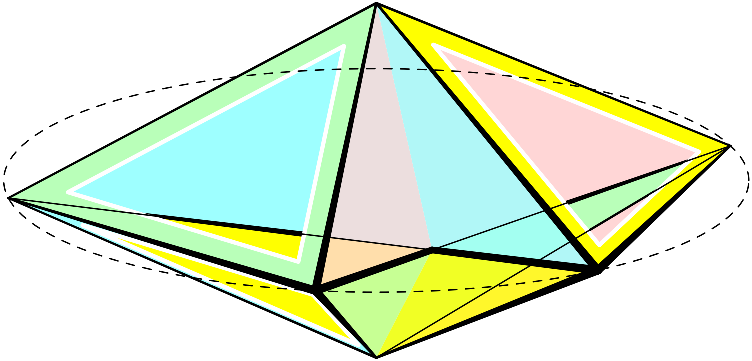
Почему изгибается?

1. Такой октаэдр с точностью до движений определяется 7 параметрами.
2. Октаэдр имеет 12 рёбер, то есть 6 пар симметричных относительно ℓ рёбер.
3. Таким образом, мы получаем систему из 6 алгебраических уравнений с 7 переменными. В общем положении она имеет однопараметрическое семейство решений. Значит, октаэдр изгибаем.

Изгибаемый октаэдр Брикара первого типа

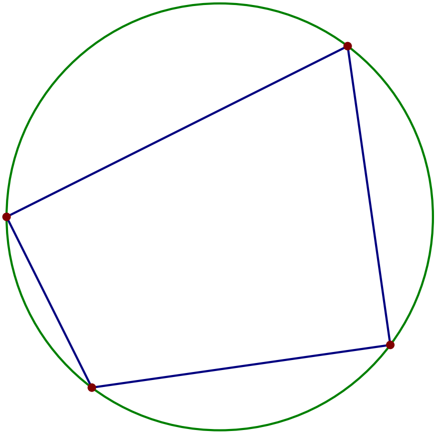


Изгибаемый октаэдр Брикара второго типа



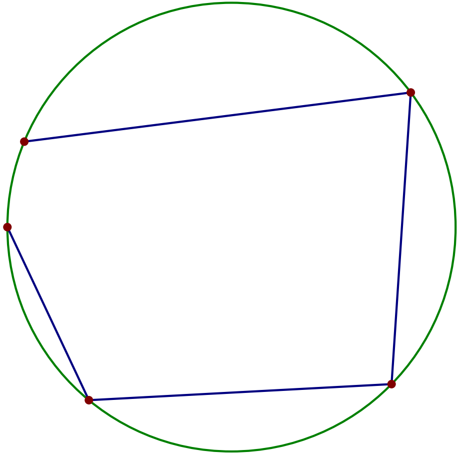
Почему изгибается?

Если фиксированы длины сторон четырёхугольника (и их порядок), то выпуклый четырёхугольник с такими длинами сторон можно вписать в окружность только одного радиуса.



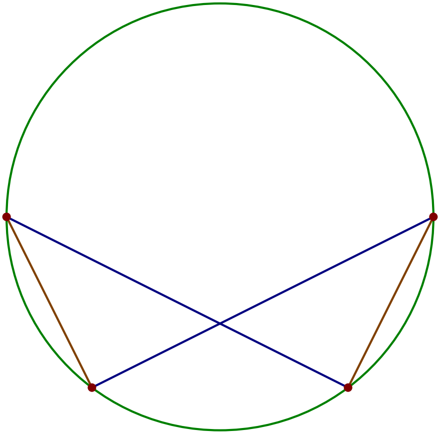
Почему изгибается?

Если фиксированы длины сторон четырёхугольника (и их порядок), то выпуклый четырёхугольник с такими длинами сторон можно вписать в окружность только одного радиуса.



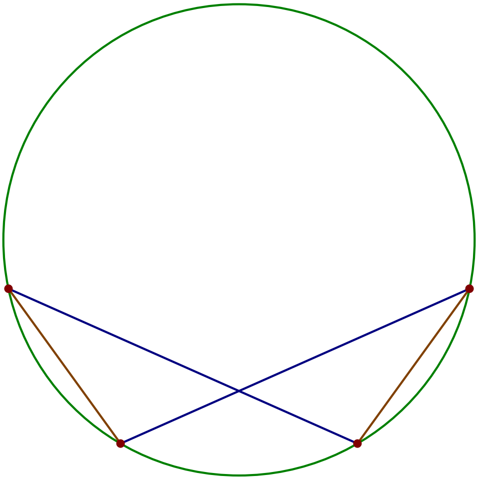
Почему изгибается?

Теперь пусть a и b — фиксированные положительные числа, $a > b$. Тогда самопересекающиеся четырёхугольники с длинами сторон a, b, a, b можно вписать в окружности разных радиусов.



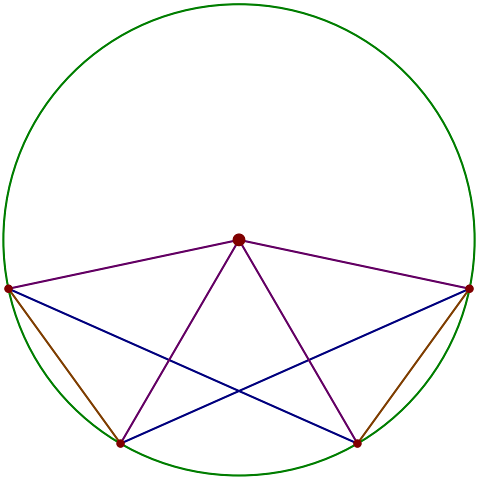
Почему изгибается?

Теперь пусть a и b — фиксированные положительные числа, $a > b$. Тогда самопересекающиеся четырёхугольники с длинами сторон a, b, a, b можно вписать в окружности разных радиусов.



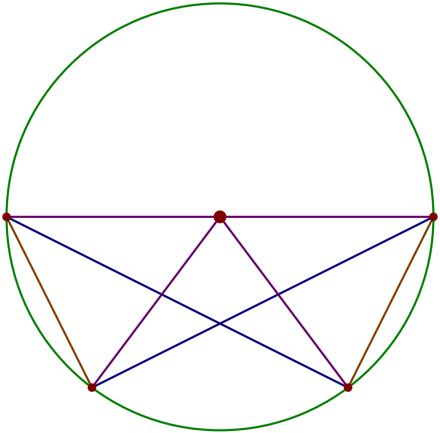
Почему изгибается?

Теперь пусть a и b — фиксированные положительные числа, $a > b$. Тогда самопересекающиеся четырёхугольники с длинами сторон a, b, a, b можно вписать в окружности разных радиусов.

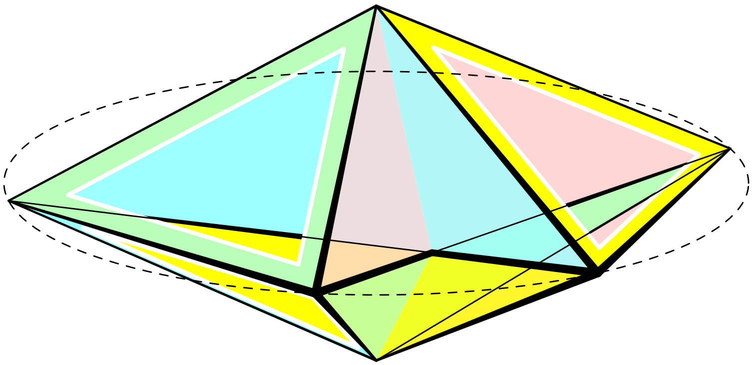


Почему изгибается?

Теперь пусть a и b — фиксированные положительные числа, $a > b$. Тогда самопересекающиеся четырёхугольники с длинами сторон a, b, a, b можно вписать в окружности разных радиусов.



Изгибаемый октаэдр Брикара второго типа



Гипотеза о кузнечных мехах

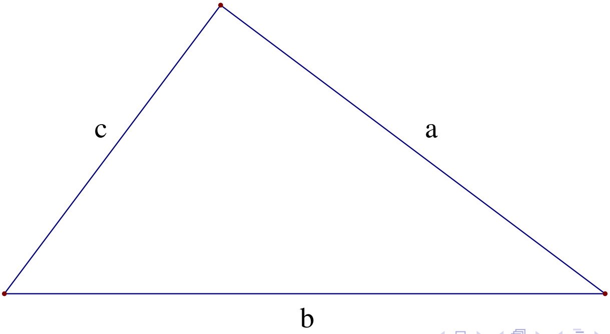
Гипотеза (Р. Коннелли, 1978)

Объём любого изгибаемого многогранника постоянен в процессе изгибания.

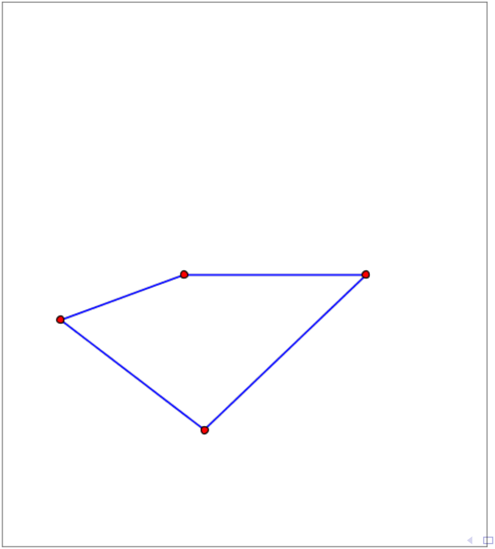
Формула Герона

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

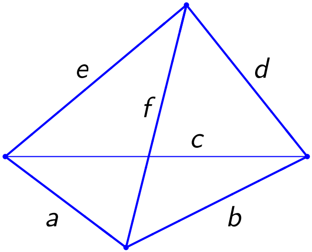
$$S^2 = \frac{1}{16}(2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4)$$



Площадь многоугольника с более чем тремя сторонами нельзя выразить через длины сторон

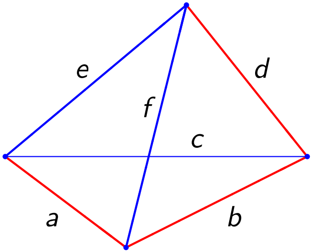


Формула Эйлера для объёма тетраэдра



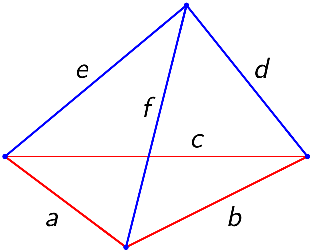
$$V^2 = \frac{1}{144}\big(a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2f^2 + a^2d^2e^2 + a^2d^2f^2 + \\ + b^2c^2e^2 + b^2c^2f^2 + b^2d^2e^2 + b^2e^2f^2 + c^2d^2f^2 + c^2e^2f^2 - \\ - a^2b^2c^2 - a^2e^2f^2 - b^2d^2f^2 - c^2d^2e^2 - a^4d^2 - a^2d^4 - b^4e^2 - b^2e^4 \\ - c^4f^2 - c^2f^4\big)$$

Формула Эйлера для объёма тетраэдра



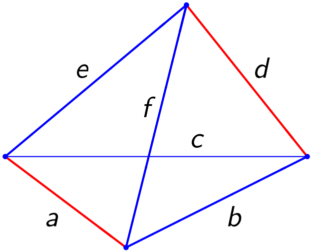
$$V^2 = \frac{1}{144}\big(\color{red}{a^2b^2d^2} + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2f^2 + a^2d^2e^2 + a^2d^2f^2 + \\ + b^2c^2e^2 + b^2c^2f^2 + b^2d^2e^2 + b^2e^2f^2 + c^2d^2f^2 + c^2e^2f^2 - \\ - a^2b^2c^2 - a^2e^2f^2 - b^2d^2f^2 - c^2d^2e^2 - a^4d^2 - a^2d^4 - b^4e^2 - b^2e^4 \\ - c^4f^2 - c^2f^4\big)$$

Формула Эйлера для объёма тетраэдра



$$V^2 = \frac{1}{144}\big(a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2f^2 + a^2d^2e^2 + a^2d^2f^2 +$$
$$+ b^2c^2e^2 + b^2c^2f^2 + b^2d^2e^2 + b^2e^2f^2 + c^2d^2f^2 + c^2e^2f^2 -$$
$$- a^2b^2c^2 - a^2e^2f^2 - b^2d^2f^2 - c^2d^2e^2 - a^4d^2 - a^2d^4 - b^4e^2 - b^2e^4$$
$$- c^4f^2 - c^2f^4\big)$$

Формула Эйлера для объёма тетраэдра



$$V^2 = \frac{1}{144}\big(a^2b^2d^2 + a^2b^2e^2 + a^2c^2d^2 + a^2c^2f^2 + a^2d^2e^2 + a^2d^2f^2 + \\ + b^2c^2e^2 + b^2c^2f^2 + b^2d^2e^2 + b^2e^2f^2 + c^2d^2f^2 + c^2e^2f^2 - \\ - a^2b^2c^2 - a^2e^2f^2 - b^2d^2f^2 - c^2d^2e^2 - {\color{red}a^4d^2} - a^2d^4 - b^4e^2 - b^2e^4 \\ - c^4f^2 - c^2f^4\big)$$

Формула Кэли–Менгера

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ — n-мерный симплекс с вершинами $p_0, p_1, \ldots, p_n$ и ℓ_{ij} — длина ребра $[p_i p_j]$.

Определитель Кэли–Менгера:

$$CM(p_0, \ldots, p_n) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ell_{01}^2 & \ell_{02}^2 & \cdots & \ell_{0n}^2 \\ 1 & \ell_{01}^2 & 0 & \ell_{12}^2 & \cdots & \ell_{1n}^2 \\ 1 & \ell_{02}^2 & \ell_{12}^2 & 0 & \cdots & \ell_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \ell_{0n}^2 & \ell_{1n}^2 & \ell_{2n}^2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Тогда

$$V^2(\Delta) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n (n!)^2} CM(p_0, \ldots, p_n).$$

Формула Кэли–Менгера

Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — точки в трёхмерном пространстве. Такой набор из m точек задаётся $3m$ координатами. Измерим попарные расстояния между этими точками. Получим $m(m-1)/2$ расстояний $\ell_{ij} = |p_i p_j|$. Если m велико, то $m(m-1)/2 \gg 3m$. Значит, между этими расстояниями имеется много соотношений.

Как описать эти соотношения?

Формула Кэли–Менгера

Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — точки в трёхмерном пространстве. Такой набор из m точек задаётся $3m$ координатами. Измерим попарные расстояния между этими точками. Получим $m(m-1)/2$ расстояний $\ell_{ij} = |p_i p_j|$. Если m велико, то $m(m-1)/2 \gg 3m$. Значит, между этими расстояниями имеется много соотношений.

Как описать эти соотношения?

А. Кэли, 1841: Эти соотношения имеют вид

$$CM(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}, p_{i_5}) = 0$$

для всевозможных пятёрок точек.

Теорема Сабитова

Теорема (И. Х. Сабитов, 1996)

Объём V любого многогранника P с треугольными гранями удовлетворяет соотношению вида

$$V^{2N} + a_1(\ell_1^2, \dots, \ell_r^2)V^{2N-2} + a_2(\ell_1^2, \dots, \ell_r^2)V^{2N-4} + \dots + \\ + a_N(\ell_1^2, \dots, \ell_r^2) = 0,$$

где

- $\ell_1, \dots, \ell_r$ — *длины рёбер многогранника* P,
- $a_1, \dots, a_N$ — *многочлены с рациональными коэффициентами,*
- *число* N *и многочлены* $a_1, \dots, a_N$ *зависят лишь от комбинаторного строения многогранника* P.

Теорема Сабитова

Следствие (И. Х. Сабитов, 1996)

Объём любого изгибаемого многогранника постоянен в процессе изгибания.

Теорема Виета

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m.$$

Если $x_1, \dots, x_m$ — корни многочлена $f(x)$, то

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_1x_2\cdots x_n = (-1)^m\frac{a_m}{a_0}$$

Результант

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \dots + a_m,$$
$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_n.$$

Пусть $x_1, \dots, x_m$ — корни многочлена $f(x)$ и $x'_1, \dots, x'_n$ — корни многочлена $g(x)$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f,g) &= a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(x_i - x'_j) = \\ &= a_0^n g(x_1)g(x_2)\cdots g(x_m) = \\ &= (-1)^{mn} b_0^m f(x'_1)f(x'_2)\cdots f(x'_n)\end{aligned}$$

есть многочлен от $a_0, \dots, a_m$, $b_0, \dots, b_n$.

Исключение переменных с помощью результантов

$$a_0(\lambda)x^m + a_1(\lambda)x^{m-1} + a_2(\lambda)x^{m-2} + \dots + a_m(\lambda) = 0$$
$$b_0(\lambda)x^n + b_1(\lambda)x^{n-1} + b_2(\lambda)x^{n-2} + \dots + b_n(\lambda) = 0$$

Пишем результант левых частей этих уравнений, рассматриваемых как многочлены от x, зависящие от переменных λ как от параметров. Получаем:

$$Q\big(a_0(\lambda), a_1(\lambda), \dots, a_m(\lambda), b_0(\lambda), b_1(\lambda), \dots, b_n(\lambda)\big) = 0$$

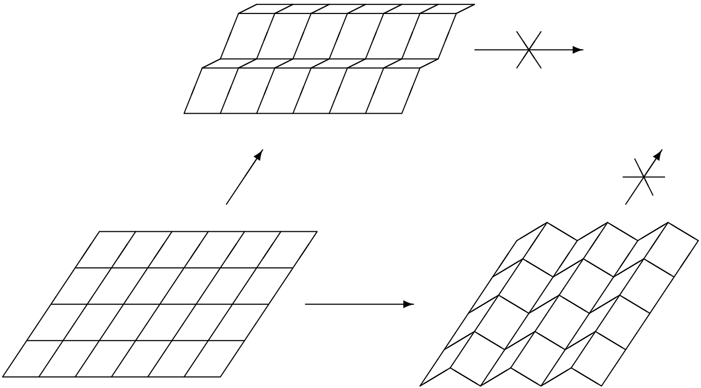
Применение к доказательству теоремы Сабитова

Формулы Эйлера для объёмов тетраэдров с вершинами в четвёрках вершин многогранника и соотношения Кэли–Менгера для пятёрок вершин многогранника дают огромную систему алгебраических соотношений между длинами рёбер, диагоналей и объёмами тетраэдров. Добавляем к ней уравнения, что для любого разбиения многогранника на неперекрывающиеся тетраэдры объём многогранника равен сумме объёмов этих тетраэдров.

И. Х. Сабитов предложил сложную комбинаторную процедуру, позволяющую, используя результанты, исключить из этой системы уравнений все длины диагоналей и объёмы тетраэдров и оставить одно уравнение связывающее объём всего многогранника с длинами рёбер.

Задача об изгибаемой двупериодической поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ – многограннная поверхность топологического типа плоскости, периодичная относительно сдвигов на векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Можем ли мы независимо сжимать её в двух различных направлениях?



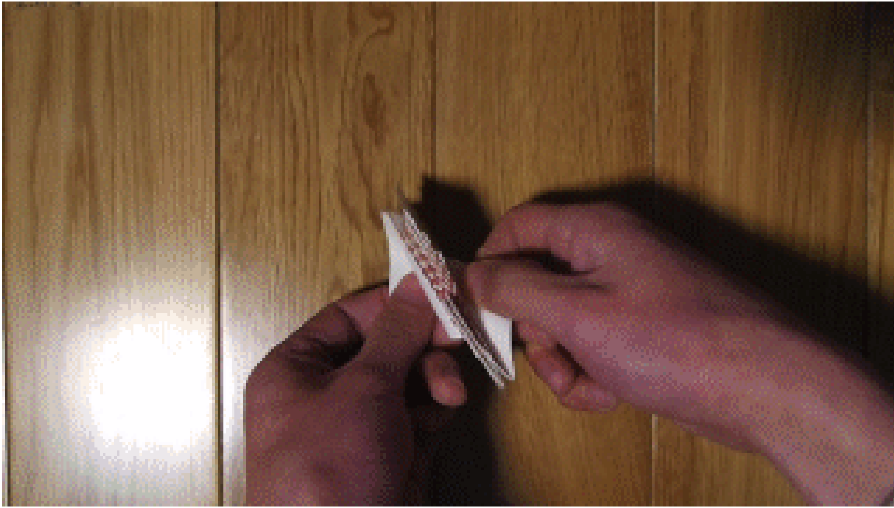
Задача об изгибаемой двупериодической поверхности

Более точно: мы разрешаем изгибать S так, что она остаётся двупериодической и векторы периодов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ изменяются непрерывно.

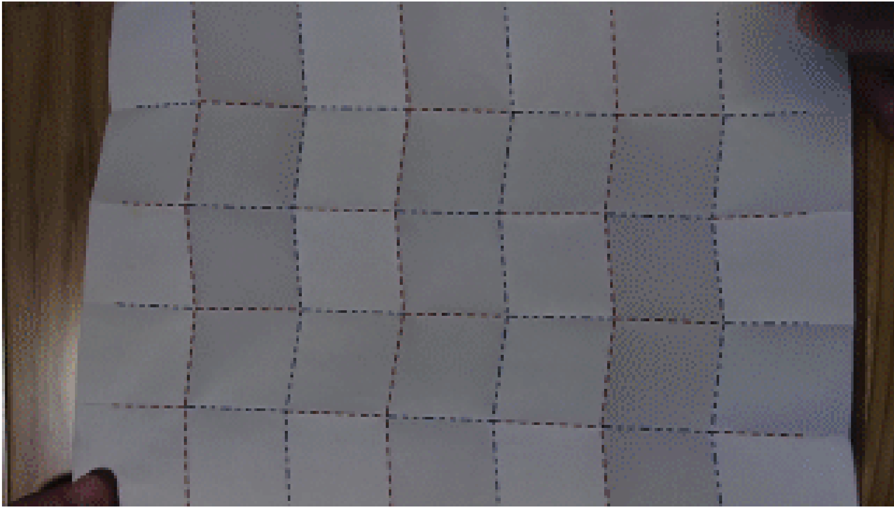
Теорема (А. А. Гайфуллин, С. А. Гайфуллин, 2013)

Параллелограмм векторов периодов имеет не более одной степени свободы.

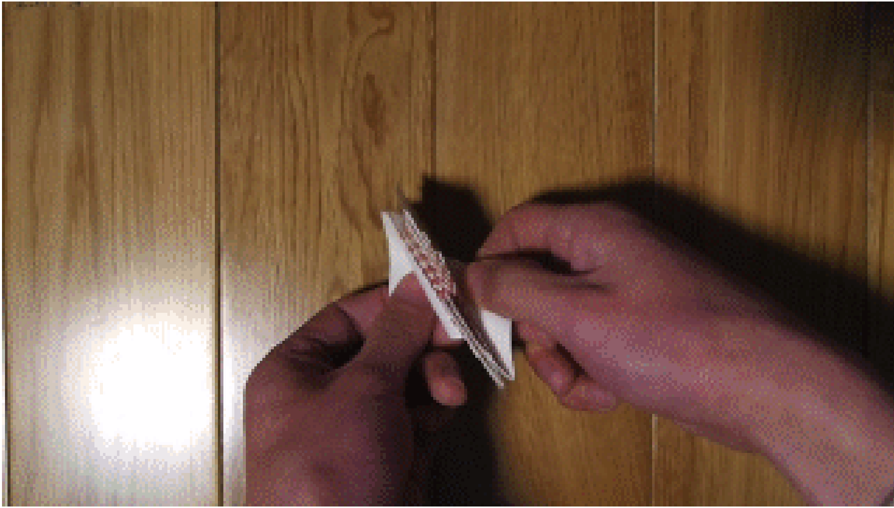
Нетривиальный пример двупериодической изгибаемой поверхности: Miura-ori folding



Пример изгибаемой поверхности: Miura-ori folding



Пример изгибаемой поверхности: Miura-ori folding



Спасибо за внимание!

В докладе использованы материалы с сайта
“Математические этюды” http://www.etudes.ru/ru/

Сюжет про изгибаемые многогранники можно найти здесь:
http://www.etudes.ru/ru/etudes/sabitov/