ГЛАВА V. РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

В. А. Шарафутдинов

1. Определение риманова многообразия. Связность Леви-Чивиты

Напомним, что в §13 главы 2 мы уже ввели понятие римановой метрики на многообразии. Повторим его здесь в несколько иных терминах.

Римановой метрикой на гладком многообразии M называется гладкое ковариантное тензорное поле $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$ валентности $(0,2)$, которое симметрично, $g(X,Y) = g(Y,X)$, и положительно определено во всех точках, т.е. $g_p(X,X) > 0$ для любой точки $p \in M$ и для любого вектора $0 \neq X \in T_pM$. Многообразие вместе с зафиксированной на нем римановой метрикой называется *римановым многообразием.* Риманово многообразие обычно обозначается (M,g). Иногда, впрочем, это обозначение сокращается до M, если из контекста ясно, о какой метрике идет речь. Само тензорное поле g обычно называют *метрическим тензором.*

В локальных координатах метрический тензор выглядит так:

$$g = g_{ij}\,dx^i \otimes dx^j, \tag{1.1}$$

где $g_{ij} = g_{ij}(x^1,\dots,x^n)$ — гладкие функции, заданные в области определения локальной системы координат; причем матрица (g_{ij}) симметрична и положительно определена. В старых учебниках по геометрии формула (1.1) писалась в виде

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \tag{1.2}$$

где ds интерпретировалось как дифференциал расстояния между близкими точками $(x^1,\dots,x^n)$ и $(x^1+dx^1,\dots,x^n+dx^n)$. При замене координат функции g_{ij} преобразуются по правилу преобразования координат тензорного поля валентности $(0,2)$:

$$g'_{ij} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\ell}{\partial x'^j}g_{k\ell}. \tag{1.3}$$

Положительно определенная матрица (g_{ij}) обратима. Обозначим обратную матрицу через (g^{ij}). Эта матрица также симметрична и, как легко следует из (1.3), ее компоненты преобразуются при замене координат по формуле

$$g'^{ij} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k}\frac{\partial x'^j}{\partial x^\ell}g^{k\ell}. \tag{1.4}$$

Это означает, что g^{-1} является контравариантным тензорным полем, т.е. $g^{-1} \in \mathcal{T}_0^2(M)$.

Метрический тензор определяет *скалярное произведение* в касательном пространстве T_pM для каждой точки $p \in M$. Мы будем обозначать это скалярное произведение через $\langle X,Y\rangle_g = g(X,Y)$, часто сокращая его до $\langle X,Y\rangle$. Таким образом,

$$\langle X,Y\rangle_g = \langle X,Y\rangle = g(X,Y) = g_{ij}X^iY^j \quad \text{для} \quad X,Y \in T_pM.$$

Скалярное произведение определяет *норму вектора* $\|X\| = \sqrt{\langle X,X\rangle}$ и *угол между векторами* $\cos\varphi = \langle X,Y\rangle/\|X\|\,\|Y\|$ для $X,Y \in T_pM$. Заметим также, что для двух

Date: апрель 2013, Кольцово.

гладких векторных полей $X, Y \in \mathcal{V}(M)$ скалярное произведение $\langle X, Y\rangle$ является гладкой функцией на M.

Скалярное произведение определяет канонический изоморфизм между пространством T_pM и сопряженным пространством T'_pM для каждой точки $p \in M$. Действительно, для фиксированного вектора $X \in T_pM$ отображение $T_pM \to \mathbb{R}$, $Y \mapsto \langle X, Y\rangle$ является линейным функционалом, т.е. элементом пространства T'_pM. Таким образом, любой вектор может одновременно рассматриваться как ковектор. Мы обычно будем рассматривать этот изоморфизм как отождествление, т.е.

$$T_pM = T'_pM.$$

В координатах это отождествление выражается формулой

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X_i\, dx^i,$$

где

$$X_i = g_{ij}X^j, \quad X^j = g^{ij}X_j. \tag{1.5}$$

Таким образом, мы перестаем различать векторы и ковекторы, а вместо этого говорим о ковариантных и контравариантных координатах вектора.

Отождествление векторов и ковекторов затем распространяется на тензоры и тензорные поля:

$$\mathcal{T}^r_s(M) = \mathcal{T}^{r+s}_0(M) = \mathcal{T}^0_{r+s}(M).$$

Мы не различаем ковариантные и контравариантные тензоры, а вместо этого говорим о ковариантных и контравариантных координатах одного и того же тензора. Например, для тензора второй валентности в координатах

$$T^{ij} = g^{ik}g^{j\ell}T_{k\ell}, \quad T_{ij} = g_{ik}g_{j\ell}T^{k\ell}. \tag{1.6}$$

Можно также использовать смешанные координаты двух сортов того же тензора:

$$T^i{}_j = g^{ik}T_{kj}, \quad T_i^{\ j} = g^{jk}T_{ik}. \tag{1.7}$$

Операции (1.5)–(1.7) называются *поднятием и опусканием индексов тензора.*

Чтобы убедиться, что на каждом многообразии существует риманова метрика, воспользуемся теоремой Уитни. Сначала упомянем, что евклидова метрика e на $\mathbb{R}^N$ задается в декартовых координатах формулой

$$\langle X, Y\rangle_e = \sum_{\alpha=1}^N X^\alpha Y^\alpha \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^N.$$

Согласно теореме 8.1 главы 2, любое многообразие можно вложить в евклидово пространство достаточно большой размерности. Пусть $r : M \to \mathbb{R}^N$ — такое вложение. Тогда мы можем определить риманову метрику на M формулой

$$\langle X, Y\rangle_g = \langle (d_pr)(X), (d_pr)(Y)\rangle_e \quad \text{для} \quad X, Y \in T_pM,$$

где $d_pr : T_pM \to \mathbb{R}^N$ — дифференциал вложения r. Говорят, что определенная таким образом риманова метрика g на M *индуцирована* евклидовой метрикой e посредством вложения r. В локальных координатах эта метрика задается формулой

$$g_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial r^\alpha}{\partial x^j}, \quad \text{если} \quad r = (r^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, r^N(x^1, \ldots, x^n)). \tag{1.8}$$

Формула (1.8) устанавливает также мостик между римановой геометрией и дифференциальной геометрией, читаемой на 2-м курсе, большая часть которой посвящена изучению двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. Действительно, переобозначив при $n = 2$ и $N = 3$

$$u = x^1,\ v = x^2; \quad E = g_{11},\ F = g_{12},\ G = g_{22},$$

мы можем переписать (1.2) в виде

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1.9}$$

где, согласно (1.8),

$$E = \langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial u} \rangle_e, \quad F = \langle \frac{\partial r}{\partial u}, \frac{\partial r}{\partial v} \rangle_e, \quad G = \langle \frac{\partial r}{\partial v}, \frac{\partial r}{\partial v} \rangle_e. \tag{1.10}$$

Формулы (1.9)–(1.10) являются определением первой квадратичной формы поверхности в обозначениях Гаусса, см. [2]. Напомним, что *внутренней геометрией поверхностей* называется та часть дифференциальной геометрии, которая изучает те свойства поверхности, которые зависят лишь от ее первой квадратичной формы. Таким образом, метрический тензор есть многомерное обобщение первой квадратичной формы поверхности, а риманова геометрия может рассматриваться как многомерный аналог внутренней геометрии поверхностей. К этой аналогии мы в дальнейшем будем неоднократно возвращаться.

Пусть (M, g) и $(M'g')$ — два римановых многообразия. Говорим, что гладкое отображение $\varphi : M \to M'$ *сохраняет риманову метрику*, если для любой точки $p \in M$

$$\langle X, Y \rangle_g = \langle d_p\varphi(X), d_p\varphi(Y) \rangle_{g'} \quad \text{для} \quad X, Y \in T_pM,$$

где $d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}M'$ — дифференциал отображения φ. Если, дополнительно, это отображение биективно, то говорим, что φ — *изометрия римановых многообразий.*

Пусть (M, g) — риманово многообразие. Говорим, что связность ∇ на M *совместна с метрикой*, если параллельный перенос относительно этой связности сохраняет скалярное произведение, т.е. если $X(t)$ и $Y(t)$ — параллельные вдоль кривой $\gamma(t)$ векторные поля, то скалярное произведение $\langle X(t), Y(t) \rangle$ постоянно.

Лемма 1.1. *Пусть связность ∇ совместна с метрикой. Если $X(t)$ и $Y(t)$ — векторные поля вдоль кривой $\gamma(t)$, то*

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \langle \frac{DX}{dt}, Y \rangle + \langle X, \frac{DY}{dt} \rangle. \tag{1.11}$$

Доказательство. Для некоторого t_0 в пространстве $T_{\gamma(t_0)}M$ выберем ортонормированный базис $(e_1(t_0), \ldots, e_n(t_0))$ и затем продолжим каждый вектор $e_i(t_0)$ до параллельного вдоль γ векторного поля $e_i(t)$. Тогда $(e_1(t), \ldots, e_n(t))$ есть ортонормированный базис пространства $T_{\gamma(t)}M$ при каждом t поскольку параллельный перенос сохраняет скалярное произведение. Пусть $X(t) = X^i(t)e_i(t)$ и $Y(t) = Y^i(t)e_i(t)$ — векторные поля вдоль γ. Тогда $\langle X, Y \rangle = \sum\limits_i X^iY^i$ и

$$\frac{DX}{dt} = \frac{dX^i}{dt}e_i, \quad \frac{DY}{dt} = \frac{dY^i}{dt}e_i.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\langle X, Y \rangle = \sum_i \left(\frac{dX^i}{dt}Y^i + X^i\frac{dY^i}{dt} \right) = \langle \frac{DX}{dt}, Y \rangle + \langle X, \frac{DY}{dt} \rangle.$$

$\square$

Следствие 1.2. *Для любых трех векторных полей $X, Y, Z \in \mathcal{V}(M)$ справедливо равенство*

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle. \tag{1.12}$$

Доказательство. Для фиксированной точки $p \in M$ выберем кривую $\gamma(t)$ так, что $\gamma(0) = p$ и $\dot\gamma(0) = X_p$, и применим (1.11)

$$X_p\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_{X_p} Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{X_p} Z\rangle.$$

Это доказывает (1.12) поскольку точка p произвольна. $\square$

Следующее утверждение часто называют основной теоремой римановой геометрии, хотя его доказательство несложно.

Теорема 1.3. *На римановом многообразии существует единственная симметричная связность, совместная с метрикой.*

Отсюда, в частности, следует анонсированное в §3 предыдущей главы утверждение: на любом многообразии существует связность. Связность, существование и единственность которой гарантирует теорема 1.3, иногда называют *римановой связностью*, чтобы подчеркнуть, что она определяется римановой метрикой; но чаще ее называют *связностью Леви-Чивиты* по имени ее автора.

Доказательство. Сначала докажем единственность, для чего получим явную формулу, выражающую символы Кристоффеля через метрический тензор.

Пусть ∇ — симметричная связность, совместная с метрикой, и $(U; x^1, \dots, x^n)$ — локальная система координат на M. Тогда $g_{jk} = \langle \partial_j, \partial_k\rangle$. Применяя правило (1.12), получаем

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \partial_i\langle \partial_j, \partial_k\rangle = \langle \nabla_{\partial_i}\partial_j, \partial_k\rangle + \langle \partial_j, \nabla_{\partial_i}\partial_k\rangle. \tag{1.13}$$

Подставив сюда значение $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^\ell_{ij}\partial_\ell$, получим

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma^\ell_{ij}\langle \partial_\ell, \partial_k\rangle + \Gamma^\ell_{ik}\langle \partial_j, \partial_\ell\rangle = \Gamma^\ell_{ij}\, g_{\ell k} + \Gamma^\ell_{ik}\, g_{j\ell}.$$

Тем самым мы пришли к линейной системе уравнений относительно символов Кристоффеля

$$g_{k\ell}\Gamma^\ell_{ij} + g_{j\ell}\Gamma^\ell_{ik} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}, \tag{1.14}$$

где индексы i, j, k могут принимать произвольные значения. Эта система легко решается. Действительно, допишем к (1.14) еще два уравнения, первое из которых получается из (1.14) перестановкой индексов i и j, а второе — перестановкой индексов i и k

$$\begin{aligned} g_{k\ell}\Gamma^\ell_{ij} + g_{j\ell}\Gamma^\ell_{ik} &= \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i},\\ g_{k\ell}\Gamma^\ell_{ij} + g_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} &= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},\\ g_{i\ell}\Gamma^\ell_{jk} + g_{j\ell}\Gamma^\ell_{ik} &= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \end{aligned}$$

Отметим, что при этом мы воспользовались симметричностью связности, т.е. симметричностью символов Кристоффеля по нижним индексам. Сложив первые два уравнения и вычтя из суммы третье уравнение, получаем

$$2g_{k\ell}\Gamma^{\ell}_{ij} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Отсюда символы Кристоффеля однозначно находятся поскольку $(g_{k\ell})$ — невырожденная матрица. А именно, умножим эту формулу на $g^{p\ell}$, произведем суммирование по ℓ и воспользуемся тем, что $g^{p\ell}g_{k\ell} = \delta^p_k$. В итоге получаем

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kp}\Big(\frac{\partial g_{ip}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jp}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^p}\Big). \tag{1.15}$$

Тем самым утверждение о единственности доказано.

Существование доказывается по следующей схеме. Определим символы Кристоффеля формулой (1.15) в локальных координатах. Затем докажем корректность этого определения, т.е. что при замене координат так определенные символы Кристоффеля преобразуются по формуле (3.13) предыдущей главы. Это делается путем непосредственных вычислений, исходя из формул (1.3)–(1.4); я не привожу эти вычисления. Тем самым симметричная связность ∇ корректно определена. Остается доказать ее совместность с метрикой. Для этого сначала доказываем, что из определения (1.15) вытекает справедливость формулы (1.13). В свою очередь, как нетрудно видеть, формула (1.13) эквивалентна (1.12), что означает совместность связности с метрикой. $\square$

Полученная в ходе доказательства формула (1.15) является одной из основных формул римановой геометрии, она будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Упражнения

1. Обобщите формулу (1.8) в следующем направлении. Пусть (M,g) — риманово многообразие. Метрика g индуцирует некоторую вполне определенную риманову метрику на любом подмногообразии $A \subset M$ так, что вложение касательных пространств $T_pA \subset T_pM$ сохраняет скалярное произведение для любой точки $p \in A$.

2. Как мы знаем, связность определяет ковариантную производную тензорных полей произвольной валентности. Докажите, что симметричная связность ∇ на римановом многообразии является связностью Леви-Чивиты тогда и только тогда, когда $\nabla g = 0$. Отсюда следует правило, облегчающее многие вычисления с тензорами: операции поднятия и опускания индексов перестановочны с ковариантным дифференцированием. Например, для тензорных полей валентности 2

$$\nabla_k T^i{}_j = g^{ip}\,\nabla_k T_{pj} = g_{jp}\nabla_k T^{ip}.$$

3. Пусть (M,g) — риманово многообразие. Для подмногообразия $A \subset M$ пусть $\widetilde{g}$ — индуцированная риманова метрика на A, как в упражнении 1. Докажите, что связность Леви-Чивиты $\widetilde{\nabla}$ многообразия $(A,\widetilde{g})$ выражается через связность Леви-Чивиты ∇ многообразия (M,g) следующим образом. Пусть $p \in A$, $X \in T_pA$ и Y — векторное поле на A. Продолжим Y до векторного поля $\widehat{Y} \in \mathcal{V}(M)$. Тогда

$$\widetilde{\nabla}_X Y = P(\nabla_X \widehat{Y}),$$

где $P : T_pM \to T_pA$ — ортогональная проекция.

2. Тензор кривизны риманова многообразия

Напомню, что для произвольной связности ∇ тензор кривизны определяется формулой

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \quad \text{для} \quad X,Y,Z \in \mathcal{V}(M). \tag{2.1}$$

В случае риманова многообразия (M,g) тензор кривизны связности Леви-Чивиты называют *тензором кривизны метрики* g или *тензором кривизны Римана.* В этом параграфе мы рассмотрим алгебраические свойства этого тензора.

Предложение 2.1. *На римановом многообразии тензор кривизны Римана обладает следующими симметриями*

$$R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z, \tag{2.2}$$

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0, \tag{2.3}$$

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = -\langle R(X,Y)U,Z\rangle, \tag{2.4}$$

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = \langle R(Z,U)X,Y\rangle. \tag{2.5}$$

Доказательство. Мы знаем, что значение векторного поля $R(X,Y)Z$ в точке p зависит лишь от значений полей X,Y,Z в этой точке. Благодаря этому, достаточно установить справедливость каждого из доказываемых равенств в случае, когда попарные скобки Ли всех участвующих в равенстве векторных полей тождественно равны нулю. В этом случае формула (2.1) упрощается до следующей

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z \tag{2.6}$$

и равенство (2.2) становится очевидным. Отметим также, что симметричность связности означает в данном случае, что

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0. \tag{2.7}$$

Согласно (2.6),

$$\begin{aligned} &R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\ &\qquad = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y. \end{aligned}$$

В силу (2.7), все слагаемые в правой части этого равенства попарно сокращаются и мы приходим к (2.3).

Равенство (2.4) эквивалентно тождеству $\langle R(X,Y)Z,Z\rangle = 0$. Так как связность ∇ совместна с метрикой, то

$$\langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \langle R(X,Y)Z,Z\rangle &= \langle \nabla_X\nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y\nabla_X Z, Z\rangle = X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle \\ &= \frac{1}{2}XY\langle Z,Z\rangle - \frac{1}{2}YX\langle Z,Z\rangle = \frac{1}{2}[X,Y]\langle Z,Z\rangle = 0. \end{aligned}$$

Тождество (2.5) является чисто алгебраическим следствием трех предыдущих. Действительно, из (2.2) и (2.3) следует, что

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = -\langle R(Y,X)Z,U\rangle = \langle R(X,Z)Y,U\rangle + \langle R(Z,Y)X,U\rangle,$$

а из (2.4) и (2.3) следует, что

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = -\langle R(X,Y)U,Z\rangle = \langle R(Y,U)X,Z\rangle + \langle R(U,X)Y,Z\rangle.$$

Складывая последние две формулы, получаем

$$2\langle R(X,Y)Z,U\rangle = \langle R(X,Z)Y,U\rangle + \langle R(Z,Y)X,U\rangle + \langle R(Y,U)X,Z\rangle + \langle R(U,X)Y,Z\rangle.$$

Меняя в этом равенстве местами X и Z, а также Y и U, имеем

$$2\langle R(Z,U)X,Y\rangle = \langle R(Z,X)U,Y\rangle + \langle R(X,U)Z,Y\rangle + \langle R(U,Y)Z,X\rangle + \langle R(Y,Z)U,X\rangle.$$

В силу (2.2) и (2.3) правые части двух последних формул совпадают.

□

Пусть $(R^i{}_{jk\ell})$ координаты тензора кривизны относительно локальной системы координат. Опустив верхний индекс, получим чисто ковариантный тензор $(R_{ijk\ell})$. Его индексы упорядочены так, что

$$\langle R(X,Y)Z,U\rangle = R_{ijk\ell}X^kY^\ell Z^jU^i.$$

Симметрии (2.2)–(2.5) выражаются в координатах равенствами:

$$R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k}, \tag{2.8}$$

$$R_{ijk\ell} + R_{ik\ell j} + R_{i\ell jk} = 0, \tag{2.9}$$

$$R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}, \tag{2.10}$$

$$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}. \tag{2.11}$$

Тензор четвертой валентности имеет n^4 координат. Однако в силу симметрий (2.8)–(2.11) между координатами тензора кривизны имеется много линейных зависимостей. Можно показать, что число линейно независимых координат этого тензора равно $n^2(n^2-1)/12$.

Тензор кривизны можно выразить через метрический тензор. Для этого надо подставить значения (1.15) символов Кристоффеля в формулу (4.6) главы 4. Понятно, что при этом получится квазилинейный (т.е. линейный по старшим производным) дифференциальный оператор второго порядка от координат метрического тензора. Это выражение настолько громоздко, что в общем случае не представляет практической ценности. Однако в некоторых частных случаях, когда координаты выбраны так, что метрический тензор имеет простую структуру, это выражение упрощается и может быть полезным.

Свернув тензор кривизны по двум индексам, получим симметричный тензор второй валентности

$$Ric_{ij} = R^p{}_{ipj},$$

который называется *тензором Риччи.* Если этот тензор в свою очередь свернуть с метрическим тензором, то получается скалярная функция

$$S = \operatorname{tr} Ric = g^{ij}Ric_{ij},$$

называемая *скалярной кривизной.* Эти понятия важны, в первую очередь, в общей теории относительности, где тензор $Ric_{ij} - Sg_{ij}$ интерпретируется как тензор энергии – импульса, а скалярная кривизна S отождествляется с плотностью массы материи во вселенной.

Для $X, Y \in T_pM$ положим

$$k(X,Y) = \langle R(X,Y)Y,X\rangle \quad \text{или в координатах} \quad k(X,Y) = R_{ijk\ell}X^iX^kY^jY^\ell. \tag{2.12}$$

Введем также обозначения

$$R_0(X,Y)Z = \langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y$$

и

$$k_0(X,Y) = \langle R_0(X,Y)Y, X\rangle = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X,Y\rangle^2.$$

Если векторы X и Y линейно независимы, то $k_0(X,Y) > 0$ и имеет смысл отношение

$$K(p,\sigma) = K(X,Y) = \frac{k(X,Y)}{k_0(X,Y)}. \tag{2.13}$$

Легко убедиться, что это отношение зависит не от самих векторов X, Y, а лишь от двумерного подпространства $\sigma \subset T_pM$, натянутого на эти векторы. Действительно, если X', Y' второй базис подпространства σ, то

$$X' = a_{11}X + a_{12}Y, \quad Y' = a_{21}X + a_{22}Y$$

с невырожденной матрицей $a = (a_{ij})$. Легко проверить, что

$$k(X,Y) = (\det a)^2 k(X',Y'), \quad k_0(X,Y) = (\det a)^2 k_0(X',Y').$$

Определяемое равенством (2.13) число $K(p,\sigma)$ называется *секционной кривизной* риманова многообразия (M,g) в точке p и двумерном направлении σ. В отличие от тензора R, секционная кривизна имеет более наглядный геометрический смысл; мы обсудим его позднее. Можно показать, что тензор R однозначно определяется секционной кривизной, см. упражнение 3 ниже.

Буква R используется для обозначения тензора кривизны в честь Римана, который первым ввел в рассмотрение этот тензор. Расскажем здесь вкратце, как Риман пришел к этому. В то время понятия риманова многообразия еще не существовало, равно как и понятия связности; они сформировались позднее, в значительной степени благодаря работам Римана.

Хорошо известно, что положительно определенную квадратичную форму с постоянными коэффициентами можно привести к сумме квадратов путем линейной замены переменных. В случае квадратичной формы с переменными коэффициентами ситуация гораздо сложнее. Риман задался вопросом: в каком случае положительно определенная квадратичная форма

$$g_{ij}(x^1,\dots,x^n)\,dx^i\,dx^j \tag{2.14}$$

может быть преобразована в форму с постоянными коэффициентами путем замены переменных? Согласно (1.14)–(1.15), коэффициенты квадратичной формы постоянны тогда и только тогда, когда все символы Кристоффеля тождественно равны нулю. Согласно формуле (3.13) предыдущей главы, преобразование $x^i = x^i(x'^1,\dots,x'^n)$ переводит данную положительно определенную квадратичную форму в форму с постоянными коэффициентами тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial x'^i \partial x'^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^j}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.15}$$

Таким образом, речь идет о решении системы уравнений (2.15), которые должны удовлетворяться для всех значений индексов (i,j,k). Риман доказал, что система (2.15) локально разрешима тогда и только тогда когда тензор кривизны квадратичной формы (2.14) тождественно равен нулю. Коль скоро положительно определенная квадратичная форма преобразована в форму с постоянными коэффициентами, ее затем можно привести к сумме квадратов. Таким образом, выражаясь современным языком, результат Римана можно сформулировать так:

Теорема 2.2. *Риманово многообразие (M,g) локально изометрично евклидову пространству $(\mathbb{R}^n, e)$ тогда и только тогда, когда его тензор кривизны тождественно равен нулю.*

Евклидова метрика e на $\mathbb{R}^n$ определяется равенством $\langle X,Y\rangle_e = \sum_i X^iY^i$ в декартовых координатах.

Метод Римана был в дальнейшем распространен и на другие системы уравнений типа (2.15). В теории уравнений с частными производными известны так называемые *инварианты Римана*, используемые в качестве условий разрешимости подобных систем.

Упражнения

1. В двумерном случае секционная кривизна является функцией точки: $K(p,\sigma) = K(p)$ поскольку $\sigma = T_pM$. С другой стороны, согласно приведенному после формулы (2.11) замечанию, все координаты тензора кривизны пропорциональны одной из них. Таким образом, в двумерном случае тензор кривизны определяется одной скалярной функцией. В качестве этой функции можно выбрать секционную кривизну $K = K(p)$, через которую тензор кривизны выражается так:

$$R_{ijk\ell} = K(g_{ik}g_{j\ell} - g_{i\ell}g_{jk}). \tag{2.16}$$

Докажите эту формулу.

2. Напомним, что гауссова кривизна поверхности, определяемая как произведение главных кривизн, оказывается объектом внутренней геометрии, т.е. выражается через коэффициенты первой квадратичной формы. В этом состоит содержание знаменитой теоремы Гаусса. Таким образом гауссова кривизна оказывается определенной для двумерного риманова многообразия. Докажите, что она совпадает с секционной кривизной. Для этого Вам придется вспомнить выражение гауссовой кривизны через коэффициенты первой квадратичной формы.

3. Докажите, что тензор кривизны выражается через биквадратичную форму (2.12) формулой

$$\begin{aligned}6\langle R(X,Y)Z,U\rangle &= k(X+U,Y+Z) - k(X+U,Y) - k(X+U,Z)\\ &- k(X,Y+Z) - k(U,Y+Z) + k(X,Z) + k(U,Z)\\ &- k(Y+U,X+Z) + k(Y+U,X) + k(Y+U,Z)\\ &+ k(Y,X+Z) + k(U,X+Z) - k(Y,Z) - k(U,Z).\end{aligned}$$

Отсюда следует упомянутое утверждение: тензор кривизны однозначно определяется секционной кривизной.

4. Докажите, что если секционная кривизна риманова многообразия постоянна $K(p,\sigma) = K = \mathrm{const}$, то тензор кривизны выражается формулой (2.16).

5. В трехмерном случае в выражении $R_{ijk\ell}$ хотя бы два индекса совпадают. Из этого очевидного наблюдения следует важное утверждение: тензор кривизны трехмерного риманова многообразия однозначно определяется тензором Риччи. Найдите явную формулу, выражающую $R_{ijk\ell}$ через Ric_{ij} и g_{ij} в трехмерном случае.

3. Геодезические и экспоненциальное отображение

Пусть (M,g) — риманово многообразие. *Длиной* кривой $\gamma : [a,b] \to M$ называется

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt$$

или в координатах

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b \left(g_{ij}(\gamma(t))\dot\gamma^i(t)\dot\gamma^j(t)\right)^{1/2} dt.$$

Для существования этого интеграла достаточно, чтобы γ была кривой класса C^1 (или даже непрерывной и кусочно-дифференцируемой кривой). *Длиной дуги* такой кривой называется функция

$$s(t) = L(\gamma|_{[t_0,t]}) = \int\limits_{t_0}^t \|\dot\gamma(\tau)\|\,d\tau.$$

Говорим, что кривая параметризована длиной дуги или *естественно параметризована*, если $s(t) = t + \mathrm{const}$. Равенство $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы кривая была естественно параметризована.

Коль скоро определена длина кривой, легко определить *расстояние между точками.* Считая многообразие M связным, полагаем для $p,q \in M$

$$\rho(p,q) = \inf L(\gamma), \tag{3.1}$$

где точная нижняя грань берется по всем гладким кривым $\gamma : [a, b] \to M$, соединяющим точки p и q, т.е. $\gamma(a) = p,\ \gamma(b) = q$. Легко убедиться, что так определенная функция $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ удовлетворяет аксиомам расстояния (см. §3 главы 1), так что (M, ρ) становится метрическим пространством.

Определение 3.1. *Пусть (M, g) — риманово многообразие. Гладкая параметризованная кривая $\gamma : (a, b) \to M$ называется геодезической, если ее вектор ускорения тождественно равен нулю, т.е.*

$$\frac{D\dot\gamma}{dt} = 0. \tag{3.2}$$

Применяя правило (1.11) дифференцирования скалярного произведения, получаем из (3.2)

$$\frac{d}{dt}\|\dot\gamma\|^2 = \frac{d}{dt}\langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = 2\langle\frac{D\dot\gamma}{dt}, \dot\gamma\rangle = 0,$$

т.е. $\|\dot\gamma(t)\| = \mathrm{const}$. Таким образом, параметр t геодезической $\gamma(t)$ пропорционален длине дуги.

Согласно формуле (5.2) предыдущей главы, уравнение (3.2) в координатах выглядит так:

$$\ddot\gamma^i + \Gamma^i_{jk}\dot\gamma^j\dot\gamma^k = 0. \quad (1 \le i \le n). \tag{3.3}$$

Отметим, что это — система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, причем уравнения не линейны поскольку второе слагаемое квадратично по $\dot\gamma$. Начальные условия для такой системы выглядят так:

$$\gamma^i(0) = x^i_0, \quad \dot\gamma^i(0) = X^i_0 \quad (1 \le i \le n)$$

или

$$\gamma(0) = p \in M, \quad \dot\gamma(0) = X \in T_pM. \tag{3.4}$$

Как доказывается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, решение задачи Коши (3.3)–(3.4) существует при малых $|t|$ и единственно. Обычно это выражают фразой: из любой точки в любом направлении выходит единственная геодезическая. Более точно: для любой точки $(p_0, X_0) \in TM$ найдется окрестность $W \subset TM$ этой точки и число $\varepsilon > 0$, такие, что для $(p, X) \in W$ решение задачи (3.3)–(3.4) существует и единственно при $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Более удобным является следующее утверждение:

Лемма 3.2. *Для каждой точки p_0 риманова многообразия M существуют такая окрестность U точки p_0 и такое $\varepsilon > 0$, что для любой точки $p \in U$ и любого вектора $X \in T_pM$, удовлетворяющего $\|X\| < \varepsilon$, существует единственная геодезическая*

$$\gamma_{p,X} : (-2, 2) \to M,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\gamma_{p,X}(0) = p, \quad \dot\gamma_{p,X}(0) = X.$$

Доказательство. Согласно приведенному перед леммой утверждению, можно найти окрестность U точки p_0 и положительные числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, такие, что для каждой точки $p \in U$ и каждого $X \in T_pM$, удовлетворяющего $\|X\| < \varepsilon_1$, существует единственная геодезическая

$$\gamma_{p,X} : (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \to M,$$

удовлетворяющая требуемым начальным условиям.

Чтобы получить отсюда утверждение леммы, достаточно заметить, что уравнение геодезических (3.2) обладает следующим свойством однородности: если параметризованная кривая $t \mapsto \gamma(t)$ является геодезической, то кривая $t \mapsto \gamma(ct)$ также является геодезической для любой константы c.

Пусть теперь $\varepsilon < \varepsilon_1\varepsilon_2$. Тогда, если $\|X\| < \varepsilon$ и $|t| < 2$, то

$$\|X/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1 \quad \text{и} \quad |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

Поэтому мы можем определить $\gamma_{p,X}(t)$ как $\gamma_{p,X/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$.

□

Удобно ввести следующее обозначение. Пусть вектор $X \in T_pM$ таков, что существует геодезическая

$$\gamma : [0,1] \to M,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$\gamma(0) = p, \quad \dot\gamma(0) = X.$$

Тогда полагаем

$$\exp_p(X) = \gamma(1).$$

Точка $\exp_p(X)$ называется *экспонентой вектора* X. Сама геодезическая γ может быть записана в виде

$$\gamma(t) = \exp_p(tX).$$

Согласно лемме 3.2, $\exp_p(X)$ определена для достаточно малых $\|X\|$. Вообще говоря, $\exp_p(X)$ не определена при больших X. Но если $\exp_p(X)$ определена, то обязательно однозначно.

Обозначим через $B_\varepsilon = \{X \in T_pM \mid \ \|X\| < \varepsilon\} \subset T_pM$ открытый шар радиуса ε с центром в нуле. *Экспоненциальное отображение*

$$\exp_p : B_\varepsilon \to M \tag{3.5}$$

определено при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Гладкость этого отображения следует из того, что решение задачи Коши гладко зависит от начальных данных. Заметим, что дифференциал этого отображения в нуле

$$d_0 \exp_p : T_pM \to T_pM$$

является тождественным отображением.

Чтобы доказать это утверждение, заметим сначала, что для произвольного гладкого отображения $f : M \to N$ дифференциал $d_qf : T_qM \to T_{f(q)}N$ можно описать следующим образом. Если $\gamma : (-a,a) \to M$ — кривая, для которой $\gamma(0) = q$, и $\delta = f \circ \gamma : (-a,a) \to N$, то $(d_qf)(\dot\gamma(0)) = \dot\delta(0)$.

Применим это правило к отображению $T_pM \supset B_\varepsilon \xrightarrow{\exp_p} M$, полагая в предыдущем предложении $q = 0 \in T_pM$. Для $X \in T_pM = T_0(T_pM)$ определяем кривую $\gamma : (-a,a) \to T_pM$, полагая $\gamma(t) = tX$. Тогда $\delta(t) = (\exp_p \circ \gamma)(t) = \exp_p(tX)$. Следовательно,

$$(d_0 \exp_p)(X) = \dot\delta(0) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp_p(tX) = X.$$

Итак, дифференциал отображения (3.5) в точке $0 \in T_pM$ невырожден. Согласно теореме об обратной функции, для некоторого $0 < \varepsilon' \le \varepsilon$ отображение $\exp_p$ отображает шар $B_{\varepsilon'}$ диффеоморфно на некоторую окрестность $U \subset M$ точки p. Ниже мы докажем более точное утверждение, см. теорему 3.3.

Кроме задачи Коши, для уравнений второго порядка часто рассматривают краевую задачу: найти решение уравнения, принимающее заданные значения в двух различных точках. В применении к геодезическим, эта задача звучит так: найти геодезическую, соединяющую две данные точки $p, q \in M$. В общем случае эта задача может не иметь решения, а может иметь бесконечно много решений. Но локальный вариант этой задачи всегда имеет единственное решение, как показывает следующая

Теорема 3.3. *Для каждой точки* p_0 *риманова многообразия* M *существуют окрестность* W *и число* $\varepsilon > 0$*, такие, что*

(1) *Любые две точки из* W *соединяет одна и только одна геодезическая длины меньше* ε.

(2) *Эта геодезическая гладко зависит от своих концов, т.е. если* $t \mapsto \exp_{p_1}(tX)$ $(0 \le t \le 1)$ — *геодезическая, соединяющая* p_1 *и* p_2*, то пара* $(p_1, X) \in TM$ *гладко зависит от пары* $(p_1, p_2) \in W \times W$.

(3) *Для каждой точки* $p \in W$ *отображение* $\exp_p$ *отображает шар* $B_\varepsilon = \{X \in T_pM \mid \|X\| < \varepsilon\}$ *диффеоморфно на открытое множество* $U_p \supset W$.

Доказательство. Напомним, что в §4 главы 2 мы снабдили касательное расслоение TM структурой гладкого многообразия размерности $2n = 2\dim M$. Отображение $(p, X) \mapsto \exp_p(X)$ определено в некоторой окрестности $V \subset TM$ точки $(p_0, 0)$. Рассмотрим гладкое отображение

$$E : V \to M \times M, \quad E(p, X) = (p, \exp_p(X)).$$

Дифференциал $d_{(p_0,0)}E$ отображения E в точке $(p_0, 0)$ невырожден. В самом деле, пусть $(U; x^1, \dots, x^n)$ локальная система координат на M, определенная в окрестности U точки p_0. Обозначим через $(x_1^1, \dots, x_1^n, x_2^1, \dots, x_2^n)$ соответствующие координаты в $U \times U \subset M \times M$, а через $(x^1, \dots, x^n, X^1, \dots, X^n)$ обозначим индуцированные координаты в $\pi^{-1}(U) \subset TM$ (см. конец параграфа 4 главы 2). Матрица Якоби отображения E в выбранных координатах имеет вид

$$d_{(p_0,0)}E = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

где I — единичная $n \times n$-матрица. Единственным неочевидным местом здесь является правый нижний блок этой матрицы. Но этот блок совпадает с матрицей Якоби дифференциала $d_0 \exp_{p_0}$, который является тождественным отображением пространства $T_{p_0}M$, как мы показали выше.

По теореме об обратной функции E отображает некоторую окрестность V' точки $(p_0, 0) \in TM$ диффеоморфно на окрестность точки $(p_0, p_0) \in M \times M$. Можно считать, что V' состоит из тех (p, X), что $p \in U'$ и $\|X\| < \varepsilon$. Выберем меньшую окрестность W точки p_0 так что $E(V') \supset W \times W$. Для этих W и ε справедливы все утверждения теоремы. $\square$

В заключение параграфа рассмотрим два простейших примера.

Евклидова метрика e на $\mathbb{R}^n$ определяется в декартовых координатах равенством

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X^i Y^i \quad \text{для} \quad X, Y \in T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n.$$

Координаты метрического тензора в декартовой системе координат (а также в аффинной системе координат) постоянны и, следовательно, символы Кристоффеля тождественно равны нулю. Уравнения геодезических (3.3) принимают вид

$$\ddot\gamma^i = 0.$$

Решение этой системы очевидно: $\gamma(t) = At + B$ с постоянными $A, B \in \mathbb{R}^n$. Другими словами: геодезические евклидова пространства — прямые. Поэтому можно сказать, что понятие геодезической в римановом многообразии является аналогом понятия прямой в евклидовом пространстве.

В римановом многообразии $(\mathbb{R}^n, e)$ любые две точки соединяются единственной геодезической. Если же мы выбросим из $\mathbb{R}^n$ одну точку, то для полученного риманова многообразия перестанет быть верным утверждение: для любых двух точек существует соединяющая их геодезическая.

В качестве второго примера рассмотрим прямой круговой цилиндр $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ с индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрикой, см. Рис. 1. Я утверждаю, что геодезическими на цилиндре являютя три семейства линий: (1) прямолинейные вертикальные образующие, (2) окружности, получающиеся пересечением цилиндра горизонтальными плоскостями, и (3) винтовые линии. Чтобы убедиться в этом, разрежем цилиндр по одной из вертикальных образующих и развернем на плоскую полосу $\Pi = \{(x, z) \mid -\pi \leq x \leq \pi\} \subset \mathbb{R}^2$. Очевидно, при этом метрика цилиндра перейдет в евклидову метрику, а каждая геодезическая цилиндра перейдет в прямую, возможно разделенную на куски линией разреза. Обратно, цилиндр получается из полосы Π склеиванием вертикальных сторон, при этом прямые переходят в линии трех указанных семейств. Отметим, что на цилиндре каждые две точки соединяются бесконечным числом геодезических.

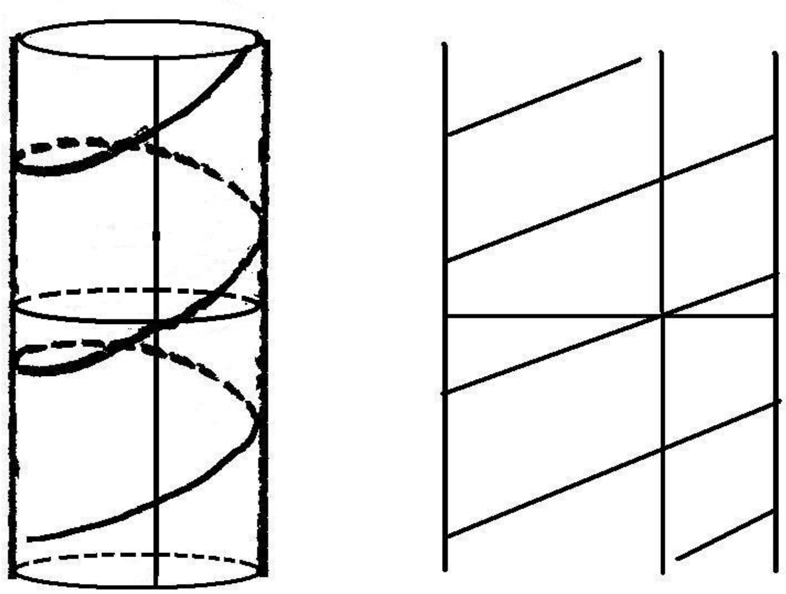

Рис. 1. Геодезические на круглом цилиндре

Упражнения

1. Проверьте, что определенное формулой (3.1) расстояние ρ между точками связного риманова многообразия M удовлетворяет аксиомам метрического пространства. Докажите затем, что определяемая метрикой ρ топология совпадает с исходной топологией многообразия M.

2. Напишите уравнения геодезических (т.е. уравнения прямых) евклидова пространства $(\mathbb{R}^3, e)$ в сферических координатах, введенных в упражнении 3 из §3 предыдущей главы.

3. Фиксируем точку p риманова многообразия (M, g) и выберем ортонормированный базис $(e_1, \dots, e_n)$ в T_pM. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $\exp_p$ диффеоморфно отображает шар $B_\varepsilon = \{X \mid \|X\| < \varepsilon\} \subset T_pM$ на некоторую окрестность U точки p. Определим в U координаты условием: точка $x \in U$ имеет координаты $(x^1, \dots, x^n)$, если $(\exp_p)^{-1}(x) = x^i e_i$. Это — так называемые *нормальные координаты* (с центром в точке p). Докажите, что в нормальных координатах

(а) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера);

(б) символы Кристоффеля обращаются в нуль в точке p;

(в) проходящие через p геодезические выражаются линейными функциями: $\gamma^i(t) = c^i t$ ($c^i = \mathrm{const}$).

4. Пусть (M, g) и $(M'g')$ — два римановых многообразия и $\varphi : M \to M'$ — изометрия римановых многообразий. Докажите, что φ сохраняет расстояния между точками и переводит геодезические в геодезические. Оба утверждения перестают быть верными, если φ сохраняет риманову метрику, но не является биективным отображением. Например, тождественное вложение цилиндра, рассмотренного в конце параграфа, в евклидово пространство $(\mathbb{R}^3, e)$ сохраняет риманову метрику (это — тавтология поскольку метрика на цилиндре индуцируется евклидовой метрикой e). Очевидно, расстояние между точками цилиндра, измеренное в смысле его внутренней геометрии, не совпадает с евклидовым расстоянием. Большинство геодезических цилиндра не являются прямыми.

5. **Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского.** В верхней полуплоскости

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$$

введем риманову метрику g, положив

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Двумерное риманово многообразие $(\mathbb{H}^2, g)$ называется *моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского.* Это обозначение обычно сокращается до $\mathbb{H}^2$. Убедитесь, что определяемый метрикой g угол между векторами $X, Y \in T_p\mathbb{H}^2$ совпадает с евклидовым углом для каждой точки $p \in \mathbb{H}^2$.

5.1. Напишите уравнения геодезических в $\mathbb{H}^2$, проинтегрируйте их и докажите, что геодезические — это в точности линии двух семейств: (а) вертикальные полупрямые $\{x = \mathrm{const}, y > 0\}$ и (б) полуокружности $\{(x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$, центры которых расположены на оси абсцисс. Эти линии обычно называются *прямыми Лобачевского.* Проверьте, что через любые две различные точки $p, q \in \mathbb{H}^2$ проходит ровно одна прямая Лобачевского. Затем убедитесь в справедливости следующего утверждения: для любой прямой Лобачевского L и для любой точки p, не лежащей на L, существует бесконечно много прямых Лобачевского, проходящих через p и не пересекающих L.

5.2. Найдите гауссову кривизну плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ (ответ: $K = -1$).

5.3. Пусть $SL(\mathbb{R}, 2)$ группа всех действительных 2×2-матриц с равным единице определителем. Докажите, что для любой матрицы $A \in SL(\mathbb{R}, 2)$ отображение

$$A : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2, \quad A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

есть изометрия, причем композиция этих изометрий совпадает с произведением матриц.

5.4. Подгруппа $\{I, -I\}$, состоящая из двух элементов (I — единичная матрица), является нормальным делителем в $SL(\mathbb{R}, 2)$ и, следовательно, определена фактор-группа

$$PSL(\mathbb{R}, 2) = SL(\mathbb{R}, 2)/\{I, -I\}.$$

Докажите, что эта группа может быть отождествлена с группой всех изометрий плоскости Лобачевского.

5.5. Докажите следующую *аксиому подвижности* плоскости Лобачевского: для любых двух точек p и q и для любых двух векторов $X \in T_p\mathbb{H}^2$ и $Y \in T_q\mathbb{H}^2$, удовлетворяющих $\|X\|_g = \|Y\|_g = 1$, существуют ровно две изометрии плоскости Лобачевского, переводящие p в q и X в Y. В частности, совместив эти точки и векторы, получаем: для любой точки p и любого единичного вектора $X \in T_p\mathbb{H}^2$ существует единственная отличная от тождественного отображения изометрия $S : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$, удовлетворяющая $S(p) = p$ и $S(X) = X$. Найдите ее геометрический смысл.

4. Поля Якоби

Пусть (M, g) — риманово многообразие и $\gamma : [a, b] \to M$ — геодезическая. Векторное поле $J(t)$ вдоль γ называется *полем Якоби*, если

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(J, \dot\gamma)\dot\gamma = 0, \tag{4.1}$$

где R — риманов тензор кривизны. Уравнение (4.1) также называется уравнением Якоби.

Будучи записанным в координатах, (4.1) является системой *линейных* дифференциальных уравнений второго порядка. Начальные условия для этого уравнения запишем в виде

$$J(t_0) = J_0, \quad \frac{DJ}{dt}(t_0) = J_1 \qquad (t_0 \in [a, b]). \tag{4.2}$$

Хорошо известно, что решение задачи Коши для линейной системы существует и единственно. Таким образом, для любого $t_0 \in [a, b]$ и для любых векторов $J_0, J_1 \in T_{\gamma(t_0)}M$ существует единственное поле Якоби вдоль геодезической γ, удовлетворяющее (4.2). В частности, размерность пространства полей Якоби вдоль γ равна $2n = 2\dim M$. Два линейно независимых решения находятся немедленно в силу следующего простого, но важного утверждения.

Функция $\langle\dot\gamma(t), J(t)\rangle$ линейна по t для любого поля Якоби $J(t)$ вдоль геодезической $\gamma(t)$.

Действительно, используя правило дифференцирования скалярного произведения и уравнение геодезических, имеем

$$\frac{d}{dt}\langle\dot\gamma, J\rangle = \langle\frac{D\dot\gamma}{dt}, J\rangle + \langle\dot\gamma, \frac{DJ}{dt}\rangle = \langle\dot\gamma, \frac{DJ}{dt}\rangle.$$

Дифференцируя повторно, получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\dot\gamma, J\rangle = \langle\frac{D\dot\gamma}{dt}, \frac{DJ}{dt}\rangle + \langle\dot\gamma, \frac{D^2 J}{dt^2}\rangle = \langle\dot\gamma, \frac{D^2 J}{dt^2}\rangle.$$

Подставляем сюда выражение для $\frac{D^2 J}{dt^2}$ из уравнения Якоби

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\dot\gamma, J\rangle = -\langle R(J, \dot\gamma)\dot\gamma, \dot\gamma\rangle.$$

Правая часть этой формулы тождественно равна нулю в силу симметрии (2.4) тензора кривизны.

В силу этого утверждения любое поле Якоби $J(t)$ представимо в виде

$$J(t) = (\alpha t + \beta)\dot\gamma(t) + \widetilde J(t) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}), \tag{4.3}$$

где $\widetilde J(t)$ — поле Якоби вдоль $\gamma(t)$, удовлетворяющее дополнительному соотношению $\langle\dot\gamma, \widetilde J\rangle = 0$. Таким образом, при решении уравнения Якоби достаточно ограничиться поиском решений, ортогональных $\dot\gamma$. Размерность пространства таких решений равна $2n - 2$.

Уравнение Якоби (4.1) является линеаризацией уравнения геодезических (3.2). Чтобы придать этой фразе точный смысл, мы сначала введем некоторые предварительные понятия.

Пусть M — гладкое многообразие (без метрики). (*Гладкой*) *параметризованной поверхностью* в M будем называть гладкое отображение

$$\mathbb{R}^2 \supset [a, b] \times (-\delta, \delta) \xrightarrow{\sigma} M, \quad (t, u) \mapsto \sigma(t, u) \in M. \tag{4.4}$$

Зафиксировав $u \in (-\delta, \delta)$, получим параметризованную кривую $\bar\sigma_u : [a, b] \to M$, $\bar\sigma_u(t) = \sigma(t, u)$. Совокупность кривых $\bar\sigma_u$ $(-\delta < u < \delta)$ можно рассматривать как гладкую деформацию кривой $\bar\sigma_0$. Поэтому параметризованную поверхность вида (4.4) часто также называют *однопараметрической вариацией* кривой $\bar\sigma_0$.

(Гладким) векторным полем вдоль параметризованной поверхности σ называется функция X, сопоставляющая каждой паре $(t, u) \in [a, b] \times (-\delta, \delta)$ вектор $X(t, u) \in T_{\sigma(t,u)}M$, причем эта функция должна быть гладкой в очевидном смысле (аналогично понятию векторного поля вдоль кривой, ср. с определением в §5 предыдущей главы). Обозначим через $\sigma^*\mathcal{V}$ множество всех гладких векторных полей вдоль σ. Вполне аналогично вектору скорости $\dot\gamma$ кривой γ, определим два векторных поля $\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \frac{\partial\sigma}{\partial u} \in \sigma^*\mathcal{V}$ равенствами

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}(t, u) = (d_{(t,u)}\sigma)\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big), \quad \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t, u) = (d_{(t,u)}\sigma)\Big(\frac{\partial}{\partial u}\Big).$$

Пусть теперь (M, g) — риманово многообразие. Для параметризованной поверхности (4.4) можно ввести два оператора

$$\frac{D}{\partial t}, \frac{D}{\partial u} : \sigma^*\mathcal{V} \to \sigma^*\mathcal{V}$$

вполне аналогично оператору $\frac{D}{dt}$ из предложения 5.1 предыдущей главы. Впрочем, определение этих операторов можно дать в терминах ранее введенных понятий следующим образом. При любом фиксированном u_0 ограничение векторного поля $X \in \sigma^*\mathcal{V}$ на кривую $t \mapsto \sigma(t, u_0)$ есть векторное поле вдоль этой кривой. Его абсолютная производная по t есть, по определению, $\frac{DX}{\partial t}(t, u_0)$. Тем самым векторное поле $\frac{DX}{\partial t}$ определено вдоль всей поверхности σ. Векторное поле $\frac{DX}{\partial u}$ определяется аналогично путем фиксации аргумента t.

Лемма 4.1. *Пусть $\sigma : [a, b] \times (-\delta, \delta) \to M$ — параметризованная поверхность в римановом многообразии (M, g). Тогда*

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial t}. \tag{4.5}$$

Для любого векторного поля $X(t, u)$ вдоль σ

$$\frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial u} - \frac{D}{\partial u}\frac{DX}{\partial t} = R\Big(\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \frac{\partial\sigma}{\partial u}\Big)X. \tag{4.6}$$

Доказательство. Поскольку оба утверждения локальны, достаточно рассмотреть случай, когда образ σ лежит в области определения локальной системы координат. Пусть $\sigma(t,u)=(\sigma^1(t,u),\dots,\sigma^n(t,u))$ в координатах. Тогда

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{\partial\sigma^i}{\partial t}\partial_i,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial u}=\frac{\partial\sigma^i}{\partial u}\partial_i.$$

Абсолютные производные $\frac{D}{\partial t}$ и $\frac{D}{\partial u}$ обладают свойствами, аналогичными перечисленным в предложении 5.1 свойствам оператора $\frac{D}{dt}$. Используя эти свойства, получаем для векторного поля $X(t,u)=X^j(t,u)\partial_j$ вдоль σ

$$\frac{DX}{\partial t}=\frac{\partial X^j}{\partial t}\partial_j+X^j\frac{\partial\sigma^i}{\partial t}\nabla_{\partial_i}\partial_j, \tag{4.7}$$

Полагая здесь $X^j=\frac{\partial\sigma^j}{\partial u}$, имеем

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial u}=\frac{\partial^2\sigma^j}{\partial t\,\partial u}\partial_j+\frac{\partial\sigma^j}{\partial u}\frac{\partial\sigma^i}{\partial t}\nabla_{\partial_i}\partial_j.$$

Переменные t и u в этой формуле равноправны. Переставляя их, получаем

$$\frac{D}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{\partial^2\sigma^j}{\partial u\,\partial t}\partial_j+\frac{\partial\sigma^j}{\partial t}\frac{\partial\sigma^i}{\partial u}\nabla_{\partial_i}\partial_j.$$

Вычитая последнее равенство из предыдущего, замечаем, что результат может быть записан в виде

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial u}-\frac{D}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\frac{\partial\sigma^j}{\partial u}\frac{\partial\sigma^i}{\partial t}\big(\nabla_{\partial_i}\partial_j-\nabla_{\partial_j}\partial_i\big).$$

Правая часть этой формулы равна нулю в силу симметричности связности. Это доказывает (4.5).

Применяя оператор $\frac{D}{\partial u}$ к формуле (4.7) и используя те же свойства, находим после несложных вычислений

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial u}\frac{DX}{\partial t}&=X^j\frac{\partial\sigma^i}{\partial t}\frac{\partial\sigma^k}{\partial u}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j\\&\quad+\frac{\partial X^j}{\partial t}\frac{\partial\sigma^k}{\partial u}\nabla_{\partial_k}\partial_j+\frac{\partial X^j}{\partial u}\frac{\partial\sigma^i}{\partial t}\nabla_{\partial_i}\partial_j+X^j\frac{\partial^2\sigma^i}{\partial u\,\partial t}\nabla_{\partial_i}\partial_j+\frac{\partial^2X^j}{\partial u\,\partial t}\partial_j.\end{aligned}$$

Меняем местами переменные t и u в этом равенстве

$$\begin{aligned}\frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial u}&=X^j\frac{\partial\sigma^i}{\partial u}\frac{\partial\sigma^k}{\partial t}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j\\&\quad+\frac{\partial X^j}{\partial u}\frac{\partial\sigma^k}{\partial t}\nabla_{\partial_k}\partial_j+\frac{\partial X^j}{\partial t}\frac{\partial\sigma^i}{\partial u}\nabla_{\partial_i}\partial_j+X^j\frac{\partial^2\sigma^i}{\partial t\,\partial u}\nabla_{\partial_i}\partial_j+\frac{\partial^2X^j}{\partial t\,\partial u}\partial_j.\end{aligned}$$

Вычитая из последней формулы предыдущую, записываем результат в виде

$$\frac{D}{\partial t}\frac{DX}{\partial u}-\frac{D}{\partial u}\frac{DX}{\partial t}=X^j\frac{\partial\sigma^i}{\partial u}\frac{\partial\sigma^k}{\partial t}\big(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_i}\partial_j-\nabla_{\partial_i}\nabla_{\partial_k}\partial_j\big).$$

Правая часть этой формулы равна $R\big(\frac{\partial\sigma}{\partial t},\frac{\partial\sigma}{\partial u}\big)X$ и мы приходим к (4.6).

□

Пусть $\gamma:[a,b]\to M$ — геодезическая. Параметризованная поверхность $\sigma:[a,b]\times(-\delta,\delta)\to M$ называется *геодезической вариацией* геодезической γ, если $\sigma(t,0)=\gamma(t)$ и для любого $u\in(-\delta,\delta)$ кривая $\bar\sigma_u:[a,b]\to M$, $\bar\sigma_u(t)=\sigma(t,u)$ также является геодезической.

Теорема 4.2. *Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — геодезическая в римановом многообразии и $\sigma : [a,b] \times (-\delta,\delta) \to M$ — геодезическая вариация γ. Тогда*

$$J(t) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t,0) \tag{4.8}$$

является полем Якоби вдоль γ. Обратно, любое поле Якоби вдоль γ может быть получено таким образом из некоторой геодезической вариации γ.

Таким образом, один из способов получить якобиевы поля — передвигать геодезические.

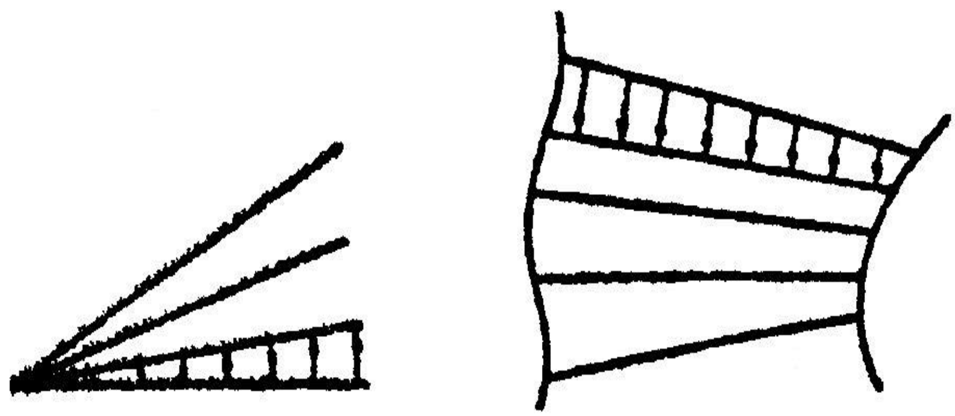

Рис. 2

Доказательство. Если σ — геодезическая вариация, то $\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ тождественно равно нулю. Отсюда с помощью (4.6) и (4.5) получаем

$$0 = \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{\partial \sigma}{\partial t} + R\Big(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\Big)\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{D^2}{\partial t^2}\frac{\partial \sigma}{\partial u} + R\Big(\frac{\partial \sigma}{\partial u}, \frac{\partial \sigma}{\partial t}\Big)\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Полагая здесь $u = 0$ и учитывая, что $\frac{\partial \sigma}{\partial t}(t,0) = \dot\gamma(t)$ и $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t,0) = J(t)$, приходим к уравнению Якоби (4.1).

При доказательстве обратного утверждения будем считать, что геодезическая $\gamma : [0,a] \to M$ параметризована длиной дуги, т.е. $\|\dot\gamma\| = 1$; это позволит упростить обозначения, не умаляя общности. Применяя теорему 3.3, найдем такую окрестность U точки $\gamma(0)$ и $\varepsilon' > 0$, что любые две точки из U соединяет единственная геодезическая длины меньше ε', гладко зависящая от своих концов. Выберем затем положительное $\varepsilon < \varepsilon'/2$ так, что $\gamma(t) \in U$ при $t \le \varepsilon$. Построим сначала якобиево поле $J(t)$ вдоль $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$, принимающее заданные значения $X \in T_{\gamma(0)}M$ и $Y \in T_{\gamma(\varepsilon)}M$ при $t = 0$ и $t = \varepsilon$ соответственно. Для этого выберем кривую $\lambda : (-\delta,\delta) \to U$, такую, что $\lambda(0) = \gamma(0)$ и $\frac{d\lambda}{du}(0) = X$. Аналогично выберем кривую $\mu : (-\delta,\delta) \to U$, такую, что $\mu(0) = \gamma(\varepsilon)$ и $\frac{d\mu}{du}(0) = Y$. Построим теперь вариацию

$$\sigma : [0,\varepsilon] \times (-\delta,\delta) \to M,$$

определив $\bar\sigma_u : [0,\varepsilon] \to M$ как единственную геодезическую длины меньше ϵ', соединяющую точки $\lambda(u)$ и $\mu(u)$. Тогда формула (4.8) даст якобиево поле $J(t)$ вдоль $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$, удовлетворяющее краевым условиям $J(0) = X$ и $J(\varepsilon) = Y$.

Любое якобиево поле вдоль $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$ можно построить таким способом: если $\mathcal{J}(\gamma)$ — векторное пространство всех якобиевых полей вдоль γ, то формула $J \mapsto (J(0), J(\varepsilon))$

определяет линейное отображение

$$\ell : \mathcal{J}(\gamma) \to T_{\gamma(0)}M \times T_{\gamma(\varepsilon)}M.$$

Мы показали, что отображение ℓ эпиморфно. Так как оба векторных пространства имеют одну и ту же размерность $2n$, то ℓ — изоморфизм, т.е. поле Якоби определяется своими значениями в двух точках $\gamma(0)$ и $\gamma(\varepsilon)$. Итак, наше построение дает все якобиевы поля вдоль $\gamma|_{[0,\varepsilon]}$.

Ограничение геодезической $\bar{\sigma}_u$ на интервал $[0,\varepsilon]$ несущественно. Если u достаточно мало, то $\bar{\sigma}_u$ продолжается до геодезической, определенной на $[0,a]$, и мы получаем геодезическую вариацию

$$\sigma : [0,a] \times (-\delta', \delta') \to M,$$

для которой $\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)$ совпадает с любым заданным полем Якоби вдоль γ.

□

Замечание 4.3. *Эти рассуждения показывают, что в любой такой окрестности U якобиево поле вдоль отрезка геодезической, лежащего в U, однозначно определяется своими значениями в концах этого отрезка.*

Как мы знаем, дифференциал экспоненциального отображения $T_pM \supset B_\varepsilon \xrightarrow{\exp_p} M$ в нуле является тождественным отображением. Гораздо сложнее устроен дифференциал

$$d_X \exp_p : T_pM \to T_{\exp_p(X)}M$$

в произвольной точке $X \in T_pM$. Нахождение этого дифференциала сводится к решению уравнения Якоби, как показывает следующая

Теорема 4.4. *Пусть точка p риманова многообразия M и вектор $X \in T_pM$ таковы, что $\exp_p(X)$ определена. Обозначим $\gamma(t) = \exp_p(tX)$ $(t \in [0,1])$. Тогда для любого вектора $Y \in T_pM$*

$$(d_X \exp_p)(Y) = J(1), \tag{4.9}$$

где $J(t)$ — поле Якоби вдоль γ, удовлетворяющее начальным условиям

$$J(0) = 0, \quad \frac{DJ}{dt}(0) = Y. \tag{4.10}$$

Доказательство. При $t \in [0,1]$ и достаточно малом u точка $\exp_p(tX + tuY)$ определена и отображение

$$\sigma : [0,1] \times (-\delta, \delta) \to M, \quad \sigma(t,u) = \exp_p(tX + tuY)$$

является геодезической вариацией геодезической γ. По теореме 4.2, векторное поле

$$J(t) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)$$

есть поле Якоби вдоль γ. Первое из начальных условий (4.10) выполнено поскольку $\sigma(0,u) = p$ не зависит от u. Так как

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}(0,u) = X + uY,$$

то

$$\frac{DJ}{dt}(0) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\sigma}{\partial u}(0,0) = \frac{D}{\partial u}\frac{\partial\sigma}{\partial t}(0,0) = \frac{D(X+uY)}{\partial u}(0) = Y$$

и второе из начальных условий (4.10) тоже выполнено.

Остается убедиться в справедливости (4.9). Поскольку $\sigma(1,u)=\exp_p(X+uY)$, то

$$J(1)=\frac{\partial\sigma}{\partial u}(1,0)=\frac{d(\exp_p(X+uY))}{du}(0).$$

Определим отображение $\varphi:(-\delta,\delta)\to T_pM$ равенством $\varphi(u)=X+uY$. Тогда $\varphi(0)=X$, $\frac{d\varphi}{du}(0)=Y$ и следовательно

$$(d_X\exp_p)(Y)=\frac{d(\exp_p\circ\varphi)}{du}(0)=\frac{d(\exp_p(X+uY))}{du}(0).$$

Вместе с предыдущей формулой это дает (4.9).

□

Эта теорема имеет важное следствие

Следствие 4.5. (Лемма Гаусса) *Пусть точка p риманова многообразия M и вектор $X\in T_pM$ таковы, что $\exp_p(X)$ определена. Обозначим $\gamma(t)=\exp_p(tX)$ $(t\in[0,1])$. Тогда для любого вектора $Y\in T_pM$*

$$\langle(d_X\exp_p)(Y),\dot\gamma(1)\rangle=\langle X,Y\rangle. \tag{4.11}$$

Доказательство. Согласно теореме 4.4,

$$\langle(d_X\exp_p)(Y),\dot\gamma(1)\rangle=\langle J(1),\dot\gamma(1)\rangle, \tag{4.12}$$

где J — поле Якоби вдоль γ, удовлетворяющее начальным условиям (4.10). Как мы знаем, функция $\langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle$ линейна по t. Поскольку эта функция обращается в нуль при $t=0$,

$$\langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle=\alpha t,\quad \alpha=\mathrm{const}.$$

Постоянная α легко находится:

$$\alpha=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle=\langle\frac{DJ}{dt}(0),\dot\gamma(0)\rangle+\langle J(0),\frac{D\dot\gamma}{dt}(0)\rangle=\langle\frac{DJ}{dt}(0),\dot\gamma(0)\rangle=\langle Y,X\rangle.$$

Таким образом, $\langle J(t),\dot\gamma(t)\rangle=\langle Y,X\rangle t$. Вместе с (4.12) это дает (4.11).

□

В силу очевидного равенства $\dot\gamma(1)=(d_X\exp_p)(X)$, (4.11) можно переписать в виде

$$\langle(d_X\exp_p)(\alpha X),(d_X\exp_p)(Y)\rangle=\langle\alpha X,Y\rangle\quad\text{для любого}\quad\alpha\in\mathbb{R}.$$

Вообще говоря, экспоненциальное отображение сильно искажает метрику. Но оно сохраняет скалярное произведение двух векторов, если один из них “радиален”. В этом состоит геометрический смысл леммы Гаусса.

Упражнения

1. Уравнение Якоби можно записать в виде системы, в которой абсолютная производная $\frac{D}{dt}$ заменена обычной производной $\frac{d}{dt}$. Для простоты ограничимся рассмотрением геодезической $\gamma:[a,b]\to M$, параметризованной длиной дуги, т.е. $\|\dot\gamma\|=1$. Для некоторого t_0 выберем ортонормированный базис $(e_1(t_0)=\dot\gamma(t_0),e_2(t_0),\dots,e_n(t_0))$ пространства $T_{\gamma(t_0)}M$, а затем разнесем каждый вектор этого базиса параллельно вдоль γ. Получится ортонормированный базис $(e_1(t)=\dot\gamma(t),e_2(t),\dots,e_n(t))$ пространства $T_{\gamma(t)}M$ при каждом $t\in[a,b]$, который иногда называют *базисом Ферми*. Докажите, что для векторного поля, представленного в базисе Ферми в виде $J(t)=J^i(t)e_i(t)$, уравнение Якоби эквивалентно системе

$$\frac{d^2J^i}{dt^2}+R^i{}_{1j1}J^j=0\quad(1\le i\le n).$$

2. В двумерном случае уравнение Якоби сводится к одному скалярному уравнению второго порядка. Действительно, пусть $(e_1(t)=\dot\gamma(t), e_2(t))$ — базис Ферми. Если поле Якоби представлено в виде

$$J(t) = x(t)e_1(t) + y(t)e_2(t),$$

то, согласно (4.3), первый коэффициент линеен по t, а второй удовлетворяет уравнению (докажите)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K(t)y = 0,$$

где $K(t)$ — значение гауссовой кривизны в точке $\gamma(t)$.

5. Геодезические и кратчайшие

Вспомним обиходное выражение: “Прямая есть кратчайшее расстояние между точками”. Точнее: длина прямолинейного отрезка в евклидовом пространстве равна расстоянию между его концами. Верно и обратное: если длина некоторой кривой равна расстоянию между ее концами, то эта кривая — прямолинейный отрезок.

Как обстоит дело с аналогичными утверждениями для римановых многообразий, где роль прямых выполняют геодезические? Приблизительный ответ на этот вопрос звучит так: локальная версия первого утверждения остается верной, т.е. длина любого достаточно короткого отрезка любой геодезической равна расстоянию между его концами. Но для длинных геодезических это утверждение становится скорее исключением, чем правилом. Действительно, бывают даже замкнутые геодезические с совпадающими концами, как мы убедились в §3, изучая геодезические на круглом цилиндре.

При попытке сформулировать риманов аналог второго утверждения из первого абзаца мы сталкиваемся со следующей трудностью. Согласно нашему определению, геодезическая всегда параметризована пропорционально длине дуги. С другой стороны, длина произвольной кривой $\gamma : [a, b] \to M$

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt$$

не меняется при изменении параметризации. Напомним, что это такое. Выберем гладкую функцию $f : [c, d] \to [a, b]$, удовлетворяющую $f(c) = a,\ f(d) = b$ и $f'(s) > 0$ $(s \in [c, d])$. Определим новую кривую $\delta : [c, d] \to M$, полагая $\delta(s) = \gamma(f(s))$. Тогда

$$L(\delta) = \int_c^d \left\| \frac{d\delta}{ds}(s) \right\| ds = L(\gamma),$$

в чем легко убедиться с помощью замены $t = f(s)$ переменной интегрирования. Чтобы избежать этой трудности, ограничимся рассмотрением кривых, параметризованных пропорционально длине дуги. Напомним, что такая параметризация возможна для любой кусочно гладкой кривой.

Теперь перейдем к систематическому изложению.

(Кусочно) гладкая кривая $\gamma : [a, b] \to M$ в римановом многообразии называется *кратчайшей*, если ее длина равна расстоянию между ее концами:

$$L(\gamma) = \rho(\gamma(a), \gamma(b)).$$

Иными словами, длина γ не больше длины любой другой кривой, соединяющей точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$. Легко доказывается утверждение: если $\gamma : [a,b] \to M$ — кратчайшая, то ее ограничение $\gamma|_{[c,d]}$ на любой отрезок $[c,d] \subset [a,b]$ также является кратчайшей.

Теорема 5.1. *Достаточно короткий отрезок любой геодезической является кратчайшей. Более точно: для любой геодезической $\gamma : [a,b] \to M$ можно указать такое $\delta > 0$, что для любых $t_0, t_1 \in [a,b]$, $t_0 \le t_1$, удовлетворяющих $t_1 - t_0 < \delta$, ограничение $\gamma|_{[t_0,t_1]}$ — кратчайшая.*

Любая кратчайшая, параметризованная длиной дуги, есть геодезическая.

Основную роль в доказательстве этой теоремы играет следующее утверждение, представляющее и самостоятельный интерес.

Предложение 5.2. *Для точки p риманова многообразия M будем через $B_r = \{X \in T_pM \mid \|X\| < r\}$ обозначать открытый шар в T_pM радиуса r с центром в нуле.*

Пусть точка $p \in M$ и $r > 0$ таковы, что экспоненциальное отображение

$$\exp_p : B_r \to M \tag{5.1}$$

определено и является диффеоморфизмом на свой образ. Выберем $X_0 \in T_pM$, $\|X_0\| = 1$, зафиксируем $a \in (0,r)$ и положим $q = \exp_p(aX_0)$.

Пусть $\gamma : [0,a] \to M$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая p и q, т.е. $\gamma(0) = p$, $\gamma(a) = q$, и удовлетворяющая $\|\dot\gamma\| = const$. Тогда

$$L(\gamma) \ge a,$$

причем $L(\gamma) = a$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t) = \exp_p(tX_0)$.

Доказательство. Обозначим $U = \exp_p(B_r)$. Предположим сначала, что $\gamma : [0,a] \to U$. Можно считать, что $\gamma(t) \ne p$ при $t > 0$. Тогда

$$\gamma(t) = \exp_p\big(\rho(t)X(t)\big),$$

где $X(t) \in T_pM$, $\|X(t)\| = 1$, $X(a) = X_0$ и $0 \le \rho(t) < r$, $\rho(0) = 0$, $\rho(a) = a$. Функции $\rho(t)$ и $X(t)$ кусочно гладкие. Для сокращения дальнейших формул запишем это в виде

$$\gamma = \exp_p(\rho X), \quad \rho = \rho(t),\ X = X(t). \tag{5.2}$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\dot\gamma = (d_{\rho X}\exp_p)(\dot\rho X + \rho\dot X) = \dot\rho(d_{\rho X}\exp_p)(X) + \rho(d_{\rho X}\exp_p)(\dot X).$$

Следовательно,

$$\|\dot\gamma\|^2 = \dot\rho^2\|(d_{\rho X}\exp_p)(X)\|^2 + \rho^2\|(d_{\rho X}\exp_p)(\dot X)\|^2 + 2\dot\rho\langle(d_{\rho X}\exp_p)(\rho X), (d_{\rho X}\exp_p)(\dot X)\rangle. \tag{5.3}$$

В силу леммы Гаусса

$$\langle(d_{\rho X}\exp_p)(\rho X), (d_{\rho X}\exp_p)(\dot X)\rangle = \rho\langle X, \dot X\rangle.$$

Правая часть этой формулы равна нулю, как следует из $\|X\|^2 = 1$. Следовательно, последнее слагаемое в правой части формулы (5.3) равно нулю. В силу той же леммы Гаусса

$$\|(d_{\rho X}\exp_p)(X)\|^2 = \frac{1}{\rho^2}\langle(d_{\rho X}\exp_p)(\rho X), (d_{\rho X}\exp_p)(\rho X)\rangle = \|X\|^2 = 1.$$

Таким образом (5.3) приобретает вид

$$\|\dot\gamma\|^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\|(d_{\rho X}\exp_p)(\dot X)\|^2, \tag{5.4}$$

откуда следует неравенство
$$\|\dot\gamma(t)\| \geq |\dot\rho(t)|. \tag{5.5}$$

Интегрируя последнее неравенство, получаем
$$L(\gamma) = \int_0^a \|\dot\gamma(t)\|\,dt \geq \int_0^a |\dot\rho(t)|\,dt \geq \int_0^a \dot\rho(t)\,dt = a. \tag{5.6}$$
Это доказывает первое утверждение.

Если $L(\gamma) = a$, то второе слагаемое в правой части формулы (5.4) должно быть тождественно равным нулю. Поскольку $\rho(t) > 0$ при $t > 0$, это влечет $\dot X(t) = 0$, т.е. $X(t) = \mathrm{const} = X_0$. Теперь (5.2) приобретает вид
$$\gamma(t) = \exp_p\bigl(\rho(t)X_0\bigr). \tag{5.7}$$
В случае равенства $L(\gamma) = a$ неравенства в (5.5) и (5.6) также превращаются в равенства, т.е. $\dot\rho(t) = |\dot\rho(t)| = \|\dot\gamma(t)\|$. Поскольку мы предположили, что $\|\dot\gamma\| = \mathrm{const}$, отсюда следует, что $\dot\rho(t) = c = \mathrm{const}$, т.е. $\rho(t) = ct$. А поскольку $\rho(a) = a$, то $\rho(t) = t$. Теперь (5.7) приобретает вид $\gamma(t) = \exp_p(tX_0)$.

Итак, предложение 5.2 доказано при дополнительном предположении, что кривая γ лежит полностью в области $U = \exp_p(B_r)$. Если же γ выходит за пределы этой области, то длина той части кривой γ, которая лежит в U, не меньше, чем $r > a$, и следовательно, $L(\gamma) > a$.

$\square$

Следствие 5.3. *Пусть точка $p \in M$ и $r > 0$ таковы, что экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на шаре $B_r \subset T_pM$ и отображает этот шар диффеоморфно на его образ. Тогда любая геодезическая длины меньше r, выходящая из точки p, является кратчайшей. Обратно, любая кратчайшая длины меньше r, выходящая из p и параметризованная длиной дуги, является геодезической.*

Следствие 5.4. *Для каждого компактного множества $K \subset M$ найдется такое $\delta > 0$, что любые две точки из K, расстояние между которыми меньше δ, соединяются единственной геодезической длины меньше δ. Эта геодезическая является кратчайшей и гладко зависит от своих концов.*

Доказательство. Применяя теорему 3.3, найдем для каждой точки $p \in K$ такую окрестность W_p и число $\varepsilon_p > 0$, что (1) любые две точки из W_p соединяет одна и только одна геодезическая длины меньше ε_p, гладко зависящая от своих концов, и (2) для любой точки $q \in W_p$ отображение $\exp_q$ отображает шар $B_{\varepsilon_p} = \{X \in T_qM \mid \|X\| < \varepsilon_p\}$ диффеоморфно на его образ. Из открытого покрытия $\{W_p\}_{p\in K}$ компактного множества K выберем конечное подпокрытие $\{W_{p_i}\}_{i=1}^k$ и положим $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{p_1}, \dots, \varepsilon_{p_k}\}$. Наконец, выберем $0 < \delta < \varepsilon$ настолько малым, чтобы любые две точки $p, q \in K$, расстояние между которыми меньше δ, лежали в общем множестве W_{p_i}. Для такой пары точек отображение $\exp_p$ переводит шар $B_\delta = \{X \in T_pM \mid \|X\| < \delta\}$ диффеоморфно на некоторую окрестность точки p, содержащую q. Согласно следствию 5.3, геодезическая длины меньше δ, соединяющая p и q, является кратчайшей. $\square$

Доказательство теоремы 5.1. Пусть $\gamma : [a, b] \to M$ — геодезическая. Для компактного множества $K = \gamma([a, b])$ выберем $\delta > 0$ как в следствии 5.4. Тогда любой отрезок геодезической γ, длина которого меньше δ, есть кратчайшая.

Пусть $\gamma : [a,b] \to M$ — кратчайшая, параметризованная длиной дуги. Тогда $\gamma|_{[t,t+r/2]}$ — также кратчайшая. Если r выбрано так, что $\exp_{\gamma(t)}$ определено на шаре $B_r \subset T_{\gamma(t)}M$ и отображает этот шар диффеоморфно на его образ, то $\gamma|_{[t,t+r/2]}$ есть геодезическая согласно следствию 5.3. Так как это справедливо для любого t, а геодезические определяются дифференциальным уравнением, то γ — геодезическая. $\square$

В заключение параграфа найдем геодезические на сфере $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$, снабженной римановой метрикой, индуцированной евклидовой метрикой пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ посредством тождественного вложения (это — так называемая *стандартная* метрика на сфере). Я утверждаю, что геодезическими на сфере являются большие круги, т.е. линии пересечения $\mathbb{S}^n$ с двумерными плоскостями, проходящими через центр сферы, и только они.

Для доказательства заметим, что для любой такой плоскости P симметрия относительно этой плоскости $S_P : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ есть изометрия сферы, причем большой круг $C = \mathbb{S}^n \cap P$ есть множество неподвижных точек этой изометрии. Пусть p и q — две близкие точки из C, соединенные единственной кратчайшей геодезической γ. Так как S_P — изометрия, кривая $S_P(\gamma)$ есть геодезическая той же длины, соединяющая точки $S_P(p) = p$ и $S_P(q) = q$. Следовательно, $\gamma \subset C$.

Остается заметить, что других геодезических нет поскольку через каждую точку сферы в любом направлении проходит большой круг.

Упражнения

1. Расстояние между точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ в модели Пуанкаре $\mathbb{H}^2$ плоскости Лобачевского (см. упражнение 5 из §3) выражается формулой

$$\operatorname{ch}(\rho(z_1, z_2)) = 1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{2y_1y_2},$$

что может быть также записано в виде

$$\rho(z_1, z_2) = \ln\left(\frac{1 + |z_1 - \overline{z}_2|/|z_1 - z_2|}{-1 + |z_1 - \overline{z}_2|/|z_1 - z_2|}\right).$$

Докажите эту формулу. (Указание. Сначала проверьте, что правая часть формулы инвариантна относительно изометрий плоскости Лобачевского. В силу аксиомы подвижности достаточно установить справедливость формулы при $x_1 = x_2$. В этом случае формула проверяется непосредственным интегрированием.)

2. Докажите, что как и для евклидова пространства, для плоскости Лобачевского справедливы следующие утверждения. Длина любого отрезка прямой Лобачевского равна расстоянию между его концами. Обратно, если длина некоторой кривой совпадает с расстоянием между ее концами, то эта кривая есть отрезок прямой Лобачевского.

3. Пусть $\gamma_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ и $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^2$ — две непересекающиеся прямые Лобачевского, параметризованные длиной дуги. Положим $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) = \inf\{\rho(\gamma_1(t), \gamma_2(t')) \mid t' \in \mathbb{R}\}$. Докажите, что имеет место один и только один из следующих трех случаев:

(а) $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \to \infty$ при $t \to -\infty$ и $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \to \infty$ при $t \to +\infty$. В этом случае прямые γ_1 и γ_2 называются *расходящимися.*

(б) $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \to 0$ при $t \to -\infty$ и $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \to \infty$ при $t \to +\infty$. В этом случае говорят, что γ_1 *параллельна слева* прямой γ_2.

(в) $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \to \infty$ при $t \to -\infty$ и $\rho(\gamma_1(t), \gamma_2) \to 0$ при $t \to +\infty$. В этом случае говорят, что γ_1 *параллельна справа* прямой γ_2.

6. Полные римановы многообразия

Риманово многообразие (M, g) называется *геодезически полным*, если для любой точки $p \in M$ и любого вектора $X \in T_pM$ решение задачи Коши $\gamma(t)$ для уравнения геодезических с начальными условиями $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$ существует при всех $t \in \mathbb{R}$. Иными словами, экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на всем T_pM для любой точки $p \in M$.

В этом параграфе мы будем считать многообразие M связным (как топологическое пространство). Напомним, что ранее было определено расстояние ρ между точками риманова многообразия так, что (M, ρ) является метрическим пространством.

Напомним одно понятие из Анализа: метрическое пространство (M, ρ) называется *метрически полным*, если любая последовательность Коши в этом пространстве имеет предел (последовательность p_k $(k = 1, 2, \dots)$ точек метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если $\lim \rho(p_k, p_\ell) = 0$ при $k, \ell \to \infty$).

Обратите внимание насколько, на первый взгляд, далеки друг от друга понятия геодезической полноты и метрической полноты: в то время как первое понятие связано с решением дифференциального уравнения, второе выражается лишь в терминах расстояния, не имеющего отношения к уравнениям. Тем не менее эти понятия эквивалентны: риманово многообразие геодезически полно тогда и только тогда, когда оно метрически полно. В этом состоит основное содержание теоремы Ринова – Хопфа, которой посвящен этот параграф. В связи с этим термин “полное риманово многообразие” используется обычно без эпитетов. Основную роль в доказательстве этой теоремы играет следующая

Лемма 6.1. *Если риманово многообразие M геодезически полно, то любые две точки $p, q \in M$ можно соединить геодезической длины $\rho(p, q)$.*

Доказательство. Выберем две различные точки $p, q \in M$ и обозначим $r = \rho(p, q) > 0$. Найдем такое $\varepsilon > 0$, что экспоненциальное отображение $\exp_p$ переводит шар $B_\varepsilon = \{X \in T_pM \mid \|X\| < \varepsilon\}$ диффеоморфно на некоторую окрестность точки p. Зафиксируем некоторое $\delta \in (0, \varepsilon)$ и обозначим через $S \subset M$ образ сферы $\{X \in T_pM \mid \|X\| = \delta\}$ при отображении $\exp_p$. Множество S компактно как образ компакта при непрерывном отображении. Фактически S является сферой радиуса δ с центром в точке p, т.е. $\rho(s, p) = \delta$ для $s \in S$; это вытекает из следствия 5.3.

Непрерывная функция

$$S \to \mathbb{R}, \quad s \mapsto \rho(s, q)$$

достигает минимума в некоторой точке $p_0 \in S$. Представим эту точку в виде

$$p_0 = \exp_p(\delta X), \quad X \in T_pM, \quad \|X\| = 1$$

и рассмотрим геодезическую $\gamma(t) = \exp_p(tX)$, определенную при всех $t \in \mathbb{R}$. Она параметризована длиной дуги поскольку $\|X\| = 1$. Мы покажем, что

$$\gamma(r) = q.$$

Отсюда вытекает, что отрезок $\gamma|_{[0,r]}$ является геодезической длины $r = \rho(p, q)$, соединяющей точки p и q.

Для доказательства мы покажем, что точка, движущаяся вдоль геодезической γ, должна подходить к q все ближе и ближе. А именно, мы покажем, что при любом $t \in [\delta, r]$

$$\rho(\gamma(t), q) = r - t. \tag{6.1$_t$}$$

Это равенство при $t = r$ доказывает лемму.

Докажем сначала равенство (6.1_δ). Так как каждая кривая, идущая из p в q, должна пересекать сферу S, имеем

$$\rho(p,q) = \min_{s\in S}\big(\rho(p,s) + \rho(s,q)\big) = \delta + \rho(p_0,q).$$

Следовательно, $\rho(p_0,q) = r - \delta$. Так как $p_0 = \gamma(\delta)$, это доказывает (6.1_δ).

Пусть $t_0 \in [\delta, r]$ — точная верхняя грань тех чисел t, для которых ($6.1_{t'}$) справедливо при всех $t' < t$. Тогда по непрерывности справедливо (6.1_{t_0}). Если $t_0 < r$, то мы придем к противоречию. Пусть S' — маленькая сфера радиуса $\delta' > 0$ с центром в точке $\gamma(t_0)$, и пусть $p_0' \in S'$ — точка на S', ближайшая к q (см. Рис. 3). Тогда

$$\rho(\gamma(t_0),q) = \min_{s\in S'}\big(\rho(\gamma(t_0),s) + \rho(s,q)\big) = \delta' + \rho(p_0',q).$$

Следовательно,

$$\rho(p_0',q) = (r - t_0) - \delta'. \tag{6.2}$$

Мы утверждаем, что p_0' есть $\gamma(t_0+\delta')$. Действительно, неравенство треугольника и (6.2) дают

$$\rho(p,p_0') \ge \rho(p,q) - \rho(p_0',q) = t_0 + \delta'.$$

Но путь длины в точности $t_0+\delta'$ из p в p_0' получится, если идти по γ от p до $\gamma(t_0)$ и затем по кратчайшей геодезической из $\gamma(t_0)$ в p_0'. Так как этот кусочно-геодезический путь имеет наименьшую длину, он, согласно теореме 5.1, представляет собой целую геодезическую, а поэтому совпадает с $\gamma|_{[0,t_0+\delta']}$.

Итак, $\gamma(t_0+\delta') = p_0'$. Равенство (6.2) принимает вид

$$\rho(\gamma(t_0+\delta'),q) = r - (t_0+\delta'),$$

что совпадает с ($6.1_{t_0+\delta'}$). Полученное противоречие с определением t_0 завершает доказательство. □

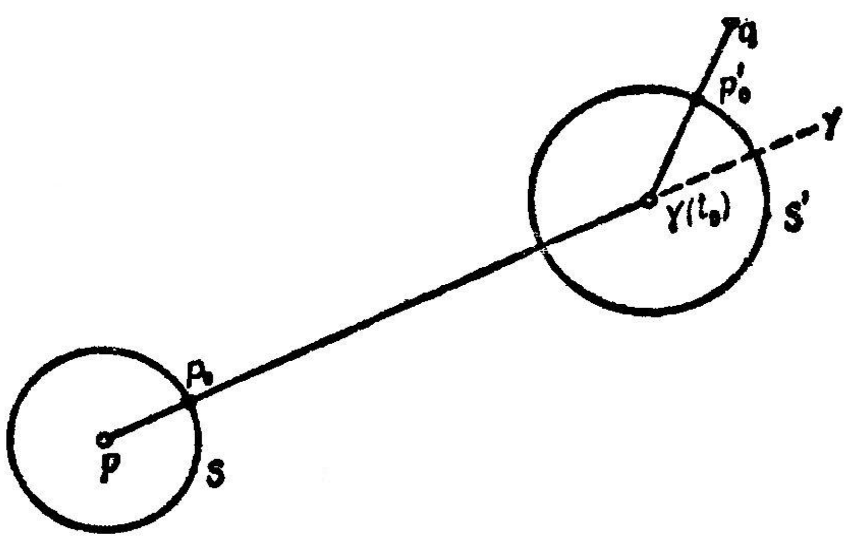

Рис. 3

Теорема 6.2. (Ринова – Хопфа) *Для риманова многообразия следующие условия эквивалентны:*

(1) *M метрически полно;*

(2) *M геодезически полно;*

(3) *для любой точки $p \in M$ экспоненциальное отображение $\exp_p$ определено на всем T_pM;*

(4) *любое ограниченное множество в M имеет компактное замыкание.*

Каждое из этих условий влечет следующее:

(5) *любые две точки $p, q \in M$ можно соединить геодезической длины $\rho(p,q)$.*

Доказательство. Из (4) следует (1). Действительно, последовательность Коши ограничена и содержится в замкнутом ограниченном подмножестве многообразия M, которое по предположению компактно; в компактном множестве каждая последовательность Коши сходится.

Эквивалентность (2) и (3) очевидна.

Из (2) следует (5). Это составляет содержание леммы 6.1.

Из (3) и (5) следует (4). Действительно, любое замкнутое ограниченное множество $A \subset M$ содержится в замкнутом шаре, т.е.

$$A \subset \mathbb{D}_R(p) = \{q \in M \mid \rho(p,q) \le R\}$$

для некоторой точки $p \in M$ и некоторого $R < \infty$. Согласно (5), каждая точка $q \in A$ соединятся с p геодезической длины $\rho(p,q) \le R$, т.е. A содержится в компактном множестве

$$\exp_p\big(\{X \in T_pM \mid \|X\| \le R\}\big).$$

Будучи замкнутым подмножеством компакта, A само есть компакт.

Докажем, наконец, что из (1) следует (3). Достаточно показать, что при $X \in T_pM,\ \|X\| = 1$ экспонента $\exp_p(tX)$ определена для всех $0 < t \in \mathbb{R}$. Пусть

$$t_0 = \sup\{t' \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = \exp_p(tX) \text{ определена при } 0 \le t < t'\}.$$

Нам надо доказать, что $t_0 = \infty$. Предположив конечность t_0, придем к противоречию.

Выберем последовательность $t_i \in (0, t_0)$ $(i = 1, 2, \dots)$, сходящуюся к t_0 при $i \to \infty$, и рассмотрим последовательность точек $p_i = \gamma(t_i)$. Это — последовательность Коши. В силу метрической полноты последовательность p_i сходится к некоторой точке p_0. Доопределим $\gamma : [0, t_0] \to M$, положив $\gamma(t_0) = p_0$. Тогда γ непрерывна на $[0, t_0]$ и $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ для $t \in [0, t_0)$. Следовательно, $L(\gamma|_{[t,t_0]}) = t_0 - t$ для всех $t \in [0, t_0]$.

Согласно следствию 5.4, для компактного множества $\gamma([0,t_0])$ найдется такое $\delta > 0$, что любые две точки из $\gamma([0,t_0])$, расстояние между которыми меньше δ, соединяет единственная геодезическая длины меньше δ, и эта геодезическая является кратчайшей.

Пусть $0 < \varepsilon < \delta$ и $t_0 - \varepsilon < t < t_0$. Отрезок $\gamma|_{[t_0-\varepsilon,t]}$ является геодезической длины $t - t_0 + \varepsilon < \delta$. Следовательно, он кратчайший, т.е.

$$\rho(\gamma(t_0 - \varepsilon), \gamma(t)) = t - (t_0 - \varepsilon) \quad \text{для} \quad t \in [t_0 - \varepsilon, t_0).$$

Переходя здесь к пределу по $t \to t_0$, имеем

$$\rho(\gamma(t_0 - \varepsilon), \gamma(t_0)) = \varepsilon.$$

Таким образом, $\gamma|_{[t_0-\varepsilon,t_0]}$ имеет длину ε и является кратчайшим путем из $\gamma(t_0-\varepsilon)$ в $p_0 = \gamma(t_0)$. Согласно теореме 5.1, $\gamma|_{[t_0-\varepsilon,t_0]}$ — геодезическая и $\gamma|_{[0,t_0]}$ — геодезическая. Поэтому для достаточно малых $\tau > 0$

$$\gamma(t_0 - \tau) = \exp_{p_0}(\tau X_0) \quad \text{для некоторого} \quad X_0 \in T_{p_0}M,\ \|X_0\| = 1.$$

Эта формула имеет смысл и при отрицательных τ, если $|\tau|$ мало. Таким образом геодезическая $\gamma(t)$ продолжается на интервал $[0, t_0 + \varepsilon')$, $\varepsilon' > 0$, что противоречит определению t_0. $\square$

Упражнения

1. Пример неполного многообразия. Выбросим из $\mathbb{R}^n$ одну точку, оставив метрику евклидовой. Покажите, что $(\mathbb{R}^n \setminus \{p\}, e)$ не является полным римановым многообразием.

2. Докажите, что любое компактное риманово многообразие является полным.

3. Докажите, что плоскость Лобачевского (см. упражнение 5 из §3) есть полное риманово многообразие.

Список литературы

[1] Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. М., "Наука", 1979.
[2] А.В. Погорелов. Дифференциальная геометрия. М., "Наука", 1974.
[3] П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., "Наука", 1967.
[4] Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия. М., "ИЛ", 1948.