

5. Элементы теории матричных игр

В теории игр исследуются модели и методы *принятия решений в конфликтных ситуациях*. В рамках теории игр рассматриваются парные игры (с двумя сторонами) или игры многих лиц. Мы ограничимся рассмотрением парных игр. Участников игры принято называть *игроками*.

Игра состоит из последовательности действий (*ходов*), которые подразделяются на *личные* (совершаемые игроками осмысленно на основе некоторого правила – стратегии) и *случайные* (не зависящие от игроков). В теории игр рассматриваются ситуации, в которых обязательно присутствуют личные ходы.

Стратегия игрока – это набор правил, используемых при выборе очередного личного хода.

Целью игры является нахождение *оптимальной стратегии* для каждого игрока, т. е. такой, при которой достигается максимум ожидаемого среднего выигрыша при многократном повторении игры. Предполагается, что игроки ведут себя разумно, исключаются элементы азарта и риска.

Определение 5.1. *Матричная игра* – это парная игра, которая задается набором *чистых стратегий* $\{1, \dots, n\}$ и $\{1, \dots, m\}$ первого и второго игроков, а также *платежной матрицей* $(a_{ij})_{m \times n}$, определяющей выигрыш первого игрока при выборе игроками стратегий i и j соответственно. Целью первого игрока является максимизация своего выигрыша, а целью второго – минимизация выигрыша противника.

Пример 5.1 («камень–ножницы–бумага»). Каждый игрок во время своего хода независимо от другого выбирает одну из трех стратегий, называемых «камень», «ножницы» и «бумага». Выбранные стратегии сравниваются. Если они совпадают, выигрыш первого игрока составляет 0 (ничья), в противном случае побеждает игрок с более сильной стратегией. «Камень» считается сильнее «ножниц», которые, в свою очередь, сильнее «бумаги», которая сильнее «камня». Выигрыш победившего игрока составляет 1, проигравшего –1. Платежная матрица в этом случае имеет следующий вид:

		Игрок 2		
		«Камень»	«Ножницы»	«Бумага»
Игрок 1	«Камень»	0	1	-1
	«Ножницы»	-1	0	1
	«Бумага»	1	-1	0

Пример 5.2 («вооружение и самолет»). Первый игрок выбирает один из трех типов вооружения $i = 1, 2, 3$, другой – один из трех видов самолетов $j = 1, 2, 3$. Платежная матрица задана таблицей

i / j	1	2	3
1	0,5	0,6	0,8
2	0,9	0,7	0,8
3	0,7	0,5	0,6

Элементами a_{ij} платежной матрицы являются вероятности поражения самолета вида j вооружением типа i . Целью первого игрока является поражение самолета, второго – прорыв обороны противника.

5.1. Решение матричной игры в чистых стратегиях

Заметим, что в игре из примера 5.1 ни у кого из игроков нет причины предпочесть одну из стратегий другой, поскольку на каждую стратегию одного игрока найдется контрстратегия другого, обеспечивающая его выигрыш (при условии, что он знает или угадал стратегию первого). В примере 5.2 ситуация иная. Для обоих игроков целесообразным является использование чистых стратегий $i = 2$ для первого и $j = 2$ для второго. Отклонение любого из игроков от указанных стратегий может только уменьшить его выигрыш. Разница в приведенных примерах объясняется наличием во второй платежной матрице седловой точки.

Определение 5.2. Седловой точкой матрицы $(a_{ij})_{m \times n}$ называется такая пара (i_0, j_0) номеров строки и столбца, что для любых $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ выполняются неравенства

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j}$$

Таким образом, элемент $a_{i_0 j_0}$ в матрице с седловой точкой (i_0, j_0) является одновременно максимальным в своем столбце и минимальным в своей строке, что и объясняет нецелесообразность выбора любым из игроков другой стратегии.

При решении матричных игр используется принцип минимакса.

Принцип минимакса. Предположим, что противник заранее знает все ходы соперника. Тогда на каждую стратегию $i = 1, \dots, m$ он отвечает наилучшей контрстратегией $j(i)$, для которой $a_{ij(i)} \leq a_{ij}$ для всех $j = 1, \dots, n$.

Обозначим $\alpha_i^0 = a_{ij(i)} = \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$, $i = 1, \dots, m$. В описанной ситуации наилучшей чистой стратегией первого игрока является стратегия i , максимизирующая α_i^0 , которая называется *максиминной* стратегией. Величину

$$\alpha^0 = \max_{1 \leq i \leq m} \min_{1 \leq j \leq n} a_{ij} = \alpha_{i_0}^0$$

назовем *нижней ценой игры в чистых стратегиях*. Если первый игрок поступает в соответствии с максиминной стратегией, он гарантированно получит выигрыш не менее α^0 независимо от действий второго игрока.

Однако второй игрок, руководствуясь аналогичными соображениями и оставаясь в рамках чистых стратегий, должен поступать так, чтобы минимизировать величину

$$\beta_j^0 = a_{i(j)j} = \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij}.$$

При таком выборе стратегии j_0 (*минимаксной* стратегии второго игрока) он гарантированно проиграет не более

$$\beta^0 = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq m} a_{ij} = \beta_{j_0}^0.$$

Величина β^0 называется *верхней ценой игры в чистых стратегиях*.

В примере 5.1 имеем $\alpha^0 = -1$, $\beta^0 = 1$, т. е. нижняя цена меньше верхней. В примере 5.2 получаем следующие значения:

$$\alpha^0 = \max_i \alpha_i^0 = \max\{0,5, 0,7, 0,5\} = 0,7 = \alpha_2^0,$$

$$\beta^0 = \min_j \beta_j^0 = \min\{0,9, 0,7, 0,8\} = 0,7 = \beta_2^0.$$

Имеем совпадение верхней и нижней цен игры и седловую точку $(i_0, j_0) = (2, 2)$.

Заметим, что нижняя цена игры не может быть больше верхней в силу следующей леммы.

Лемма 5.1 (о максимине и минимаксе). Для любой функции $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ справедливо неравенство

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) \leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y).$$

Из этой леммы вытекает утверждение.

Утверждение 5.1. Необходимым и достаточным условием равенства нижней и верхней цен матричной игры в чистых стратегиях является существование седловой точки в платежной матрице $(a_{ij})_{m \times n}$.

Седловая точка в матричной игре определяет некоторое положение равновесия, когда ни одному из игроков не выгодно отклоняться от оптимальной стратегии, если противник придерживается своей оптимальной стратегии. В случае существования седловой точки верхняя и нижняя цены

игры совпадают и называются *ценой игры*. Решением игры в чистых стратегиях называется нахождение оптимальных стратегий для каждого из игроков и вычисление цены игры. Заметим, что решение в чистых стратегиях существует только в том случае, когда в платежной матрице существует седловая точка.

Пример 5.3. Найти решения в чистых стратегиях, если они существуют, для игр со следующими платежными матрицами:

$$а) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. а) Найдем нижнюю и верхнюю цены игры в чистых стратегиях:

$$\alpha^0 = \max \alpha_i^0 = \max \{-2, 3, -2\} = 3 = \alpha_2^0;$$

$$\beta^0 = \min \beta_j^0 = \min \{3, 7, 5\} = 3 = \beta_1^0.$$

Верхняя и нижние цены совпадают, следовательно, существует решение игры в чистых стратегиях. Это решение соответствует седловой точке $i_0 = 2$ и $j_0 = 1$, и значению платежной матрицы $a_{21} = 3$. Оптимальные стратегии игроков соответственно равны $i_0 = 2$ и $j_0 = 1$.

Задачи б и в предлагаются в качестве упражнения.

Заметим, что в некоторых играх одна из стратегий может быть заведомо менее целесообразной, чем другая. Например, стратегия $i = 2$ в игре из примера 5.3 а дает первому игроку больший выигрыш, чем стратегия $i = 1$ при любом выборе стратегии вторым игроком: $a_{2j} \geq a_{1j}$, $j = 1, \dots, n$. Это означает, что вторая строка платежной матрицы доминирует первую.

Определение 5.3. Будем говорить, что строка i_1 *доминирует* строку i_2 , если для всех $j = 1, \dots, n$ справедливы неравенства $a_{1j} \geq a_{2j}$ и существует такая стратегия j_0 , что $a_{i_1 j_0} > a_{i_2 j_0}$.

Если из платежной матрицы убрать все доминируемые строки, то решение игры с полученной матрицей совпадает с решением исходной игры. Таким образом, иногда можно уменьшить размерность платежной матрицы путем удаления доминируемых строк.

Аналогично доминирование определяется и для столбцов.

Определение 5.4. Столбец j_1 доминирует столбец j_2 , если для любого $i = 1, \dots, m$ справедливы неравенства $a_{ij_1} \leq a_{ij_2}$ и существует такая стратегия i_0 , что $a_{i_0j_1} < a_{i_0j_2}$.

Платежная матрица может быть упрощена также с помощью удаления доминируемых столбцов.

Пример 5.4. Матрицы из примера 5.3 a , b могут быть упрощены следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (3 \ 5) \rightarrow (3); \\ & \text{б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow (-1). \end{aligned}$$

В матрице из примера 5.3 b нет доминирующих строк и столбцов.

Пример 5.5. Решить матричную игру с платежной матрицей $(a_{ij})_{m \times n} = (i - j)_{m \times n}$.

Решение. Рассмотрим две строки с номерами $i > k$. Для любого столбца j выполняется $a_{ij} - a_{kj} = i - j - (k - j) = i - k > 0$. Таким образом, строка с большим номером доминирует строку с меньшим номером, и строка m доминирует все остальные. Аналогично, если $j > l$ – два номера столбца, то для любого $i = 1, \dots, m$ имеем $a_{ij} - a_{il} = i - j - (i - l) = l - j < 0$, т. е. столбец с большим номером доминирует столбцы с меньшими номерами. В результате получаем оптимальные чистых стратегии $i_0 = m$, $j_0 = n$, цена игры равна $v = a_{mn} = m - n$.

Как мы видим, игры с матрицами, в которых существует седловая точка, решаются достаточно просто. В следующих разделах будет рассмотрен более общий случай решения задачи – так называемое решение в смешанных стратегиях.

Далее будем предполагать, что в платежных матрицах рассматриваемых игр все возможные упрощения уже проведены и доминирующих строк и столбцов нет.

5.2. Смешанные стратегии

Если седловая точка в платежной матрице отсутствует, то решения в чистых стратегиях не существует. В таких случаях ищут решение игры в смешанных стратегиях.

Определение 5.5. *Смешанной стратегией* называют произвольное вероятностное распределение на множестве чистых стратегий:

$$p = (p_1, \dots, p_m) \in P_m = \left\{ p \mid \sum_{i=1}^m p_i = 1, p_i \geq 0 \right\},$$

$$q = (q_1, \dots, q_n) \in Q_n = \left\{ q \mid \sum_{j=1}^n q_j = 1, q_j \geq 0 \right\}.$$

Применение смешанных стратегий означает чередование чистых стратегий согласно их вероятностям при многократном повторении игры. Платежная функция при этом определяется как математическое ожидание выигрыша первого игрока при применении игроками смешанных стратегий p и q и равна $E(p, q) = \sum_i \sum_j a_{ij} p_i q_j$.

В соответствии с принципом минимакса каждый игрок должен выбрать такую смешанную стратегию, которая максимизирует его наименьший гарантированный выигрыш. Аналогично случаю использования чистых стратегий наименьший гарантированный выигрыш первого игрока называется *нижней ценой игры* и равен

$$\alpha = \max_{p \in P_m} \alpha(p) = \max_{p \in P_m} \min_{q \in Q_n} E(p, q).$$

Аналогично определяется *верхняя цена игры*

$$\beta = \min_{q \in Q_n} \beta(q) = \min_{q \in Q_n} \max_{p \in P_m} E(p, q).$$

Основным результатом теории матричных игр является теорема 5.1.

Теорема 5.1 (фон-Неймана). В любой матричной игре существует такая пара смешанных стратегий (p^*, q^*) , что

- 1) $E(p, q^*) \leq E(p^*, q^*) \leq E(p^*, q)$ для любых $p \in P_m, q \in P_n$;
- 2) $\alpha = \beta = E(p^*, q^*)$.

Число $v = E(p^*, q^*)$ называется *ценой игры в смешанных стратегиях*.

По теореме фон-Неймана любая матричная игра имеет пару оптимальных смешанных стратегий. Для решения матричной игры необходимо отыскать эти оптимальные стратегии и цену игры.

Определение 5.6. Чистая стратегия называется *активной*, если она используется в некоторой оптимальной смешанной стратегии с ненулевой вероятностью.

Теорема 5.2 (об активных стратегиях). Если один из игроков использует оптимальную стратегию, то его противник достигает цены игры v при любой своей смешанной стратегии, в которой используются только активные чистые стратегии.

Пример 5.6. Для игры, заданной матрицей $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ без седловой

точки, найти оптимальные смешанные стратегии и цену игры.

Решение. Пусть $p^* = (p_1^*, p_2^*)$ – оптимальная стратегия первого игрока.

В силу теоремы об активных стратегиях, если первый игрок использует оптимальную стратегию, то второй достигает цены игры v при любой своей смешанной стратегии, в которой используются только активные чистые стратегии, например при $q^1 = (1, 0)$ и $q^2 = (0, 1)$.

Записывая для них выражения соответствующей цены игры, получаем

$$v_1 = a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v,$$

$$v_2 = a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v$$

и, учитывая соотношение $p_1^* + p_2^* = 1$, имеем систему из трех уравнений с тремя неизвестными, решив которую, находим

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}};$$

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Поменяв игроков местами и проведя аналогичные вычисления, получаем выражения для оптимальной стратегии второго игрока:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}; \quad q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Рассмотрим игру $2 \times n$. Найдём оптимальную смешанную стратегию первого игрока $p^* = (p_1^*, p_2^*)$, на которой достигается максимум

$$\alpha(p) = \min_{q \in Q_m} E(p, q) \rightarrow \max_{p \in P_n}.$$

Положим $x = p_2, 1 - x = p_1, 0 < x < 1$. Обозначим $f(x) = \alpha(p)$. Тогда по теореме об активных стратегиях

$$f(x) = \min_{q \in Q_m} \sum_{j=1}^n [a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})x]q_j = \min_{1 \leq j \leq n} v_j(x),$$

где $v_j(x) = a_{1j} + (a_{2j} - a_{1j})x$, $j = 1, \dots, n$. В итоге получаем задачу максимизации миноранты семейства линейных функций в интервале $(0, 1)$:

$$\min_{1 \leq j \leq n} v_j(x) \rightarrow \max_{0 < x < 1}$$

Поскольку известно, что $p_1^*, p_2^* > 0$ и миноранта семейства линейных функций вогнута, непрерывна и кусочно-линейная, то ее максимум на отрезке $(0, 1)$ достигается в одной из внутренних точек излома и может быть найден за время $O(n^2)$.

Пусть максимум миноранты достигается на пересечении прямых $v_{j_{k-1}}(x)$ и $v_{j_k}(x)$ (рис. 5.1).

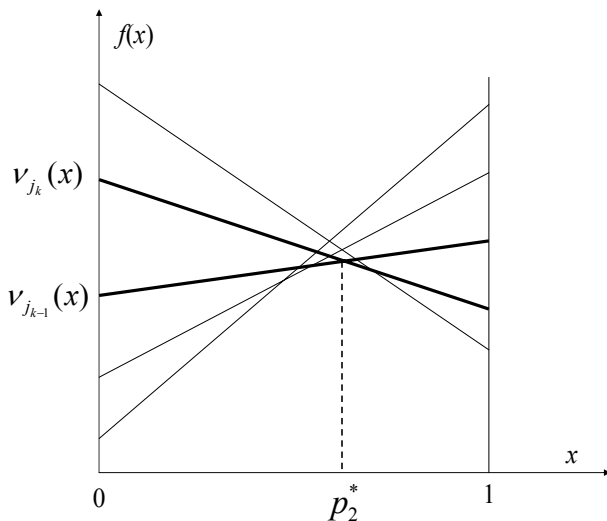


Рис. 5.1

Тогда для решения игры достаточно рассмотреть матричную игру 2×2 с матрицей $\begin{pmatrix} a_{1j_{k-1}} & a_{1j_k} \\ a_{2j_{k-1}} & a_{2j_k} \end{pmatrix}$.

Пример 5.7. Решить матричную игру с платежной матрицей $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем уравнения прямых $v_j(x)$:

$$v_1(x) = 4 - 8x, \quad v_2(x) = 2 - 2x, \quad v_3(x) = 3 - 5x, \quad v_4(x) = -1 + 3x.$$

Максимум миноранты достигается на пересечении прямых $v_1(x)$ и $v_4(x)$ (рис. 5.2), поэтому для решения исходной задачи используем матри-

цу $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

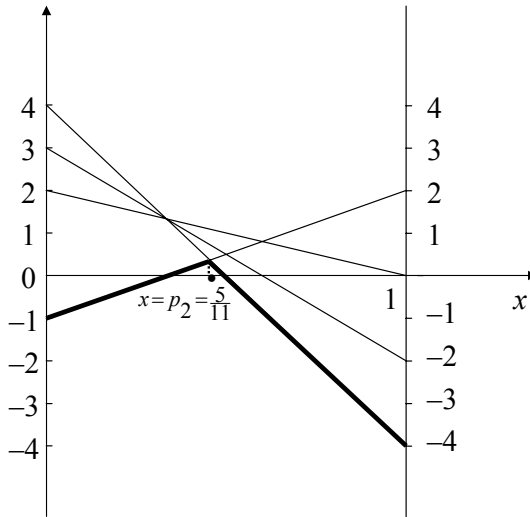


Рис. 5.2

Применяя полученные ранее формулы, получаем

$$p^* = \left(\frac{6}{11}, \frac{5}{11} \right), \quad q^* = \left(\frac{3}{11}, 0, 0, \frac{8}{11} \right), \quad v = \frac{4}{11}.$$

Игра $m \times 2$ решается аналогично сведением к задаче минимизации мажоранты m линейных функций. Заметим также, что игра с платежной матрицей $A = (a_{ij})_{m \times n}$ сводится к игре с матрицей $(-A^T)$ перестановкой игроков, а игра $m \times 2$ сводится к игре $2 \times n$.

5.3. Метод фиктивного розыгрыша Брауна–Робинсон

Идея метода заключается в поочередном выборе каждой стороной наилучшей чистой стратегии против наблюдаемого эмпирического распределения чистых стратегий противника.

На первом шаге противники выбирают произвольные чистые стратегии i_1 и j_1 соответственно. Пусть противниками на первых N шагах последовательно выбирались стратегии (i_1, i_2, \dots, i_N) и (j_1, j_2, \dots, j_N) и x_i^N, y_j^N — количество шагов, на которых первым и вторым игроками выбирались стратегии i и j соответственно. Очевидно, $\sum_i x_i^N = \sum_j y_j^N = N$. Обозначим

относительные частоты применения стратегий i и j через $p_i^N = \frac{x_i^N}{N}$

и $q_j^N = \frac{y_j^N}{N}$. Таким образом, на каждом шаге N имеем наблюдаемые смешанные стратегии $p^N = (p_1^N, \dots, p_m^N)$ и $q^N = (q_1^N, \dots, q_n^N)$. Эти векторы определяют эмпирическое распределение стратегий после первых N шагов.

На шаге $(N + 1)$ выбираются такие чистые стратегии i_{N+1} и j_{N+1} , что

$$\alpha^N = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^N = \sum_{j=1}^n a_{i_{N+1}j} q_j^N,$$

$$\beta^N = \min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^N = \sum_{i=1}^m a_{ij_{N+1}} p_i^N.$$

Частоты стратегий пересчитываются по следующим формулам:

$$p_i^{N+1} = \begin{cases} \frac{Np_i^N}{N+1}, & i \neq i_{N+1}, \\ \frac{Np_i^N + 1}{N+1}, & i = i_{N+1}; \end{cases} \quad q_j^{N+1} = \begin{cases} \frac{Nq_j^N}{N+1}, & j \neq j_{N+1}, \\ \frac{Nq_j^N + 1}{N+1}, & j = j_{N+1}. \end{cases}$$

Авторами метода доказано, что с ростом N эмпирические распределения сходятся к оптимальным смешанным стратегиям:

$$p^N \rightarrow p^*, \quad q^N \rightarrow q^* \quad \text{и} \quad v^N = \frac{\alpha^N + \beta^N}{2} \rightarrow v.$$

Метод прост в описании и реализации, сложность одной итерации составляет $O(n+m)$. Недостатком метода является его медленная немонотонная сходимость. На практике остановка алгоритма происходит после выполнения достаточно большого числа итераций.

Пример 5.8. Выполнить 12 итераций метода Брауна–Робинсон для решения матричной игры с платежной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем изменение эмпирических распределений на каждом шаге алгоритма.

Шаг 1. $i_1 = 1, j_1 = 1 \Rightarrow p^1 = (1, 0, 0), q^1 = (1, 0, 0).$

Шаг 2. $\alpha^1 = 3, i_2 = 3 \mid p^2 = (1/2, 0, 1/2) \mid \nu^1 = \frac{\alpha^1 + \beta^1}{2} = 2.$
 $\beta^1 = 1, j_2 = 1 \mid q^2 = (1, 0, 0)$

Шаг 3. $\alpha^2 = 3, i_3 = 3 \mid p^3 = (1/3, 0, 2/3) \mid \nu^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{9}{4} = 2,25.$
 $\beta^2 = 3/2, j_3 = 3 \mid q^3 = (2/3, 0, 1/3)$

Шаг 4. $\alpha^3 = 7/3, i_4 = 3 \mid p^4 = (1/4, 0, 3/4) \mid \nu^3 = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{2} = \frac{11}{6} \approx 1,833.$
 $\beta^3 = 4/3, j_4 = 3 \mid q^4 = (1/2, 0, 1/2)$

Шаг 5. $\alpha^4 = 5/2, i_5 = 2 \mid p^5 = (1/5, 1/5, 3/5) \mid \nu^4 = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{2} = 1,875.$
 $\beta^4 = 5/4, j_5 = 3 \mid q^5 = (1/3, 0, 2/3)$

Шаг 6. $\alpha^5 = 8/3, i_6 = 2 \mid p^6 = (1/6, 2/6, 1/2) \mid \nu^5 = \frac{\alpha^5 + \beta^5}{2} \approx 2,133.$
 $\beta^5 = 8/5, j_6 = 3 \mid q^6 = (1/4, 0, 3/4)$

Шаг 7. $\alpha^6 = 11/4, i_7 = 2 \mid p^7 = (1/7, 3/7, 3/7) \mid \nu^6 \approx 2,291.$
 $\beta^6 = 11/6, j_7 = 3 \mid q^7 = (1/5, 0, 4/5)$

Шаг 8. $\alpha^7 = 14/5, i_8 = 2 \mid p^8 = (1/8, 1/2, 3/8) \mid \nu^7 \approx 2,257.$
 $\beta^7 = 12/7, j_8 = 2 \mid q^8 = (1/6, 1/6, 2/3)$

На дальнейших шагах получаем следующие значения:

$$\nu^8 \approx 2,02, \nu^9 \approx 1,98, \nu^{10} \approx 1,875, \nu^{11} \approx 1,984, \nu^{12} \approx 2,208.$$

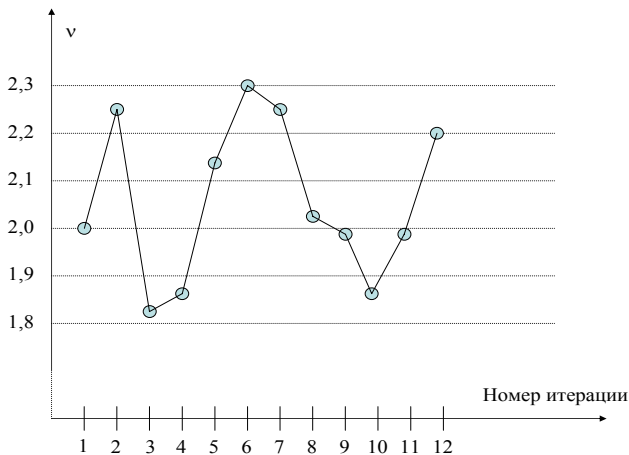


Рис. 5.3

Из рис. 5.3 видно, что процесс не монотонен, поэтому его остановка по критерию $|v^N - v^{N-1}| \leq \varepsilon$ не корректна.

Упражнения

1. Первый игрок загадывает любое целое число от 1 до 3. Второй игрок должен отгадать это число. Если второй игрок указывает число правильно, он получает выигрыш, равный значению этого числа. В противном случае этот выигрыш получает первый игрок.

а) Определите число стратегий игроков и составьте платежную матрицу задачи.

б) Определите нижнюю и верхнюю цену игры. Установите, существует ли в данной игре решение в чистых стратегиях.

2. Решить матричные игры в чистых стратегиях для матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 1 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & 10 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Решить матричную игру с матрицей $(a_{ij})_{m \times n} = (f(i) + g(j))_{m \times n}$.

4. Решить матричные игры в смешанных стратегиях:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Осуществить 10 итераций метода фиктивного розыгрыша Брауна–Робинсон для решения матричной игры

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$