Введение в теорию расписаний

Рассматриваются два множества:

$M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ — машины (станки, процессоры, бригады, …)

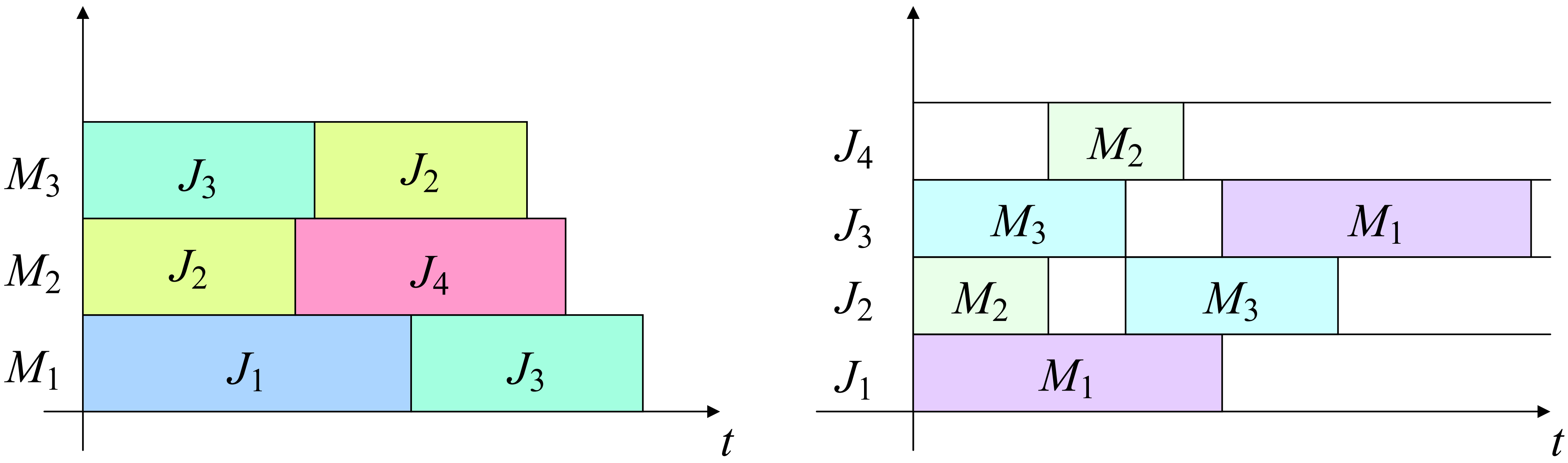
$J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$ — работы (задания, пакеты задач, …)

- ***Расписание*** — указание, на каких машинах и в какое время должны выполняться работы.

В каждый момент времени каждая машина выполняет не более одной работы, и каждая работа выполняется на одной машине или не выполняется вовсе.

Два типа диаграмм Гантта

Одно решение, представленное на двух диаграммах



Характеристики работ

Работы состоят из операций: $J_i = \{O_{i_1}, O_{i_2}, \ldots, O_{i_{n_i}}\}$

Операция O_{i_j} требует p_{ij} времени и может выполняться на одной из машин множества $\mu_{ij} \subseteq \{M_1, \ldots, M_m\}$.

Если $|\mu_{ij}| = 1, \forall\, i\, j,$ то получаем модель с предписаниями.

Если $|\mu_{ij}| = m, \forall\, i\, j,$ то получаем модель с параллельными машинами.

Для работы J_i известны:

$r_i \geq 0$ — время появления первой операции O_{i_1}

$d_i \geq 0$ — директивное время окончания последней операции $O_{i_{n_i}}$

$w_i \geq 0$ — важность (вес, ценность) работы J_i

Классификация задач теории расписаний

Краткая запись задачи $\alpha \mid \beta \mid \gamma$

α — характеристики машин; β — характеристики работ;

γ — целевая функция задачи;

Варианты для β:

$\beta_1 = pmtn$ (preemption) разрешаются прерывания;

$\beta_2 = prec$ (precedence relations) условия предшествования на множестве работ (цепи, деревья, сети);

$\beta_3 = r_i$ — время поступления на обслуживание

$\beta_4 \in \{p_{ij} = 1;\ p_{ij} \in \{0,1\};\ p_{ij} = p_{ij}(t),\ \ldots\}$ — уточнения для времени выполнения операций.

$\beta_5 = d_i$ — директивные сроки окончания работ;

$\beta_6 = p\text{-}batching$ ($s\text{-}batching$) — работы разбиваются на группы, и в каждой группе берется максимум (сумма) времён выполнения работ;

Характеристики машин

Поле α состоит из двух частей $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$:

α_1 — характеристики машин,

α_2 — число машин.

Если $\alpha_1 \in \{\varnothing, P, Q, R\}$, то $n_i = 1 \ \forall \ J_i$, то есть каждая работа состоит ровно из одной операции.

$\alpha_1 = \varnothing$ — для каждой работы задана машина для ее выполнения,

$\alpha_1 = P$ — машины параллельны и одинаковы $p_{ij} = p_i$,

$\alpha_1 = Q$ — машины параллельны, но различаются скоростями $p_{ij} = p_i / s_j$,

$\alpha_1 = R$ — машины параллельны, длительности выполнения работ произвольны, но $p_{ij} = p_i / s_{ij}$.

Если $\alpha_1 \in \{G, X, J, F, O\}$, то $n_i \geq 1$, то есть у каждой работы может быть несколько операций.

$\alpha_1 = J$ (*job shop, рабочий цех*) — у каждой операции своя машина $|\mu_{ij}| = 1$ и линейный порядок выполнения операций $O_{i_1} \to O_{i_2} \to \ldots \to O_{i_{n_i}}$.

$\alpha_1 = F$ (*flow shop, потоковая линия*) — машины упорядочены $M_1, M_2, \ldots, M_m$ и каждая работа проходит все машины в этом порядке, $n_i = m$ и $\mu_{ij} = M_j$, $\forall i$.

$\alpha_1 = O$ (*open shop, открытая линия*) — каждая работа состоит из m операций ($n_i = m$), но $\mu_{ij} = \{ M_1, \ldots, M_m \}$ и на множестве операций нет условий предшествования,

$\alpha_1 = X$ (*mixed shop, смешанный цикл*) — смесь J и O,

$\alpha_1 = G$ (*general case*) — произвольный порядок предшествования на операциях (как в календарном планировании).

Целевые функции

Обозначим через c_i — время окончания работы J_i. Рассматриваются два типа минимизируемых целевых функций:

$$f(c) = \max_i f_i(c_i), \qquad f(c) = \sum_{i=1}^{n} f_i(c_i).$$

Примеры целевых функций:

$C_{\max} = \max\limits_{i=1,\dots,n} c_i$ — время окончания всех работ;

$L_{\max} = \max\limits_{i=1,\dots,n} (c_i - d_i)$ — запаздывание относительно директивных сроков;

$D_{\max} = \max\limits_{i=1,\dots,n} |c_i - d_i|$ — отклонение от директивных сроков;

$F_{\max} = \max\limits_{i=1,\dots,n} (\max\{0, d_i - c_i\})$ — опережение директивных сроков;

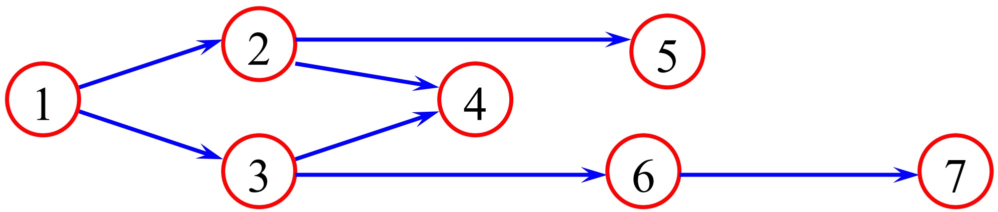
$\sum\limits_{i=1}^{n} w_i c_i$ — взвешенная сумма окончания работ.

Примеры задач теории расписаний

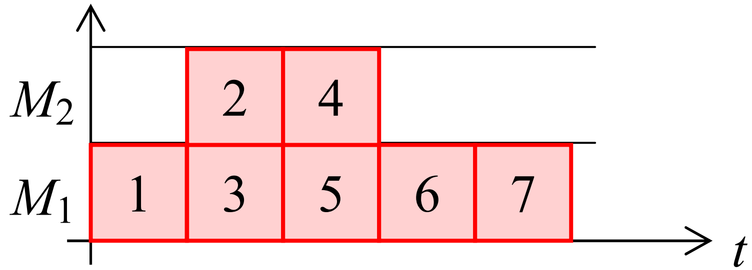
Пример 1. $P \mid prec, p_i = 1 \mid C_{\max}$

Задача поиска расписания с минимальным временем окончания всех работ на m параллельных машинах с длительностями работ $p_i = 1$ и условиями предшествования, то есть предполагается известным ориентированный граф без циклов, вершинами которого являются работы, а дуги задают частичный порядок выполнения работ.

Если $n = 7$, $m = 2$ и условия предшествования заданы графом:



то одно из допустимых решений имеет вид



Пример 2. $1 \mid r_i, pmtn \mid L_{\max}$

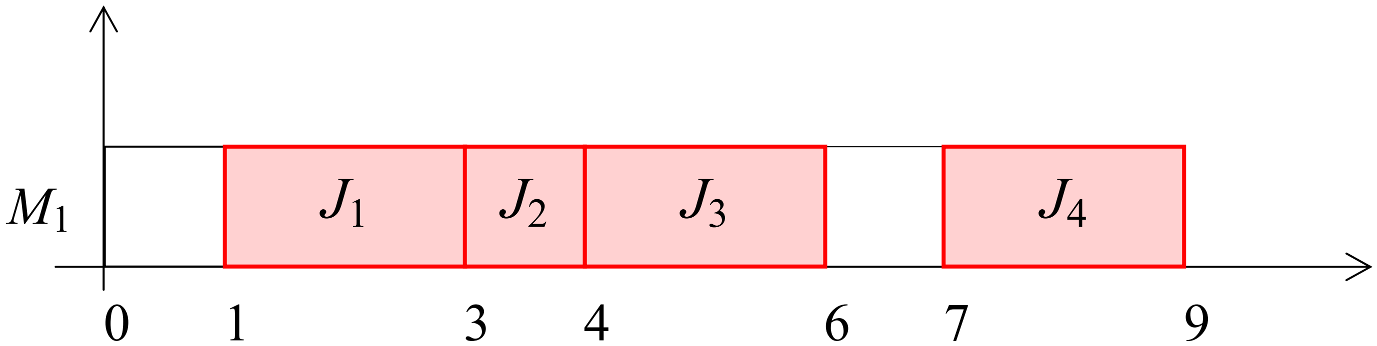
Задача на одной машине с возможностью прерывания работ, директивными сроками окончания работ и произвольными временами появления работы. Требуется найти расписание $\{c_i\}_{i=1}^{n}$, минимизирующее максимальное запаздывание, то есть

$$L_{\max} = \max_{i=1,\dots,n} (c_i - d_i) \to \min$$

Для n =4 и

i	1	2	3	4
p_i	2	1	2	2
r_i	1	2	2	7
d_i	2	3	4	8

Одно из допустимых решений имеет вид:



$L_{\max} = \max\{3 - 2; 4 - 3; 6 - 4; 9 - 8\} = 2.$

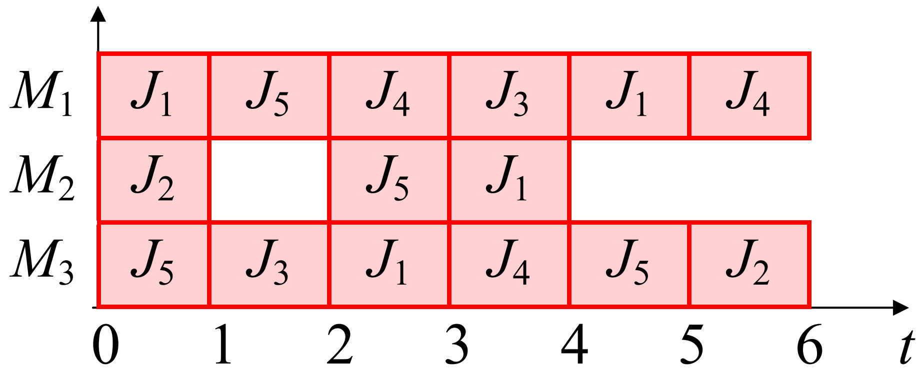
Пример 3. $J3 \mid p_{ij} = 1 \mid C_{\max}$

Задача поиска расписания с минимальным временем окончания всех работ на трех машинах, образующих систему *job shop* — рабочий цех; длительности всех операций равны 1; у каждой работы свое множество операций; для каждой операции указана машина для ее выполнения.

При $n = 5$, $m = 3$ и матрице

	Машины			
J_1	M_1	M_3	M_2	M_1
J_2	M_2	M_3	–	–
J_3	M_3	M_1	–	–
J_4	M_1	M_3	M_1	–
J_5	M_3	M_1	M_2	M_3

Одно из допустимых решений задачи имеет вид:



Заметим, что машина M_1 обязана работать не менее 6 единиц времени (2 для J_1, 1 для J_3, 2 для J_4, 1 для J_5), то есть нашли оптимум!

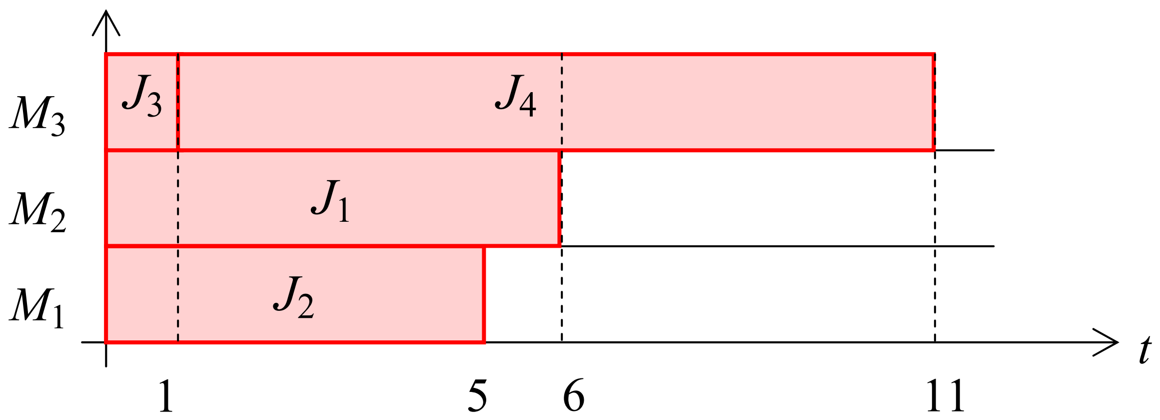
Пример 4. $R3 \mid d_i \mid D_{\max}$

Задача поиска расписания, минимизирующего максимальное отклонение времен завершения работ от директивных сроков на трех параллельных машинах.

При $n = 4$, $m = 3$ и матрице длительностей выполнения работ p_{ij}

	M_1	M_2	M_3	d_i
J_1	10	6	1	5
J_2	5	20	3	5
J_3	9	30	1	6
J_4	6	5	10	7

Одно из допустимых решений задачи имеет вид



$$D_{\max} = \max\{\underset{J_1}{|5-6|};\ \underset{J_2}{|5-5|};\ \underset{J_3}{|6-1|};\ \underset{J_4}{|7-11|}\} = 5$$

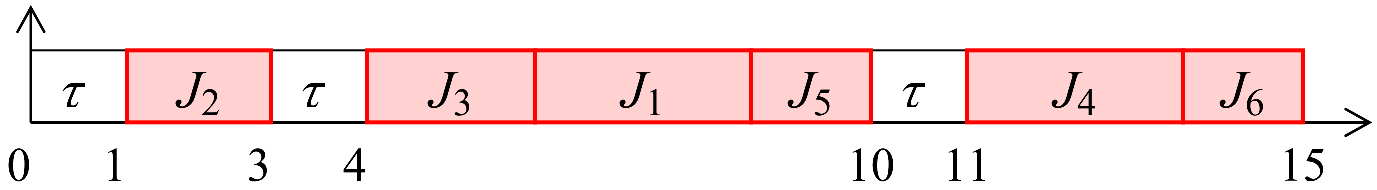
Пример 5. $1 \mid s\text{–batch} \mid \sum w_i c_i$

Задача собрать работы в группы для обработки на одной машине так, чтобы минимизировать взвешенную сумму окончания всех работ. В каждой группе время окончания работ равно времени окончания последней работы в группе. Длительность выполнения всей группы работ равна сумме длительностей работ. При переходе от одной группы к другой машина требует переналадки τ (простой.)

При $n = 6$, $m = 1$, $\tau = 1$ и

i	1	2	3	4	5	6
p_i	3	2	2	3	1	1
w_i	1	2	1	1	4	4

Одно из допустимых решений при разбиении на 3 группы: $\{J_2\}$, $\{J_3, J_1, J_5\}$, $\{J_4, J_6\}$ имеет вид



$$\sum_{i=1}^{6} w_i c_i = w_2 \cdot 3 + (w_3 + w_1 + w_5) \cdot 10 + (w_4 + w_6) \cdot 15.$$

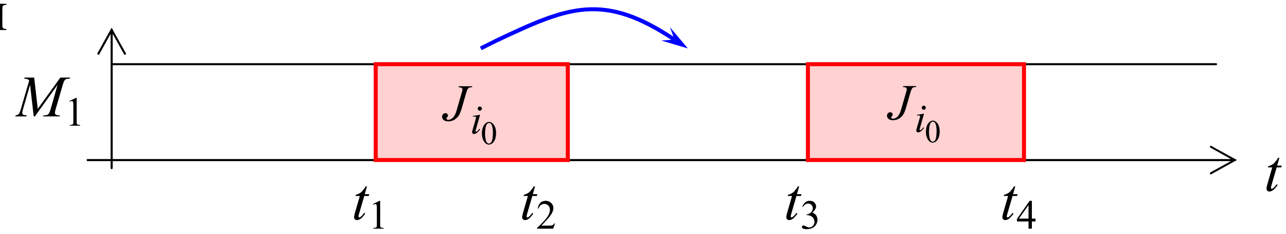
Задачи теории расписаний на одной машине

Первые публикации появились в 1955 – 1956 гг (Jackson, Smith)

Рассмотрим задачу с $r_i \equiv 0$ и минимизируемой функцией $f_{\max}(c_i) = \max\limits_{i=1,\dots,n} f_i(c_i)$, f_i — монотонно возрастающая функция; прерываний работ разрешены, то есть $1 \mid pmtn \mid f_{\max}$

Теорема 1. Среди оптимальных решений найдется решение без прерывания и простоя машины.

Доказательство. Пусть в оптимальном решении работа J_{i_0} выполнялась с прерыванием



Тогда изменим расписание, сохранив $c_{i_0} = t_4$, а работы из интервала $[t_2,\ t_3]$ сдвинем влево к t_1. Так как f_i — монотонно возрастающая функция, то новое решение также будет оптимальным. ■

Задача $1 \mid prec \mid f_{\max}$

Решение задается перестановкой $\pi = (\pi_1,\dots, \pi_n)$. Величина π_i задает номер работы, стоящей на i-м месте в перестановке π. Отношения предшествования задаются матрицей A: $a_{ij} = 1$, если работа J_i предшествует работе J_j и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Идея алгоритма

Пусть $N = \{1,\dots, n\}$ — множество всех работ и $P(N) = \sum_{i \in N} p_i$. Тогда в оптимальном решении последней работой будет работа, которая не имеет последователей и дает $\min_{i \in N} f_i(P(N))$.

Алгоритм Лаулера

1. For $i := 1,\dots,n$ do $n(i) := \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$;

2. S := $\{1,\dots,N\}$; $p := \sum_{i\in S} p_i$;

3. For $k := n,\dots,1$ do

   3.1. Найти $j\in$ S, для которого $n(j) = 0$ и $f_j(p) = \min_{i\in S} f_i(p)$;

   3.2. Положить $S \setminus \{j\}$; $\pi_k := j$; $p := p - p_j$;

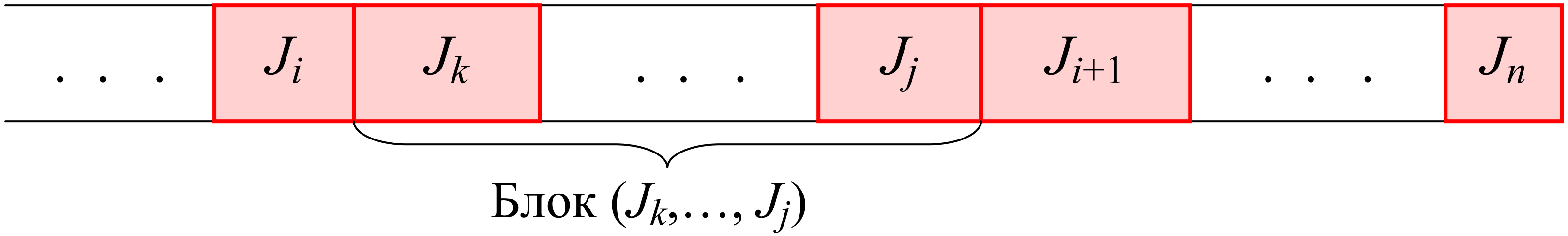
   3.3. For $i := 1,\dots,n$ do

   if $a_{ij} = 1$ then $n(i) := n(i) - 1$.

Трудоемкость алгоритма $T \approx O(n^2)$.

Теорема 2. Алгоритм Лаулера строит оптимальную перестановку π.

Доказательство. Перенумеруем все работы так, чтобы $\pi(i) = i$, $i = 1,\ldots, n$. Предположим, что π не является оптимальным решением, и пусть $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ — оптимальное решение. Найдем в нем первый номер с конца, где $j = \sigma(i) \neq i$ и $\sigma(i+1) = i+1$:



Согласно алгоритму Лаулера, работа J_i может быть поставлена сразу перед J_{i+1}, так как у нее нет последователей в блоке $(J_k,\ldots, J_j)$. Но $f_i(p) \leq f_j(p)$, $p = \sum_{l=1}^{i} p_l$. Значит, вставка i перед $i+1$ не увеличит целевую функцию и новое решение также является оптимальным. Действуя аналогично, мы уберем все нарушения, переходя от одного оптимального решения к другому, и в итоге получим π. ∎

Задача $1 \mid prec, \ pmtn, r_i \mid f_{\max}$

По-прежнему $f_{\max} = \max\limits_{i=1,\ldots,n} f_i(c_i)$ и $f_i(x)$ — монотонно возрастающие функции. Времена прихода работ $r_i \geq 0$ могут не быть согласованными с частичным порядком, то есть $a_{ij} = 1$ $(i \to j)$, но $r_j < r_i + p_i$. Поэтому сначала модифицируем величины r_i. Занумеруем работы так, что $i<j$ при $(i \to j)$ и упорядочим пары $e=(i \to j)$ по возрастанию j. Если всего пар |E| штук, то алгоритм пересчета величин r_i может быть записан следующим образом.

Алгоритм Modify r_i

For $e := 1,\ldots, |\mathrm{E}|$ do

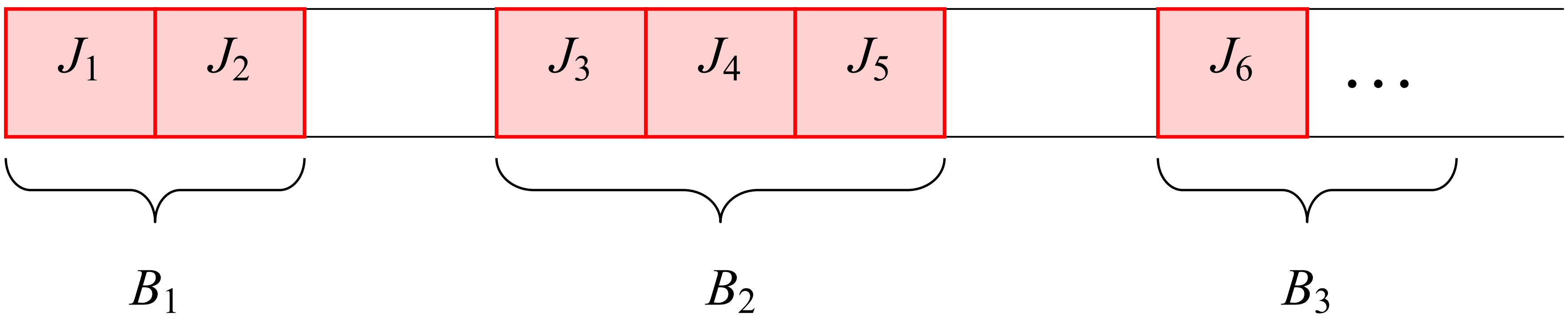
$r_j := \max \{ r_j, r_i + p_i \};$

Разбиение на блоки

Упорядочим работы так, чтобы

$$r_1 \le r_2 \le \ldots \le r_n \, .$$

Этот порядок порождает допустимое расписание. Оно разбивается на блоки. Блок — это максимальное подмножество работ, которое выполняется без простоя машины:



Алгоритм построения блоков

Алгоритм Blocks {1, 2, …, *n*}

1. $i := 1,\ j := 1;$
2. While $i \le n$ do
   - 2.1. $t := r_i;\ B_j := \varnothing;$
   - 2.2. While $(r_i \le t)\ \&\ (i \le n)$ do
     - 2.2.1. $B_j := B_j \cup \{i\};$
     - 2.2.2. $t := t + p_i;$
     - 2.2.3. $c_i := t;$
     - 2.2.4. $i := i + 1;$
   - 2.3 $j:=j+1;$

Трудоемкость алгоритма $T \approx O(n)$.

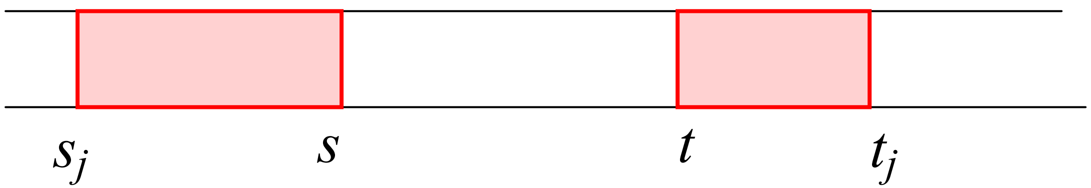
Параметры блоков

Для блока B_j определим: $s_j = \min_{i \in B_j} r_i$ — начало блока;

$p(B_j) = \sum_{i \in B_j} p_i$ — длительность блока; $t_j = t(B_j) = s_j + p(B_j)$ — окончание блока.

Теорема 3. Для задачи $1 \mid prec, \; pmtn, r_i \mid f_{\max}$ существует оптимальное расписание, в котором машина работает без простоев в интервалах $[s_j, t_j]$, $j = 1,\ldots, K$, где K — число блоков.

Доказательство. Рассмотрим оптимальное расписание и предположим, что в интервале $[s_j, t_j]$ машина простаивает с s по t:



Рассмотрим первый такой интервал (самый левый).

Покажем, что $\exists$ работа J_{i_0} такая, что $r_{i_0} \le s$, но $c_{i_0} > s$. Предположим, что такой работы нет. Рассмотрим множество работ T, стартующих позже s: $T = \{J_i \mid s_i > s\}$. Для них

$$r = \min\{r_i \mid i \in T\} > s,$$

так как нет работы J_{i_0}. Но тогда алгоритм Blocks должен был дать простой машины в интервале $[s, r]$. Получили противоречие. Значит работа J_{i_0} существует. Сдвинем ее начало в s и сократим интервал $[s, t]$ на p_{i_0}. Если $t - s > p_{i_0}$, то повторяем процедуру до тех пор, пока не покроем весь интервал. Но $[s, t]$ был первым интервалом. Аналогично поступим со вторым и т.д. ■

Оптимальное расписание для блока

Каждый блок можно рассматривать отдельно. Пусть $f^*_{\max}(B)$ — оптимальное решение для блока B и $f^*_{\max}(B \setminus \{j\})$ — оптимальное решение для $B \setminus \{j\}$. Так как f_i — монотонно неубывающие функции, то $f^*_{\max}(B) \geq f^*_{\max}(B \setminus \{j\})$ и

$$f^*_{\max}(B) \geq \max_{j \in B} f^*_{\max}(B \setminus \{j\}) \qquad (*)$$

В блоке B одна из работ заканчивается последней. Обозначим ее через J_l. Она не имеет последователей в B и $f_l(t(B)) = \min\{ f_j(t(B)) \mid j \in B$ и j не имеет последователей в $B\}$. Очевидно, что

$$f^*_{\max}(B) \geq f_l(t(B)) \qquad (**)$$

Удалим работу J_l из B и найдем оптимальное решение для этой подзадачи. Оно снова будет иметь блочную структуру. Простой машины в интервале $[s_j, t_j]$ будет соответствовать времени выполнения работы J_l и

$$f_{\max}^{*}(B) = \max\{f_{\max}^{*}(B \setminus \{J_l\}), f_l(t(B))\}.$$

В силу неравенств (*) и (**) это значение будет оптимальным. Применяя алгоритм рекурсивно, получаем оптимальное решение задачи.

Общая схема алгоритма $1 \mid prec, \ pmtn, r_i \mid f_{\max}$

1. $S := \{1,\ldots, n\}$
2. $f^*_{\max} := \text{Decompose}\ (S)$

Procedure Decompose (S)

1. If $S = \varnothing$ then return $-\infty$
2. If $S = \{i\}$ then return $f_i\,(r_i + p_i)$

   else 2.1. Call Blocks (S)

   2.2. $f := -\infty$

   2.3. For all blocks B do

   2.3.1. Найти l: $f_l\,(t(B)) = \min\{\, f_j\,(t(B)) \mid j \in B$ и j не имеет в B последователей$\}$;

   2.3.2. $h := \text{Decompose}\ (B \setminus \{J_l\})$

   2.3.3. $f := \max\ \{f, h, f_l\,(t(B))\}$

   2.4. return f

Трудоемкость алгоритма $T = O(n^2)$

Число прерываний не более (n – 1), т.к. каждое прерывание дает разбиение на блоки.

Если $r_i = 0$ для всех $i \in S$, то получаем алгоритм Лаулера.

Упражнение. Разработать точный полиномиальный алгоритм для задачи $1 \mid prec,\ p_i = 1, r_i \mid f_{\max}$.