Аппроксимационные схемы

Определение Алгоритм A называется ε-аппроксимационной схемой, если для любого $\varepsilon \in]0,1[$ и любых исходных данных I задачи верно

$$z^A(I) \geq (1-\varepsilon) z^*(I)$$

Другими словами, алгоритм A является $(1-\varepsilon)$-приближенным алгоритмом для всех $\varepsilon \in]0,1[$.

Алгоритм H^ε

1. $l := \min \{\lceil 1/\varepsilon \rceil - 2, n\}, \quad z^A := 0$

2. Для всех подмножеств $L \subset J$, $|L| \leq l-1$

$$\text{if } (\sum_{j\in L} w_j \leq c) \text{ and } (\sum_{j\in L} p_j > z^A) \text{ then } z^A := \sum_{j\in L} p_j$$

3. Для всех подмножеств $L \subset J$, $|L| = l$

if $(\sum_{j \in L} w_j \le c)$ then

- Применить алгоритм A^{MG} к задаче с множеством предметов $\{j \mid p_j \le \min\{p_i, i \in L\}\} \setminus L$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L} w_j$
- if $\sum_{j \in L} p_j + z^{MG} > z^A$ then $z^A := \sum_{j \in L} p_j + z^{MG}$.

Теорема Алгоритм H^{ε} является ε-аппроксимационной схемой.

Доказательство. Если оптимальное решение z^* содержит не более l предметов, то $z^A = z^*$ и утверждение верно.

Пусть в оптимальном решении более чем l предметов. Выберем в нем подмножество L^* из l предметов с наибольшими стоимостями p_j. Рассмотрим подзадачу S с множеством предметов $\{ j \mid p_j \le \min \{p_i, i \in L^*\} \} \setminus L^*$ и вместимостью рюкзака $c - \sum_{j \in L^*} w_j$. Оптимальное решение этой подзадачи обозначим через z_S^*. Тогда $z^* = z_S^* + \sum_{j \in L^*} p_j$. Приближенное решение, полученное алгоритмом A^{MG}, обозначим через z_S^{MG}.

По определению $z^A \ge \sum_{j \in L^*} p_j + z_S^{MG}$ и, кроме того, $z_S^{MG} \ge \frac{1}{2} z_S^*$.

Рассмотрим два случая:

1. $\sum_{j\in L^*} p_j \ge \frac{l}{l+2} z^*$. Тогда $z^A \ge \sum_{j\in L^*} p_j + z_S^{MG} \ge \sum_{j\in L^*} p_j + \frac{1}{2} z_S^* =$

$$\sum_{j\in L^*} p_j + \frac{1}{2}(z^* - \sum_{j\in L^*} p_j) = \frac{1}{2}(z^* + \sum_{j\in L^*} p_j) \ge \frac{1}{2}(z^* + \frac{l}{l+2} z^*) = \frac{l+1}{l+2} z^*$$

2. $\sum_{j\in L^*} p_j < \frac{l}{l+2} z^*$. Тогда в L^* найдется предмет с $p_j < \frac{1}{l+2} z^*$. По определению в подзадаче S все предметы имеют вес не более $\frac{1}{l+2} z^*$. Применяя свойство 2 для LP-релаксаций, получаем

$$z^* = \sum_{j\in L^*} p_j + z_S^* \le \sum_{j\in L^*} p_j + z_S^{MG} + \frac{1}{l+2} z^* \le z^A + \frac{1}{l+2} z^*.$$

Итак, в обоих случаях получаем $z^A \ge \frac{l+1}{l+2} z^*$. Величина $\frac{l+1}{l+2}$ растет с ростом l и $\frac{l+1}{l+2} \ge \frac{1/\varepsilon - 1}{1/\varepsilon} = 1 - \varepsilon$. ■

$$T = O(n\, n^l) = \mathrm{O}(n^{l+1}). \quad \Pi = O(n).$$

Пример Положим $n = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1,\ c = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil M$ и

$$p_1 = 2, \quad p_2 = p_3 = \ldots = p_n = M,$$

$$w_1 = 1, \quad w_2 = w_3 = \ldots = w_n = M.$$

Оптимум $z^* = M(l + 2)$, $l = n - 3$, $z^A = (l + 1)M + 2$ и

$$z^A / z^* \to (l+1)/(l+2) \quad \text{при} \quad \mathrm{M} \to \infty.$$

Определение ε-аппроксимационная схема A называется полиномиальной, если ее трудоемкость полиномиально зависит от размерности задачи.

$T_H = O(n^{l+1}) = O(n^{1/\varepsilon - 1})$ — полиномиальная зависимость при заданном ε. Если $\varepsilon = 0.1$, то $T_H = O(n^9)$, то есть алгоритм H^ε является полиномиальной ε-аппроксимационной схемой для задачи о рюкзаке.

Определение ε-аппроксимационная схема A называется полностью полиномиальной, если ее трудоемкость полиномиально зависит от размерности задачи и величины $1/\varepsilon$.

Теорема Для задачи о рюкзаке существует полностью полиномиальная ε-аппроксимационная схема.

Доказательство Для примера $I = \{p_1,\ldots, p_n, w_1,\ldots, w_n, c\}$ построим новый пример $\bar{I}$, в котором $\bar{c} = c, \bar{w}_j = w_j, \bar{p}_j = \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor$ для некоторой константы $K > 0$, которую определим позже. Для примера $\bar{I}$ применим алгоритм ДП и найдем оптимальный набор предметов $\bar{X}$. Скорее всего он будет отличаться от оптимального набора X^* для примера I. Оценим разность между полученным значением z^A и оптимальным z^*:

$$z^A = \sum_{j\in\bar{X}} p_j \geq \sum_{j\in\bar{X}} K\left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq K \sum_{j\in X^*} \left\lfloor \frac{p_j}{K} \right\rfloor \geq \sum_{j\in X^*} K\left(\frac{p_j}{K} - 1\right) =$$

$$= \sum_{j\in X^*} (p_j - K) = z^* - |X^*| K.$$

Второе неравенство в этой цепочке следует из оптимальности $\bar{X}$ для $\bar{I}$.

Мы хотим получить $\dfrac{z^* - z^A}{z^*} \le \dfrac{|X^*|K}{z^*} \le \varepsilon.$

Следовательно, $K \le \dfrac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|}$. Так как $n \ge |X^*|$ и $z^* \ge p_{\max}$, то

$$\frac{\varepsilon \cdot z^*}{|X^*|} \ge \frac{\varepsilon \cdot z^*}{n} \ge \frac{\varepsilon \cdot p_{\max}}{n}$$

и, полагая $K = \varepsilon \cdot p_{\max} / n$, получим нужное значение для параметра K.

Трудоемкость алгоритма определяется трудоемкостью ДП. Если вместо исходной задачи решать обратную к ней, то $T = O(Un)$, где U — верхняя оценка на оптимальное значение целевой функции $\bar{z}^* = \sum_{j \in \bar{X}} \bar{p}_j$.

Очевидно, что $\bar{z}^* \le n\bar{p}_{\max}$, но $\bar{p}_{\max} \le \frac{p_{\max}}{K} = \frac{n}{\varepsilon}$, то есть $\bar{z}^* \le n^2 / \varepsilon$.

Полагая $U = n^2/\varepsilon$, получаем $T = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$, $\Pi = O(Un) = O(n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$. ■