ACL-СВОЙСТВО КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ КАРНО-КАРАТЕОДОРИ И ФУНКЦИИ КЛАССА BMO

МАКСИМ ТРЯМКИН

Известно, что квазиконформное отображение пространств Карно-Каратеодори является абсолютно непрерывным на интегральных кривых горизонтальных векторных полей (см., например, [1]). Возникает вопрос, можно ли обобщить это свойство на интегральные кривые векторных полей, степень которых отлична от единицы. Для решения этого вопроса определение абсолютной непрерывности должно быть переформулировано аналогично тому, как это сделано в работе [2].

Определение. Пусть $f\colon \mathbf{M} \to \mathbf{N}$ — квазиконформное отображение пространств Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности $Q > 1$, и $\gamma(t) = \exp tX(s)$ — интегральная кривая векторного поля степени l, $1 \leqslant l \leqslant M$, где M — глубина многообразия $\mathbf{M}$, выходящая из точки s, $t \in (-a, a)$. Говорят, что f *абсолютно непрерывно* на этой кривой, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого набора попарно непересекающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subset (-a, a)$, $i \in \mathbb{N}$,

$$\sum_i (\beta_i - \alpha_i)^l < \delta \quad \text{влечет} \quad \sum_i |f(\gamma(\beta_i)) - f(\gamma(\alpha_i))|^l < \varepsilon.$$

Введем еще одно понятие, необходимое для решения поставленного вопроса.

Определение. Пусть $\mathbf{M}$ — пространство Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности $Q > 1$ с хаусдорфовой мерой $\mathcal{H}^Q$ на нем, и Γ — семейство интегральных кривых векторного поля степени l, $1 \leqslant M \leqslant M$, где M — глубина многообразия $\mathbf{M}$. Тогда *Q-модулем* этого семейства мы назовем величину

$$\operatorname{mod}_Q \Gamma = \inf \int\limits_{\mathbf{M}} \rho^{Q/l}\, dx,$$

где инфинум берется по всем таким неотрицательным борелевским функциям $\rho\colon \mathbf{M} \to [0, \infty]$, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, d\mathcal{H}^Q \geqslant 1$$

для любой $\gamma \in \Gamma$.

Теорема 1.
Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — пространства Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности $Q > 1$, и $\Omega \subset \mathbf{M}$ — компактно вложенное открытое связное множество. Если отображение $f\colon \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ квазиконформно, то оно абсолютно непрерывно на mod_Q-почти всех интегральных кривых векторного поля степени l, $1 \leqslant l \leqslant M$, где M — глубина многообразия $\mathbf{M}$.

В доказательстве теоремы 1 существенно применяются результаты работ [3, 4].

В работе [5] показано, что гомеоморфизм метрических пространств достаточно общего вида, в частности, пространств Карно-Каратеодори, индуцирующий изоморфизм пространств BMO, является квазиконформным. В настоящей работе мы показываем, что условие квазиконформности является не только необходимым, но и достаточным.

Работа выполнена при частичной поддержке проектами Научные школы: НШ-921.2012.1; и ФЦПК – заявка № 2012-1.2.1-12-000-1001-025.

Теорема 2.

Пусть $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— пространства Карно-Каратеодори хаусдорфовой размерности* $Q > 1$*, и* $\Omega \subset \mathbf{M}$ *— компактно вложенное открытое связное множество. Если отображение* $f\colon \Omega \to \Omega' = f(\Omega)$ *квазиконформно, то оно индуцирует ограниченный линейный оператор*

$$f^*\colon BMO(\Omega') \to BMO(\Omega)$$

по правилу $f^*u = u \circ f$*. При этом норма* $\|f^*\|$ *оператора суперпозиции оценивается через коэффициент квазиконформности и размерность Хаусдорфа* Q *пространства Карно-Каратеодори.*

В доказательстве теоремы 2 применяются результаты работ [3, 4, 6].

Список литературы

[1] G. A. Margulis and G. D. Mostow, “The differential of a quasiconformal mapping of Carnot-Caratheodory space”, *Geom. Funct. Anal.*, 21, 402–433 (1995).

[2] С. К. Водопьянов, А. В. Грешнов, “Аналитические свойства квазиконформных отображений на группах Карно”, *Сиб. мат. журн.*, 36, No. 6, 1317–1327 (1995).

[3] J. Heinonen and P. Koskela, “Definitions of quasiconformality”, *Invent. math.*, 120, 61–70 (1995).

[4] J. Heinonen and P. Koskela, “Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry”, *Preprint*, 191 (1995).

[5] S. K. Vodop’yanov, A. V. Greshnov, “Quasiconformal mappings and BMO-spaces on metric structures”, *Sib. Adv. Math.*, Vol. 8, No. 3, 132–150 (1998).

[6] Reimann H. M. “Functions of bounded mean oscillation and quasiconformal mappings”, *Comment. math. helv.*, Vol. 8, 260–276 (1974).

Новосибирский Государственный Университет, г. Новосибирск, 630090, Россия

E-mail address: maxtryamkin@yandex.ru