Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа

Новосибирск, 28 мая - 2 июня 2007 г.

Организаторы: Новосибирский государственный университет совместно с Сибирским отделением Российской академии наук при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований

23 апреля 2007 г. научная общественность отмечает 100-летие со дня рождения крупнейшего ученого в области математики и механики, общественного деятеля, руководителя и выдающегося представителя грузинской математической школы, крупнейшего организатора науки и просвещения Ильи Несторовича Векуа.

Илья Несторович Векуа родился в 1907 году в грузинском селе Шешелети. После окончания средней школы города Зугдиди продолжил обучение на физико-математическом факультете Тбилисского государственного университета. Закончив обучение в 1930 году, был направлен в Ленинград, в аспирантуру Академии наук СССР. Окончив аспирантуру, возвращается в Грузию. К этому времени Илья Несторович получает ряд фундаментальных результатов в различных областях теоретической и прикладной математики, становится одним из ведущих представителей грузинской математической школы, которую возглавлял академик Н.И.Мусхелишвили.

В 1939 году, через два года после защиты кандидатской диссертации, в 32 года Илья Несторович защищает докторскую диссертацию и получает звание профессора. В 1944 году он избирается членом-корреспондентом, а через два года действительных членом Академии наук Грузинской ССР и членом-корреспондентом Академии наук СССР. В 1958 году он становится действительным членом Академии наук СССР. С 1959 по 1964 год он работает в должности ректора Новосибирского государственного университета, с 1965 по 1972 год И.Н.Векуа – ректор Тбилисского государственного университета. С 1972 – Президент Академии наук Грузинской ССР.

В научном мире И.Н.Векуа известен своей многосторонней научной деятельностью, которая охватывает широчайший диапазон проблем из различных областей теоретической и прикладной математики.

Основные труды И.Н.Векуа относятся к новым научным направлениям в современной математической физике. Его работы в области дифференциальных уравнений с частными производными, в основном, посвящены созданию аналитической теории обширного класса уравнений эллиптического

типа. Им создана теория линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа с аналитическими коэффициентами в частных производных в случае двух независимых переменных. И.Н. Векуа внёс крупный вклад в теорию одномерных сингулярных интегральных уравнений, открыл и исследовал новый класс нефредгольмовых эллиптических краевых задач. В области механики И.Н. Векуа предложил новый вариант математической теории упругих оболочек. Им решены трудные проблемы малых изгибаний поверхностей и тесно с ними связанные задачи безмоментной теории оболочек.

Значимость научных результатов И.Н.Векуа была подтверждена высокими государственными и правительственными наградами.

Плодотворная научно-исследовательская работа И.Н.Векуа успешно сочеталась с большой научно-организаторской, педагогической и общественной деятельностью. Успешный ученый, он обладал также большим талантом и энергией научного руководителя и организатора. У Ильи Несторовича было много учеников и последователей. Его методы развивают и применяют в различных научных школах, в том числе ведущих научных школах Сибирского отделения Российской академии наук.

И.Н.Векуа принимал непосредственное участие в разработке проекта создания Сибирского отделения Академии наук СССР. Высокий научный авторитет и выдающиеся организаторские способности И.Н.Векуа сыграли важную роль при организации успешной работы нового сибирского университета. И. Н.Векуа был первым ректором Новосибирского государственного университета с 1959 года в течение 6 лет. Принципы организации работы и учебного процесса в вузе, разработанные при его участии и положенные в основу деятельности Новосибирского государственного университета, одним из которых является тесное сближение науки и высшего образования, позволили университету встать в один ряд с мировыми центрами по подготовке высококвалифицированных научных кадров.

В знак глубокой благодарности и в память о выдающемся ученом и первом ректоре на главном корпусе Новосибирского государственного университета года установлена мемориальная доска с барельефом И.Н.Векуа.

Использованная литература:
Бицадзе А.В. Илья Несторович Векуа. Тбилиси: "Мецниереба", 1987.

Фотографии из музея НГУ

И.Н.Векуа, Л.И.Седов, М.А. Лаврентьев в Академгородке

И.Н.Векуа с первыми выпускниками НГУ

И.Н.Векуа в НГУ

И.Н.Векуа с выпускниками НГУ

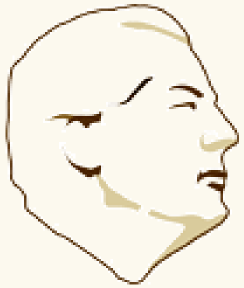
И.Н.Векуа на симпозиуме

И.Н.Векуа на научной сессии

И.Н.Векуа

Мемориальная доска с барельефом И.Н.Векуа

Дополнительную информацию об Илье Несторовиче Векуа смотрите также на сайте Института математики им. А.Размадзе http://www.rmi.acnet.ge/person/vekua/



Международная конференция
"Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения",
посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа
Новосибирск, 28 мая - 2 июня 2007 г.

Векуа И.Н.

Программный комитет

Организационный комитет

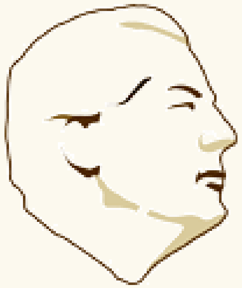
Тезисы докладов

Контактная информация

Программный комитет

Академик РАН М.М. Лаврентьев (Новосибирск) - председатель
Академик РАН С.К. Годунов (Новосибирск)
Академик РАН Ю.Л. Ершов (Новосибирск)
Академик РАН В.А. Ильин (Москва)
Академик РАН В.В. Козлов (Москва)
Академик РАН Е.И. Моисеев (Москва)
Академик РАН Н.Ф. Морозов (Санкт-Петербург)
Академик РАН Л.В. Овсянников (Новосибирск)
Академик РАН Ю.Г. Решетняк (Новосибирск)
Академик РАН В.М. Фомин (Новосибирск)
Академик АМАН А.М. Нахушев (Нальчик)
Академик ПАН Б. Боярски (Польша, Варшава)
Академик ГАЕН Г.В. Джаиани (Грузия, Тбилиси)
Академик НАН РК Н.К. Блиев (Казахстан, Алматы)
Академик НАН РК Т.Ш. Кальменов (Казахстан, Алматы)
Академик НАН КР М.И. Иманалиев (Кыргызстан, Бишкек)
Академик АН РУз Т.Д. Джураев (Узбекистан, Ташкент)
Академик АН РУз М.С. Салахитдинов (Узбекистан, Ташкент)
Член-корреспондент РАН Б.Д. Аннин (Новосибирск)
Член-корреспондент РАН П.И. Плотников (Новосибирск)
Член-корреспондент РАН В.Г. Романов (Новосибирск)
Член-корреспондент РАН И.А. Тайманов (Новосибирск)
Член-корреспондент РАН В.М. Тешуков (Новосибирск)
Член-корреспондент РАН В.Е. Третьяков (Екатеринбург)
Член-корреспондент НАН РА Н.Е. Товмасян (Армения, Ереван)
Профессор В.С. Белоносов (Новосибирск)
Профессор А.И. Кожанов (Новосибирск)

Профессор С.А. Терсенов (Новосибирск)
Профессор К.Б. Сабитов (Стерлитамак)
Профессор А.П. Солдатов (Белгород)
Профессор Д.К. Гвазава (Грузия, Тбилиси)
Профессор Р.А. Кордзадзе (Грузия, Тбилиси)
Профессор А.А. Килбас (Беларусь, Минск)



Международная конференция

"Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения",

посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа

Новосибирск, 28 мая - 2 июня 2007 г.

Векуа И.Н.

Программный комитет

Организационный комитет

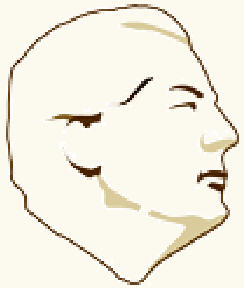
Тезисы докладов

Контактная информация

Организационный комитет

Н.С. Диканский - председатель
С.С. Гончаров - заместитель председателя
А.И. Кожанов - заместитель председателя
Н.Л. Абашеева - ученый секретарь
Е.Н. Алексеева
В.А. Андреев
Ю.Е. Аниконов
А.В. Аржанников
В.В. Асеев
Е.А. Бакланов
А.М. Блохин
А.Ф. Воеводин
Ю.М. Волчков
Л. Н. Воробцова
О.А. Данилов
Г.В. Демиденко
Н.В. Дулепова
И.Е. Егоров
А.А. Кочеев
С.С. Кутателадзе
М.М. Лаврентьев-мл.
Е.М. Лисман
Л.А. Лягушина
К.А. Медведко
Е.В. Мищенко
В.В. Радченко
Е.М. Сазонова

В.А. Собянин
А.Г. Усов
С.А. Ухинов
М.П. Федорук
М.В. Фокин
А.М. Хлуднев
И.Ю. Цвелодуб
В.А. Шарафутдинов



Международная конференция

"Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения",

посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа

Новосибирск, 28 мая - 2 июня 2007 г.

Векуа И.Н.

Программный комитет

Организационный комитет

Тезисы докладов

Контактная информация

Электронные варианты тезисов докладов представлены по следующим направлениям:

Дифференциальные уравнения
Теория функций и комплексный анализ
Теория упругости
Математическое моделирование

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С. А. Абдыманапов, С. А. Алтынбек	Задача Дирихле для одной модельной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса на плоскости
А. А. Абрамов, В. И. Ульянова, Л. Ф. Юхно	Исследование и методы решения нелинейных спектральных задач для дифференциально-алгебраических уравнений
В. С. Абруков, Д. А. Троешестова, А. С. Сабиров, Г. И. Малинин, А. Н. Анкундинов	Волна горения: новые возможности построения аналитических моделей и их применения в экспериментальных исследованиях с помощью метода искусственных нейронных сетей
У. У. Абылкаиров	Разрешимость обратной задачи протекания для системы Навье - Стокса
У. У. Абылкаиров, С. Е. Айтжанов	Однозначная разрешимость обратной задачи магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости
У. У. Абылкаиров, Ш. С. Сахаев, Х. Хомпыш	О разрешимости начально-краевой задачи магнитной гидродинамики для неоднородной жидкости
С. А. Айсагалиев, А. А. Кабидолданова	Краевые задачи оптимального управления линейными системами с линейными функционалами
А. В. Аксенов	Метод построения функции Римана гиперболического уравнения второго порядка

А. Ш. Акыш	О разрешимости нелинейного уравнения Больцмана
С. А. Алдашев	Критерий однозначной разрешимости задачи Дарбу - Проттера для одного класса многомерных гиперболических уравнений
Т. М. Алдибеков	Об обобщенных показателях Ляпунова
П. С. Алешин	Начально-краевая задача для дифференциально-разностного уравнения смешанного типа с дробной производной по пространственной координате
О. Р. Аллаберганов	Об обратной задаче на полуоси для оператора Штурма - Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом
М. М. Амангалиева, А. Е. Туймебаева	О разрешимости особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода
Д. Аманов, Ж. А. Отарова	Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка
А. А. Андреев, И. Н. Саушкин	Нелокальные дифференциальные уравнения в частных производных
В. К. Андреев	Стабилизация решений краевой задачи о совместном движении двух бинарных смесей
Ю. П. Апаков	О решении одной краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка
Ю. П. Апаков, Б. Ю. Иргашев	Об одной задаче для вырождающегося уравнения третьего порядка
Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм	Задача Коши для эллиптических уравнений второго порядка на плоскости
А. В. Арутюнов	Анормальные экстремальные задачи с ограничениями и теорема об обратной функции
А. Т. Асанова	О краевой задаче с данными на характеристиках для системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными
И. В. Асташова	О колеблемости решений квазилинейных дифференциальных уравнений высокого порядка
А. О. Бабаян	О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка
Я. С. Бадретдинов	Уравнения пространства. Анализ решения для двумерного случая
С. Байзаев, Э. М. Мухамадиев	Об индексе эллиптических операторов первого порядка на плоскости
У. И. Балтаева	Об одной задаче для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа
С. П. Баутин	Аналитические тепловые волны нелинейных уравнений параболического типа
Акр. Х. Бегматов, З. Х. Очилов	*H*-отображения ограниченных областей
В. С. Белоносов	Параметрический резонанс в нелинейных системах
А. Б. Бержанов, Е. К. Курмангалиев	О многопериодическом по части переменных решении одной системы в частных производных в широком смысле
А. Б. Бержанов, Ж. А. Сартабанов	О многопериодическом по части переменных решении одной системы в частных производных гиперболического типа
М. Х. Бештоков	Об одной априорной оценке решения нелокальной краевой задачи для псевдопарболического уравнения третьего порядка
А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев	Корректность модифицированной смешанной задачи об устойчивости ударной волны в вязком газе

У. Бобомуродов	Задача Бицадзе - Самарского для уравнений смешанного эллиптико-параболического типа с сингулярным коэффициентом
А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых, А. А. Панин, А. Г. Свешников	О спектре краевой задачи Дирихле для оператора Лапласа
А. Г. Брусенцев	О характеризации замыкания в метрике обобщенного интеграла Дирихле
В. В. Бублик	Дифференциально инвариантные решения уравнений динамики вязкого теплопроводного газа
Г. О. Бузыкин	Метод мультиполей для краевых задач в областях со скругленными углами
Л. Н. Булдыгерова	Разрешимость краевых задач в R_n^+ для квазиэллиптических систем
М. В. Бурцев, А. Н. Зарубин	Начально-краевая задача для дробного диффузионно-волнового уравнения с некарлемановским сдвигом
М. Г. Гадоев	Об асимптотике спектра одного класса несамосопряженных систем
Дж. К. Гвазава	О некоторых особенностях решений нелинейной характеристической задачи со свободным носителем данных
В. Ф. Гилимшина	Об убывании решения вырождающегося эллиптического уравнения
А. Ф. Гильмутдинова	Об особенностях фазового пространства системы уравнений Кана - Хилларда
С. О. Гладков, И. Г. Табакова	К теории вывода обобщенного уравнения диффузии
С. Н. Глазатов	Существование пространственно-периодических решений нестационарных уравнений трансзвуковой газовой динамики
Ю. Г. Губарев	К устойчивости установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости
М. К. Дауылбаев, К. Ж. Тлеубердин	Асимптотическое поведение решений линейных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром
Г. В. Демиденко	О свойствах матричных квазиэллиптических операторов
В. Н. Денисов	О стабилизации решения задачи Коши для параболических уравнений в классах экспоненциально растущих начальных функций
С. Л. Дерябин	Задачи со свободными границами для нелинейных уравнений с частными производными и их приложения
Т. И. Дёмина	Смешанные задачи для телеграфного уравнения в прямоугольной области
М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов	Граничные задачи для спектрально-нагруженных параболических операторов
М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов, Б. С. Кошкарова	О спектрально-нагруженных параболических уравнениях в ограниченных областях
Д. С. Джумабаев, Э. А. Бакирова	Признаки корректной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений

Т. Д. Джураев, Б. И. Жамолов	Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа четвертого порядка
Т. Д. Джураев, О. С. Зикиров	Нелокальная задача с интегральными условиями для уравнения в частных производных третьего порядка
Т. Д. Джураев, А. Г. Ходжаниязов	Об одной спектральной задаче для уравнения третьего порядка составного типа
В. Л. Дильман	Исследование системы уравнений напряженного состояния неоднородного пластического слоя
Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков	Некорректная задача Коши для дифференциальных уравнений запаздывающего типа с обратным временем
В. Ю. Дубинская	Асимптотическое осреднение стационарного уравнения теплопроводности в средах с различными периодами неоднородностей
И. Е. Егоров, В. Е. Федоров	К теории краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка
А. А. Егорова	Об одной задаче динамики тонкого неоднородного вязкоупругого стержня при наличии сосредоточенных и распределенных сил и моментов
И. П. Егорова, Н. А. Куликова	Единственность краевой задачи для уравнения смешанного типа со специальным условием сопряжения
А. О. Егоршин	Встречные процессы: вычислительная алгебра и дифференциальные уравнения
М. М. Ерекешева	О неустойчивости движения с постоянно действующими возмущениями
Л. С. Ефремова	Об ω-предельных множествах простейших косых произведений в плоскости
Б. М. Жапбасбай, Х. Х. Имомназаров	Численное решение двумерной задачи электрокинетики для пористых сред
О. Г. Жукова, Р. К. Романовский	Граничное управление одномерной гиперболической системой уравнений теплопроводности
С. С. Жуматов	Эквивалентность и устойчивость вырожденных систем программного движения
А. Х. Жураев	Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками
Д. А. Жураев, И. Исломов	О задаче Коши для эллиптических систем первого порядка
А. А. Замышляева	Уравнение Буссинеска - Лява на графе
В. М. Ипатова	Исследование задачи, возникающей при вариационном построении решений системы Навье - Стокса
В. М. Ипатова	Существование решений трехмерной модели динамики океана с непрерывной по Липшицу плотностью и решений задачи ассимиляции данных наблюдений
С. С. Исамухамедов, Н. К. Мамадалиев	Задача Трикоми для уравнения эллиптико-гиперболического типа второго рода
Т. Ишанкулов	Продолжение обобщенных аналитических функций
Г. М. Кадиров, Н. Раджабов	Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка с одной внутренней сверхсингулярной точкой
С. И. Кадченко	Вычисление сумм числовых рядов поправок теории возмущения дискретных операторов
А. Л. Казаков	Обобщенная задача Коши и ее приложения в механике сплошной среды
Б. Т. Калимбетов	Об одной задаче для слабо нелинейной системы со спектральными особенностями

Т. Ш. Кальменов, У. А. Искакова	Об одном методе решения задачи Коши для уравнения Лапласа
Т. Ш. Кальменов, А. Ш. Шалданбаев	О некоторых приложениях спектральной теории уравнений с отклоняющимся аргументом
Т. Ш. Кальменов, А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева	О влиянии младшего члена на корректную разрешимость периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом
Т. Ш. Кальменов, М. Т. Шоманбаева	Об одном критерии существования сильного решения задачи Коши - Неймана для уравнения теплопроводности с аргументом
Б. Е. Кангужин	Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков
В. В. Карачик	Об одном свойстве гармонических функций
А. Л. Карчевский	Аналитические решения для системы дифференциальных уравнений теории упругости и уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых сред любого вида анизотропии и их вычисление
В. В. Катрахов, Е. Д. Емцева	Сингулярная краевая задача в областях плоскости Лобачевского
В. В. Катрахов, П. Н. Зайцев, А. В. Ляхов	Сингулярные краевые задачи в пространствах постоянной кривизны
А. В. Келлер	Численное решение обобщенной задачи Шоуолтера - Сидорова для системы уравнений леонтьевского типа
А. А. Коваленко	О необходимых и достаточных условиях разрешимости смешанных задач для одного класса уравнений Соболева
А. И. Кожанов	Вырождающиеся уравнения соболевского типа
Л. М. Кожевникова	Поведение при $x\to\infty$ решений псевдодифференциальных уравнений в неограниченных областях
А. В. Корниенко, О. В. Корниенко	Об одной системе уравнений смешанного типа
Д. В. Корниенко, В. В. Корниенко	О спектральных свойствах задачи Дирихле для однотипных систем уравнений
Д. В. Корниенко, О. В. Корниенко	Об одной спектральной задаче для двух систем уравнений
А. А. Коробов	О новых эффективных условиях точечной полноты для линейной системы с запаздыванием
О. В. Коробова	Сингулярные системы дифференциальных уравнений специального вида в банаховых пространствах
С. А. Корольков	О разрешимости некоторых краевых задач для гармонических функций на римановых многообразиях с концами
Б. Д. Кошанов	О представлении решений задач Дирихле для полигармонических уравнений в шаре
И. А. Кузнецова	О разрешимости краевой задачи для уравнения гиперболического типа с операторами М. Сайго на характеристиках
А. А. Кульжумиева, Ж. А. Сартабанов	Периодические решения одной квазилинейной периодической системы уравнений многомерного времени с периодом, зависящим от характеристик дифференциального оператора
С. В. Лексина	Аналог формулы Даламбера для системы волновых уравнений

М. Г. Лепчинский	Существование решений эллиптических уравнений с неограниченной разрывной правой частью
А. Р. Майков	Об эффективных условиях на открытой границе для уравнения Клейна - Гордона
В. И. Максимов	О динамическом обращении распределенных систем
З. Маликов	Существование решения задачи Коши для системы Коши - Римана
М. Ш. Маматов	Об одной игровой задаче преследования, описываемой уравнениями в частных производных
А. Е. Мамонтов	Глобальная разрешимость многомерных уравнений сжимаемой жидкости Бингама
М. О. Мамчуев	Необходимые нелокальные условия для диффузионно-волнового уравнения
Н. А. Манакова	Задача оптимального управления для уравнения электрического поля в полупроводнике
И. И. Матвеева	О краевых задачах для псевдопараболических систем
М. В. Мендзив	Прямой метод Ляпунова для гиперболических систем с периодическими коэффициентами
И. З. Меражов	Обратные задачи для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости в линейном приближении
Г. М. Мирсабурова	Задача с условием Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа
А. М. Нагорный, Н. К. Мамадалиев	Аналог задачи Дирихле для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа второго рода
А. Н. Наимов	Об априорной оценке и существовании периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости
А. М. Нахушев	К теории краевых задач со смещением
И. Д. Нуров	Моделирование бифуркационных задач со слабоосциллирующими параметрами
М. Отелбаев, К. Н. Оспанов	Некоторые результаты об обобщенных аналитических функциях и сингулярных эллиптических системах первого порядка
Б. Б. Ошоров	О корректности краевых задач для эллиптических систем уравнений первого и второго порядка
В. Н. Павленко	Уравнения параболического типа с разрывными нелинейностями степенного роста
Н. Р. Пинигина	О гельдеровской гладкости решений краевых задач для параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции
Н. И. Погодаев	Свойства экстремальных решений управляемой системы типа Гурса - Дарбу
С. В. Попов, С. В. Потапова	Гёльдеровская разрешимость параболических уравнений $2n$-го порядка с меняющимся направлением эволюции
Л. С. Пулькина	Нелокальная задача для уравнения Лапласа
С. Г. Пятков	Обратные коэффициентные задачи для параболических уравнений с финальным и частичным финальным переопределением
А. Н. Рафиков	О двух задача типа Бицадзе - Самарского для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения
Д. Г. Рахимов	О методе М. К. Гавурина для многопараметрических спектральных задач
Л. Х. Рахманова	Нелокальная задача для смешанного уравнения параболо-гиперболического типа
А. А. Резванцева	Существование решений и их свойства в модели подледного конвективного пограничного слоя
О. А. Репин	Нелокальная задача для уравнения смешанного типа

А. В. Роговой	О разрывном решении однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева - Бицадзе в случае контуров специального вида
А. А. Родионов	Групповая классификация уравнений одной модели конвекции
М. Х. Рузиев	Задача Дирихле в вертикальной полуполосе для вырождающегося эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом и со спектральным параметром
Ш. Н. Рузиев	Аналог принципа Сен-Венана для вырождающихся уравнений третьего порядка составного типа
К. Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова	О задаче Дирихле для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением в прямоугольной области
Ю. К. Сабитова	Об одной нелокальной граничной задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа
М. А. Садыбеков, А. М. Сарсемби	К вопросу построения присоединенных функций линейных дифференциальных операторов
А. Сакабеков, Е. Аужани	Закон сохранения массы и *H*-теорема Больцмана для одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана во 2-м приближении
В. Ж. Сакбаев	О двух методах регуляризации одной некорректной задачи Коши
М. С. Салахитдинов	О полноте системы собственных функций одной нелокальной задачи для уравнения смешанного типа
М. С. Салахитдинов, А. Масутова	Задача Гурса для одного класса уравнений, вырождающихся внутри области
Ж. С. Сартабанов, З. Ж. Алеуова	Псевдопериодические решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами
Р. Р. Сафиуллова	Обратные задачи для гиперболических уравнений
М. С. Сгибнев	О разрешимости однородного интегрального уравнения Винера - Хопфа
А. И. Седов, Г. А. Закирова	Об обратной задаче спектрального анализа для возмущенной степени оператора Лапласа на параллелепипеде
В. И. Семенов	Некоторые свойства гладких решений в нелинейной нестационарной задаче Коши для уравнений Навье - Стокса
С. И. Сенашов, О. В. Гомонова	Эволюция точных решений систем гиперболических уравнений
С. Я. Серовайский	Дифференцирование решения уравнения по параметру
Н. А. Сидоров	Ограниченные решения дифференциально-операторных уравнений с фредгольмовым коэффициентом в главной части
В. В. Сказка	О параметрическом резонансе у гамильтоновых уравнений с периодическим гамильтонианом, имеющим непрерывный спектр
С. Л. Скороходов	Двойные собственные значения задачи Орра - Зоммерфельда для течения Куэтта
Ж. Н. Тасмамбетов	Построение нормально-регулярных и конечных решений вырожденных гипергеометрических систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка
М. И. Тлеубергенов	О стохастической обратной задаче управляемой системы
Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян	О задачах Дирихле и Коши в полупространстве для эллиптических уравнений второго порядка в классе функций полиномиального роста
Ж. А. Токибетов	Об одном способе решения задачи Дирихле для вырождающей системы второго порядка

А. А. Токова	Нелокальная краевая задача с локальным смещением для одного класса нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа
А. Б. Тунгатаров, А. Ш. Тулегенова	Об одном классе обобщенных уравнений Эйлера - Дарбу
Б. Х. Турметов, Г. О. Дуйсеева	О собственных функциях одной краевой задачи с граничным оператором высокого порядка
Б. Х. Турметов, М. Т. Ильясова	Об одной краевой задаче для полигармонического уравнения с граничным оператором дробного порядка
Ф. Р. Турсунов	Регуляризация задачи Коши для линейных эллиптических систем первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области
А. В. Уразаева	Обратная задача для системы уравнений Осколкова
Г. У. Уразбоев	Об интегрировании цепочки Тоды с самосогласованным источником, соответствующим движущимся собственным значениям
А. К. Уринов, К. Т. Каримов	Нелокальная задача для уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами
М. В. Фалалеев	Обобщенные функции и обобщенные решения вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах
А. В. Фаминский	Корректность начально-краевых задач для уравнения Захарова - Кузнецова
В. Е. Федоров, О. А. Рузакова	Возмущение линеаризованной системы уравнений фазового поля
М. В. Фокин	О единственности и повышении гладкости решений задачи Дирихле для уравнения колебания струны
А. Х. Хайдаров	Об одной обратной задаче для гиперболических уравнений
Х. О. Хайдаров, И. Исломов	Об одном алгоритме решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца
Ш. Б. Халилов	Об одной системе уравнений составного типа
В. Н. Ханхасаев	Первая краевая задача для одного нелинейного неклассического уравнения 6-го порядка
А. Б. Хасанов, А. А. Рейимберганов	Об интегрировании нелинейного уравнения Шредингера с самосогласованным источником в случае конечной плотности
А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов	О комплекснозначных решениях уравнения КдФ с источником
А. Х. Хасанов, С. С. Исамухамедов	Фундаментальные решения обобщенного уравнения Геллерстедта
А. Р. Хашимов	Аналог принципа Сен-Венана для решения уравнений третьего порядка составного типа в неограниченных областях
У. А. Хоитметов	Интегрирование уравнения КдФ с самосогласованным источником интегрального типа в классе быстроубывающих комплекснозначных функций
В. А. Чадаев	Решение краевой задачи для дифференциального уравнения дробного порядка методом модифицированной прогонки
А. А. Черевко	Теоретико-групповые решения уравнений газовой динамики, порожденные трехмерными подалгебрами симметрии
А. А. Чесноков	Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды для пространственных сдвиговых течений

Е. А. Чиж	Резонансные эллиптические краевые задачи с разрывными неограниченными нелинейностями
Н. А. Чуешева	Краевые задачи для некоторых уравнений четвертого порядка
А. Ш. Шалданбаев	Критерий существования сильного решения обратной задачи теплопроводности
А. Ш. Шалданбаев	О спектральных свойствах одного модельного оператора с отклоняющимся аргументом
А. Ш. Шалданбаев, Г. О. Агабекова	О геометрии спектра одного модельного оператора
А. Ш. Шалданбаев, С. Т. Ахметова	О природе спектра оператора Коши - Неймана для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом
А. Ш. Шалданбаев, Г. Бесбаев	Об одном представлении решения волнового уравнения
А. Ш. Шалданбаев, М. Калхабай	О базисности собственных функций одного уравнения первого порядка с частными производными и отклоняющимся аргументом
А. Ш. Шалданбаев, А. А. Копжасарова	Решение смешанной задачи для волнового уравнения методом отклоняющегося аргумента
А. Ш. Шалданбаев, К. Кудайбергенова	Об одном признаке вольтерровости сужения оператора дифференцирования
А. Ш. Шалданбаев, Г. С. Кулажанов	О влиянии отклонения аргумента на спектральные свойства оператора
А. Ш. Шалданбаев, Г. Омирбекова	О вольтерровости нелокальных задач со смещением для волнового уравнения
А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов	Об уравнениях смешанного типа с отклоняющимся аргументом
А. Ш. Шалданбаев, К. Рустемова	Об одной периодической задаче для уравнения с отклоняющимся аргументом
А. Ш. Шалданбаев, Г. М. Спабекова	О природе спектра оператора периодической задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом
А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева	О сильной разрешимости задачи Коши - Дирихле для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом
Ю. В. Шанько	Некоторые точные решения трехмерных нестационарных уравнений Эйлера
Е. Ф. Шарин	Краевые задачи для уравнения теплопроводности с разрывными начальными функциями
А. С. Шипилов	Об устойчивости решений системы уравнений Осколкова
Г. А. Шмырев	О выходе на полином при $\|x\| \to\infty$ решений одного класса негипоэллиптических уравнений
М. Т. Шоманбаева	О природе спектра оператора Коши - Дирихле уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом
Т. В. Шувалова	Об однозначной разрешимости нелокальной задачи для уравнения смешанного типа с оператором М. Сайго в краевом условии
М. Х. Шхануков-Лафишев, М. М. Лафишева	Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка
Д. Б. Эшмаматова	О некоторых свойствах операторов вольтерровского типа
N. L. Abasheeva	Some inverse problems for parabolic and hyperbolic equations with a parameter

S. Antontsev, S. Shmarev	Elliptic equations with variable anisotropic nonlinearities
S. N. Askhabov	Nonlinear equations with integrals of fractional order in weighted Lebesgue spaces
A. L. Bukhgeim	Complex analysis and inverse problems
V. P. Burskii, A. S. Zhedanov	Boundary value problems for the string equation, some new links with geometry, analysis and algebra problems
A. V. Fursikov	Unlocal stable invariant manifolds for the Ginzburg - Landau equation
B. V. Kapitonov	Simultaneous exact control for Maxwell's equations and a hyperbolic system with a pressure term
A. A. Kilbas	Some aspects of fractional differential equations and their applications
A. N. Kusyumov	Local structure of the Morse system of two non-autonomus ordinary differential equations
N. A. Lyulko	Asymptotic behavior of solutions to hyperbolic systems with time delay in the boundary conditions
S. V. Meleshko	New class of invariant and partially invariant solutions to the one-dimensional gas dynamics equations
A. B. Muravnik	On propagation of perturbations for solutions to quasilinear parabolic equations
N. Nurlybayev	A priory estimates for some class of quasilinear hyperbolic equations
A. V. Penenko	A theoretical estimate of the convergence rate of the steepest descent method for the inverse heat conduction problem
R. S. Saks	The Riemann - Hilbert problem for a class of model Vekua equations with singular degeneration
G. V. Sandrakov	Multiphase models with memory effect arising from homogenization
E. N. Sattorov	On the problem of solving the generalized Moisil - Teodorescu system
Aris S. Tersenov	The Dirichlet problem for anisotropic quasilinear degenerate elliptic equations
V. V. Varlamov	Functions of representations of the class 1 on the homogeneous spaces of the de Sitter group
K. A. Volosov	New property of PDE and construction of solution to PDE in the parametric form

наверх

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

Г. М. Айрапетян	О задаче Дирихле в пространствах с весом в полуплоскости
Г. Акишев	О порядках приближения классов в пространствах со смешанной нормой
А. И. Александров, И. А. Александров	Уравнение Лёвнера. Применения
С. И. Безродных, В. И. Власов	Сингулярная задача Римана - Гильберта в сложных областях и некоторые ее приложения
Ю. С. Волков	О равномерной сходимости интерполяционных сплайнов и производных
А. Ф. Воронин	Критерий существования канонической факторизации матрицы-функции
А. В. Грешнов	Теоремы о касательном конусе для C^1-гладких параллелизуемых многообразий
Е. Г. Григорьева	Неравенство Соболева по финслеровой мере
А. А. Егоров	Устойчивость классов решений дифференциальных уравнений, строящихся с помощью квазивыпуклых функций и нуль-лагранжианов

И. В. Журавлев	К теоремам об обратной функции и о неявной функции для липшицевых отображений
А. П. Кармазин	Классификация струн и пучков струн областей и их поведение при квазиизометриях
А. Н. Кондрашов	О существовании и единственности решения уравнения Бельтрами переменного типа
Д. С. Коновалова	Признак сюръективности собственных непрерывных отображений
Л. С. Копанева	Конкретные отображения с симметрией переноса
А. С. Кравченко	Полнота пространства обобщённых мер в метрике Канторовича - Рубинштейна
В. Н. Кутрунов	Симметрия спектра оператора потенциала двойного слоя
Т. Г. Латфуллин	Коэффициент Бельтрами, метрические пространства и квазиконформные отображения
В. Г. Лежнев	Обобщение на случай полуоси неравенства Бернштейна для целых функций
А. Н. Малютина	О порядке роста отображений с s-суммируемой характеристикой
В. М. Миклюков	К теореме Римана для вырождающихся квазиконформных отображений с одной и двумя парами характеристик
Д. К. Мусаев, С. Д. Мусаева	О совершенных трубчато (О-С)-морфизмах трубчато (слабо) П-полных и трубчато (слабо) суперпаракомпактных отображениях
М. Г. Насырова	Об одном неравенстве типа Харди
А. И. Парфёнов	Дискретная норма для следа пространства W_p^2 в липшицевой области
Н. Раджабов	Радиально-симметричные решения комплексного двумерного нелинейного интегрального уравнения типа И. Н. Векуа с фиксированным сингулярным и сверхсингулярным ядром
Л. Раджабова	Об одной общем двухмерном интегральном уравнении типа Вольтерра с особенностью и сильной особенностью на границе области
Е. Д. Родионов, В. В. Славский	Аппроксимация и интерполяция конформно-плоских метрик
А. С. Романов	Теоремы вложения для следов соболевских функций в области с гельдеровыми особенностями
Н. Н. Романовский	Об ограниченности одного класса сингулярных интегральных операторов
Р. Г. Салахудинов	Одно применение неравенства Боннезена
Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин	Задача Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов (случаи конечного и бесконечного индексов)
С. М. Ситник	Построение операторов преобразования Векуа - Эрдейи - Лаундеса
А. П. Солдатов	Фредгольмова разрешимость сингулярных интегральных уравнений неклассического типа
А. С. Сорокин	О структурных формулах некоторых классов обобщенных аналитических функций в конечносвязной области
С. М. Ташпулатов	О спектрах, связанных состояниях и резонансах оператора энергии двухмагнонных систем в одномерной негейзенберговской ферромагнетике с взаимодействием ближайших соседей с произвольным значением спина S
С. М. Ташпулатов	О существенных и дискретных спектрах одного дискретного оператора Шредингера на трехмерной решетке
Е. В. Тюриков	Об одной смешанной граничной задаче И. Н. Векуа мембранной теории оболочек
Т. М. Урбанович	К теории исключительного случая краевой задачи Римана в классе гиперфункций

М. Д. Хриптун	Разложение обобщенных гипергеометрических функций ${}_{m}F_{m-1}(z)$ в ряды типа модифицированной формы Неймана по обобщенным функциям Бесселя
В. Г. Чередниченко	Рациональная аппроксимация и аналитическое продолжение
В. В. Чуешев, А. Н. Чичкакова	Мероморфные дифференциалы и функции на конечной римановой поверхности
Е. И. Яковлев	О методе суммирования кратного степенного ряда в спиральной звезде Миттаг-Леффлера
Yu. A. Antipov, V. V. Silvestrov	Applications of the Riemann - Hilbert boundary value problem on Riemann surfaces in mechanics and physics
B. N. Apanasov	Equivariant homeomorphisms in Carnot groups and symmetric spaces and their quasiconformality
H. Begehr	Complex partial differential model equations
N. K. Bliev	Generalized analytic functions in fractional spaces and some applications
V. M. Gichev	On common zeroes of the Laplace - Beltrami eigenfunctions
M. Korobkov	On Cauchy and Morera type criterions for boundedness of the coefficient of distortion
A. D. Mednykh	Tutte's problem on the number of maps on Riemann surface
T. S. Vaitekhovich	Basic boundary value problems for analytic functions in a ring domain
N. Virchenko	On the generalized Tricomi' function

наверх

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. А. Алексеева, Г. К. Кайшибаева	Метод граничных интегральных уравнений в задачах дифракции волн на цилиндрических полостях в упругих средах
Ю. А. Боган	О непрерывности перемещений в анизотропной двумерной теории упругости
О. П. Бушманова	Математическое моделирование локализации деформаций
В. О. Бытев, Л. И. Шкутин	Асимметричная упругость
Ю. М. Григорьев	Неклассическая задача для системы Стокса
О. Н. Жданов	Решение смешанной задачи для системы уравнений плоского напряженного состояния пластической среды Мизеса
Г. К. Закирьянова	Обобщенные решения нестационарных краевых задач для упругой анизотропной среды
А. М. Каримов	Осреднение нестационарных процессов в упругих композитах периодической структуры
В. Ф. Кириченко	Корректность эволюционных уравнений в неклассической теории пологих оболочек с переменной массой
В. А. Ковтуненко	Нелинейная эволюционная задача о развитии трещины
А. И. Левыкин, И. В. Сухоруков	Анализ сходимости моментного метода граничных элементов
Н. И. Мартынов	Приведение краевых задач теории упругости к краевым задачам обобщенного аналитического вектора
О. И. Махмудов	Задача Коши для системы уравнений Ламе в R^m

И. Э. Ниезов	Регуляризация решения задачи Коши для системы моментной теории упругости
Н. И. Остросаблин	Инвариантные постоянные упругости и определяющие соотношения упругих сред
О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова	К определению условий локализации вибрационного процесса системой дефектов
Е. М. Рудой	Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов
А. Тани, А. М. Хлуднев	Задачи теории трещин с налегающими областями
И. Ю. Цвелодуб	О разномодульной теории упругости изотропных материалов
Р. А. Шарипов	Кинематика, динамика и термодинамика пластичности в нелинейной теории деформаций
А. А. Шваб	Некоторые неклассические задачи теории упругости
Yu. A. Bogan, A. G. Kolpakov, S. I. Rakin	Some effects of deformation of laminated medium
R. Duduchava	Partial differential equations on hypersurfaces and the shell theory
A. Gaudiello	Boundary homogenization and reduction of dimension in the Kirchhoff - Love plate
H. Itou, A. Tani	A boundary value problem for an infinite elastic strip with a semi-infinite crack
G. V. Jaiani	Elastic cusped beam, plate, and shell hierarchical models and their relation to the 3D classical linear models

наверх

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

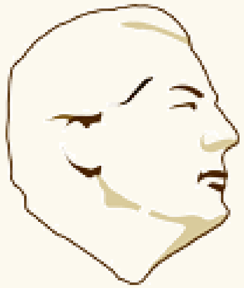
Т. А. Аверина	Моделирование систем со случайной структурой, заданной стохастическими дифференциальными уравнениями
Т. Р. Аманбаев	Взаимодействие двухфазной газокапельной струи со сверхзвуковым потоком
Н. М. Андреева, Д. И. Назимова	Выбор метода оценки репрезентативности данных для решения экологических задач
А. С. Апарцин	Функция Ламберта в теории полилинейных интегральных уравнений типа Вольтерра
Д. Ж. Ахмед-Заки, Н. Т. Данаев	Математическое моделирование процесса тепловой фильтрации
В. В. Башуров, Т. И. Филимоненкова	Вариационный подход к моделированию задач безопасности
П. Б. Бейсебай	Исследование неявной разностной схемы расщепления для уравнений тепловой конвекции
А. Н. Богданов, В. Н. Диесперов	Особенности моделирования свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях
А. В. Бойко, Ю. М. Нечепуренко	Численный анализ линейной устойчивости ламинарных течений в каналах
А. Н. Бондаренко, Д. С. Иващенко	Численные методы решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени с постоянным коэффициентом

А. Н. Бондаренко, А. В. Кацук	Адаптированный Ренье-анализ изображений
А. М. Бубенчиков, В. С. Попонин, Д. К. Фирсов	Метод высокого порядка точности в расчетах плоских стационарных уравнений Навье - Стокса на неструктурированных сетках
А. М. Бубенчиков, Н. Р. Щербаков, В. В. Становской, С. М. Казакявичюс	Компьютерное моделирование эксцентриковой циклоидально-цевочной передачи
В. Д. Власенко	Решение динамических задач электроупругости для пьезоэлектрических материалов
А. Ф. Воеводин, Т. В. Протопопова	Методы расщепления при решении начально-краевых задач для систем уравнений составного типа (опыт применения в задачах конвекции)
С. В. Гайдомак	О численном решении вырожденных гиперболических систем методом сплайн-коллокации
Ю. А. Гапоненко	Влияние периодических колебаний температуры на конвекцию в горизонтальном слое жидкости со свободной границей
С. О. Гладков, Р. Г. Рабаданов	Синергетика нелинейных колебаний тонкой струны
А. И. Голод, А. П. Чупахин	Многомерные автомодельные решения уравнений газовой динамики
А. Н. Голубятников	Течения жидкокристаллических сред с однородной деформацией
Ю. Н. Григорьев, И. В. Ершов	Глобальная неустойчивость свободных сдвиговых течений термически неравновесного молекулярного газа
Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин	Об итерационном решении двумерных задач теории упругости
С. А. Гусев	Оценка производных по параметрам решения параболической краевой задачи с граничным условием Неймана на основе численного решения стохастических дифференциальных уравнений
Т. В. Ерошкина	Математические модели напряженного состояния пластичной прослойки в сплошном цилиндре
А. И. Зейфман, Я. А. Сатин, Г. Н. Шилова	Построение предельных средних для некоторых классов процессов рождения и гибели
Г. А. Зеленков	Области неустойчивости характеристических полиномов грубых систем
А. В. Иванова, А. П. Чупахин	Вывод и исследование модели мелкой воды на вращающейся сфере
К. К. Измайлова, А. П. Чупахин	Теоретико-групповые решения кубического уравнения Шредингера, порожденные алгебрами симметрии размерности три
Х. Х. Имомназаров, А. А. Михайлов	Численное решение линейной 2D динамической задачи для пористых сред на основе спектрального метода Лагерра
Н. Б. Иткина	Решение конвективно-диффузионных уравнений разрывным методом Галеркина
А. И. Кадченко	Критерии свойства достижимости в динамических системах
В. А. Клячин	Об одном обобщении условия Делоне

Н. К. Корсакова, В. И. Пеньковский	Применение математических моделей в исследовании процессов проникновения и в методах скважинного зондирования пластов
М. В. Куркина	Обобщенные многомерные линейные динамические модели распределения ресурсов
В. Т. Курохтин	Математическое моделирование процесса высокоскоростного упругопластического деформирования
А. Ю. Лошманов	Математическое моделирование процесса разрушения полосы с *V*-образными вырезами при растяжении
Н. Н. Любимова	Аналитическое решение граничной задачи Максвелла о тепловом скольжении для квантовых бозе-газов
Н. И. Макаренко, Ж. Л. Мальцева	Пограничные слои в волновых спектрах
А. Д. Матвеев	Совместное применение одно- и многосеточного моделирования для двумерных композитов сложной формы
В. А. Нахушева	Об одной математической модели теории режимов с обострением
В. С. Неронов, Б. Е. Смагулов	Об оптимальном управлении ракетоносителями с учетом упругих свойств
В. С. Неронов, Л. В. Топко	Математическое моделирование теплогидравлических процессов в нефтепроводах с учетом случайных факторов
А. Г. Нефедов	Применение краевых задач в квантовых ферми-газах
О. В. Нечаев, Э. П. Шурина, М. И. Эпов	Вычислительные схемы на базе векторного метода конечных элементов высокого порядка для решения трехмерного уравнения Гельмгольца
В. И. Паасонен	Параллельные технологии в разностных методах высокого порядка точности и их приложения
А. Б. Пальцев	Численное моделирование электрического поля в лазере с помощью метода мультиполей
А. А. Папин	Разрешимость начально-краевых задач для одномерных уравнений движения двухфазной смеси
Д. В. Паршин, А. П. Чупахин	Аналитическое исследование движения газа в криволинейном канале
В. В. Пененко	Вариационные принципы для построения численных моделей динамики атмосферы и охраны окружающей среды
В. В. Пухначёв	Модели деформации и разрыва жидкого слоя под действием термокапиллярных сил
Г. А. Самигулина	Разработка интеллектуальных экспертных интервально-заданных систем управления
М. А. Саттаров	К теории турбулентного потока с поперечным сдвигом
Ш. С. Сахаев	Разрешимость одной задачи свободной тепловой конвекции в пространстве Гельдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $0<\alpha<1$
М. Е. Семенов, С. Н. Колупаева	Математическая модель и комплекс программ для исследования пластической деформации в условиях ползучести
В. П. Сизиков, В. И. Разумов	ТДИС в осмыслении и усовершенствовании аппарата квантовой механики
С. Н. Сорокова, А. Г. Князева	Математическое моделирование распространения стационарного фронта превращения в вязкоупругой среде

В. Н. Старков, А. С. Политыло	Нелинейное интегральное уравнение двухпучкового лазерного взаимодействия
И. Х. Утакаева	Об одной модели распознавания предфрактального графа
А. Г. Хакимов	Моделирование теплового состояния элементов фермы при проведении газовой резки
И. Ю. Хасанов, И. А. Калиев, М. Ф. Мугафаров, Г. С. Сабитова, Н. Х. Файзуллин, Г. И. Хасанова	Моделирование гидродинамики установки для очистки жидкости центробежного принципа действия
А. К. Хе	Гидравлический прыжок на пространственных сдвиговых течениях идеальной несжимаемой жидкости
М. А. Чешкова	Лист Мебиуса
Ю. А. Чумаков, А. Г. Князева	Алгоритмы численного исследования стационарной модели сжигания газа в пористой горелке
В. В. Шайдуров, Г. И. Щепановская	Численное моделирование взаимодействия тепловых импульсов в вязком газе
Р. В. Шамин	К вопросу об оценке времени существования решений уравнений, описывающих волны на воде
Р. А. Шарипов	Базовые поля стандартной модели в присутствии неквантованной гравитации
Г. В. Шевченко	Численное решение нелинейной задачи оптимального быстродействия
Г. Н. Яковенко	Математическое робастное моделирование динамических систем
A. V. Burmistrov	Estimating the derivatives of a solution to the elliptic BVP by statistical modelling method
G. G. Chernykh, A. G. Demenkov, V. A. Kostomakha	Numerical modeling of swirling turbulent wakes
Yu. A. Gaidov, V. P. Golubyatnikov	On nonlinear dynamical systems as models of the gene networks
V. N. Grebenev, M. Oberlack	Metric properties of a manifold which defined by the two-point correlation tensor
A. G. Kolpakov	Asymptotic of potentials of inclusions in high-contrast high-filled medium
A. M. Meirmanov	Homogenized equations for short-time filtration processes and acoustic wave propagation in elastic porous media

наверх



Международная конференция

"Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения",

посвященная 100-летию со дня рождения академика И.Н. Векуа

Новосибирск, 28 мая - 2 июня 2007 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Тел.: (383)3333492
E-mail: kozhanov@math.nsc.ru

Назад

Назад

Назад

Назад

Назад

Назад

Назад

Назад

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ
DIFFERENTIAL EQUATIONS

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ МОДЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТИПА ФУКСА НА ПЛОСКОСТИ

© С. А. Абдыманапов, С. А. Алтынбек *

* AASerik333@list.ru

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Пусть $0 < \varphi_1 \leq 2\pi$ и $G = \left\{ z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \right\}$. Рассмотрим в G уравнения

$$4\alpha\bar{z}^2 W_{\bar{z}\bar{z}} + 4\beta z\bar{z} W_{z\bar{z}} + 4\gamma z^2 W_{zz} + b(\varphi)\overline{W} = f(\varphi) r^{\lambda}, \tag{1}$$

где $b(\varphi), f(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$, $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$-действительные параметры, удовлетворяющие условиям $\beta = \alpha + \gamma$, $\lambda > 0$. Случай $\beta \neq \alpha + \gamma$ рассмотрен в [1].

Нами получено одно многообразие непрерывных решений из класса

$$W_p^2(G),\ 1 < p < 2 \tag{2}$$

в виде

$$W(z) = \begin{cases} r^{\lambda}[(BF)(\varphi) + cP_2(\varphi) + \bar{c}P_1(\varphi)], & \text{если } \lambda \neq 1,\ \alpha \neq \gamma, \\ \dfrac{\theta \cdot f(\varphi) - b(\varphi) \cdot \overline{f(\varphi)}}{\theta^2 - b(\varphi) \cdot \overline{b(\varphi)}} \cdot r^{\lambda}, & \text{если } \lambda \neq 1,\ \alpha = \gamma, \\ \dfrac{\overline{f(\varphi)}}{b(\varphi)} \cdot r^{\lambda}, & \text{если } \lambda = 1, \end{cases} \tag{3}$$

где $\theta = (\alpha + \beta + \gamma)(\lambda^2 - \lambda)$, c — произвольное комплексное постоянное. Функции $(BF)(\varphi)$, $P_1(\varphi)$, $P_2(\varphi)$ определены в виде равномерно сходящихся рядов через коэффициенты уравнения (1).

С помощью формулы (3) решены:

Задача D_1. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее условиям:

$$|W(r,\varphi)| = O(r^{\lambda}), \quad r \to \infty,$$
$$W(r,0) = b_1 r^{\lambda},$$

где b_1 — заданное комплексное число, $\lambda > 0$ — заданное действительное число.

Задача D_2. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее условиям:

$$|W(r,\varphi)| = O(r^{\lambda}),\ r \to \infty,$$

$$\frac{\partial W(r,0)}{\partial \varphi} = b_2 r^{\lambda},$$

где b_2 — заданное комплексное число, $\lambda > 0$ — заданное действительное число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алтынбек С. А., Тунгатаров А. Б.* Задача Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса на плоскости // Вестник ЕНУ, серия физико-математическая и естественно-техническая. 2006. №4.
2. *Абдыманапов С. А., Тунгатаров А. Б.* Некоторые классы эллиптических системна плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы: “Гылым”, 2005.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 35–35

УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© А. А. Абрамов [*], В. И. Ульянова [*], Л. Ф. Юхно [**]

[*] alalabr@ccas.ru

[*] *Вычислительный центр РАН им. А. А. Дородницына, Москва;*
[**] *Институт математического моделирования РАН, Москва*

В докладе кратко излагаются некоторые из результатов [1–4].

Рассматривается достаточно общая однородная линейная краевая задача для дифференциально-алгебраической системы уравнений с нелинейно входящим спектральным параметром. Предполагается, что коэффициенты уравнений и матрицы, задающие граничные условия, аналитически зависят от спектрального параметра. Предлагается и исследуется численно устойчивый метод вычисления количества собственных значений задачи с учетом их кратности, лежащих в некоторой окрестности какой-либо точки комплексной плоскости.

Для некоторого (более узкого) класса задач дается метод вычисления количества собственных значений, лежащих в произвольной области, ограниченной кусочно гладкой кривой, и метод нахождения этих собственных значений.

Для самосопряженной нелинейной спектральной задачи в предположении монотонной зависимости исходных данных от спектрального параметра дается метод вычисления количества собственных значений, лежащих в заданном промежутке. В случае, если граничные условия не зависят от спектрального параметра, вводится понятие номера собственного значения и дается метод вычисления собственного значения с указанным номером.

Указанные результаты относятся к системам без особенностей, рассматриваемым на конечном отрезке изменения независимого переменного.

Для одного класса линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений рассматривается соответствующая краевая задача на неограниченном промежутке. В качестве граничного условия на бесконечности ставится условие ограниченности решения и дается метод переноса этого условия из бесконечности в конечную точку. В результате задача на неограниченном промежутке приближенно заменяется эквивалентной задачей на конечном отрезке.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00257).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А. А., Балла К., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф.* Нелинейная самосопряженная спектральная задача для дифференциально-алгебраических уравнений // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 7. С. 867–878.
2. *Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф.* О выделении решений, ограниченных в особой точке, для некоторых дифференциально-алгебраических систем уравнений // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 893–897.
3. *Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф.* Один метод решения краевых и спектральных задач для линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 7. С. 874–882.
4. *Абрамов А. А., Ульянова В. И., Юхно Л. Ф.* Метод решения нелинейной спектральной задачи для одного класса дифференциально-алгебраических систем уравнений // Журн.вычислит. математики и мат. физики. 2007. Т. 47, № 5 (в печати).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 36–38

УДК 536.46:517.93

ВОЛНА ГОРЕНИЯ: НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

© В. С. Абруков*, Д. А. Троешестова, А. С. Сабиров, Г. И. Малинин, А. Н. Анкундинов

* abrukov@yandex.ru

Чувашский государственный университет, Чебоксары

Известно, что дифференциальные уравнения теплопроводности, описывающие распространение волны горения в общем виде не решались ранее аналитически точно и существуют только приближенные решения [1, 2]. В справочниках по дифференциальным уравнениям, например, в [3], как общий вид такого дифференциального уравнения, так и его решение не приводятся. В данной работе предлагается метод, который позволяет получать точные аналитические решения относительно собственного значения и на этой основе построить схемы численных решений задач горения с помощью искусственных нейронных сетей (ИНС). С точки зрения методов решения дифференциальных уравнений относительно собственного значения данный метод можно отнести к методу подстановки аналитически заданной функции. В этом методе главное — это найти функцию, правильно отражающую характерные черты задачи (явления).

Постановка задачи, полученные результаты и их обсуждение. В работе впервые предлагается использовать сигмоидальную функцию (СФ) при получении решений дифференциальных уравнений горения относительно собственного значения задачи. СФ — монотонная всюду дифференцируемая функция вида:

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-\alpha x}},$$

где a — параметр СФ. Рассмотрим возможности применения СФ для решения дифференциальных уравнений, описывающих распространение волны горения, на примере уравнения (1), соответствующего одномерной стационарной существующей бесконечное время волне горения в гомогенной газообразной горючей смеси:

$$\lambda\frac{d^2T}{dx^2} - u_n c_p \rho \frac{dT}{dx} + QCk_0 e^{-E/RT} = 0, \tag{1}$$

где λ и c_p — соответственно, теплопроводность и удельная теплоемкость, значения которых мы рассматриваем здесь как константы; T — температура, u_n — скорость потока вещества в волне горения и ρ — плотность вещества, значения которых мы рассматриваем как переменные, Q — тепловой эффект химической реакции, C — плотность невыгоревшей горючей смеси, которая может быть выражена через температуру, k_0 — предэкспоненциальный множитель, E — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная. Здесь мы используем систему координат, связанную с движущейся волной горения. Граничные условия: $T_{x=-\infty} = T_0$ и $T_{x=\infty} = T_{max}$, где T_0 — начальная температура горючей смеси, T_{max} — максимальная температура волны горения.

Запишем распределение температуры в волне горения в виде СФ:

$$T = T_0 + \frac{T_{\max} - T_0}{1 + e^{-ax}}.$$

Эта функция моделирует “идеализированное” распределение температуры в волне горения.

Представив изменение плотности невыгоревшей горючей смеси в виде:

$$C = \rho_0 \left(\frac{T_{\max} - T}{T_{\max} - T_0} \right) = \rho_0 \left(\frac{e^{-ax}}{1 + e^{-ax}} \right),$$

где ρ_0 — начальная плотность горючей смеси, и переменную плотность вещества в волне горения как:

$$\rho = \frac{\rho_0 T_0}{T} = \frac{\rho_0 T_0 (1 + e^{-ax})}{T_0 e^{-ax} + T_{\max}},$$

вычислив первую и вторую производные от T, и подставив их в (1), можно получить следующее выражение для u_n:

$$u_n = \frac{\lambda a}{c_p \rho_0 T_0} \cdot \frac{(e^{-ax} - 1)(T_0 e^{-ax} + T_{\max})}{(e^{-ax} + 1)^2} + \frac{Q k_0 (T_0 e^{-ax} + T_{\max})}{a c_p T_0 (T_{\max} - T_0)} \exp\left\{ -\frac{E(e^{-ax} + 1)}{R(T_0 e^{-ax} + T_{\max})} \right\}. \quad (2)$$

Устремив x к плюс бесконечности для собственного значения задачи найдем:

$$u_n = -\frac{\lambda a T_{\max}}{c_p \rho_0 T_0} + \frac{Q k_0 T_{\max}}{a c_p T_0 (T_{\max} - T_0)} \exp\left(-\frac{E}{R T_{\max}} \right). \quad (3)$$

Сравнение этого точного решения с известными [1, 2] показывает, что значения u_n вычисленные по формуле (3) совпадают с полученными из классических решений при больших значениях a (порядка 10^4). Это подчеркивает, что классические приближенные решения ограничены предположением о представлении волны горения как о скачке скорости химической реакции, когда до определенной температуры скорость химической реакции считается равной нулю).

По мнению авторов, предложенный способ получения точных решений относительно собственного значения задачи может быть использован во всех случаях, описываемых дифференциальными уравнениями горения типа (1), для которых характерным является распределение температуры в виде, хотя бы качественно, соответствующем СФ. Отметим здесь, что, наряду с СФ, в качестве функций, с помощью которых можно получить решение (1), можно использовать и другие подобные функции, например, функции включающие в себя $\operatorname{arctg} ax$.

С точки зрения количественного исследования структуры волны горения в реальных случаях, очень интересной является возможность решения важной экспериментальной задачи — задачи определения профиля температуры (скорости тепловыделения, константы скорости химических реакций). Хотя предлагаемый в работе способ и не позволяет прямо получить аналитическое решение относительно распределения температуры, но он сводит эту очень трудную в экспериментальном смысле задачу к задаче измерения скорости горения. Последнее достаточно надежно осуществляется с помощью современных экспериментальных методов. По известной скорости горения из уравнения (2) параметр a может быть найден с помощью численных методов. Но, на наш взгляд, при решении этой задачи, наиболее подходящим является метод искусственных нейронных сетей [4].

Построение ИНС-моделей волны горения и их использование в экспериментальных исследованиях. Определение характеристик волны горения — основная задача при экспериментальном исследовании механизма горения исследуемой системы. К числу основных характеристик ВГ можно отнести скорость горения (скорость распространения ВГ), профиль температуры и профиль скорости тепловыделения. Задача измерения скорости горения решается в настоящее время достаточно надежно, существует много различных методов измерения скорости горения, которые обеспечивают необходимую точность в различных

условиях и для различных газовых и конденсированных систем. Задача измерения профиля температуры является значительно более сложной. Поэтому методов измерения профиля температуры, которые позволяют получить надежные результаты значительно меньше. Существует много случаев и режимов горения, для которых в настоящее время нет методов измерения профиля температуры.

Рассмотрим схему построения ИНС-модели волны горения и возможность ее использования для решения задачи определения распределения температуры в волне горения с помощью измерения скорости горения.

Формула (2) содержит связи между всеми переменными и параметрами волны горения. Изменяя значения параметра a, координаты x и значения теплофизических и кинетических параметров ВГ, с помощью (2) можно получить значения u_n для самых различных наборов параметров. Полученная "база данных" может использоваться для обучения ИНС и построения ИНС-модели ВГ следующим образом. Различные наборы значений скорости горения, теплофизических и кинетических параметров подают на вход ИНС. Соответствующие значения параметра a и координаты x устанавливаются на выходе ИНС. Посредством соответствующей процедуры обучения ИНС (например, методом "обратного распространения ошибки") может быть получена ИНС-модель ВГ. Эта модель является моделью типа "чёрный ящик", которая в скрытой форме содержит в себе связь между входным "вектором" — набором параметров волны горения и значениями параметра a и координаты x. Полученный "чёрный ящик" может использоваться в эксперименте для "измерения" распределения температуры следующим образом. Реальное, экспериментально полученное, значение скорости горения и реальные (или приблизительные) значения тепловых и кинетических параметров подают на вход "черного ящика". После "прохождения" входной информации ("вектора") через "черный ящик" на выходе "черного ящика" будет выдано реальное значение параметра a и координаты x, которые и определят значение температуры.

Нерешенной нами проблемой является противоречие представленного нами подхода к получению собственного значения задачи результатам классической работы [5], в которой показано, что без представления о волне горения как об объекте, в котором скорость химической реакции до определенной температуры выше начальной равна нулю получение стационарного решения невозможно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Баренблат Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. М.: Наука, 1980.
2. *Хитрин Л. Н.* Физика горения и взрыва. М.: Изд-во МГУ, 1957.
3. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001.
4. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.
5. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С.* Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. Москов. госуд. ун-та. Секция А. Математика и механика. 1937. Т. 1, вып. 6. С. 1–26.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 39–40

УДК 517.95

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОТЕКАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА

© У. У. Абылкаиров

UAbylkairov@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассматривается вопрос об однозначной разрешимости обратной задачи, то есть определения тройки функций $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$, удовлетворяющей в $Q \equiv (0,T)\times\Omega$ нелинейной системе Навье – Стокса, финальным условиям переопределения.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$, ограниченная область с границей $\Gamma = \partial\Omega$, состоящей из связанных компонент Γ^0, Γ^1. Рассмотрим в $Q = \Omega \times (0,T)$ обратную задачу определения тройки функции $\{\vec{v}(t,x), \nabla p(x,t), \vec{f}(x)\}$ удовлетворяющих нелинейной системе Навье – Стокса и следующим условиям

$$\vec{v}_t - \nu\,\Delta\vec{v} + (\vec{v},\nabla)\vec{v} + \mathrm{grad}p = \vec{f}(x)\cdot\vec{g}(x,t), \quad \mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{1}$$

$$\vec{v}(0,x) = \vec{v}_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$\vec{v}(t,x) = 0, \quad (x,\,t) \in \Sigma^{0,T} = \Gamma^0 \times [0,T]; \quad v_\tau = 0, \quad (x,\,t) \in \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times [0,T], \tag{3}$$

$$p(x,t) = \varphi(t) + const \quad (x,\,t) \in \Sigma^{1,T} = \Gamma^1 \times [0,T] \tag{4}$$

и дополнительным условиям финального переопределения:

$$\vec{v}(x,T) = \vec{v}_T \quad \text{на} \quad \Omega_T, \quad \nabla p(x,T) = \nabla\pi_T \quad \text{на} \quad \Omega_T. \tag{5}$$

Обратная задача восстановления правой части 2D-3D системы Навье – Стокса в области Q и $Q_\infty = \Omega \times [0,\infty)$ с однородными граничными условиями Дирихле исследованы в [1–4], а условиями (2)–(5) для 2D-3D линеаризованной системы Навье – Стокса получены полные результаты в [5–7].

В этой постановке она ставится впервые, отличительной чертой этой обратной задачи является соответствующие граничные условия (3_2),(3), которые принято называть *нестандартными граничными условиями.*

Первые результаты о корректности многомерной обратной задачи для системы (1)–(5) появились в 1989–1990 гг. в работах [1–2] и автора [3–4].

Выведем операторное уравнение относительно неизвестной функции $\vec{f}(x)$. Для корректного введения оператора T_g при фиксированном $g(x,t)$ и для любого $\vec{f}(x) \in L^2(\Omega)$, мы можем по теореме 1.2 (см. [5]), найти единственное решение $\vec{v}(x,t) \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^2(0,T;V^1)$ и сопоставить произвольному $\vec{f}(x) \in L^2(\Omega)$. При $\vec{F}_t \in L_{2,1}(Q)$ и $\vec{v}_T \in W^{2,2}(\Omega) \cap V^1(\Omega)$ мы имеем следующие априорные оценки:

$$\max_{0\le t\le T}\left(\|\vec{v}_t\|_{2,\Omega} + \|\Delta\vec{v}\|_{2,\Omega} + \|\nabla p\|_{2,\Omega}\right) \le c < \infty \tag{6}$$

(см. [8]), поэтому учитывая вышесказанное, определим линейный оператор T_g следующим образом:

$$T_g: \ \vec{f} \in L^2(\Omega) \mapsto \vec{v}_t(x,T) \in L^2(\Omega). \tag{7}$$

Другой линейный оператор $S:\ L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ введем с помощью следующего соотношения:

$$\left(S\vec{f}\right)(x)=\frac{1}{g(x,T)}\cdot\left(T_g\vec{f}\right)(x). \tag{8}$$

Тем самым, если $\vec{f}\cdot g\in L^2(Q)$ и $\vec{F}_t=\vec{f}\cdot g_t\in L_{2,1}(Q)$, дополнительно $g(x,t)$, $g_t\in C(\overline{Q})$, $|g(x,T)|\geq g_T>0$ при $x\in\Omega$,можем найти след при $t=T$ соотношения (1)

$$\vec{v}_t(x,T)-\nu\Delta\vec{v}_T+(\vec{v}_T,\nabla)\vec{v}_T=-\nabla\pi_T+\vec{f}(x)g(x,T). \tag{9}$$

Обозначив через

$$\vec{\aleph}=\frac{1}{g(x,T)}\left(\nu\Delta\vec{v}_T-(\vec{v}_T,\nabla)\vec{v}_T-\nabla\pi_T(x)\right), \tag{10}$$

запишем (9) в терминах вновь введенных операторов T_g,S соотношениями (7)–(8) следующим образом:

$$S\vec{f}=\vec{f}+\vec{\aleph}. \tag{11}$$

Следующая сформулированная теорема указывает об эквивалентности исходной обратной задачи (1)–(5) операторному уравнению (11) для любого $\vec{\aleph}\in L^2(\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega\in R^2;\vec{v}_0,\vec{v}_T\in W^{2,2}(\Omega)\cap V^1(\Omega),\nabla\pi_T\in G(\Omega)$ *и дополнительно* $g(x,t),g_t\in C(\overline{Q}),|g(x,T)|\geq g_T>0$ *при* $x\in\Omega$. *Тогда при* $\sqrt{c}\sqrt[4]{2}\|\vec{v}_T\|_{4,\Omega}<\nu$ *задача (1)–(5) эквивалентна операторному уравнению (11) для любого* $\vec{\aleph}\in L^2(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega\in R^2;\vec{v}_0,\vec{v}_T\in W^{2,2}(\Omega)\cap V^1(\Omega),\nabla\pi_T\in G(\Omega)$ *и дополнительно* $g(x,t),g_t\in C(\overline{Q}),|g(x,T)|\geq g_T>0$ *при* $x\in\Omega,\sqrt{c}\sqrt[4]{2}\|\vec{v}_T\|_{4,\Omega}<\nu$. *Тогда при условий*

$$\|\vec{\aleph}\|_{2,\Omega}+\frac{1}{\inf\limits_{\Omega}|g(x,T)|}\left(\|\nu\Delta\vec{v}_0-(\upsilon,\nabla)\vec{v}_0\|_{2,\Omega}+\sup\limits_{\Omega}|g(x,0)|\exp(-\tfrac{\nu T}{2c^2})+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^T\sup\limits_{\Omega}|g_t(x,t)|\exp(-\tfrac{\nu(T-t)}{2c^2})\,dt\right)\times\left(\frac{1}{\nu^2}\left(\|\vec{v}_0\|^2_{2,\Omega}+\frac{3}{2}\left(\int\limits_0^T\sup\limits_{\Omega}|g_t(x,t)|\right)^2\right)\right)<1.$$

существует решение обратной задачи (1)–(5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васин И. А.* Постановка и исследования некоторых обратных задач для системы уравнений Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 30.
2. *Prilepko A. I., Orlovsky D., Vasin I. A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker, 2000. V. 231.
3. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 6.
4. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // 7th Czechoslovac Conference on Differential Equations and Their Application, (EQADIFF7). Praha, 1989. C. 1–2.
5. *Abylkairov U. U.* Solvability local and nonlocal inverse problems for Navir-Stokes systems // International Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics", Moscow State Lomonosov University, June 19–25, 2006. Section 3. P. 7–9.
6. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача протекания для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса // Математический журнал. 2006. Т. 6, № 2(20). С. 14–22.
7. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для линеаризованной 2D-3D системы Навье – Стокса с нестандартными граничными условиями // Неклассические уравнения математической физики: Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. 11 с.
8. *Ладыженская О. А.* О единственности и гладкости обобщенных решений уравнений Навье – Стокса // Зап. науч. семин. ЛОМИ. 1967. Т. 5. С. 169–185.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 41–42

УДК 517.95

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© У. У. Абылкаиров [*], С. Е. Айтжанов

[*] UAbylkairov@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

В работе рассматривается обратная нестационарная задача магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости, в которой, надо найти скорость движения $\vec{v}(x,t)$, магнитная напряженность $\vec{H}(x,t)$, градиент давления $\nabla p(x,t)$, но и внешние силы $\vec{f}(x)$ и токи $\mathrm{rot}\vec{j}(x)$. При этом к условиям составляющим прямую задачу, добавляются условия переопределения.

В работах [1–4] исследованы обратные задачи для системы уравнений Навье – Стокса с финальным переопределением.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0,T],\ \Omega \subset R^2$ обратную задачу магнитной гидродинамики

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{2} v_k \vec{v}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho}\sum_{k=1}^{2} H_k \vec{H}_{x_k} - \nu \Delta \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\left(p + \frac{\mu \vec{H}^2}{2}\right) + g(x,t)\vec{f}(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma\mu}\mathrm{rotrot}\vec{H} - \mathrm{rot}\left[\vec{v} \times \vec{H}\right] = \frac{\xi(x,t)}{\sigma\mu}\mathrm{rot}\vec{j}(x)\,, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = 0, \quad \mathrm{div}(\mu\vec{H}) = 0, \tag{3}$$

начальные условия

$$\vec{v}(x,0) = \vec{v}_0(x),\ \ \vec{H}(x,0) = \vec{H}_0(x), \tag{4}$$

граничные условия

$$\vec{v}|_S = 0, \quad H_n = 0 \quad \left.\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2}\right|_S = j|_S = 0, \tag{5}$$

условия переопределения

$$\vec{v}(x,T) = \vec{U}(x),\ \vec{H}(x,T) = \vec{\Psi}(x),\ \nabla p(x,T) = \nabla \pi(x). \tag{6}$$

Введенные операторы T_g и S_ξ определены корректно, так как нужные дифференциальные свойства для $\vec{v}(x,t)$, $\vec{H}(x,t)$ и $p(x,t)$ гарантированы теорией разработанных в работе О. А. Ладыженской и В. А. Солонникова [5].

Зафиксируем функции $g = g(x,t)$ и $\xi(x,t)$, определим нелинейные операторы $T_g:\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, $S_\xi:\ L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ следующими соотношениями

$$\begin{gathered} \left(T_g \vec{f}\right)(x) = \vec{v}_t(x,T), \\ \left(S_\xi \vec{r}\right)(x) = \vec{H}_t(x,T), \end{gathered} \tag{7}$$

где $r = \mathrm{rot}\vec{j}(x),\ \vec{f} = \vec{f}(x)$, а $\vec{v}(x,t)$ и $\vec{H}(x,t)$ решение прямой задачи (1)–(5) с $\vec{f} = g(x,t)\vec{f}(x)$, $\mathrm{rot}\vec{j} = \xi(x,t)\mathrm{rot}\vec{j}(x)$.

Предположим, что $g(x,T) \neq 0$ и $\xi(x,T) \neq 0$ для всех $x \in \Omega$, другой нелинейный оператор $A: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ и $B: L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, введем с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \left(A\vec{f}\right)(x) &= \frac{1}{g(x,T)}\left(T_g\vec{f}\right)(x), \\ \left(B\vec{r}\right)(x) &= \frac{\sigma\mu}{\xi(x,T)}\left(S_\xi\vec{r}\right)(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Тем самым, если $g(x,t)\vec{f}(x) \in L_2(Q_T)$, $g_t(x,t)\vec{f}(x) \in L_{2,1}(Q_T)$ и $\xi(x,t)\mathrm{rot}\vec{j}(x) \in L_2(Q_T)$, $\xi_t(x,t)\mathrm{rot}\vec{j}(x) \in L_{2,1}(Q_T)$, дополнительно $g(x,t)$, $g_t(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $\xi(x,t)$, $\xi_t(x,t) \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, то уравнении (1) и (2) и в терминах введенных операторов (7), (8) искомая обратная задача примет следующий вид:

$$A\vec{f} + \vec{\aleph} = \vec{f}, \tag{9}$$

$$B\vec{r} + \vec{\lambda} = \vec{r}, \tag{10}$$

где $\vec{\aleph} = \frac{1}{g(x,T)}\left[-\nu\Delta\vec{U} + U_k\vec{U}_{x_k} - \frac{\mu}{\rho}\Psi_k\vec{\Psi}_{x_k} + \frac{1}{\rho}\nabla\left(\pi + \frac{\mu\vec{\Psi}^2}{2}\right)\right]$,

$$\vec{\lambda} = \frac{\sigma\mu}{\xi(x,T)}\left[\frac{1}{\sigma\mu}\mathrm{rotrot}\vec{\Psi} - \mathrm{rot}\left(\vec{U} \times \vec{\Psi}\right)\right].$$

Теорема 1. *Пусть* $\Omega \subset R^2$, g, $g_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, ξ, $\xi_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $|g(x,t)| \geq g_T > 0$, $|\xi(x,t)| \geq \xi_T > 0$ *при* $x \in \Omega$, $\vec{U}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\vec{\Psi}(x) \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\nabla\pi(x) \in G(\Omega)$.

Тогда операторы A *и* B *вполне непрерывны из* $L_2(\Omega)$ *в* $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. *Если* g, $g_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, ξ, $\xi_t \in C\left(\bar{Q}_T\right)$, $|g(x,T)| \geq g_T > 0$ *и* $|\xi(x,T)| \geq \xi_T > 0$ *при* $x \in \Omega$, $\vec{U} \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\vec{\Psi} \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$, $\nabla\pi \in G(\Omega)$, $\vec{v}_0$, $\vec{H}_0 \in W_2^2(\Omega) \cap H(\Omega)$. *Пусть справедливы неравенства*

$$\nu > c_1\left(\left\|\vec{U}\right\|_{4,\Omega} + \frac{\mu}{\rho}\left\|\vec{\Psi}\right\|_{4,\Omega}\right), \quad \frac{1}{\sigma} > \mu c_1\left(\left\|\vec{U}\right\|_{4,\Omega} + \left\|\vec{\Psi}\right\|_{4,\Omega}\right).$$

Тогда для разрешимости задачи (1)–(6) необходима и достаточна разрешимость уравнении (9)–(10) в $L_2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 6.
2. *Абылкаиров У. У.* Обратная задача для уравнения Навье – Стокса // 7th Czecho \ -slovac Conference on Differential Equations and Their Application (EQADIFF7). Praha, 1989. C. 1–2.
3. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Method for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics // Monograths and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. V. 231. Marcel Dekker, 2000.
4. *Васин И. А.* Постановка и исследования некоторых обратных задач для системы уравнений Навье – Стокса // Условно-корректные задачи математической физики. Тезисы Всесоюзной конференции (2–6 октября 1989, Алма-Ата). Красноярск, 1989. С. 30.
5. *Ладыженская О. А. Солонников В. А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 115–173.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

© У. У. Абылкаиров *, Ш. С. Сахаев, Х. Хомпыш

* UAbylkairov@kazsu.kz

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \Omega \times [0,T]$ следующую двумерную задачу, где $\Omega \in R^2$ ограниченная область, $t \in [0,T]$, $x = (x_1, x_2) \in \Omega$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{\kappa=1}^{3} v_\kappa \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} - \frac{\mu}{\rho}\sum_{k=1}^{3} H_k \frac{\partial \vec{H}}{\partial x_k} - \nu\Delta\vec{v} - \chi\frac{\partial \Delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\left(p + \frac{\mu\vec{H}^2}{2}\right) = \vec{f}(x,t) \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad (2)$$

$$\mu\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} - \mathrm{rot}[\vec{v},\vec{H}] = \frac{1}{\sigma}\mathrm{rot}\,\vec{j} \qquad (3)$$

$$\mathrm{div}\,(\mu\vec{H}) = 0 \qquad (4)$$

граничные условия

$$\vec{v}\big|_S = 0, \quad \vec{H}_n\Big|_S = 0, \quad \mathrm{rot}_\tau\vec{H}\Big|_S = 0, \qquad (5)$$

и начальные условия

$$\vec{v}\big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \quad \vec{H}\Big|_{t=0} = \vec{H}_0(x). \qquad (6)$$

Здесь $\vec{v}$ — скорость жидкости, $\vec{H}$-магнитная напряженность, p-давление, $\vec{f}$ и $\vec{j}$ соответственно внешние гидродинамические силы и токи, χ, μ, σ, ρ, ν-константы.

На протяжении всей работы мы будем использовать обозначения функциональных пространств и нормы в этих пространствах принятые в [1, 2]. Исследование уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта регуляризирующую систему Навье – Стокса показано в работах [3, 4], а уравнений магнитной гидродинамики для вязкой жидкости в [2].

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1)–(6) называются пара векторов $\vec{v}\,(x.t) \in \overset{\circ}{J}_1(Q_T)$, $\vec{H}\,(x.t) \in \aleph\,(Q_T)$ которые удовлетворяют следующим условиям:

$\vec{v}(x,t)$ имеет в Q_T обобщенные производные $\vec{v}_x$, $\vec{v}_t$, $\vec{v}_{xt} \in L_2(Q_T)$,

$\vec{H}x,t)$ имеет в Q_T обобщенные производные $\vec{H}_x$, $\vec{H}_t$, $\vec{H}_{xt} \in L_2(Q_T$ и удовлетворяют начальным условиям (6) и интегральным тождествам:

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\phi - v_\kappa\vec{v}\frac{\partial \phi}{\partial x_\kappa} + \frac{\mu}{\rho}H_\kappa\vec{H}\frac{\partial \phi}{\partial x_\kappa} + \nu\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_\kappa}\frac{\partial \phi}{\partial x_\kappa} + \chi\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x_\kappa\partial t}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x_\kappa} - \vec{f}\phi\right)dx\,dt = 0$$

$$\int_0^T\int_\Omega \left(\mu\vec{H}_t\psi + \left[1/\sigma\left(\mathrm{rot}\,\vec{H}\right) - \mu[v_1H_2 - v_2H_1] - \vec{j}/\sigma\right](\mathrm{rot}\,\psi)\right)dx\,dt = 0$$

для любых $\phi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) \cap \overset{\circ}{J}_1(Q_T)$ и $\psi(x,t) \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T) \cap \aleph(Q_T)$.

Теорема. *Если* $\vec{f}$, $\vec{f}_t \in L_{2,1}(Q_T)$, j, $j_t \in L_2(Q_T)$ *и* $\vec{v}_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{J}_1(\Omega)$, $\vec{H}_0(x) \in W_2^2(\Omega) \cap \aleph(\Omega)$ *то задача (1)–(6) имеет единственное обобщенное решение в цилиндре* Q_T *и справедлива оценка*

$$\rho\|\vec{v}_t\|_{2,\Omega}^2 + \chi\rho\|\vec{v}_{xt}\|_{2,\Omega}^2 + \mu\left\|\vec{H}_t\right\|_{2,\Omega}^2 + \int\limits_0^T \left(\nu\rho\|\vec{v}_{xt}\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\sigma}\left\|rot\vec{H}_t\right\|_{2,\Omega}^2\right)d\tau < const.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
2. *Ладыженская О. А. Солонников В. А.* Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости // Труды МИАН СССР. 1960. Т. 59. С. 115–173.
3. *Осколков А. П.* О некоторых модельных нестационарных системах в теорий неньютоновских жидкостей // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 185–210.
4. *Осколков А. П., Шадиев Р. Д.* Нелокальные проблемы теории уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта // Записки науч. сем. ЛОМИ. 1990. Т. 181. С. 145–185.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 45–46

УДК 519.6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИОНАЛАМИ

© С. А. Айсагалиев, А. А. Кабидолданова

aisagaliev@kazsu.kz, kabasem@mail.ru

Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Постановка задачи. Рассматривается следующая задача оптимального управления: минимизировать функционал

$$J(u(\cdot),x_0,x_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[a_0^*(t)x(t)+b_0^*(t)u(t)+c_0^*(t)x_0+d_0^*(t)x_1]dt\to\inf \tag{1}$$

при условиях

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t)+C(t)x_0+D(t)x_1+\mu(t),\ t\in I=[t_0,t_1], \tag{2}$$

$$(x(t_0)=x_0,x(t_1)=x_1)=(x_0,x_1)\in S_0\times S_1=S\subseteq R^{2n}, \tag{3}$$

$$x(t)\in G(t):G(t)=\{x\in R^n|\omega(t)\le L(t)x+\overline{\mu}_1(t)\le\varphi(t),t\in I\}, \tag{4}$$

$$g_j(u,x_0,x_1)\le c_j,\ \ j=\overline{1,m_1},\quad g_j(u,x_0,x_1)=c_j,\ \ j=\overline{m_1+1,m_2}, \tag{5}$$

$$g_j(u,x_0,x_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[a_j^*(t)x(t)+b_j^*(t)u(t)+c_j^*(t)x_0+d_j(t)^*x_1]dt,\ \ j=\overline{1,m_2}, \tag{6}$$

$$u(t)\in U(t)=\left\{u(\cdot)\in L_2(I,R^m)|u(t)\in\overline{V}(t)\subset R^m \text{ п. в. } t\in I\right\}. \tag{7}$$

Полагаем, что $a_j(t)$, $b_j(t)$, $c_j(t)$, $d_j(t)$, $j=\overline{0,m_2}$ — кусочно-непрерывные вектор-функции порядков $n\times 1$, $m\times 1$, $n\times 1$, $n\times 1$ соответственно, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ матрицы с кусочно-непрерывными элементами соответственно порядков $n\times n$, $n\times m$, $n\times n$, $n\times n$, $\mu(t)=(\mu_1(t),\dots,\mu_n(t))$, $t\in I$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, $L(t)$ — матрица порядка $s\times n$ с кусочно-непрерывными элементами, $\overline{\mu}_1(t)=(\overline{\mu}_{11}(t),\dots,\overline{\mu}_{1s}(t))$, $t\in I$ — кусочно-непрерывная вектор-функция, c_j, $j=\overline{1,m_2}$ — заданные числа, $x_0\in S_0$, $x_1\in S_1$, где S_0, S_1 — заданные выпуклые замкнутые множества, моменты времени t_0, t_1 — фиксированы, $\omega(t)=(\omega_1(t),\dots,\omega_s(t))$, $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\dots,\varphi_s(t))$, $t\in I$ — заданные непрерывные функции.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения задачи оптимального управления (1)–(7), т.е. найти необходимые и достаточные условия существования решения краевой задачи (2)–(7).

Задача 2. Найти допустимое управление для задачи (1)–(7).

Задача 3. Найти оптимальное управление $u_{**}(t)\in U$, оптимальную траекторию $x_{**}(t)\in G(t)$, начальную точку $x_0^{**}\in S_0$ и конечное состояние $x_1^{**}\in S_1$, доставляющие минимум функционалу (1) при условиях (2)–(7).

Основой предлагаемого метода является — принцип погружения. Принцип погружения следует из общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода [1–3].

Принцип погружения. Задача оптимального управления (1)–(7) разрешима тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно допустимое управление. Каждое допустимое управление является решением краевой задачи (2)–(7). Согласно принципу погружения задача (2)–(7) равносильна следующей оптимизационной задаче со свободным правым концом траектории: минимизировать функционал

$$\begin{aligned} J_1(\theta(\cdot)) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[& |v_1(t)+B_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+N_{11}(t)z(t_1,v)-u(t)|^2+ \\ & |v_2(t)+C_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+N_{12}(t)z(t_1,v)-x_0|^2+ \\ & |v_3(t)+D_1^*(t)\Phi^*(t_0,t)T^{-1}(t_0,t_1)a+N_{13}(t)z(t_1,v)-x_1|^2+ \\ & |p(t)-L(t)P_1[z(t)+\Lambda_2(t)+N_2(t)z(t_1,v)]-\overline{\mu}_1(t)|^2\Big]dt \to \inf, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\dot z = A_1(t)z + B_1(t)v_1(t) + C_1(t)v_2(t) + D_1(t)v_3(t), \;\; z(t_0)=0, \;\; t\in I, \tag{9}$$

$$v_1(\cdot)\in L_2^\rho(I,R^m), \; v_2(\cdot)\in L_2^\rho(I,R^n), \; v_3(\cdot)\in L_2^\rho(I,R^n), \tag{10}$$

$$(x_0,x_1)\in S_0\times S_1 = S, \; u(t)\in U(t), \; p(t)\in V(t), \; d\in\Gamma^\rho = \{d\in R^n \,|\, |d|\le\rho, \;\; d\ge 0\}, \tag{11}$$

где $q(t)=(z(\cdot),z(t_1),\theta(t))$, $t\in I$, $\theta(t)=(z(\cdot),z(t_1),u(\cdot),p(\cdot),v(\cdot),x_0,x_1,d)$, матрицы $A_1(t)$, $B_1(t)$, $N_1(t)$, $C_1(t)$, $D_1(t)$, $N_2(t)$, вектор a и вектор-функция $\Lambda_2(t)$ определяются по исходным данным системы. Матрица $T(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_2(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt$, где $B_2(t) = (B_1(t),C_1(t),D_1(t))$, $\Phi(t,\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, $\theta(t)$ — фундаментальная матрица решений системы $\dot{æ} = A_1(t)æ$.

Теорема. *Пусть матрица* $T(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B_2(t)B_2^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt$ *положительно определена. Для того, чтобы задача оптимального управления (1)–(7) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы значение* $J_1(\theta_*) = J_1(z(\cdot),z(t_1),\theta_*(\cdot)) = 0$, *где* θ_* *— оптимальное управление в задаче (8)–(11).*

Допустимое управление. Рассмотрим решение задачи 2. Как следует из теоремы, допустимое управление для задачи оптимального управления (1)–(7) может быть построено путем решения задачи (8)–(11). Заметим, что если $J_1(\theta_*)=0$, $\theta_*(t)=(u_*(t),p_*(t),v_*(t),x_0^*,x_1^*,d_*)$ то $(u_*(t),x_0^*,x_1^*)\in U\times S_0\times S_1$ — допустимое управление для задачи (1)–(7). Значение нижней грани для оптимизационной задачи (8)–(11) определяется на основе построения минимизирующих последовательностей по правилу:

$$\begin{aligned} & u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_{11}(\theta_n)], \quad p_{n+1} = P_V[p_n - \alpha_n J'_{12}(\theta_n)], \\ & v_1^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_1^n - \alpha_n J'_{13}(\theta_n)], \quad v_2^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_2^n - \alpha_n J'_{14}(\theta_n)], \\ & v_3^{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_3^n - \alpha_n J'_{15}(\theta_n)], \quad x_0^{n+1} = P_{S_0}[x_0^n - \alpha_n J'_{16}(\theta_n)], \\ & x_1^{n+1} = P_{S_1}[x_1^n - \alpha_n J'_{17}(\theta_n)], \quad d_{n+1} = P_{\Gamma^\rho}[d_n - \alpha_n J'_{18}(\theta_n)], \quad n=0,1,2,\ldots, \end{aligned}$$

где $0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le\dfrac{2}{l+2\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $l=const>0$ — постоянная Липшица для градиента функционала (8) при условиях (9)–(11).

Оптимальное управление. Оптимальное управление для исходной задачи (1)–(7) строится путем сужения области допустимых управлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айсагалиев С. А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1476–1486.
2. *Айсагалиев С. А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 6. С. 1–7.
3. *Айсагалиев С. А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. 2005. № 4. С. 3–10.

УДК 517.956

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ РИМАНА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© А. В. Аксенов

aksenov@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Введение. В работе [1], применительно к частному гиперболическому уравнению второго порядка с двумя независимыми переменными, Б. Риман предложил "метод интегрирования Римана". Для применения метода необходимо построить функцию Римана, являющуюся решением специальной характеристической задачи Коши. Общего метода построения функции Римана не существует. В работе [2] дан подробный анализ шести известных способов построения функции Римана для частных типов уравнений. Н. Х. Ибрагимовым [3], на основе использования результатов Л. В Овсянникова по групповой классификации однородных гиперболических уравнений второго порядка [4], было предложено находить функцию Римана с помощью симметрий уравнения.

В настоящей работе показана инвариантность функции Римана относительно симметрий фундаментальных решений и предложен метод ее построения.

1. Метод Римана. Рассмотрим общее линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными

$$L[u] = u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y)\,. \tag{1}$$

Метод Римана сводит задачу интегрирования уравнения (1) к построению вспомогательной функции Римана $v = R(x,y;x',y')$, удовлетворяющей однородному сопряженному уравнению

$$L^*[R] = R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR = 0$$

и следующим условиям на характеристиках:

$$(R_y - aR)|_{x=x'} = 0\,, \qquad (R_x - bR)|_{y=y'} = 0\,, \qquad R(x',y';x',y') = 1\,.$$

С помощью функции Римана для уравнения (1) строятся общие решения задачи Коши и характеристической задачи Коши (задачи Гурса).

Функция Римана обладает следующим свойством взаимности

$$R^*(x,y;x',y') = R(x',y';x,y)\,, \tag{2}$$

где $R^*(x,y;x',y')$ — функция Римана сопряженного уравнения.

2. Симметрии фундаментальных решений. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение с частными производными p-го порядка

$$Mu = \sum_{|\alpha|=0}^{p} A_\alpha(x)\,D^\alpha u = 0\,, \qquad x \in R^m\,. \tag{3}$$

Фундаментальные решения уравнения (3) являются решениями уравнения

$$Mu = \delta(x - x_0)\,. \tag{4}$$

Операторы симметрии уравнения (3), образующие конечномерную часть алгебры Ли оператор симметрии, имеют вид

$$X = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\, \frac{\partial}{\partial x^i} + \zeta(x)\, u\, \frac{\partial}{\partial u}\,. \tag{5}$$

Обозначим через $\underset{p}{X}$ продолжение порядка p оператора (5). Функция $\lambda = \lambda(x)$ удовлетворяет тождеству $\underset{p}{X}(Mu) = \lambda(x)\, Mu$.

Сформулируем основной результат работы [5].

Теорема 1. *Алгебра Ли операторов симметрии уравнения (4) является подалгеброй алгебры Ли операторов симметрии уравнения (3), выделяемой соотношениями*

$$\xi^i(x_0) = 0, \qquad \lambda(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \xi^i(x_0)}{\partial x_0^i} = 0, \qquad i = 1, \ldots, m\,. \tag{6}$$

Симметриями фундаментальных решений (или симметриями уравнения (4)) будем называть симметрии уравнения (3), удовлетворяющие соотношениям (6).

3. Основной результат работы. Можно показать, что операторы симметрии однородного уравнения (1) имеют вид

$$X = \xi^1(x)\, \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x)\, \frac{\partial}{\partial y} + \zeta(x,y)\, u\, \frac{\partial}{\partial u}\,,$$

и находятся из системы определяющих уравнений.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = \delta(x - x')\, \delta(y - y')\,.$$

Симметрии фундаментальных решений удовлетворяют дополнительным соотношениям

$$\xi^1(x') = 0\,, \qquad \xi^2(y') = 0\,, \qquad \lambda(x', y') + \frac{d\,\xi^1(x')}{d\,x} + \frac{d\,\xi^2(y')}{d\,y} = 0\,. \tag{7}$$

Функция Римана $u = R^*(x, y; x', y')$ сопряженного уравнения $L^* v = g(x,y)$ является решением соответствующей характеристической задачи Коши. Тогда из соотношений (7) и системы определяющих уравнений следует инвариантность условий на характеристиках.

Теорема 2. *Симметрии фундаментальных решений линейного гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными оставляют инвариантной функцию Римана сопряженного уравнения.*

Из теоремы 2 следует, что функция Римана сопряженного уравнения является инвариантным относительно симметрий фундаментальных решений решением исходного уравнения. Тогда функция Римана исходного уравнения находится из соотношения взаимности (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 05-01-00375 и 06-01-00707) и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ (проект НШ-4474.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Риман Б.* О распространении плоских волн конечной амплитуды // В кн.: Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ОГИЗ. 1948. С. 376–395.
2. *Copson E. T.* On the Riemann – Green Function // Archive for Ratioanal Mechanics and Analysis. 1957/58. V. 1. P. 324–348.
3. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа. М.: "Знание". Сер. "Математика и кибернетика". № 7. 1991. 48 с.
4. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения С. А. Чаплыгина // Журнал прикладной механики и технической физики. 1960. № 3. С. 126–145.
5. *Аксенов А. В.* Симметрии линейных уравнений с частными производными и фундаментальные решения // Доклады АН. 1995. Т. 342, № 2. С. 151–153.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 49–50

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

© А. Ш. Акыш

akysh_abdigali@mail.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Уравнение Больцмана для функции распределения $f = f(t,x,v)$ $(t \in (0,T],\ \ T < \infty,\ \ x \in G = [0,1]^3,\ v \in R_3)$, молекул сфер с радиусом χ записывается в виде [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (v, grad f) = \mathbf{J}(f) - f\mathbf{S}(f) \equiv \mathbf{B}(f,f), \tag{1}$$

$$\text{где}\quad \mathbf{J}(f) = \int\limits_{R_3\times\Sigma} f' f_1' g(\theta, W) d\sigma dv_1, \qquad \mathbf{S}(f) = \int\limits_{R_3\times\Sigma} f_1 g(\theta, W) d\sigma dv_1,$$

$$g(\theta, W) = 0.25\chi^2 \mid W \mid \sin(2\theta),\ f_1 = f(t,x,v_1),\ \ \ f' = f(t,x,v'),\ \ \ f_1' = f(t,x,v_1');$$

$(v, v_1;\ v', v_1')$ — соответственно векторы скорости двух сталкивающихся молекул до и после столкновения; $W = v_1 - v$ — вектор относительной скорости; $v' = v + \beta(\beta, W)$, $v_1' = v_1 - \beta(\beta, W)$; β — единичный вектор в направлении рассеяния молекул.

Для уравнения (1) рассматривается задача Коши с начальным и периодическим граничными условиями

$$f(t,x,v)\Big|_{t=0} = \varphi(x,v); \quad f(t,x,v)\Big|_{\Gamma_{0x_\alpha}} = f(t,x,v)\Big|_{\Gamma_{1x_\alpha}},\ \Gamma_{\rho x_\alpha} - \text{граница } G. \tag{2}$$

Начальная функция $\varphi(x,v)$ неотрицательна и непрерывна в $G \times R_3$ и

$$\int\limits_{R_3} \mid v \mid^\gamma \|\varphi(v)\| dv = A_\gamma < \infty; \quad \gamma = 0, 2; \quad \| \varphi(v) \| = \sup_{x\in G} \varphi(x,v). \tag{3}$$

Задача (1)–(2) решается с помощью следующей схемы метода расщепления:

$$\frac{f^{n+1/5} - f^n}{\tau} = -f^{n+1/5}\mathbf{S}(f^{n+1/5}), \quad \frac{f^{n+2/5} - f^{n+1/5}}{\tau} = \mathbf{J}(f^{n+1/5}), \tag{4}$$

$$\frac{f^{n+(\alpha+2)/5} - f^{n+(\alpha+1)/5}}{\tau} + \xi_\alpha \frac{\partial f^{n+(\alpha+2)/5}}{\partial x_\alpha} = 0,\ \alpha = \overline{1,3}, \tag{5}$$

с начально-граничным условием (2).

Для решения задачи (4), (5), (2) с использованием преобразование Карлемана интеграла столкновений из [1, стр. 33] получены оценки:

$$\|f^{n+2/5}(v)\| \leqslant \|f^n(v)\| + 2\tau \int\limits_{R_3} \frac{\|f^n(v')\|}{\rho_{vv'}} \int\limits_{E_{vv'}} \|f^n(q)\| dq dv', \tag{6}$$

$$\| f^{n+(\alpha+2)/5}(v) \| \leqslant \| f^{n+(\alpha+1)/5}(v) \|,\ \alpha = \overline{1,3}; \quad \forall v \in R_3, \tag{7}$$

где $E_{vv'}$ — бесконечная плоскость, dq — элемент площади на $E_{vv'}$, $\rho_{v'v}$ — расстояние между v и v'.

Далее, учитывая условия (3) на начальную функцию, найдены оценки:

$$\int\limits_{R_3} | v |^{\gamma} \parallel f^{n+\alpha/5}(v) \parallel dv \leqslant \int\limits_{R_3} | v |^{\gamma} \parallel \varphi(v) \parallel dv = A_{\gamma}, \alpha = \overline{1,5};\ \gamma = 0, 2.$$

$$\int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \|f^{n+1}(v)\| dv \leqslant \int\limits_{R_3} \frac{1}{\rho_{v'v}} \|\varphi(v)\| dv + 4\pi T A_0^2 \equiv A_3,$$

$$\int\limits_{E_{v'v}} \parallel f^{n+1}(q) \parallel dq \leqslant \int\limits_{E_{v'v}} \parallel \varphi(q) \parallel dq + \pi T A_0^2 \equiv A_4.$$

Тогда из неравенств (6), (7) следует оценка

$$\parallel f^{n+1}(x,v) \parallel_{\mathbf{C}(G\times R_3)} \leqslant \parallel \varphi(x,v) \parallel_{\mathbf{C}(G\times R_3)} + T A_3 A_4.$$

Для разности $U = \big(f(t,x,v) - F(t,x,v)\big) \in \mathbf{C}(Q)$ двух решений задачи (1), (2) установлено соотношение

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{R_3} \parallel U(t,v) \parallel dv = 0, \quad \text{что и равносильно} \quad U(t,x,v) \equiv 0.$$

В [3] доказано, что предельная неотрицательная функция $f(t,x,v)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(t,x,v) = \varphi(x - vt, v)\exp\Big\{-\int\limits_0^t \mathbf{S}\big(f(s, x - v(t-s), v)\big) ds\Big\} +$$
$$\int\limits_0^t \mathbf{J}\big(f(t', x - v(t-t'), v)\big)\exp\Big\{-\int\limits_{t'}^t \mathbf{S}\big(f(s, x - v(t-s), v)\big) ds\Big\} dt'$$

и является слабым решением задачи (1)–(2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов. М.: ИЛ, 1960. 150 с.
2. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук. 1971. Т. 36, № 3. С.3–51.
3. *Акыш А. Ш.* О нелинейном уравнении Больцмана // Математический журнал. Алматы, 2002. Т. 2, № 1, С. 10–16.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 51–52

УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДАРБУ – ПРОТТЕРА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© С. А. Алдашев

serik@aldash.vicc.kz

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы, Казахстан

Задачи Дарбу на плоскости для линейных гиперболических уравнений хорошо изучены [1, 2]. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены М. Н. Проттером [3]. Из-за отсутствия эффективных методов исследования изучение задач Дарбу – Проттера для многомерных гиперболических уравнений требует специальных исследований и привлечения новых методов, поэтому в этом направлений мало работ (см. [4]).

Пусть D_ε — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\ldots,x_m,t)$, ограниченная поверхностями, и плоскостью $t=0$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\ldots,x_m), 0\leq t\leq(1-\varepsilon)/2$, а $0\leq\varepsilon<1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_ε области D_ε, обозначим через S_ε, S_1 и S соответственно.

В области D_ε рассмотрим многомерные гиперболические уравнения

$$\Delta_x u-u_{tt}+\sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i}+b(x,t)u_t+c(x,t)u=0, \tag{1}$$

$$\Delta_x\vartheta-\vartheta_{tt}-\sum_{i=1}^m a_i\vartheta_{x_i}-b\vartheta_t+d\vartheta=0, \tag{2}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,\ldots,x_m$, $m\geq 2$, $d(x,t)=c-\sum\limits_{i=1}^m a_iu_{x_i}-b_t$.

Рассмотрим следующие взаимно-сопряженные задачи

Задача 1. Найти в области D_ε решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D_\varepsilon})\bigcap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S=\tau_\varepsilon(x),\quad u|_{S_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(x),$$

или

$$u_t|_S=\nu_\varepsilon(x),\quad u|_{S_\varepsilon}=\sigma_\varepsilon(x).$$

Задача 2. Найти в области D_ε решение уравнения (2) из класса $C^1(\overline{D_\varepsilon})\bigcap C^2(D_\varepsilon)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\vartheta|_S=\tau_\varepsilon(x),\quad \vartheta|_{S_t}=\sigma_1(x),$$

или

$$\vartheta_t|_S=\nu_\varepsilon(x),\quad \vartheta|_{S_t}=\sigma_1(x).$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,\ldots,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,\ldots,\theta_{m-1},t$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка $n, 1\leq k\leq k_n, (m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_{m-1})$, $W_2^l(D_\varepsilon)$, $l=0,1,\ldots$ — пространства Соболева, а $\tilde S=\{(r,\theta)\in S,\varepsilon<r<(1+\varepsilon)/2\}$.

Имеет место ([5])

Лемма. *Пусть* $f(r,\theta) \in W_2^l(S)$ *. Если* $l \geq m-1$ *, то ряд*

$$f(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} f_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta),$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p \leq l-m+1$ *, сходятся абсолютно и равномерно.*

Введем множество функций

$$B_1^l(S) = \{f(r,\theta) : f \in W_2^l(S),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_n} \left(\|f_n^k(r)\|^2_{C^3(\varepsilon,1)} + \|f_n^k(r)\|^2_{C^1([\varepsilon,1])} \right) \exp 2(n^2 + n(m-2)) < \infty, l \geq m-1\}$$

Если $a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(D_\varepsilon)$, $i = 1, \ldots, m$, $l \geq m+1$ и $\tau_\varepsilon(r,\theta) = r^2 \tau_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\nu_\varepsilon(r,\theta) = r^2 \nu_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\sigma_\varepsilon(r,\theta) = r^2 \sigma_\varepsilon^*(r,\theta)$, $\tau_\varepsilon^*(r,\theta), \nu_\varepsilon^*(r,\theta) \in B_1^l(S)$, $\sigma_\varepsilon^*(r,\theta) \in B_1^l(\tilde{S})$. Тогда из результатов работ [4, 6, 7] вытекает следующий критерий

Теорема. *Задача 1 однозначно разрешима* $\Leftrightarrow \varepsilon > 0$.

Отметим, что в [8] получена критерии единственности решения задачи 1. В [9, 10] установлено, что задача 2 имеет единственное решение.

Замечание. В теореме принадлежность заданных функций в множество $B_1^l(S)$ существенна. Как показывают примеры построенные в [4], при нарушении этого условия, решение задачи 1 даже для многомерного волнового уравнения могут не существовать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
3. *Protter M. H.* // J. Rational Mech. and Analysis. 1954. V. 3, N 4. P. 435–446.
4. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Гылым, 1994. 254 с.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
6. *Алдашев С. А.* // Укр. матем. журнал. 1991. Т. 43, № 3. С. 415–420.
7. *Алдашев С. А., Нуржанов Ш. Т.* // Вестник КазГУ, сер. матем., мех., инф. Алматы, 1997. № 8. С. 6–16.
8. *Алдашев С. А.* // Математический журнал. 2002. Т. 2, № 4(6). С. 26–29.
9. *Алдашев С. А.* // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 1. С. 64–68.
10. *Нуржанов Ш. Т.* // Задачи Дарбу – Проттера для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений. Дис :. канд. физ.-мат. наук. Алматы, 2000. 69 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 53–54

УДК 517.938

ОБ ОБОБЩЕННЫХ ПОКАЗАТЕЛЯХ ЛЯПУНОВА

© Т. М. Алдибеков

Tamash@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Теорема. *Пусть для системы*

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) y_k, k = 1, \ldots, n; \tag{1}$$

где коэффициенты непрерывные действительные функции определенные на полуоси $J = [0, +\infty)$, *для некоторой непрерывной положительной функции* $\psi(t)$ *на* J, *выполняются условия*

$$1)\ p_{k-1,k-1}(t) - p_{kk}(t) \geq \alpha\psi(t), \quad t \in J, \quad k \in \{2, \ldots, n\}, \quad \alpha > 0, \quad \psi(t) \geq \beta > 0,$$

$$2)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{|p_{ik}(t)|}{\psi(t)} = 0, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \quad i \neq k,$$

$$3)\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \int_0^t p_{kk}(\tau) d\tau = \lambda_k(q), \quad k = \overline{1, n},$$

где $q(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$ *тогда система* (1) *имеет фундаментальную систему решений*

$$\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}$$

такую, что

$$\chi[\overline{y_k}, q] = \lambda_k(q), \quad k = \overline{1, n},$$

где $\chi[\overline{y_k}, q]$ *— обобщенный верхний показатель Ляпунова решения* $\overline{y_k}$, $k = \overline{1, n}$, *относительно* $q(t)$.

Доказательство. Легко установить, что существует фундаментальная система решений системы (1)

$$\overline{y_k} = \{y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}\}, \quad k = \overline{1, n},$$

такое, что

$$a)\ \lim_{t\to+\infty} \frac{y_{ik}}{y_{kk}} = 0, \quad i \neq k,$$

$$b)\ \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{\psi(t)} \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} - \frac{p_{kk}(t)}{\psi(t)}\right) = 0,$$

$$c)\ \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{1}{q(t)} \ln|y_{kk}(t)| = \chi[\overline{y_k}, q].$$

Отсюда и из условия теоремы получаем требуемое равенство. Теорема доказана.

Следствие 1. *Фундаментальная система решений* $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \ldots, \overline{y_n}$ *образует нормальный базис системы* (1), *т. е.* $\lambda_k(q)$, $k = \overline{1, n}$. *являются обобщенными показателями системы* (1).

Следствие 2. *Если* $\lambda_1(q) < 0$, *то система* (1) *асимптотически устойчива.*

Замечание. Теорема является аналогом теоремы Перрона для системы дифференциальных уравнений с неограниченными коэффициентами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ляпунов А. М.* Собрание сочинений. М – Л., 1956. Т. 2.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М. – Л., 1949.
3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., 1966.
4. *Изобов Н. А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // В кн. Итоги науки и техники (Мат. анализ). М., 1974. Т. 12. С. 71–146.
5. *Алдибеков Т. М.* Аналог теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению // Дифференциальные уравнения.2006. Т. 42, № 6. С. 859–860.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 55–56

УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КООРДИНАТЕ

© П. С. Алешин

AlyoshinPavel@gmail.com

Орловский государственный университет, Орел

1. В области $D = D^+ \bigcup D^- \bigcup J$, где $D^+ = \bigcup\limits_{l=0}^{\infty} D_l^+$, $D_l^+ = \{(x,y) : |x| < +\infty,\ lh \le y \le (l+1)h\}$, $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} D_k^-$, $D_k^- = \{(x,y) : k\tau - y < x < (k+1)\tau + y,\ -\tau/2 < y < 0\}$, $J = \{(x,y) : 0 < x < +\infty,\ y = 0\}$, рассматривается уравнение

$$0 = \begin{cases} D_+^{2\alpha} u(s,y) - u_y(x,y) + H(y-h)u(x,y-h), y > 0, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) - H(x-\tau)u(x-\tau,y), y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в котором $1 < 2\alpha < 2$; $0 < \tau, h \equiv const$; $D_+^{2\alpha}$ — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования с началом в $-\infty$ и с концом в точке x, действующий на функцию $u(x,y)$ по переменной x.

Задача P. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) в области D из класса $D_+^{2\alpha-2}u(s,y) \in C(\overline{D^+})$, $D_+^{2\alpha}u(s,y) \in C(D^+)$, $u_y(x,y) \in C(\overline{D^-})$, $u_y(x,y) \in C(D^+)$, $u_{xx}(x,y)$, $u_{yy}(x,y) \in C(D^-)$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$u(x,0) = f(x), \quad x \le 0, \tag{2}$$

$$u(x, k\tau - x) = \psi_k(x), \quad k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2, \tag{3}$$

и условиям сопряжения

$$\lim_{y\to 0+} u(x,y) = \lim_{y\to 0-} u(x,y) = \omega(x), \quad x \in \overline{J}, \tag{4}$$

$$\lim_{y\to 0+} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-} u_y(x,y) = \nu(x), \quad x \in J, \tag{5}$$

если заданные функции $\psi_k(x) \in C\,[k\tau, (2k+1)\tau/2] \bigcap C^2\,(k\tau, (2k+1)\tau/2)$, $f(x) \in C(-\infty, 0] \bigcap C^2(-\infty, 0)$ и $f(-\infty) = 0$, $f(0) = \psi_0(0)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.

2. Единственность и существование решения задачи P. Решение задачи Коши в области D^+ для уравнения (1) с начальными условиями (2), (4) получено в виде

$$u(x,y) = \left\{ u_l(x,y),\ (x,y) \in \overline{D_l^+} (l = 0,1,2,\dots) \right\}, \tag{6}$$

где

$$u_l(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{\omega}(\xi) G_l(x-\xi, y) d\xi,$$

а
$$G_l(x,y)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{l}\frac{(y-mh)^m}{m!}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda x}e^{(i\lambda)^{2\alpha}(y-mh)}d\lambda,$$
$$\overline{\omega}(x)=\begin{cases} f(x), x\le 0,\\ \omega(x), x\ge 0.\end{cases}$$

Решение задачи Коши в области D^- для уравнения (1) с начальными условиями (4), (5) найдено в форме
$$u(x,y)=\left\{u_k(x,y),(x,y)\in\overline{D_k^-}\,(k=0,1,2,\dots)\right\},\tag{7}$$
где $u_k(x,y)=\Phi(x,y)H(x)+\sum\limits_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\eta((x-m\tau)^2-\eta^2)^{m-1}\Phi(\eta,y)d\eta$, причем $\Phi(x,y)=\frac{1}{2}\left[z^{\omega}(x-y)+z^{\omega}(x+y)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}z^{\nu}(\xi)d\xi$, а $z^{\omega}(x)=\omega(x)H(x)+\sum\limits_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}\eta(x^2-(\eta+m\tau)^2)^{m-1}\omega(\eta)d\eta$, $z^{\nu}(x)$ совпадает с $z^{\omega}(x)$ если там заменить $\omega(x)$ на $\nu(x)$; $\gamma_m=\left(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1}$; $H(\xi)$ — функция Хевисайда.

Единственность решения задачи P следует из того, что однородная задача P ($f(x)\equiv 0$, $\psi_k(x)\equiv 0$) имеет тривиальное решение, поскольку интегро-дифференциально-разностное уравнение
$$D_+^{2\alpha}\omega(s)-\omega'(x)=\mu_k(x)\equiv\delta_k(x)-F(x)-$$
$$\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_0^{x-m\tau}(x-m\tau-\eta)^{2(m-1)}\omega(\eta)d\eta,\quad k\tau<x<(k+1)\tau,\tag{8}$$
полученное из (6), (7), в силу условий сопряжения (4), (5) ($\delta_k(x)\equiv 0$, $F(x)\equiv 0$ при $\psi_k(x)\equiv 0$, $f(x)\equiv 0$), в условиях $\omega(k\tau)=0$ ($k=0,1,2,\dots$) имеет нулевое решение.

Вопрос существования решения задачи P сводится к разрешимости уравнения (8) ($\delta_k(x)=0$, $F(x)=0$), когда $\omega(k\tau)=\psi_k(k\tau)$ ($k=0,1,2,\dots$), в классе функции $\omega(x)\in C(\overline{J})\bigcap C^2(J)$.

Замечание. Функции $\delta_k(x)$, $F(x)$ известны и выражаются через $\psi_k(x)$, $f(x)$ соответственно.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 57–58

УДК 517.947.5

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ НА ПОЛУОСИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ С БЕСКОНЕЧНОЗОННЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

© О. Р. Аллаберганов

Tulki70@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В этой работе изучается обратная задача на полуоси для оператора Штурма – Лиувилля с бесконечнозонным потенциалом. Ранее аналогичные задачи исследовались в работах [1–4].

Рассмотрим на полуоси следующую граничную задачу

$$Ly \equiv -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi), \tag{2}$$

где $q(x)$ — бесконечнозонный потенциал (определение и обозначения см. в [4]).

Для задачи (1)–(2) функция Вейля – Титчмарша имеет вид $m_\alpha(\lambda) = (C(\lambda)+i\sqrt{f(\lambda)})/A(\lambda)$, где

$$f(\lambda) = \lambda \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda}{\lambda_k} \cdot \frac{\mu_k - \lambda}{\lambda_k},$$

$$A(\lambda) = h(\lambda)\sin^2\alpha + g(\lambda)\cos^2\alpha + k(\lambda)\sin 2\alpha, C(\lambda) = (h(\lambda) - g(\lambda))\sin\alpha\cos\alpha + k(\lambda)\cos 2\alpha.$$

Из вида функции Вейля – Титчмарша вытекает, что непрерывный спектр задачи (1)–(2) состоит из следующего множества

$$E_{ess} = R^1 \setminus \left\{ (-\infty, 0) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_k,\ \mu_k) \right\}.$$

Обозначим через ξ_n, $n = 0,1,2,\dots$, нули функции $A(\lambda)$. Используя теорему Руше, нетрудно показать, что $\xi_0 \in (-\infty, 0]$, $\xi_n \in [\lambda_n, \mu_n]$, $n = 1,2,\dots$

Определение 1. Числа ξ_n, $n = 0,1,2,\dots$, и знаки $\sigma_n = \operatorname{sign} C(\xi_n)$, $n = 0,1,2,\dots$, называются *спектральными параметрами задачи* (1)–(2).

Определение 2. Спектральные параметры ξ_n, σ_n, $n = 0,1,2,\dots$, и границы $\lambda_0, \lambda_n, \mu_n$, $n = 1,2,\dots$, непрерывного спектра назовем *спектральными данными задачи* (1)–(2).

Восстановление коэффициента $q(x)$ и граничного условия задачи (1)–(2) по спектральным данным называют обратной задачей.

Теорема 1. *Пусть ξ_n, σ_n, $n = 0,1,2,\dots$, — спектральные параметры и E_{ess} непрерывный спектр задачи (1)–(2). Тогда непрерывный спектр следующей задачи*

$$\begin{cases} -y'' + q(x+t)y = \lambda y, \quad 0 < x < \infty, \\ y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0, \quad \alpha \in (0,\pi), \end{cases} \tag{3}$$

не зависит от действительного параметра t и спектральные параметры $\xi_k(t)$, $k = 0,1,\dots$, удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений Дубровина – Трубовица

$$\xi_0'(t) = \frac{-2[ctg^2\alpha + \xi_0(t) - q(t)]\sigma_0(t)\sqrt{-f(\xi_0(t))}}{\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k(t)-\xi_0(t)}{\lambda_k}},$$

$$\xi_n'(t) = \frac{-2\lambda_n[ctg^2\alpha + \xi_n(t) - q(t)]\sigma_n(t)\sqrt{-f(\xi_n(t))}}{(\xi_0(t) - \xi_n(t)) \cdot \prod\limits_{\substack{k=1 \\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\xi_k(t)-\xi_n(t)}{\lambda_k}}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

а также начальным условиям $\xi_k(0) = \xi_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *Знак* $\sigma_k(t)$ *меняется при каждом столкновении* $\xi_k(t)$ *с границами своей лакуны* $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Имеют место следующие формулы:*

$$ctg\alpha = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n\sqrt{-f(\xi_n)}}{A_1'(\xi_n)},$$

$$q(t) = 2ctg^2\alpha + 2\xi_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k + \mu_k - 2\xi_k(t)),$$

где

$$A_1(\lambda) = (\lambda - \xi_0)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k - \lambda}{\lambda_k}$$

и $\xi_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *— спектральные параметры задачи* (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И.* Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР. 1961. т. 141, № 2. с. 262–266.
2. *Hochstadt H., Goldberg W.* An inverse problem for a differential operator with a mixed spectrum // J. Math. Anal. and Appl. 1985. V. 105. P. 206–221.
3. *Левитан Б. М., Савин А. В.* Обратная задача на полупрямой для конечнозонных потенциалов // Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, математика, механика. 1988.№ 1. с. 21–28.
4. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля. М.: Наука, 1984.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 59–60

УДК 517.956, 517.968.2

О РАЗРЕШИМОСТИ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА

© М. М. Амангалиева, А. Е. Туймебаева *

* aknur@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

На вещественной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv (0, +\infty)$ рассматриваются вопросы разрешимости следующего интегрального уравнения

$$\mathbf{K}_\lambda \mu \equiv (I - \lambda \mathbf{K})\mu \equiv \mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

и его сопряженного

$$\mathbf{K}^*_\lambda \nu \equiv (I - \overline{\lambda}\mathbf{K}^*)\nu \equiv \nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right)\nu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{t} = g(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где ядро $k(z)$ определено соотношением

$$k(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left\{-\dfrac{1}{4(1-z)}\right\}, & 0 < z < 1, \\ 0, & 1 \leqslant z < +\infty; \end{cases}$$

$\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, $e^{-t}f(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $e^t g(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$.

Решения уравнений (1) и (2) соответственно ищутся в классах:

$$e^{-t}\mu(t) \in L_1(\mathbb{R}_+), \quad e^t\nu(t) \in L_\infty(\mathbb{R}_+).$$

Заметим, что в уравнениях (1) и (2) ядро интегрального оператора $k(z)$ обладает свойством: норма интегрального оператора, определяемого ядром $k(z)$ и действующего в пространстве суммируемых функций, равна $\mathrm{erfc}(1/2) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{1/2}^\infty e^{-\xi^2} d\xi$. Это свойство определяет особенность рассматриваемого интегрального уравнения (1).

Отметим, что необходимость исследования особых интегральных уравнений вида (1) возникает, например, при изучении некоторых нелокальных внутренне-граничных задач для параболического уравнения [1], спектрально-нагруженных параболических уравнений [2, 3], задач с подвижной границей и обратных задач для параболических уравнений и т.д.

Вначале исследуем соответствующее (1) однородное уравнение

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau}{t}\right)\mu(\tau)\cdot\frac{d\tau}{\tau} = 0, \ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{3}$$

Применяя к нему преобразование Меллина, с учетом теоремы о свертке, получим

$$\widehat{\mu}(s)\cdot[1 - \lambda\widehat{k}(s)] = 0, \quad s = s_1 + is_2,$$

где $\widehat{\mu}(s)$ — изображение функции $\mu(t)$, а изображение ядра имеет вид

$$\widehat{k}(s) = \int\limits_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}(1-z)^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4(1-z)}\right) z^{-s-1}dx, \quad \mathrm{Re}\, s < 0.$$

Сформулируем установленный результат для спектральной задачи (3).

Теорема 1. *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}$ *из (3) множество* $\sigma(\mathbf{K}) \equiv \{\lambda |\, \lambda \in \mathbb{C},\, Re\,\lambda \geq 0\}$ *является множеством характеристических чисел, а* $\mathbb{C} \setminus \sigma(\mathbf{K})$ *— резольвентным множеством.*

Теперь перейдем к исследованию однородного сопряженного интегрального уравнения для уравнения (2):

$$\nu(t) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{t}{\tau}\right) \nu(\tau) \cdot \frac{d\tau}{t} = 0,\ \ t \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Если в уравнении (4) произвести замены: $t = t_1^{-1}$, $\tau = \tau_1^{-1}$ и ввести следующее обозначение $\nu_1(t_1) = t^{-1}\nu(t_1^{-1})$, то (4) преобразуется к виду

$$\nu_1(t_1) - \overline{\lambda} \int\limits_0^\infty k\left(\frac{\tau_1}{t_1}\right) \nu_1(\tau_1) \frac{d\tau_1}{\tau_1} = 0,$$

т. е. оно совпадает с интегральным уравнением (3), где неизвестной функцией выступает функция $\nu_1(t_1)$. Здесь справедлива следующая

Теорема 2. *Для интегрального оператора* $\mathbf{K}^*$ *из (4) вся комплексная плоскость не содержит собственных значений.*

Для неоднородного уравнения (1) получено следующее представление его решения:

$$\mu(t) = f(t) + l(-s^*) \int\limits_0^t \frac{\tau^{-s^*-1}}{t^{-s^*}} f(\tau) d\tau + C \cdot t^{-s^*}, \quad \text{если } \mathrm{Re}\,\lambda > 0;$$

$$\mu(t) = f(t) + \int\limits_0^t \sum_{k=1}^\infty l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} f(\tau) d\tau, \quad \text{если } \mathrm{Re}\,\lambda < 0.$$

Для решения неоднородного уравнения (2) соответственно получаем:

$$\nu(t) = g(t) + l(s^*) \int\limits_t^\infty \frac{\tau^{s^*-1}}{t^{s^*}} g(\tau) d\tau,\ \ \mathrm{Re}\, s^* > 0,\ \ \text{при}\ \ \mathrm{Re}\,\lambda < 0;$$

$$\nu(t) = g(t) + \int\limits_t^\infty \sum_{k=1}^\infty l(s_k^0) \frac{\tau^{s_k^0-1}}{t^{s_k^0}} g(\tau) d\tau,\ \ \mathrm{Re}\, s_k^0 < 0,\ \ \text{при}\ \ \mathrm{Re}\,\lambda > 0$$

тогда и только тогда, когда выполнено условие ортогональности $\int\limits_0^\infty g(t) t^{-s^*} dt = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И., Туймебаева А. Е.* Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности. Автомодельный закон движения точки нагрузки. Препринт № 6. Алматы, 2006. 40 с.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 61–61

УДК 517.95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© Д. Аманов*, Ж. А. Отарова**

* amanov_d@rambler.ru

* *Институт математики АН РУз, Ташкент, Узбекистан;*
** *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < p, -T < t < T, T > 0\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} + \operatorname{sgn} t\, u_{xxxx} = f(x,t). \tag{1}$$

Обозначим $\Omega^+ = \Omega \cap (t > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (t < 0)$.

Задача 1. Найти в $\Omega^+ \cup \Omega^-$ решение $u(x,t)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad u_t(x,+0) = u_t(x,-0), \quad 0 \le x \le p, \tag{2}$$

граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(p,t) = 0, \quad u_{xx}(p,t) = u_{xx}(0,t), \quad -T \le t \le T, \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,T) = 0, \quad 0 \le x \le p. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть числа p и T такие, что при $n = 1,2,3,\ldots$*

$$\left|\cos\frac{n^2\pi^2}{p^2}T\ \operatorname{sh}\frac{n^2\pi^2}{p^2}T + \sin\frac{n^2\pi^2}{p^2}T\ \operatorname{ch}\frac{n^2\pi^2}{p^2}T\right| \ge \delta_0 > 0. \tag{5}$$

Тогда, если существует решение задачи 1, то оно единственно.

Теорема 1 доказывается, используя условие (5) и полноту функции

$$\sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{n\pi}{p}x, \quad n = 1,2,\ldots$$

в $L_2(0,p)$.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие (5) и $f(x,t) \in C^{2,0}_{x,t}(\overline{\Omega})$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(0,p)$ при всех $t \in [-T,T]$, $f(0,t) = f(p,t) = 0$, $f_{xx}(0,t) = f_{xx}(p,t) = 0$. Тогда решение задачи 1 существует.*

Теорема 2 доказывается построением решения методом разделения переменных.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 62–62

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© А. А. Андреев, И. Н. Саушкин

andre@ssu.samara.ru, insau@ssu.samara.ru

Самарский государственный университет, Самара

В работе рассмотрены некоторые аналоги задач Трикоми в неограниченных симметричных областях для дифференциальных уравнений, порождённых операторами типа Лаврентьева – Бицадзе с двумя перпендикулярными и двумя параллельными линиями вырождения типа и возмущённых значениями второй производной искомой функции, вычисленной в инволютивных точкам.

Пусть $H^\gamma = \{(x,\, y):\ y+\gamma x>0, \gamma y+x>0, \gamma>0\}$, $0<\varepsilon<1$.

Задача T_1 . Для уравнения

$$u_{xx}(x,\, y)+\operatorname{sign}(xy)u_{yy}(x,\, y)+\varepsilon u_{yy}(y,\, x)=0 \tag{1}$$

в области $H^a\subset H^b$, где $a=\sqrt{1+\varepsilon},\ \ b=\sqrt{1-\varepsilon},$ найти ограниченную на бесконечности функцию $u(x,\, y)\in C^1(H^b)\cap C(\overline{H}^b)$, удовлетворяющую в H^a уравнению (1) при x , $y\neq 0$ и нелокальным условиям на квазихарактеристиках

$$\frac12\big[u(-x,\, ax)+u(ax,\, -y)\big]=\varphi(x),\quad \frac12\big[u(-x,\, bx)-u(bx,\, -x)\big]=\psi(x),\quad x>0.$$

Задача T_2 . Для уравнения

$$u_{xx}(x,\, y)+\operatorname{sign}(y\pi-y^2)u_{yy}(x,\, y)+\varepsilon u_{yy}(-x,\, y)=0 \tag{2}$$

найти функцию $u(x,y)\in C^2(\mathbb{R}^2)$, исчезающую на бесконечности, обладающую непрерывными частными производными первого порядка вплоть до $y=0$ и $y=\pi$, за исключением, быть может, точек $(0,\,0)$ и $(0,\,\pi)$, удовлетворяющую уравнению (2) и условиям при $x\in(-\infty,\,0)\cup(0,+\infty)$ вида:

$$\frac12\big[u(ax,\, -x)+u(-ax,-x)\big]=\varphi_1(x),\quad \frac12\big[u(ax,\, x+\pi)+u(-ax,x+\pi)\big]=\varphi_2(x),$$

$$\frac12\big[u(bx,\, -x)+u(-bx,-x)\big]=\psi_1(x),\quad \frac12\big[u(bx,\, x+\pi)+u(-bx,x+\pi)\big]=\psi_2(x).$$

Отметим, что решения всех задач найдены в явном виде, что и позволяет обосновать их корректность по Адамару. Основные результаты сформулированы в виде теорем.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 63–64

УДК 517.941.1

СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ ДВУХ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ

© В. К. Андреев

andr@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается система уравнений двумерного движения двух бинарных смесей с плоской границей раздела в отсутствии внешних сил. Можно показать, что эта система допускает однопараметрическую подгруппу, соответствующую оператору $\partial/\partial x + A_j\partial/\partial\theta_j + B_j\partial/\partial c_j$, A_j, B_j — постоянные. Инвариантное решение следует искать в виде

$$u_j = u_j(y,t), \quad \theta_j = A_jx + T_j(y,t), \quad c_j = B_jx + K_j(y,t). \tag{1}$$

Решению (1) можно дать следующую интерпретацию. Предположим, что на границе раздела двух смесей $y = 0$ поверхностное натяжение линейно зависит от температуры и концентрации: $\sigma(\theta, c) = \sigma_0 - æ_1\theta - æ_2 c$, где $æ_1 > 0$, $æ_2$ — постоянные (обычно $æ_2 < 0$, поскольку поверхностное натяжение увеличивается с ростом концентрации). В начальный момент времени первая смесь заполняет слой $-l_1 < y < 0$, а вторая — слой $0 < y < l_2$. Смеси находятся в покое, и при $t = 0$ во всем пространстве мгновенно создается поле температур $\theta_j = A_jx$ и поле концентраций $c_j = B_jx$. Термоконцентрационный эффект порождает движение смесей, в котором поверхность раздела остается плоскостью $y = 0$, а траектории являются прямыми, параллельными оси x. Функции u_j, T_j, K_j можно назвать возмущениями состояния покоя смесей.

Подстановка (1) в систему уравнений термодиффузионного движения с учетом условий на границе раздела $y = 0$ приводит к начально-краевой задаче

$$u_{jt} = \nu_j u_{jyy}; \quad T_{jt} = \chi_j T_{jyy} - Au_j; \quad K_{jt} = d_jK_{jyy} + \alpha_j d_j T_{jyy} - B_ju_j \tag{2}$$

при $-l_1 < y < 0 \quad (j = 1)$, $0 < y < l_2 \quad (j = 2)$;

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad T_1(0,t) = T_2(0,t), \quad K_1(0,t) = \lambda K_2(0,t); \tag{3}$$

$$k_1T_{1y}(0,t) = k_2T_{2y}(0,t); \tag{4}$$

$$d_1(K_{1y}(0,t) + \alpha_1T_{1y}(0,t)) = d_2(K_{2y}(0,t) + \alpha_2T_{2y}(0,t)); \tag{5}$$

$$\rho_2\nu_2u_{2y}(0,t) - \rho_1\nu_1u_{1y}(0,t) = -æ_1A - æ_2B_1; \tag{6}$$

$$u_j(y,0) = 0, \quad T_j(y,0) = 0, \quad K_j(y,0) = 0. \tag{7}$$

Во втором уравнении из (2) $A \equiv A_1 = A_2$ (это следствие равенства температур при $y = 0$); в граничном условии (3) $\lambda = \mathrm{const}$ — постоянная равновесия Генри, поэтому $B_1 = \lambda B_2$; ν_j, χ_j, d_j, α_j, k_j — физические положительные постоянные смесей. К этим условиям необходимо присоединить еще условия на твердых стенках $y = -l_1$, $y = l_2$:

$$u_1(-l_1,t) = u_2(l_2,t) = 0 \tag{8}$$

— условия прилипания;

$$T_1(-l_1,t) = T_{1cm}(t), \quad T_2(l_2,t) = T_{2cm}(t) \tag{9}$$

— задание возмущений температуры;

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial y} + \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=-l_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial K_2}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial T_2}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=l_2} = 0 \tag{10}$$

— отсутствие потоков смесей сквозь стенки.

Видно, что уравнения (2)–(10) образуют три последовательно решаемые задачи для функций (u_1, u_2), (T_1, T_2), (K_1, K_2).

В связи с поведением решения задачи (2)–(6), (8)–(10) при $t \to \infty$ представляет интерес ее стационарное решение. Конечно, при этом T_{jcm} представляют собой постоянные T^0_{jcm}, а начальные условия (7) не ставятся. Показано, что скорости стационарного течения $u^0_j(y)$ являются линейными, а $T^0_j(y)$, $K^0_j(y)$ — кубическими:

$$u^0_1 = a\left(1 + \frac{y}{l_1}\right), \quad u^0_2 = a\left(1 - \frac{y}{l_2}\right),$$

$$T^0_1 = \frac{Aa}{\chi_1}\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6l_1}\right) + C_1 y + C_2, \quad T^0_2 = \frac{Aa}{\chi_2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6l_2}\right) + kC_1 y + C_2,$$

$$K^0_1(y) = -\frac{\alpha_1 a A}{6\chi_1 l}\left[y^3 + 3ly^2 + \frac{2l^3}{k+1}(1-\chi)y\right],$$

$$K^0_2(y) = -\frac{\alpha_2 a A}{6\chi_2 l}\left[-\chi y^3 + 3\chi l y^2 + \frac{2kl^3}{k+1}(1-\chi)y\right],$$

где

$$a = -\frac{Hl_1}{\mu_2(\mu + l_0)}, \quad H = -(æ_1 A + æ_2 B_1), \quad l_0 = \frac{l_1}{l_2},$$

$$C_1 = \frac{1}{l_2(l_0 + k)}\left[T^0_{2cm} - T^0_{1cm} + \frac{Aal_2^2}{3\chi_1}(l_0^2 - \chi)\right], \quad k = k_1/k_2,$$

$$C_2 = \frac{1}{l_0 + k}\left[kT^0_{1cm} + l_0 T^0_{2cm} - \frac{Aal_0 l_2^2}{3\chi_1}(l_0 k + \chi)\right], \quad \chi = \chi_1/\chi_2.$$

Справедлива

Теорема. *Предположим, что* $\lim\limits_{t\to\infty} T_{jcm}(t) = T^0_{jcm}$, *тогда при* $t \to \infty$ *решение задачи* (2)–(10) *выходит на стационарный режим и имеют место оценки*

$$|u_j(y,t) - u^0_j(y)| \le C_1 \exp(-\delta_1 t), \quad |T_j(y,t) - T^0_j(y)| \le C_2 \exp(-\delta_2 t),$$

$$\lim_{t\to\infty} K_j(y,t) = K^0_j(y),$$

δ_1, δ_2, C_1, C_2 *— постоянные, зависящие от входных данных. При* $l_1, l_2 \to \infty$ *решение этой же задачи стремится к автомодельному.*

Теорема доказывается с помощью метода априорных оценок и преобразования Лапласа.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 65–66

УДК 517.953.5

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Ю. П. Апаков

apakov.1956@mail.ru

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

В области $D = \{(x, y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$ рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - U_{yy} = f(x, y), \tag{1}$$

где a, b — некоторые постоянные числа и $f(x, y)$ — известная функция, удовлетворяющая следующим условиям: $f(x, y), f'_y(x, y) \subset C(\bar{D}),\ \ f(x, 0) = f(x, b) = 0$.

Задача K. Найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$U(x, 0) = 0, \quad U(x, b) = 0, \quad 0 < x < a, \tag{2}$$

$$U(0, y) = U(a, y) = U'_x(a, y) = 0, \quad 0 < y < b. \tag{3}$$

Единственность решения этой задачи доказывается методом интеграла энергии.

Будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по y

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y. \tag{4}$$

Представим функцию $f(x, y)$ в виде ряда Фурье

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad f_n(x) = \frac{2}{b} \int_0^b f(x, \eta) \sin \frac{n\pi}{b} \eta d\eta. \tag{5}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), учитывая (3), имеем следующую задачу для $U_n(x)$:

$$\begin{cases} U'''_n + \lambda_n U_n = f(x), \\ U_n(0) = 0, \quad U_n(a) = 0, \quad U'_n(a) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Пусть решение задачи (6) имеет вид

$$U_n(x) = A_n(x) \exp(-k_n x), \tag{7}$$

где $k_n = (\frac{\pi n}{b})^{\frac{3}{2}}$, $A_n(x)$ — неизвестные функции.

Подставляя (7) в уравнение (6) и полагая $A'_n(x) = B_n(x)$, получаем

$$B''_n - 3k_n B'_n + 3k_n^2 B_n = e^{k_n x} f_n(x). \tag{8}$$

Неизвестные функции $A_n(x)$ должны удовлетворять условию

$$A_n(0) = 0, \quad A_n(a) = 0, \quad A'_n(a) = 0. \tag{9}$$

Следовательно, для функций $B_n(x)$ выполняются условия $B_n(a) = 0$.

Уравнения (8) является уравнением вынужденных колебаний и её общее решение имеет вид [1]

$$B_n(x) = C_{1n} e^{\frac{3}{2}k_n x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (x - C_{2n}) + \frac{2}{\sqrt{3}k_n} \int_x^a e^{\frac{1}{2}k_n(3x-\xi)} f_n(\xi) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (\xi - x) d\xi.$$

Из условия $B_n(a) = 0$ следует

$$B_n(x) = -C_{1n} e^{\frac{3}{2}k_n x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (a - x) + \frac{2}{\sqrt{3}k_n} \int_x^a e^{\frac{1}{2}k_n(3x-\xi)} f_n(\xi) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (\xi - x) d\xi. \quad (10)$$

Учитывая, что $A_n(x) = \int\limits_0^x B_n(\eta)\, d\eta$, имеем

$$A_n(x) = -C_{1n} \int_0^x e^{\frac{3}{2}k_n \eta} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (a - \eta) d\eta + \frac{2}{\sqrt{3}k_n} \int_0^x d\eta \int_\eta^a e^{\frac{1}{2}k_n(3\eta-\xi)} f_n(\xi) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (\xi - \eta) d\xi.$$

Коэффициенты C_{1n} определяются из условия. $A_n(a) = 0$. Тогда получим

$$A_n(x) = -\frac{\sigma_{2n}(a)}{\sigma_{1n}(a)} \sigma_{1n}(x) + \sigma_{2n}(x), \quad (11)$$

Учитывая (7), (11) и (4), имеем решение задачи К в виде

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{\sigma_{2n}(a)}{\sigma_{1n}(a)} \sigma_{1n}(x) + \sigma_{2n}(x) \right] e^{-k_n x} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad (12)$$

где

$$\sigma_{1n}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}k_n} \left\{ e^{\frac{3}{2}k_n x} \sin \left[\frac{\sqrt{3}}{2} k_n (a - x) + \frac{\pi}{6} \right] - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n a + \frac{\pi}{6}\right) \right\},$$

$$\sigma_{2n}(x) = \frac{2}{\sqrt{3}k_n} \int_0^x d\eta \int_\eta^a e^{\frac{1}{2}k_n(3\eta-\xi)} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_n (\xi - \eta) f_n(\xi)\, d\xi,$$

$$\sigma_{1n}(a) = \frac{1}{\sqrt{3}k_n} \left[\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}k_n a} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n a + \frac{\pi}{6}\right) \right],$$

$$\sigma_{2n}(a) = \frac{2}{3k_n^2} \int_0^a \left[\frac{1}{2} e^{k_n \xi} - e^{-\frac{1}{2}k_n \xi} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n \xi + \frac{\pi}{6}\right) \right] f_n(\xi) d\xi.$$

(12) является решением уравнении (1) с краевым условиям (2), (3).

Итак, доказана следующая

Теорема. *Если* $f(x, y), f'_y(x, y) \in C^1(\overline{D})$ *и* $f(x, 0) = f(x, b) = 0$, *то решение задачи К имеет вид (12) и оно непрерывно вместе со своими производными третьего порядка по* x, *второго порядка по* y.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., 1952.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 67–68

УДК 517.953.5

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Ю. П. Апаков *, Б. Ю. Иргашев

* apakov.1956@mail.ru

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - y^m U_{yy} = 0, \quad 0 \leqslant m \leqslant 1, \tag{1}$$

в области $D = \{(x;y) : 0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$.

Задача A_m. Найти регулярное решение $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^{3,2}_{x,y}(D)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям

$$\lim_{y \to +0}(y^{\frac{m-1}{2}} U) = 0, \quad U(x,1) = 0, \tag{2}$$

$$U(0,y) = \varphi_1(y), \quad U(1,y) = \varphi_2(y), \quad U'_x(1,y) = \varphi_3(y), \tag{3}$$

где $\varphi_i(y) \in C^3(\overline{D})$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(1) = \varphi''_i(0) = \varphi''_i(1) = 0$, $\varphi_i(y)$, $\varphi''_i(y) \in L_2(0,1)$, $i = 1,2,3$.

Теорема. *Однородная задача A_m имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Предположим, что однородная задача A_m имеет нетривиальное решение. Рассмотрим тождество

$$UL[U] = \frac{\partial}{\partial x}(UU_{xx} - \frac{1}{2}U_x^2) - \frac{\partial}{\partial y}[y^m U U_y - \frac{m}{2}(y^{\frac{m-1}{2}}U)^2] + y^m U_y^2 + \frac{m(1-m)}{2} y^{m-2} U^2 = 0.$$

Интегрируя это тождество в области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 U_x^2(0,y)dy + \iint\limits_D y^m U_y^2 dxdy + \iint\limits_D \frac{m(1-m)}{2} y^{m-2} U^2 dxdy = 0.$$

Отсюда при $m \neq 0$ и $m \neq 1$ имеем $U(x,y) = 0$. Если $m = 0$ и $m = 1$, то $U_y(x,y) = 0$, т. е. $U(x,y) = f(x)$. Из $U(x,0) = 0$ следует $f(x) \equiv 0$, тогда $U(x,y) \equiv 0$.

Используем метод разделения переменных. Пусть

$$U(x,y) = X(x)\,Y(y). \tag{4}$$

Подставляя (4) в уравнение (1), получим

$$Y'' + \lambda y^{-m} Y = 0, \quad \lambda > 0, \tag{5}$$

$$X''' + \lambda X = 0. \tag{6}$$

Для функции $Y(y)$ имеем следующую вспомогательную задачу

$$\begin{cases} Y'' + \lambda y^{-m} Y = 0, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Общее решение уравнения (7) при $0 \leqslant m < 1$ имеет вид [1]

$$Y(y) = \sqrt{y}\left[C_1 J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right) + C_2 J_{-\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right)\right], \tag{8}$$

где $J_\nu(y)$ — функция Бесселя, порядка $\nu = \frac{1}{2-m}$, $\frac{1}{2} \leqslant \nu < 1$, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Используя граничные условия (7), получим $C_2 = 0$,

$$Y(1) = CJ_{\frac{1}{2-m}}(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}) = 0. \tag{9}$$

Известно [2], что при вещественном $\nu \geqslant \underline{-1}$, функция $J_\nu(z)$ имеет бесконечно много простых нулей. Обозначим их через μ_k, где $k = \overline{1, \infty}$, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \ldots$

Тогда $\lambda_k = \left[\frac{(2-m)\mu_k}{2}\right]^2$. Итак, λ_k — собственные значения, удовлетворяющие уравнению (9). Собственная функция имеет вид

$$Y_k(y) = \sqrt{y} J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m} y^{\frac{2-m}{2}}\right). \tag{10}$$

Как известно, $Y_k(y)$ ортогональны относительно скалярного произведения

$$(Y_k(y), Y_n(y)) = \int_0^1 y^{-m} Y_k(y) Y_n(y) dy = \begin{cases} 0, & \text{при } n \neq k, \\ \frac{1}{2-m} J^2_{\frac{1}{2-m}+1}(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m}), & \text{при } n = k. \end{cases}$$

Функция (10) удовлетворяет $\lim\limits_{y \to +0}(y^{\frac{m-1}{2}} Y) = 0$. Этот результат имеет место и при $m = 1$. Общее решение уравнения (6) имеет вид

$$X_n(x) = C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x}(C_{2n} \cos\frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} k_n x), \tag{11}$$

где $k_n = \sqrt[3]{\lambda_n}$, C_i — произвольные постоянные, $i = 1, 2, 3$.

Учитывая (10), (11) и (4), имеем решение

$$U(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x}(C_{2n} \cos\frac{\sqrt{3}}{2} k_n x + C_{3n} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} k_n x)] Y_n(y) \tag{12}$$

Из краевых условий (3) получим систему алгебраических уравнений для определения C_i:

$$\begin{cases} C_{1n} + C_{2n} = \varphi_{1n}, \\ C_{1n} + e^{\frac{3}{2}k_n}(C_{2n} \cos\frac{\sqrt{3}}{2} k_n + C_{3n} \sin\frac{\sqrt{3}}{2} k_n) = \varphi_{2n} e^{k_n}, \\ C_{1n} - e^{\frac{3}{2}k_n}(C_{2n} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n + \frac{\pi}{3}) + C_{3n} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} k_n + \frac{\pi}{3})) = \frac{-\varphi_{3n}}{k_n} e^{k_n}, \end{cases}$$

где φ_{in} — коэффициенты ряда Фурье – Бесселя по собственным функциям $\{Y_n(y)\}$

$$\varphi_i(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{in} Y_n(y) dy, \quad \varphi_{in} = \int_0^1 y^{-m} \varphi_i(y) Y_n(y) dy.$$

Определитель этой системы отличен от нуля.

При сделанных предположениях данных функции доказывается равномерная сходимость ряда (12) и их производных до третьего порядка по x и до второго порядка по y.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Градштейн И. С, Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
2. *Бейтмен Г. Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. II. М.: Наука, 1974. 296 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 69–70

УДК 517.55

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© Э. В. Арбузов, А. Л. Бухгейм

arbuzov@math.nsc.ru, bukhgeim@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работе рассматривается задача Коши для эллиптических уравнений второго порядка с переменными коэффициентами в ограниченной плоской области с данными Коши, известными только на участке границы области. Для решения исследуемой задачи получена формула типа Карлемана и оценка условной устойчивости.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область с границей класса C^1_α, $0 < \alpha < 1$, $M \subset \partial\Omega$ — участок границы, состоящий из объединения конечного числа замкнутых дуг.

Для функции $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ рассматривается задача Коши для эллиптического уравнения второго порядка в каноническом виде:

$$\Delta u(x,y) + a_1(x,y)u_x(x,y) + a_2(x,y)u_y(x,y) + a_0(x,y)u(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x,y)|_M = u_0(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x,y)|_M = u_1(x,y),$$

где коэффициенты $a_0(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $a_1(x,y), a_2(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, данные Коши $u_0(x,y) \in C^1(M)$, $u_1(x,y) \in C(M)$, и $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор единичной внешней нормали.

Как известно ([1]), эллиптическое уравнение общего вида, с помощью соответствующей замены переменных, можно привести к каноническому виду (1) во всей области Ω.

Формулы, позволяющие находить решение эллиптического уравнения в случае, когда данные Коши известны лишь на части границы области, получили название формул типа Карлемана [2]. В работе используется метод, предложенный в [3] Г. М. Голузиным и В. И. Крыловым, позволяющий найти решение с помощью дополнительной функции со специальными свойствами на границе области.

Используя следующие обозначения:

$$z = x + iy, \quad u(z) = u(x,y), \quad \mathbf{d}\eta = d\eta_1 d\eta_2,$$

$$2\bar\partial = \partial_x + i\partial_y, \quad 2\partial = \partial_x - i\partial_y,$$

$$\mathbb{P}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{A(\eta)}{\eta - \zeta}\,\mathbf{d}\eta, \quad \overline{\mathbb{P}}(A)(\zeta) = -\frac{1}{\pi}\int_\Omega \frac{A(\eta)}{\bar\eta - \bar\zeta}\,\mathbf{d}\eta,$$

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 2\bar\partial & 0 \\ 0 & 2\partial \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} \\ q_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

уравнение (1) можно представить в виде эллиптической системы уравнений первого порядка.

Лемма. *Пусть* $A(z) = a_1(z) - ia_2(z)$,

$$u_1(z) = e^{\frac14 \mathbb{P}\bar A}u(z), \qquad u_2(z) = e^{\frac14 \overline{\mathbb{P}}A}(2\bar\partial u(z) + \frac12 \bar A(z)u(z)),$$

и

$$q_{12} = -e^{\frac14(\mathbb{P}\bar A - \overline{\mathbb{P}}A)}, \quad q_{21} = -e^{\frac14(\overline{\mathbb{P}}A - \mathbb{P}\bar A)}(\partial\bar A(z) + \frac14|A(z)|^2 - a_0(z)),$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде системы для вектор-функции $\mathbf{u}(z) = (u_1(z), u_2(z))$:

$$L\mathbf{u} = (\mathcal{D} + Q)\mathbf{u} = 0.$$

Основной полученный результат сформулирован в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть* $\varphi(\zeta)$ *— аналитическая в* Ω *функция, такая что*

$$\mathrm{Re}\varphi(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \in M; \\ 0, & \zeta \in \partial\Omega \setminus M. \end{cases}$$

Матрица $\Phi(\zeta) = \begin{pmatrix} e^{\tau\varphi(\zeta)} & 0 \\ 0 & e^{\tau\bar{\varphi}(\zeta)} \end{pmatrix}$, *и вектор-функция* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2\bar{\partial}\mathcal{E}(\zeta - z) \\ 0 \end{pmatrix}$, *где* $\mathcal{E}(z) = -\frac{1}{2\pi}\ln r$,

$$L^\sharp = \mathcal{D}^* + (\Phi^*)^{-1}(\mathcal{D}^*\Phi^*) + (\Phi^*)^{-1}Q^*\Phi^*, \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{q}_{12}e^{\tau(\bar{\varphi}(\zeta) - \varphi(\zeta))}\ 2\bar{\partial}\mathcal{E}(\zeta - z) \end{pmatrix}.$$

Тогда существует число τ_0 *такое, что при* $\tau \geq \tau_0$, *найдется вектор-функция* $\mathbf{w} \in W_p^1(\Omega), 1 < p < 2$, *которая является решением системы* $L^\sharp\mathbf{w} = \mathbf{g}$, *и для любого* $z \in \Omega$ *имеет место равенство*

$$u(z) = e^{-\frac{1}{4}\mathbb{P}\bar{A}} \lim_{\tau \to \infty} \int_M e^{-\tau\varphi(z)} < \Phi\mathbf{u}, (\nu_1 I - i\nu_2 J)(\mathbf{w} - \mathbf{v}) > ds,$$

где $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, *и выполняется оценка*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |u(z)| \leq \varepsilon l(u) + C(\varepsilon)||u||_{C^1(M)},$$

где

$$l(u) = ||u||_{C^1(\partial\Omega \setminus M)},$$

$$C(\varepsilon) = \varepsilon^{1-1/\psi(z)}(\psi(z)/C_0)^{-1/\psi(z)}, \quad \psi(z) = \mathrm{Re}\ \varphi(z),$$

а C_0 *— константа, зависящая от* $||\mathcal{E}(\zeta - z)||_{C^1(\partial\Omega)}$, $|\partial\Omega|$, $||A||_{C(\Omega)}$, $||\partial\mathcal{E}||_{L_p(\Omega)}$.

Замечание. При нахождении решения системы $L^\sharp\mathbf{w} = \mathbf{g}$ используются свойства компактности оператора $\mathbb{P}$, а также его дифференциальные свойства, доказательство которых приведено в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
2. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris, 1926.
3. *Голузин Г. М., Крылов В. И.* Обобщенная формула Carleman'а и ее применения к аналитическому продолжению функций // Мат. сб. 1933. Т. 40, № 2. С. 144–149.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 71–71

УДК 517.97

АНОРМАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ И ТЕОРЕМА ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

© А. В. Арутюнов

arutun@orc.ru

Российский университет дружбы народов, Москва

Рассмотрим классическую экстремальную задачу с ограничениями

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Здесь гладкие функции f_i задают ограничения, а f_0 — минимизируемый функционал. Пусть x_0 — точка локального минимума. Известно, что если точка x_0 анормальна (вырождена), то есть градиенты ограничений $f_i'(x_0)$ линейно зависимы, то классический принцип Лагранжа вырождается (не несет содержательной информации), а классические необходимые условия второго порядка не выполняются.

В докладе обсуждается это явление вырождения и излагается теория необходимых условий первого и второго порядков одинаково содержательная как для вырожденных, так и для невырожденных задач. Эти необходимые условия заключаются в неотрицательной определенности максимума из вторых производных функции Лагранжа, взятому по некоторому специально строящемуся множеству множителей Лагранжа. Это множество состоит из тех множителей Лагранжа, для которых индекс соответствующей квадратичной формы, определяемой функцией Лагранжа, не превышает порядка анормальности рассматриваемой точки. Оказывается, что для анормальных точек приводимые условия превращаются в классические условия второго порядка. Указанные результаты являются развитием принципа Лагранжа и обобщаются на теорию оптимального управления.

Вторая часть доклада посвящена теореме об обратной функции, справедливой без априорных предположений нормальности. Рассмотрим систему нелинейных уравнений, имеющую в векторной записи вид $F(x) = y$, где F — гладкое отображение одного банахова пространства X в другое (для простоты можно считать эти пространства конечномерными). Если точка x_0 анормальна, то есть линейный оператор $F'(x_0)$ не является сюръективным (например, $F'(x_0) = 0$), то в точке x_0 классическая теорема об обратной функции неприменима. В докладе обсуждается это явление вырождения и предлагается вариант теоремы об обратной функции, который применим и в вырожденных точках.

Устанавливается связь между необходимыми условиями оптимальности и теоремой об обратной функции. Важно отметить, что все излагаемые в докладе результаты являются содержательными и в конечномерном случае (даже, если X трехмерное пространство).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. В.* Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997.
2. *Арутюнов А. В.* Теорема о неявной функции как реализация принципа Лагранжа. Анормальные точки // Математический сборник. 2000. Т. 191, № 1. С. 3–26.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 72–73

УДК 517.946

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ДАННЫМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ ДЛЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

© А. Т. Асанова

anar@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

В прямоугольнике $\Omega = [0,T] \times [0,\omega]$ рассматривается краевая задача с данными на характеристиках для системы интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = A(t,x)\frac{\partial u}{\partial x} + B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t} + C(t,x)u + f(t,x) +$$

$$+ \int_0^T \Big\{ K_1(\tau,x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial x} + K_2(\tau,x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t} + K_3(\tau,x)u(\tau,x) \Big\} d\tau, \tag{1}$$

$$u(t,0) = \psi(t), \qquad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$P_2(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial x} + P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} + P_0(x)u(0,x) + S_2(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial x} + S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t} +$$

$$S_0(x)u(T,x) = \varphi(x), \qquad x \in [0,\omega], \tag{3}$$

где $u \in R^n$, $(n \times n)$-матрицы $A(t,x)$, $B(t,x)$, $C(t,x)$, $K_i(t,x)$, $i = \overline{1,3}$, $P_j(x)$, $S_j(x)$, $j = \overline{0,2}$, n-вектор-функции $f(t,x)$, $\varphi(x)$ непрерывны на Ω и $[0,\omega]$, соответственно, n-вектор-функция $\psi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0,T]$ и $||u(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} |u_i(t,x)|$, $||A(t,x)|| = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}(t,x)|$.

Непрерывная на Ω функция $u(t,x)$ называется *классическим решением задачи* (1)–(3), если она имеет непрерывные на Ω частные производные $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t \partial x}$, удовлетворяет системе (1) при всех $(t,x) \in \Omega$ и условиям (2), (3).

К системам интегро-дифференциальных уравнений в частных производных (1) приводит математическое моделирование различных процессов в физике, химии и биологии. В связи с этим возникает необходимость исследования вопросов разрешимости различных краевых задач для указанной системы и нахождения их классических решений.

При отсутствии интегрального слагаемого в системе уравнений (1), краевая задача для системы гиперболических уравнений с условиями (2), (3), рассматривалась в работе [1]. Для исследования и решения этой задачи был предложен метод введения функциональных параметров, который позволил установить коэффициентный критерий корректной разрешимости рассматриваемой задачи [2, 3], а также построить алгоритм нахождения ее классического решения.

В сообщении задача (1)–(3) исследуется и решается методом введения функциональных параметров. Получены достаточные условия существования единственного классического решения задачи (1)–(3) в терминах исходных данных и предложен алгоритм ее нахождения.

Введем обозначения: I — единичная матрица размерности $(n\times n)$, $\alpha(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||A(t,x)||$, $k_1(x)=\max\limits_{t\in[0,T]}||K_1(t,x)||$, $Q_1(T,x)=P_2(x)+S_2(x)\Big\{I+\int\limits_0^T[A(\tau,x)+TK_1(\tau,x)]d\tau\Big\}$.

Теорема 1. *Пусть матрица $Q_1(T,x)$ обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполнены неравенства:*
a) $||[Q_1(T,x)]^{-1}||\le\gamma(T,x)$, $\gamma(T,x)$ *— непрерывная на $[0,\omega]$ функция,*
b) $q_1(T,x)=e^{\alpha(x)T}\cdot T^2\cdot k_1(x)<1$,
c) $q_2(T,x)=\dfrac{e^{\alpha(x)T}-1+q_1(T,x)}{1-q_1(T,x)}\gamma(T,x)\cdot||S(x)||T\Big[\alpha(x)T+Tk_1(x)\Big]\le\beta<1$, β *— const.*
Тогда задача (1)–(3) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)$.

Доказательство теоремы проводится аналогично схеме доказательства теоремы 1 из [1]. Условия теоремы одновременно обеспечивают осуществимость и сходимость предлагаемого в сообщении алгоритма нахождения классического решения задачи (1)–(3).

Как видно из утверждения теоремы, основным условием однозначной разрешимости задачи (1)–(3) является обратимость матрицы $Q_1(T,x)$ для всех $x\in[0,\omega]$. Если матрицы $A(t,x)$ и $K_1(t,x)$ являются нулевыми матрицами, а $P_2(x)=I$, $S_2(x)=-I$, то матрица $Q_1(T,x)$ не будет обратимой. В этом случае налагая дополнительные требования, кроме непрерывности, на данные задачи также можно установить достаточные условия существования ее единственного классического решения.

Таким образом, рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial^2u}{\partial t\partial x}=B(t,x)\frac{\partial u}{\partial t}+C(t,x)u+f(t,x)+\int\limits_0^T\Big\{K_2(\tau,x)\frac{\partial u(\tau,x)}{\partial t}+K_3(\tau,x)u(\tau,x)\Big\}d\tau, \qquad (4)$$

с условиями (2) и

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial x}+P_1(x)\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}+P_0(x)u(0,x)-\frac{\partial u(T,x)}{\partial x}+S_1(x)\frac{\partial u(T,x)}{\partial t}+S_0(x)u(T,x)=\varphi(x). \quad (5)$$

Справедливо утверждение

Теорема 2. *Пусть матрица* $Q_2(T,x)=P_0(x)+S_0(x)-\int\limits_0^T[C(\tau,x)+TK_3(\tau,x)]d\tau$ *обратима для всех $x\in[0,\omega]$ и выполнено соотношение*

$$P_1(0)\dot\psi(0)+P_0(0)\psi(0)+S_1(0)\dot\psi(T)=$$

$$=\varphi(0)+\int\limits_0^T\{[B(\tau,0)+TK_2(\tau,0)]\dot\psi(\tau)+[C(\tau,0)+TK_3(\tau,0)]\psi(\tau)+f(\tau,0)\}d\tau.$$

Тогда задача (4), (2), (5) имеет единственное классическое решение $u^*(t,x)$.

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично схеме доказательства теоремы из [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Однозначная разрешимость нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1343–1354.
2. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* О корректной разрешимости нелокальной краевой задачи для систем гиперболических уравнений // Доклады РАН. 2003. Т. 391, № 3. С. 295–297.
3. *Асанова А. Т., Джумабаев Д. С.* Корректная разрешимость нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 3. С. 337–446.
4. *Асанова А. Т.* О полупериодической краевой задаче для системы гиперболических уравнений // Известия НАН РК. Сер. физ.-матем. 2004. № 3. С. 20–25.

УДК 517.925.5

О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© И. В. Асташова

ast@diffiety.ac.ru

Московский государственный университет экономики, статистики и информатики, Москва

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x)\, y^{(i)} + p(x)\, |y|^{k-1} y = 0\,, \tag{1}$$

где $p(x)$ и $a_i(x)$ — непрерывные функции, $n \geq 1$, $k > 1$.

Приводятся достаточные условия существования неколеблющегося решения уравнения (1), критерий существования неколеблющегося решения с ненулевым пределом на бесконечности в случае $p(x) > 0$ и, как следствие, критерий колеблемости всех решений этого уравнения в случае, когда оно имеет четный порядок.

Теорема 1. *Пусть в уравнении (1) функции* $p(x)$, $a_j(x)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условиям*

$$\int_x^\infty x^{n-1}\, |p(x)|\, dx\ < \infty; \tag{2}$$

$$\int_x^\infty x^{n-j-1}\, |a_j(x)|\, dx\ < \infty. \tag{3}$$

Тогда уравнение (1) имеет неколеблющееся решение, стремящееся к ненулевому пределу при $x \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть в уравнении (1) функция* $p(x)$ *положительна, а функции* $a_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условиям (3).*

Тогда следующие условия равносильны:

(i) функция $p(x)$ *удовлетворяет неравенству (2),*

(ii) уравнение (1) имеет заданное в некоторой окрестности $+\infty$ *неколеблющееся решение* $y(x)$, *которое при* $x \to \infty$ *не стремится к нулю.*

Следствие. *Пусть в уравнении (1) четного порядка* n *функция* $p(x)$ *положительна, а функции* $a_j(x)$, $j = 0, \ldots, n-1$, *удовлетворяют условиям (3).*

Тогда следующие условия равносильны:

(i) функция $p(x)$ *удовлетворяет неравенству (2),*

(ii) уравнение (1) имеет заданное в некоторой окрестности $+\infty$ *неколеблющееся решение* $y(x)$.

Замечание 1. Приведенные результаты являются обобщением известного критерия колеблемости Ф. Аткинсона [1], доказанным для уравнения (1) при $a_i(x) = 0$, $n = 2$, $k = 2l-1$, где l — целое число, большее 1, обобщенным И.Т.Кигурадзе на случай произвольного $k > 1$ (см.[2]) и на случай $a_i(x) = 0$ и $n \geq 2$ (см. [3]). Работа [4] содержит обобщение результата Ф.Аткинсона на уравнения второго порядка с нелинейностью более общего вида, а также подробное изложение других имеющихся результатов, связанных с вопросами колеблемости решений уравнений второго порядка. Колеблемость решений уравнений высокого порядка изучалась в работах [3, 5, 6, 8, 9] и в работе [7], содержащей подробную библиографию.

Замечание 2. Доказательство приведенных результатов основано на методах, связанных с представлением линейного дифференциального оператора, порождающего уравнение (1), в виде оператора квазипроизводной в окрестности бесконечности. Подобное разложение использовалось в [10], но на конечном отрезке.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 06-01-00715) и гранта НШ - 2538.2006.1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Atkinson F. V.* On second order nonlinear oscillations // Pacif. J. Math. 1955. V. 5, N 1. P. 643–647.
2. *Кигурадзе И. Т.* Об условиях колеблемости решений уравнения $u'' + a(t)|u|^n \mathrm{sgn} u = 0$ // Čas. pěst. mat. 1962. V. 87, N 4. P. 492–495.
3. *Кигурадзе И. Т.* О колеблемости решений уравнения $d^m/dt^m + a(t)|u|^n \mathrm{sign} u = 0$ // Мат. сборник. 1964. T. 65, № 2. C. 172–187.
4. *Wong J. S. W.* On second-order nonlinear oscillation // Funkcialaj Ekvacioj. 1968. V. 11. P. 207–234.
5. *Lovelady D. L.* On the oscillatory behavior of bounded solutions of higher order differential equations // J. Diff. Equations. 1975. V. 19, N 1. P. 167–175.
6. *Кондратьев В. А., Самовол В. С.* О некоторых асимптотических свойствах решений уравнений типа Эмдена – Фаулера. // Дифф. уравнения. 1981. T. 17 ,№ 4. C. 749–750.
7. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990. 432 с.
8. *Кигурадзе И. Т.* Критерий колеблемости для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифф. уравнения. 1992. T. 28, № 2. C. 207–219.
9. *Astashova I. V.* Application of Dynamical Systems to the Study of Asymptotic Properties of Solutions to Nonlinear Higher-Order Differential Equations // Journal of Mathematical Sciences. Springer Science+Business Media. 2005. V. 126, N 5. P. 1361–1391.
10. *Асташова И. В.* Равномерные оценки положительных решений квазилинейных дифференциальных уравнений // Доклады РАН. 2006. T. 409, № 5. C. 586–590.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 76–77

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© А. О. Бабаян

armenak@web.am

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

Пусть $D = \{z|\ |z| < 1\}$ — единичный круг комплексной плоскости, и $\Gamma = \partial D$ — его граница. В области D рассматривается дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \frac{\partial^4 u}{\partial x^k \partial y^{4-k}}(x,y) = 0, \qquad (x,y) \in D. \tag{1}$$

Здесь A_k ($k = 0, \ldots, 4$) комплексные постоянные, такие, что корни λ_k характеристического уравнения

$$\sum_{k=0}^{4} A_k \lambda^{4-k} = 0 \tag{2}$$

удовлетворяют условию

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \Im\lambda_j > 0, \quad j = 1,2,3, \quad \Im\lambda_4 < 0. \tag{3}$$

Решение u уравнения (1) ищется в классе $C^4(D) \bigcap C^{(1,\alpha)}(D \bigcup \Gamma)$ и на границе Γ удовлетворяет условиям Дирихле:

$$u\Big|_\Gamma = f(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_\Gamma = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{4}$$

где $f \in C^{(1,\alpha)}(\Gamma)$, $g \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ – заданные функции.

Из (3) следует, что уравнение (1) является неправильно эллиптическим. Как было показано в [1], для таких уравнений краевые задачи в классической постановке не являются нетеровыми. В [2] были исследованы краевые задачи для неправильно эллиптических уравнений второго порядка и описаны более узкие классы функций, в которых данные задачи являются нетеровыми. Вопросу однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения четвертого порядка посвящена работа [3]. Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения высокого порядка изучена в [4]. В настоящей работе, используя представление общего решения (1), полученное в [4], исследуется однородная и неоднородная задачи (1), (4).

Для формулировки полученных результатов представим (1) и (4) в комплексной форме, используя операторы $\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Уравнение (1) примет вид:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar z} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\right)^3 \left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu\frac{\partial}{\partial \bar z}\right) u = 0, \quad (x,y) \in D,$$

где $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$ ($\mu = \frac{i-\lambda_1}{i+\lambda_2}$, $\nu = \frac{i+\lambda_4}{i-\lambda_4}$), а граничные условия (4) заменяются эквивалентными условиями:

$$\frac{\partial u}{\partial \bar z}\Big|_\Gamma = F(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_\Gamma = G(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{5}$$

$$u(1,0) = f(1,0).$$

Здесь функции $F \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ и $G \in C^{(\alpha)}(\Gamma)$ однозначно определяются по f и g:

$$F(x,y) = \frac{z}{2}\left(g(x,y) + i\frac{\partial f}{\partial \varphi}(x,y)\right), \quad G(x,y) = \frac{\bar{z}}{2}\left(g(x,y) - i\frac{\partial f}{\partial \varphi}(x,y)\right), \quad z = re^{i\varphi} \in \Gamma.$$

Разложим эти функции в ряд Фурье на Γ и обозначим F_- и G_- компоненты разложений, допускающие аналитическое продолжение в $\mathbf{C}\backslash(D\bigcup\Gamma)$:

$$F(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{-1} f_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \equiv F_-(z) + F_+(z),$$

$$G(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{-1} d_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k \equiv G_-(z) + G_+(z), \quad z = x+iy, \quad (x,y) \in \Gamma.$$

Получены следующие результаты:

Теорема 1. *При $\mu \neq 0$ однородная задача* (1), (4) *не имеет ненулевых решений, а для разрешимости неоднородной задачи необходимо, чтобы функции F и G аналитически продолжались в кольцо $D_0 = \{|\mu| < |z| < 1\}$ и достаточно, чтобы F и G являлись также производными функций, удовлетворяющих условию Гельдера в замкнутой области $\overline{D}_0$.*

Теорема 2. *При $\mu = 0$ однородная задача* (1), (4) *имеет бесконечное множество линейно независимых решений. Общее решение однородной задачи имеет вид:*

$$u_0(x,y) = (1 - z\bar{z})^2 \Phi(z),$$

где Φ произвольная аналитическая в D функция. Неоднородная задача имеет решение тогда и только тогда, когда G_- функционально зависит от F_-. Зависимость выражается в явном виде.

Замечание. Если в (5) $F \equiv 0$ и $G(z) = (z-\mu)^{-2}$ то задача (1), (4) не имеет решения. Этот пример показывает, что достаточные условия в теореме 1 существенно ослабить нельзя.

В работе изучены также другие варианты распределения корней характеристического уравнения (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 204с.
2. *Товмасян Н. Е.* Новые постановки и исследования первой, второй и третьей краевых задач для сильно связанных эллиптических систем двух дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами // Известия АН Арм. ССР, серия математика. 1968. Т. 3, № 6. С. 497–521.
3. *Буряченко Е. А.* О единственности решения задачи Дирихле в круге для дифференциальных уравнений четвертого порядка в вырожденных случаях // Нелинейные граничные задачи. Донецк. 2000. Т. 10. С. 44–90.
4. *Бабаян А. О.* Задача Дирихле для правильно эллиптического уравнения в единичном круге // Известия НАН Армении, серия математика. 2003. Т. 38, № 6. С. 39–48.
5. *Tovmasyan N. E.* Non-Regular Differential Equations and Calculations of Electromagnetic Fields. World Scientific, Singapore, 1998. 235 p.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 78–79

УДК 517.5

УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО СЛУЧАЯ

© Я. С. Бадретдинов

jsbadr@rambler.ru

Бирская государственная социально-педагогическая академия, Бирск

В настоящее время теория пространства Минковского (M) функционирует в геометрическом представлении. В качестве исходного положения в ней используется открытое Пуанкаре условие инвариантности квадрата интервала [1, 2]. Одну из главных задач в теории пространства представляет собой нахождение всех преобразований Лоренца. При решении этой задачи кроме геометрической теории пространства, как известно [3], используются теория групп, алгебра Ли и алгебра Клиффорда. Другими словами, эту задачу в рамках замкнутой геометрической теории пространства не удается решить. Кроме того, такие операции, как трансляции, повороты, отражения и др., в геометрической теории считается априори заданными. Таким образом, существует, на наш взгляд, объективная необходимость в построении другой теории пространства, в рамках которой удается найти все преобразования Лоренца и на этой основе найти все геометрические и физические следствия в отношении свойств пространства. В этой работе строится алгебраическая теория пространства применительно к двумерному пространству M . В качестве исходного положения в ней используются уравнения, найденные из условия инвариантности волнового уравнения электродинамики. Эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial x_0}{\partial x_0'}\right)^2-\left(\frac{\partial x_0}{\partial x_1'}\right)^2=1,\\ \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}\right)^2-\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_0'}\right)^2=1,\\ \frac{\partial x_0}{\partial x_0'}\frac{\partial x_1}{\partial x_0'}-\frac{\partial x_0}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1}{\partial x_1'}=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_0}{\partial x_0'^2}-\frac{\partial^2 x_0}{\partial x_1'^2}=0,\\ \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_0'^2}-\frac{\partial^2 x_1}{\partial x_1'^2}=0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где $x_0=ct, x_1$ — галилеевы координаты точки в двумерном пространстве M в инерциальной системе отсчета $S; x_0'ct', x_1'$ — соответственно в S'; c — электродинамическая постоянная. Уравнения (1) и (2) соответствуют преобразованию координат при переходе от S' к S. Аналогичные уравнения можно получить при преобразованиях координат, соответствующих переходу от S к S'.

Уравнения (1) и (2) анализируются с точки зрения их инвариантности относительно преобразований координат $x_i'=x_i'(x_j'')$. В отношении уравнений (1) получен следующий результат: преобразования координат $x_i'=x_i'(x_j'')$ подчиняются уравнениям, подобным уравнениям (1). Причем инвариантность каждого из трех уравнений (1) имеет место при выполнении совокупности трех уравнений типа (1). Отсюда следует вывод: уравнения (1) получают статус физического закона, отражающего сущность пространства M в алгебраическом представлении. Что касается уравнений (2), то они подвергались обратным преобразованиям таким образом, чтобы из них получить уравнения вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_0'}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 x_0'}{\partial x_1^2}=0,\\ \frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 x_1'}{\partial x_1^2}=0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Анализ показал, что из (2) можно получить (3) и обратно — из (3) можно получить (2) только в тривиальном случае, когда

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial x'_k \partial x'_l} = 0,$$

или

$$\frac{\partial x_i}{\partial x'_l} = \mathrm{const}. \tag{4}$$

Из (4) следует вывод: в алгебраической теории пространства, в отличие от геометрической теории, линейность преобразований координат не постулируется, а выводится как следствие. Тогда уравнения (1) представляют собой систему алгебраических уравнений, что и является одним из доводов, почему данная теория пространства называется алгебраической. Затем эта теория строится в форме решения двух обратных задач. Обратная задача первого типа: найти все решения систем трех уравнений (1) для одного варианта. Обратная задача второго типа: найти все варианты решений систем уравнений (1). Найдено всего восемь вариантов решений для действительных переменных: четыре варианта для случая $\Delta_1 = +1$ и четыре варианта для случая $\Delta_2 = -1$. Эти решения одновременно дают все преобразования Лоренца для действительных переменных в двумерном случае, из которых как следствие выводятся важнейшие геометрические следствия и связанные с ними непрерывные и дискретные свойства симметрии двумерного пространства M.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Poincare H.* Sur la dynamique de l'electron // Comptes Rendus. 1905. V. 140. P. 1504.
2. *Poincare H.* Sur la dynamique de l'electron // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906. V. XXI. P. 129.
3. *Боголюбов Н. Н., Логунов А. А., Оксак А. И., Тодоров И. Т.* Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 616 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 80–81

УДК 517.9

ОБ ИНДЕКСЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© С. Байзаев*, Э. М. Мухамадиев**

* baisat54@rambler.ru, ** muhamerg41@mail.vstu.edu.ru

* *Таджикский государственный университет права, бизнеса и политики, Худжанд, Таджикистан;*
** *Вологодский государственный технический университет, Вологда*

Теория для обобщенных систем Коши – Римана вида

$$Lw \equiv w_{\bar z} + a(z)w + b(z)\bar w = 0, \tag{1}$$

где $z = x+iy$, в случае, когда коэффициенты $a(z)$ и $b(z)$ принадлежат пространству $L_{p,2}(C)$, $p > 2$, разработана И. Н. Векуа [1], Л. Берсом и их последователями. В докладе изучается [1, 2] система с ограниченными на комплексной плоскости коэффициентами, принадлежащими пространству Гельдера C_α функций, ограниченных и равномерно непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$. В этих условиях оператор L действует из пространства C^1_α в пространство C_α и является непрерывным. Здесь C^1_α — пространство таких фнкций w из C_α, для которых частные производные w_x, w_y также принадлежат C_α. Функцию $d \in C_\alpha$ назовем слабо осциллирующей на бесконечности, если имеет мест равенство

$$\lim_{z\to\infty} \max_{|z-\zeta|\le 1} |d(z) - d(\zeta)| = 0.$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты a, b оператора L слабо осциллируют на бесконечности. Тогда оператор $L : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ является нетеровым тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$\varepsilon_0 \equiv \liminf_{z\to\infty} (|b(z)| - |a(z)|) > 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть коэффициенты a, b оператора L слабо осциллируют на бесконечности и выполнено условие (2). Тогда решение уравнения (1), принадлежащее пространству C^1_α, убывает на бесконечности как $\exp(-\varepsilon|z|)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.*

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 2, коэффициенты a, b бесконечно дифференцируемы, то решение уравнения (1), принадлежащее пространству S' медленно растущих обобщенных функций, принадлежит пространству основных быстро убывающих функций S.*

При выполнении условия (2) существует такое $R_0 > 0$, что для значений $R > R_0$ определена целочисленная характеристика $\gamma(b,R) = (\theta(R,2\pi) - \theta(R,0))/2\pi$, где $\theta(R,\varphi)$ — одна из непрерывных ветвей функции $\operatorname{Arg} b(R\exp(i\varphi))$. Значение $\gamma(b,R)$ не зависит от R и это общее значение $\gamma(b)$ назовем индексом Коши функции b на бесконечности.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты уравнения (1) слабо осциллируют на бесконечности и выполнено условие (2). Тогда нетеров индекс $\operatorname{ind} L$ оператора $L : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ совпадает с идексом Коши $\gamma(b)$ функции b на бесконечности: $\operatorname{ind} L = \gamma(b)$.*

Рассмотрим более общую равномерно эллиптическую систему

$$Mu \equiv u_x + A(x,y)u_y + B(x,y)u = 0,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

и

$$\inf_{(x,y)\in R^2,\ \xi^2+\eta^2=1} |\det(\xi\cdot I+\eta\cdot A)|>0.$$

Теперь предположим, что C_α обозначает пространства вектор-функций $u : R^2 \to R^2$, ограниченных и равномерно непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0,1)$, а C^1_α — это пространство вектор-функций u, удовлетворяющих условиям u, u_x, $u_y \in C_\alpha$.

Теорема 5. *Пусть столбцы матриц A и B принадлежат пространствам C^1_α и C_α соответственно и слабо осциллируют на бесконечности. Тогда оператор $M : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ является нетеровым тогда и только тогда, когда имеет место неравенство*

$$\limsup_{x^2+y^2\to\infty} \det B(x,y)<0. \tag{3}$$

При выполнении условия (3) определен индекс Коши функции $b(z)=b_{11}(x,y)+ib_{21}(x,y)$, $z=x+iy$ на бесконачности. Из условия равномерной эллиптичности оператора M следует, что функция $a_{21}(x,y)$ не обращается в нуль. Следовательно, определен знак $\operatorname{sign} a_{21}(0,0)$.

Теорема 6. *Пусть коэффициенты уравнения (1) слабо осциллируют на бесконечности и выполнено условие (3). Тогда нетеров индекс $\operatorname{ind} M$ оператора $M : C^1_\alpha \mapsto C_\alpha$ совпадает с идексом Коши $\gamma(b)$ функции b, умноженном на знак $\operatorname{sign} a_{21}(0,0)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
2. *Мухамадиев Э. М., Байзаев С.* // ДАН СССР. 1986. Т. 287, № 2. С. 280–283.
3. *Мухамадиев Э. М., Байзаев С.* // ДАН Тадж. ССР. 1987. Т. 30, № 4. С. 207–211.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 82–83

УДК 517.956.6

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© У. И. Балтаева

umidabaltaeva@rambler.ru

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

Теория краевых задач для нагруженных уравнений параболического, гиперболо-параболического и эллиптико-параболического типов исследована в работах Нахушева А. М., Елеева В. А., Исламова Б., Курьязова Д., Козиева В. М. и др. [1–4].

Краевые задачи для нагруженного уравнения третьего порядка смешанного типа изучены сравнительно мало, отметим лишь работы [3, 4].

В настоящей работе исследуется краевая задача для нагруженного уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором вида

$$0 = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}(L_2 u) - \mu u(x,0), \ y > 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(L_1 x) - \mu u(x,0), \ y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $L_2 u = u_{xx} - u_y - \lambda u$, $L_1 u = u_{xx} - u_{yy} - \lambda u$; λ, μ — действительные постоянные, причем $\lambda \neq 0$, в области D, ограниченной отрезками AB, BB_0, B_0A_0, A_0A прямых $y = 0$, $x = 1$, $y = h$, $x = 0$ при $y > 0$ и характеристиками:

$$AC: \ x + y = 0, \quad BC: \ x - y = 1$$

уравнения (1) при $y < 0$.

Через D_1 и D_2 обозначим параболическую и гиперболическую части смешанной области D соответственно, и пусть

$$I_1 = \{(x,y); x = 0, 0 < y < h\}, \quad I_2 = \{(x,y) : y = 0, 0 < x < 1\}.$$

Определение. Решение уравнения (1) будем называть *регулярным*, если функция $u(x,y)$ обладает непрерывными производными, входящими в оператор L_i ($i = 1, 2$), и функция $L_i u$ имеет непрерывную производную по x.

Задача C. Требуется найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:
1) $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^1(D)$,
2) $u_x(x,y) \in C\left(\overline{AA_0} \cup \overline{AC}\right)$, $u_y(x,y) \in C\left(\overline{AC}\right)$,
3) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$,
4) $u(x,y)$ удовлетворяет условиям:

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y), \quad u|_{x=1} = \varphi_2(y), \quad u_x|_{x=0} = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le h,$$

$$u|_{AC} = \psi_1(y), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ и $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \varphi_j(y) \in C[0;h] \cap C^1(0;h), \quad j = \overline{1,3},$$

$$\psi_1(x) \in C^1\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^3\left(0;\frac{1}{2}\right), \quad \psi_2(x) \in C\left[0;\frac{1}{2}\right] \cap C^2\left(0;\frac{1}{2}\right).$$

Имеет место

Лемма. *Любое регулярное решение уравнения (1) (при* $y \neq 0$ *) представляется в виде*

$$u(x,y) = v(x,y) + w(x),$$

где $v(x,y)$ *— решение уравнения* $\dfrac{\partial}{\partial x}(L_2 v) = 0$ *при* $y > 0$, *а при* $y < 0$ *—* $\dfrac{\partial}{\partial x}(L_1 v) = 0$, $w(x)$ *— решение следующего обыкновенного дифференциального уравнения*

$$w'''(x) - \lambda w'(x) - \mu w(x) = \mu v(x,0).$$

С помощью леммы задача C эквивалентно редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода со сдвигом. С помощью теории интегральных уравнений [5, 6] доказывается однозначная разрешимость задачи C.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 1.
2. *Казиев В. М.* // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 1. С. 181–185.
3. *Елеев В. А.* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 2.
4. *Исломов Б., Курьязов Д. М.* // Узб. матем. журнал. 2000. № 2.
5. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 204 с.
6. *Краснов И. Л.* Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976. 215 с.

УДК 517.95+533

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ТЕПЛОВЫЕ ВОЛНЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© С. П. Баутин

SBautin@math.usart.ru

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

Теорема 1. *Задача с заданным краевым режимом для нелинейного уравнения теплопроводности*

$$\begin{aligned} &u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2/\sigma\ , \quad \sigma = const > 0\ , \\ &u(t,\ \overrightarrow{x})|_{x_1=a^0(x_2,\dots,x_n)} = f(t,x_2,\dots,x_n)\ , \end{aligned} \tag{1}$$

в случае аналитичности функций $a^o(x_2,\dots,x_n)$, $f(t,x_2,\dots,x_n)$ *в некоторой окрестности точки* $(t=0, x_2=x_2^o,\dots,x_n=x_n^o)$, *при выполнении условий*

$$f(t,x_2,\dots,x_n)|_{t=0} \equiv 0\ , \quad f_t(t,x_2,\dots,x_n)|_{t=0} = f_1(x_2,\dots,x_n) > 0$$

и при конкретном выборе направления движения тепловой волны имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки $(t=0,\ \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}^{\,o})$, *где* $x_1^o = a^o(x_2^o,\dots,x_n^o)$ [1–3].

Решение задачи (1) описывает процесс распространения с конечной скоростью по холодному фону тепловой волны, порожденной заданным краевым режимом температуры. Также решение задачи (1) описывает процесс фильтрации газа в пористом грунте, сопровождающийся распространением с конечной скоростью фронта фильтрации и определяемым заданным режимом давления на конкретной поверхности в пласте.

Теорема 2. *При заданном фронте тепловой волны:* $x = a(t)$, $a(0) \neq 0$ *— система уравнений газовой динамики*

$$\begin{cases} \rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ u_t + uu_x + \dfrac{1}{\gamma\rho}\left[T\rho_x + \left(\rho + \sigma_1 T^3\right)T_x\right] = 0, \\ \left(\rho + \sigma_2 T^3\right)(T_t + uT_x) + (\gamma-1)T\left(\rho + \sigma_1 T^3\right)u_x = \kappa_0 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T^3}{\rho}\dfrac{\partial T}{\partial x}\right), \end{cases} \tag{2}$$

описывающая течения теплопроводного невязкого газа с уравнениями состояния

$$p = R\rho T + \frac{1}{3}\,\sigma T^4\ , \quad e = c_v T + \sigma\frac{T^4}{\rho}$$

имеет единственное решение в виде сходящегося ряда

$$\mathbf{W} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{W}_k(t)\frac{\xi^k}{k!}; \quad \mathbf{W} = (\rho,u,T); \quad \xi = \sqrt[3]{x - a(t)},$$

непрерывно примыкающее через заданный фронт $x = a(t)$ *к однородному холодному покоящемуся газу с параметрами*

$$\rho(t,x) = 1, \quad u(t,x) = 0, \quad T(t,x) = 0.$$

При этом тепловой поток на фронте $x = a(t)$ *непрерывен – равен нулю с обеих сторон* [4].

Здесь t — время; x — пространственная координата; ρ — плотность; u — скорость газа; T — температура p — давление; e — внутренняя энергия; R , σ , c_v , σ_1 , σ_2 , κ_0 — положительные постоянные.

Приведенные уравнения состояния и коэффициент теплопроводности учитывают равновесное излучение.

Исследование поддержано РФФИ, проект 04-01-00205.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин С. П.* Тепловая волна, порожденная заданным краевым режимом // Доклады Академии наук. 2003. Т. 391, № 3. С. 327–330.
2. *Баутин С. П.* Аналитическая тепловая волна. Москва: Физматлит, 2003. 88 с.
3. *Баутин С. П., Елисеев А. А.* Многомерная аналитическая тепловая волна, определяемая краевым режимом // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 8. С. 1052–1062.
4. *Баутин С. П., Садов А. П.* Одномерная тепловая волна в невязком газе // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 5. С. 11–20.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 86–87

УДК 517.946

H-ОТОБРАЖЕНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЕЙ

© Акр. Х. Бегматов *, З. Х. Очилов

* akrambegmatov@mail.ru

Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Самарканд, Узбекистан

В настоящей работе рассматриваются h-конформные отображения областей, ограниченных жордановыми кривыми (см. [1]). Мы будем, следуя [2], называть h-конформные отображения просто *h-отображениями.*

Пусть D — область, ограниченная кривой C, состоящей из четырех частей: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$:

$$C_1 = \{(x,y) : y = f_1(x),\ x \in [0,1],\ f_1(0) = \frac{1}{2},\ f_1(1) = 1\},$$

$$C_2 = \{(x,y) : y = f_2(x),\ x \in [0,1],\ f_2(0) = 0,\ f_1(1) = 1\},$$

$$C_3 = \{(x,y) : y = f_3(x),\ x \in [-1,0],\ f_3(0) = 0,\ f_1(-1) = 1\},$$

$$C_4 = \{(x,y) : y = f_4(x),\ x \in [-1,0],\ f_4(-1) = 0,\ f_1(0) = \frac{1}{2}\}.$$

Все функции $f_k(x)$ монотонны и непрерывны.

Область D имеет вид: $D = \{(x,y) : f_1^* < f_2^*, x \in [-1,1]\}$, где функции $f_k^*(x)$ $(k = 1,2)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $f_1^*(x) = f_2^*(x), -1 \le x \le 1;$
2) $f_k^*(-x) = f_k^*(x);$
3) $f_k^*(-x) = f_k^*(x) = 1, f_2^*(0) = 0, f_1^*(0) = \frac{1}{2}.$

Рассмотрим h-отображения, осуществляемые функциями $u = \varphi(x)$, $v = \varphi(y)$. Обратными к ним будут функции $x = \varphi_1(u)$, $y = \psi_1(v)$. h-отображения, которые осуществляются функциями $u = \varphi(x)$ и $v = \varphi(y)$, переводят область D в область $D_1 = \{(u,v) : F_1(u) < v < F_2(u)\}$. Здесь функции $F_k(u)$, $k = 1,2$, определяются следующим образом: $v = \psi(y) = \psi(f_k^*(x)) = \psi \ \ (f_k^*(\varphi(u)) = F_i(u)$.

Определенное таким образом отображение переводит область D_0 в область плоскости (u_1, v_1), ограниченную углом и кривой $v_1 = F_i(u)$. Рассмотрим теперь h-отображение, переводящее область D_0 в область D_1 плоскости (u_1, v_1), ограниченную двумя углами:

$$F_1(u_1) = |u_1|, \quad u_1 \in [-1,1]$$

$$F_2(u_1) = \frac{1}{2}|u_1| + \frac{1}{2}, \quad u_1 \in [-1,1].$$

Пусть это отображение определяется функциями $u_1 = \varphi_2(u)$ и $v_1 = \psi_2(v)$. Из того, что отображение переводит область D_0 в D_1 следует, что эти функции связаны соотношениями

$$v_1 = \psi_2[f_i(u)] = \psi_2[f_i[\varphi_2(u_1)]] = F_i(u_i),$$

$$\psi_2[|\varphi_2(u_1)| = |u|],$$

$$|\varphi_2(u)| = \psi_2(|u|),$$

$$\psi_2\{f_i[\varphi_2(u_1)] = F_i(u_i)\},$$

$$f[\varphi_2(u_1)] = \psi_2[F_i(u_1)].$$

В качестве функции $F_2(u_1)$ можно взять функцию $F_2(u_1)$, $u \in [0,1]$, а в качестве функции $F_2(u)$ — функцию $F_1(u) = \frac{1}{2}(u) + \frac{1}{2}$. Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Для любой области D плоскости (x,y), для которой функция $f_1^*(x)$ удовлетворяет неравенству (2), существует h-отображение области D на область D_1 плоскости (u_1,v_1), ограниченной кривыми $v_1 = |u_1|$ и $v_2 = \frac{1}{2}|u_2| + \frac{1}{2}$.*

И, тем самым, получена теорема о возможности h-отображений на каноническую область для одного класса ограниченных областей, симметричных по отношению к оси y.

Далее в работе рассмотрена обратная задача для областей, удовлетворяющих условиям приведенной выше теоремы. Нами сформулирована обратная задача и доказана теорема о том, что решение сформулированной обратной задачи единственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М: Наука, 1977.
2. *Лаврентьев М. М.* Математические задачи томографии и гиперболические отображения // Сиб. мат. журнал. 2001. Т. 42, № 5. С. 1094–1105.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 88–89

УДК 517.95

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС В НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

© В. С. Белоносов

bvs@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим абстрактное нелинейное гиперболическое уравнение

$$\ddot{v} = -A^2 v + \varepsilon[B(\omega t)v + \Pi\langle v\rangle]. \tag{1}$$

Здесь $v(t)$ — функция со значениями в гильбертовом пространстве H; A — линейный самосопряженный положительный и, вообще говоря, неограниченный оператор в H, имеющий вполне непрерывный обратный; ε — малый параметр; $B(\tau)$ — 2π-периодическая функция со значениями в множестве линейных ограниченных операторов; $\Pi\langle v\rangle \equiv \Pi(v,v)$, где $\Pi(u,v)$ — билинейный ограниченный оператор, моделирующий квадратичную нелинейность. Уравнения такого типа возникают во многих вопросах механики и физики, в частности, при описании гидродинамики водонефтяных слоистых систем [1].

При $\varepsilon = 0$ общее решение уравнения (1) представимо суммой $v(t) = e^{iAt}x + e^{-iAt}y$ с произвольными постоянными амплитудами x и y из H. Если $\varepsilon \neq 0$, то решения (1) имеют такой же вид, но x, y уже являются функциями времени t. Нас интересует динамика амплитуд x и y, когда частота ω возмущения $B(\omega t)$ близка к одной из так называемых резонансных частот $(\lambda_j \pm \lambda_k)/m$, где λ_j и λ_k — произвольные собственные значения оператора A, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. В этом случае амплитуды x и y решений соответствующего линеаризованного уравнения могут экспоненциально расти. Это явление называется параметрическим резонансом, систематическое исследование которого в самых разнообразных ситуациях продолжается уже более ста лет (см., например, [2] и [3]). Численное исследование конкретных примеров показывает, что для нелинейных уравнений типа (1) поведение амплитуд гораздо сложнее: они могут быть близки к периодическим функциям, существенным образом зависящим от выбора начальных условий. Цель настоящей работы — предложить простые эффективные способы приближенного описания $x(t)$ и $y(t)$ в нелинейном случае.

Преобразуем исходное уравнение к системе первого порядка относительно неизвестных $x = e^{-iAt}[v + (iA)^{-1}\dot{v}]/2$, $y = e^{iAt}[v - (iA)^{-1}\dot{v}]/2$. Полагая

$$z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}, \quad E : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to x + y, \quad G : x \to \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

придем к уравнению

$$\dot{z} = \frac{\varepsilon}{2}(i\tilde{A})^{-1}e^{-i\tilde{A}t}G[B(\omega t)Ee^{i\tilde{A}t}z + \Pi\langle Ee^{i\tilde{A}t}z\rangle]$$

в пространстве $H^2 = H \otimes H$. Методом Крылова—Боголюбова [4] найдем асимптотическое разложение $z \approx \xi + \varepsilon\Phi(t,\xi) + \varepsilon^2\Psi(t,\xi)$ с точностью до второго порядка по малому параметру. Не останавливаясь на технических деталях, сразу приведем окончательный результат. Обозначим через P_j спектральные проекторы, отвечающие собственным значениям λ_j $(j = 1, 2, \dots)$ оператора A. Понятно, что собственными числами оператора $\tilde{A}$ будут μ_j, $(j = \pm 1, \pm 2, \dots)$, где $\mu_j = \lambda_j$ при $j > 0$ и $\mu_j = -\lambda_{-j}$ при $j < 0$, а отвечающие им спектральные проекторы равны соответственно

$$\tilde{P}_j = \begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ j > 0; \quad \tilde{P}_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{-j} \end{pmatrix},\ j < 0.$$

Пусть $B(\tau) = \sum_{m\neq 0} B_m e^{im\tau}$, $B_m^{jk} = \tilde{P}_j G B_m E \tilde{P}_k$, $\Pi_j^{kl}(\xi,\eta) = \tilde{P}_j G \Pi(E\tilde{P}_k\xi, E\tilde{P}_l\eta)$. Тогда в большинстве практически важных ситуаций, исключая некоторые вырожденные случаи, функция $\xi(t)$ удовлетворит уравнению

$$\dot{\xi} = \frac{\varepsilon}{2}\sum \frac{1}{i\mu_j} B_m^{jk}\xi - \frac{\varepsilon^2}{4}\sum \frac{B_{m-n}^{jl} B_n^{lk}\xi}{i\mu_j\mu_l(\mu_k-\mu_l+n\omega)} - \frac{\varepsilon^2}{2}\sum \frac{\Pi_j^{kl}(\xi,\Pi_l^{pq}(\xi,\xi))}{i\mu_j\mu_l(\mu_p+\mu_q-\mu_l)}. \qquad (2)$$

Здесь первая сумма распространяется на все целые j , k , m , для которых $\mu_j - \mu_k = m\omega$; вторая сумма — на такие j , k , l , m , n , что $\mu_j - \mu_k = m\omega$, $\mu_l - \mu_k \neq n\omega$; наконец, третья сумма — на все j , k , l , p , q , для которых $\mu_p + \mu_q \neq \mu_l$, $\mu_p + \mu_q + \mu_k = \mu_j$.

Обозначим через $2D\xi$ первую сумму в правой части уравнения (2) и предположим, что оператор D не равен нулю, а равенство $\mu_j - \mu_k = m\omega$ возможно лишь для конечного множества наборов j , k , m . Разложим H^2 в сумму инвариантных относительно D подпространств H_1 и H_2 , где H_1 конечномерно, а $H_2 \subseteq \ker D$. Тогда уравнение (2) сведется к системе вида

$$\dot{\xi_1} = \varepsilon D\xi_1 + \varepsilon^2 f(\xi_1,\xi_2), \quad \dot{\xi_2} = \varepsilon^2 g(\xi_1,\xi_2), \text{ где } \xi_j \in H_j.$$

Структура отображений f и g такова, что существует замена переменных $\xi_1 = \zeta_1 + \varepsilon\varphi(\zeta_1,\zeta_2)$, $\xi_2 = \zeta_2 + \varepsilon\psi(\zeta_1,\zeta_2)$, приводящая эту систему с точностью до слагаемых выше второго порядка по ε к треугольной форме

$$\dot{\zeta_1} = \varepsilon D\zeta_1 + \varepsilon^2 \tilde{f}(\zeta_1,\zeta_2), \quad \dot{\zeta_2} = \varepsilon^2 \tilde{g}(\zeta_2). \qquad (3)$$

Решение второго из уравнений (3) меняется очень медленно. С высокой степенью точности можно считать, что на интервале времени порядка ε^{-2} функция $\zeta_2(t)$ постоянна и равна $\zeta_2(0)$. Подставив $\zeta_2 \equiv \zeta_2(0)$ в первое из уравнений (3), придем к динамической системе в конечномерном пространстве H_1 относительно вектора ζ_1 . Решение этой динамической системы в конечном счете и определяет поведение исходной функции $v(t)$. В частности, можно оценить нормы амплитуд колебаний в системе (1) в зависимости от начальных условий.

Не все детали описанного подхода на сегодняшний день строго обоснованы, однако численные эксперименты показывают его эффективность во многих практических ситуациях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06–08–00386), Президиума РАН (программа № 14, проект № 115), Сибирского отделения РАН (проекты 1.6 и 42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В.* Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 2. С. 37–70.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
3. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Государственное изд-во физико-математической литературы, 1958.

УДК 517.946

О МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ

© А. Б. Бержанов, Е. К. Курмангалиев *

* Ergali_kk@mail.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Рассмотрим систему квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка вида

$$D_\varepsilon^x x \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi} + b(t,\varphi,\psi,x,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\psi}\right) x = P(t,\varphi,\psi)x + \mu Q(t,\varphi,\psi,x,\mu), \qquad (1)$$

где $x = x(t,\varphi,\psi)$ — искомая вектор-функция; x, Q — счетномерные векторы-столбцы; φ, a, ψ, b — счетномерные векторы; $P(t,\varphi,\psi) = \{p_{ij}(t,\varphi,\psi)\}$, $i,j = \overline{1,\infty}$ — бесконечная матрица; $a \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi}$, $b \cdot \frac{\partial}{\partial\psi}$ — скалярные произведения счетномерных векторов a, b и символических векторов $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1}, \frac{\partial}{\partial\varphi_2}, \dots\right)$, $\frac{\partial}{\partial\psi} = \left(\frac{\partial}{\partial\psi_1}, \frac{\partial}{\partial\psi_2}, \dots\right)$; ε, μ — малые параметры.

Пусть $t \in R = (-\infty,+\infty)$, φ , $\psi \in R^\infty = \{\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots) : \ \|\xi\| = \sup\,[|\xi_1|,|\xi_2|,\dots] < \infty\}$, $x \in R_\Delta = \{x = (x_1,x_2,\dots) : \|x\| \le \Delta\} \subset R^\infty$, $\varepsilon \in E_0 = [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in M_0 = [0,\mu_0]$, где Δ , ε_0 , μ_0 — некоторые положительные постоянные.

Вектор-функцию $f(t,\varphi,\psi) \in C(\Omega, R_\Delta)$, где $\Omega = R \times R^\infty \times R^\infty$, назовем многопериодической по части переменных функцией, если она $(\theta,\omega) \in R \times R^\infty$ — периодична по t , φ равномерно относительно $\psi \in R^\infty$.

Известно, что классическое решение $x(t,\varphi,\psi)$ системы (1) является непрерывно дифференцируемым $(x \in C^1)$. Если решение $x(t,\varphi,\psi)$ обладает меньшей гладкостью, но в каком то смысле удовлетворяет системе (1), то оно называется обобщенным решением системы (1).

В данной работе по методике [1], строится многопериодическое по части переменных решение системы (1) в широком смысле по Фридрихсу $x \in C(\Omega)$ [2].

Отметим, что решение в широком смысле системы (1) не требует гладкость от функции a , b , Q и матрицы P . Если эти входные данные обладают нужной гладкостью, то построенное решение в широком смысле является и классическим решением системы (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки МОН РК (Грант N 1.6-11(1.6.1-11)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Умбетжанов Д. У.* Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. Алма-Ата: Наука, 1979. 211 с.
2. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений. М: Наука, 1978. 607 с.

УДК 517.946

О МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© А. Б. Бержанов, Ж. А. Сартабанов

Ergali_kk@mail.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Рассматривается система в частных производных первого порядка вида

$$\begin{aligned} D_1x &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a^{(1)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi} + b^{(1)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\psi}\right)x = P_1(t,\varphi,\psi)x + \mu F_1(t,\varphi,\psi,z,\mu), \\ D_2y &\equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a^{(2)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\varphi} + b^{(2)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial\psi}\right)y = P_2(t,\varphi,\psi)y + \mu F_2(t,\varphi,\psi,z,\mu), \end{aligned} \tag{1}$$

где x, F_1 и y, F_2 — соответственно n- и l-векторы-столбцы; $z = \{x,y\}$ — $n+l$-вектор-столбец; φ, $a^{(i)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon) = a^{(0)} + \varepsilon a_1^{(i)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon)$ — m-векторы; ψ, $b^{(i)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon) = b^{(0)} + \varepsilon b_1^{(i)}(t,\varphi,\psi,z,\varepsilon)$ — k-векторы (i=1,2); $P_1(t,\varphi,\psi)$ и $P_2(t,\varphi,\psi)$ — квадратные матрицы размерностей соответственно n и l; $a^{(i)}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $b^{(i)}\frac{\partial}{\partial\psi}$ — скалярные произведения m,k-мерных векторов $a^{(i)}, b^{(i)}$ и символических векторов $\frac{\partial}{\partial\varphi} = \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\varphi_m}\right)$, $\frac{\partial}{\partial\psi} = \left(\frac{\partial}{\partial\psi_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial\psi_k}\right)$; ε, μ — положительные параметры.

Пусть $t \in R$, $\varphi \in R^m = \{\varphi : \|\varphi\| < \infty\}$, $\psi \in R^k = \{\psi : \|\psi\| < \infty\}$, $x \in R_{\Delta_1} = \{x : \|x\| \le \Delta_1\} \subset R^n$, $y \in R_{\Delta_2} = \{y : \|y\| \le \Delta_2\} \subset R^l$, $\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]$, $\mu \in [0,\mu_0]$.

Вектор-функцию $\Phi(t,\varphi,\psi) \in R^{n+l}$, определенную и непрерывную в R^{1+m+k}, назовем многопериодической по части переменных, если она многопериодична по t, φ с вектор-периодом (θ,ω) равномерно относительно $\psi \in R^k$. Очевидно, что для такой функции $\Phi(t,\varphi,\psi)$ при любых $(t,\varphi,\psi) \in R^{1+m+k}$ имеет место равенство

$$\Phi(t+\theta, \varphi + q\overset{\wedge}{\omega}, \psi) - \Phi(t,\varphi,\psi) = 0,$$

где $q\overset{\wedge}{\omega} = (q_1\omega_1,\ldots,q_m\omega_m)$, $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_m)$, $q = (q_1,\ldots,q_m)$ — целочисленный вектор.

Поставим задачу: выяснить достаточные условия существования единственного многопериодического по части переменных решения системы (1).

Пусть B — множество всех $n+l$-мерных многопериодических по части переменных функций, а $B_{n+l}(\Delta,\delta) \subset B$ — класс многопериодических по части переменных $n+l$-мерных вектор-функций, с вектор-периодом (θ,ω), имеющих ограниченные и равномерно непрерывные частные производные первого порядка по координатам векторов $\varphi \in R^m$, $\psi \in R^k$ и удовлетворяющих условиям

$$\begin{gathered} \|\Phi(t,\varphi,\psi)\| \le \Delta, \\ \|\Phi(t,\overline{\varphi},\overline{\psi}) - \Phi(t,\varphi,\psi)\| \le \delta(\|\varphi\| + \|\psi\|). \end{gathered}$$

Доказывается, что при достаточно малых значениях параметров ε и μ и при выполнении условий, аналогичных [1], система (1) допускает единственное многопериодическое по части переменных решение из класса $B_{n+l}(\Delta,\delta)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда науки МОН РК (Грант N 1.6-11(1.6.1-11)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Умбетжанов Д. У.* О почти многопериодическом решении одной нелинейной системы уравнений в частных производных // Изв. АН КазССР. Сер. физ-мат. 1986. № 1. С. 43–47.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 92–93

УДК 519.635.4

ОБ ОДНОЙ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© М. Х. Бештоков

beshtokov_murat@rambler.ru

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик

В цилиндре $Q_T = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ \ 0 < t \le T\}$ рассмотрим краевую задачу с нелокальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(\eta(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - q(x,t)u + f(x,t),$$
$$0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \quad (1)$$

$$u(0,t) = \alpha(t)u(1,t) + \int\limits_0^t h(t,\tau)u(1,\tau)d\tau, \quad 0 \le t \le T, \quad (2)$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \quad (3)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \le x \le 1, \quad (4)$$

где $0 < c_0 \le \eta(x,t) \le c_1$, $|k(x,t)|, |k_t(x,t)|, |\eta_t(x,t)|, |r(x,t)|, |q(x,t)|, |h(t,t)|, |h_t(t,t)| \le c_2$, $|\alpha(t)| \le \alpha_0 < 1 \ \ \forall t \in [0,T]$.

Будем считать, что заданные в уравнении (1) и граничных условиях (2)–(4) коэффициенты удовлетворяют необходимым, по ходу изложения, условиям гладкости.

Предполагая существование регулярного решения дифференциальной задачи (1)–(4), получим априорную оценку для ее решения. Для получения априорной оценки воспользуемся методом энергетических неравенств. Для этого уравнение (1) умножим скалярно на u:

$$(u_t, u) = ((ku_x)_x, u) + ((\eta u_x)_{xt}, u) + (ru_x, u) - (qu, u) + (f, u), \quad (5)$$

где $(u,v) = \int\limits_0^1 uv dx, \quad \|u\|_0^2 = \int\limits_0^1 u^2 dx$.

После некоторых преобразований из (5) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 \eta u_x^2 dx \le M_1\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + 2\|u_t\|_0^2 + 3\|f\|_0^2, \quad (6)$$

где M_1 — положительное число.

Оценим в (6) $\|u_t\|_0^2$, для чего уравнение (1) умножим скалярно на u_t:

$$(u_t, u_t) = ((ku_x)_x, u_t) + ((\eta u_x)_{xt}, u_t) + (ru_x, u_t) - (qu, u_t) + (f, u_t). \quad (7)$$

Выбирая $\alpha_0 = \min\left(\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{c_0}}{6}\right)$, из (7) получаем

$$\|u_t\|_0^2 \le M_2\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + M_3\int\limits_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau + M_4\|f\|_0^2, \tag{8}$$

где M_2, M_3, M_4 — положительные числа.

Учитывая (8), из (6) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|_0^2 + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^1 \eta u_x^2 dx \le M_5\left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right) + M_6\int\limits_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau + M_7\|f\|_0^2, \tag{9}$$

где M_5, M_6, M_7 — положительные числа, зависящие только от входных данных задачи (1)–(4).

Проинтегрируем (9) по τ от 0 до t, тогда получим

$$\|u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 \le M_8\int\limits_0^t \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)d\tau$$

$$+M_9\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau \left(\|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2\right)dp d\tau + M_{10}\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,1)}^2\right), \tag{10}$$

где M_8, M_9, M_{10} — положительные числа, зависящие только от входных данных задачи (1)–(4).

Применяя к (10) лемму Гронуолла, получим

$$\|u\|_{W_2^1(0,1)}^2 \le M(t)\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,1)}^2\right), \tag{11}$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1)–(4).

Из априорной оценки (11) следует единственность решения исходной задачи (1)–(4) и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,1)$.

Замечание. Если в задаче (1)–(4) заменить краевое условие (3) условием вида

$$u_x(0,t) = 0, \qquad 0 \le t \le T, \tag{12}$$

то тогда, если $\forall t \in [0,T], |\alpha(t)| \ge \alpha_0 > 1$, то априорная оценка для задачи (1), (2), (12), (4) имеет вид

$$\|u\|_{W_2^1(0,1)}^2 \le M(t)\left(\int\limits_0^t \|f\|_0^2 d\tau + \|u_0(x)\|_{W_2^1(0,1)}^2\right),$$

где $M(t)$ зависит только от входных данных задачи (1), (2), (12), (4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кожанов А. И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 94–95

УДК 517.954, 517.956

КОРРЕКТНОСТЬ МОДИФИЦИРОВАННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

© А. М. Блохин, Д. Л. Ткачев

blokhin@math.nsc.ru, tkachev@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

При постановке физического эксперимента, а также при численном моделировании течений вязкого теплопроводного газа (рассматривается модель Навье – Стокса) особенный интерес вызывают характерные качественные свойства таких движений — детальная информация о них позволяет существенно эффективнее организовать процесс изучения явления. Одно из свойств течений — образование в ряде случаев узких, так называемых переходных зон, в которых параметры, характеризующие движения (компоненты вектора скорости, плотность, давление, температура и т. д.) испытывают резкие изменения (большие градиенты) по пространственным переменным, оставаясь при этом непрерывными. Возникают течения типа "вязкого профиля"[1, 2]. Так происходит, например, когда вязкий теплопроводный газ обтекает затупленное тело.

В связи с этим очень перспективна идея приближенной замены узких переходных зон поверхностями сильного разрыва, т. е. ударными волнами, — в этом суть метода “ударных волн”. Такой подход имеет ряд существенных преимуществ: во-первых, резко сокращается объем вычислений; во-вторых, математическая теория сильных разрывов относительно хорошо развита не только для одномерных, но и для многомерных течений, созданы эффективные численные алгоритмы.

Следует отметить, что предлагаемый разрывный подход к исследованию волн в вязком теплопроводном газе используется и в теоретических исследованиях. Так, при исследовании устойчивости плоских ударных волн с целью оценки влияния малой вязкости на развитие возмущений предполагается, что шириной переходной зоны можно пренебречь. Поэтому задача об изучении развития возмущений сводится, как и в невязком газе, к исследованию линейной смешанной задачи с граничными условиями на фронте ударной волны, полученными после линеаризации уравнений сильного разрыва.

Однако, ранее на примере математической модели Навье – Стокса для сжимаемой жидкости была показана неприемлемость подхода, основанного на представлении ударных волн в вязком газе как поверхностей сильного разрыва. Оказывается, что такой вывод можно сделать уже по линейному приближению. С этой целью изучается смешанная задача, полученная путем линеаризации нестационарных уравнений Навье – Стокса и уравнений сильного разрыва относительно кусочно-постоянного решения. Это кусочно-постоянное решение описывает следующий режим течения вязкого газа: сверхзвуковой стационарный поток вязкого газа (при $x < 0$) отделяется от дозвукового стационарного потока (при $x > 0$) поверхностью сильного разрыва — ударной волной (с уравнением $x = 0$). В упомянутых выше работах было показано, что ударная волна неустойчива вне зависимости от характера линеаризованных граничных условий при $x = 0$. Это обстоятельство является следствием того факта, что число независимых параметров, определяющих произвольное малое возмущение разрыва, больше числа линеаризованных граничных условий на разрыве. Таким образом, ударная волна в вязком газе, рассматриваемая как поверхность сильного разрыва, подобна неэволюционным разрывам в идеальных средах.

Заметим, что с математической точки зрения построенные для доказательства неустойчивости частные, экспоненциально растущие со временем решения есть, по существу, примеры

Адамара, которые показывают некорректность упомянутой выше линейной смешанной задачи. Обнаруженную неустойчивость можно, также, трактовать как косвенное доказательство невозможности нахождения стационарных режимов обтекания затупленных тел вязким газом с головным скачком уплотнения в виде поверхности сильного разрыва методом установления. С физической точки зрения этот факт означает практическую нереализуемость вышеописанного стационарного режима течения вязкого газа с ударной волной.

Вместе с тем, учитывая изложенные выше преимущества разрывного подхода, хотелось бы модифицировать этот подход так, чтобы можно было бы обоснованно применить его, например, в задачах о нахождении стационарных режимов обтекания методом установления для сред с диссипацией.

Суть идеи заключается в том, чтобы дописать к исходной линейной задаче об устойчивости дополнительные граничные условия так, чтобы для вновь сформулированной смешанной задачи стационарный режим течения газа с ударной волной, описанный выше, стал бы асимптотически устойчив (по Ляпунову). Отсюда следует, что по крайней мере на линейном уровне был бы обоснован метод установления, что означало бы возможность определения стационарного режима течения вязкого газа с ударной волной этим методом. Упомянутые же выше дополнительные граничные условия предлагается конструировать с учетом априорной информации о разыскиваемом методом установления стационарном режиме течения вязкого газа с ударной волной.

В докладе обсуждается вопрос о постановке дополнительных граничных условий при исследовании неодномерной линейной задачи об устойчивости ударной волны — разрыва в вязком газе и об исследовании корректности модифицированной задачи. Заметим, что рассмотрение многомерного случая необходимо, чтобы естественным образом подойти, например, к изучению уже упомянутой задачи об обтекании затупленного тела вязким газом. Основные результаты доклада опубликованы в работах [3–5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, код проекта 07-01-00585.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
2. *Zumbrun K., Serre D.* Viscous and inviscid stability of multidimentional planar viscous shock waves // Indiana Univ. Math. J. 1999. V. 48. P. 937–992.
3. *Esipov D. V., Tkachev D. L., Blokhin A. M.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas // Abstracts of the International Conference "Eleventh Internstional Conference on Hyperbolic Problems. Theory. Numerics. Applications". Lyon, France, July 17–21, 2006. P. 65–67.
4. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Baldan L. O.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas // Part. I. J. Math. Anal. Appl. 2007 (to appear).
5. *Blokhin A. M., Tkachev D. L., Esipov D. V.* Well-posedness of a modified initial-boundary value problem on stability of shock waves in a viscous gas // Part. II. J. Math. Anal. Appl. 2007 (to appear).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 96–97

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© У. Бобомуродов

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$L(u) = \begin{cases} u_{xx} + b(x,y)u_y + a(x,y)u_x + c(x,y)u = 0, & y > 0 \\ (-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, & m > 0, \quad -m/2 < \beta_0 < 1, \quad y < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω комплексной плоскости $z = x+iy$, ограниченной отрезками AA_1, A_1B_1, BB_1 прямых $x = -1$, $y = T = const > 0$, $x = 1$ соответственно, лежащих в полуплоскости $y > 0$, и нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}(-y)^{m+2} = 1$ уравнения (1) в полуплоскости $y < 0$, где $A = A(-1,0)$, $B = B(1,0)$.

Обозначим через Ω_1 и Ω_2 параболические и эллиптические части смешанной области Ω, $I = (-1,1)$ — интервал оси $y = 0$.

Известно [1], что при помощи подстановки

$$u(x,y) = \vartheta(x,y) \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{x} a(t,y)dt\right)$$

коэффициент $a(x,y)$ при u_x уравнения (1) в области Ω_1 можно обратить в нуль. Поэтому в дальнейшем без ограничения общности будем полагать, что $a(x,y) = 0$ в Ω_1. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагаем, что $b(x,y) \in C^{2,\delta}(\Omega_1)$, $c(x,y) \in C^{2,\delta}(\overline{\Omega}_1)$, $0 < \delta < 1$

Задача A. Найти в замкнутой области $\overline{\Omega}$ непрерывную функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $\Omega \backslash I$;

2) в интервале I выполняется условие сопряжения

$$\lim_{y\to+0} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to-0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I; \tag{2}$$

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(-1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le T, \tag{3}$$

$$u\left[h(x)\right] = \mu(x)\, u(x,0) + \rho(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{4}$$

$$u|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{5}$$

где $h(x_0) = 1 + iT(1-x_0)/2$ — аффикс точки пересечения прямой $y = T(x-x_0)/2$ с границей $BB_1 :\ x = 1$, $0 \le y \le T$, $x_0 \in \overline{I}$, заданные функции $\varphi_1(y) \in C\left[0,T\right]$, $\varphi(x) \in C^1(\overline{I})$, $\mu(x)$, $\rho(x) \in C^2(\overline{I})$, причем

$$\varphi(x) = (1-x^2)\, \widehat{\varphi}\,(x) \tag{6}$$

$\widehat{\varphi}\,(x) \in C(\overline{I})$.

Из непрерывности решения $u(x,y)$ в замкнутой области $\overline{\Omega}$ из краевых условий (3)–(5) следуют естественные условия согласованности $\varphi_1(0)=\varphi(-1)$, $\varphi(1)=\mu(1)\,\varphi(1)+\rho(1)$. Задача А является аналогом задачи Бицадзе – Самарского для уравнений эллиптико-параболического типа [2, 3].

Имеет место следующий

Принцип экстремума. *Пусть функция* $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, *обладает непрерывными производными* u_x, u_y *в* $\Omega_1\cup I$, u_x, $(-y)^{\beta_0}u_y$ *в* $\Omega_2\cup I$ *и удовлетворяет в области* $\Omega\backslash I$ *уравнению (1). Тогда при* $\rho(x)\equiv 0$

$$c(x,0)\leq 0,\quad b(x,0)<0, \tag{7}$$

$$0\leq\mu(x)\leq 1, \tag{8}$$

функция $u(x,y)$ *свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* $\overline{\Omega}$ *принимает на дуге* σ_0 *или на отрезке* AA_1.

Из принципа экстремума следует единственность решения задачи А .

Существование решение задачи А с использованием соответствующих формул, дающих решение первой краевой задачи для уравнения (1) в области Ω_1 [5], и решение видоизмененной задачи N для уравнения (1) в области Ω_2 [4, с. 93] исследуется методом работы [3, с. 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Елеев В. А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. XIII, № 1. С. 56–63.
2. *Бицадзе А. В.,Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
3. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1979. 240 с.
4. *Салахитдинов М. С, Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, Yangiyo'l poligraf servis, 2005. 224 с.
5. *Ильин А. М, Калашников А. С, Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // УМН, 1962. Т. XIII, № 3. С. 3–146.

УДК 519.634

О СПЕКТРЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

© А. Н. Боголюбов, М. Д. Малых*, А. А. Панин, А. Г. Свешников

* malykham@mtu-net.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Простейшая краевая задача, доставляющая тем не менее все характерные трудности теории краевых задач, может быть поставлена так.

(A) Пусть заданы: U — область в $\mathbb{R}^n$, о границе которой не делается никаких предположений, f — кусочно непрерывная функция в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем и λ — комплексный параметр. Требуется найти функцию $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(U)$, удовлетворяющую в обобщенном смысле уравнению

$$\Delta v + \lambda v = f.$$

Используя теорему Рисса, задачу (A) можно записать в операторах

$$(\lambda + 1)A(U)v - v = f|_U,$$

где $A(U)$ — ограниченный самосопряженный оператор, заданный билинейной формой

$$(w, A(U)v) = \int_U dx\, w^* v \quad \forall v, w \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(U),$$

а $f|_U$ — сужение функционала $(f, .)_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ на $\overset{\circ}{W}{}^1_2(U)$. Спектром задачи (A) будем называть множество точек

$$\sigma(U) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda + 1 \in \sigma(A(U))\}.$$

Классические теоремы о спектрах краевых задач с различными граничными условиями приведены в [1], в 1990-х годах был достигнут значительный прогресс в исследовании областей, представляющих собой волноводы [2, 3]. Нам относительно спектров задачи (A) удалось доказать следующее.

1. Если области U_1 и U_2 совпадают вне компакта, то $\sigma_{\text{ess}}(U_1) = \sigma_{\text{ess}}(U_2)$.

Для случая достаточно гладкой границы эта теорема была установлена М. Ш. Бирманом [4]. Эта теорема позволяет вычислят существенный спектр в случае, когда область вне компакта совпадает с областью, в которой делятся переменные.

2. Для любой области U в $\mathbb{R}^n$ с какой угодно границей существенный спектр имеет вид $\sigma_{\text{ess}}(U) = [a, +\infty)$, где $a \geq 0$.

Эта теорема указывает на принципиальное отличие теории спектра задачи (A) и спектральной теории оператора Шредингера. Типичной ситуацией для последней является случай спектра с лакунами, а одной из важнейших задач — оценка длины лакун.

3. Пусть F — гладкая поверхность, делящая $\mathbb{R}^n$ на две области U и V, и пусть $\vec{\nu}$ — ее единичная нормаль. Если существует такой постоянный вектор $\vec{a}$, что скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{\nu}) \geq 0$ вдоль всей границы ∂U и $(\vec{a}, \vec{\nu}) > 0$ на некотором ее участке, то $\sigma_{\text{disc}}(U) = \sigma_{\text{disc}}(V) = \emptyset$.

Это утверждение обобщает критерий пустоты дискретного спектра, указанный Реллихом [5, § 2], [1, с. 249]. Условие гладкости границы существенно: контрпример фактически был построен в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Глазман И. М.* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: ГИФМЛ, 1963.
2. *Linton C. M., McIver P.* Embedded trapped modes in water waves and acoustics. Department of Mathematical Sciences, Loughborough University, Leicestershire. 2006. Preprint N 06-24.
3. *Krejciric D., Kriz J.* On the spectrum of curved planar waveguide // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto University. 2005. V. 41. P. 757–791
4. *Бирман М. Н.* Возмущение непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий // Вестник Лен. ун-та. 1962, № 1. С. 22–55
5. *Rellich Fr.* Über das asympotysche Verhalten der Lösungen von $\Delta u+\lambda u=0$ in unendlichen Gebieten // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1943. Bd. 53. P. 57–65
6. *Exner P., Šeba P., Tater M., Vaňek D.* Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window // J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4867–4887.

УДК 517.983.53

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ЗАМЫКАНИЯ В МЕТРИКЕ ОБОБЩЕННОГО ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

© **А. Г. Брусенцев**

brusentsev@mail.ru

Белгородский государственный технологический университет им. В. Г. Шухова, Белгород

Обобщенным интегралом Дирихле назовем квадратичный функционал

$$D(u,u)=\int\limits_G [(A(x)(\nabla u - i\overrightarrow{b}(x)u), (\nabla u - i\overrightarrow{b}(x)u)+q(x)|u|^2]dx,$$

где G — открытое множество в R^n , $A(x)$ — позитивная эрмитова матрица-функция, $\overrightarrow{b}(x)$ — n-компонентная вектор-функция с вещественными компонентами, $q(x)$ — вещественная функция, удовлетворяющая условию $q(x)\geq\delta>0$, $u(x)$ — комплекснозначная функция, а $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$ — скалярное произведение и норма в унитарном пространстве $E(\dim E<\infty)$. Обозначим через $H_0(G)$ замыкание в норме $\|u\|=(D(u,u)^{\frac{1}{2}}$ множества $C_0(G)$, а через $H(G)$ множество функций из $W^1_{2loc}(G)$, для которых интеграл $D(u,u)$ конечен. При весьма слабых локальных требованиях к элементам матрицы-функции $A(x)$, компонентам $\overrightarrow{b}(x)$ и $q(x)$ определения пространств $H(G)$, $H_0(G)$ корректны и справедливо включение $H_0(G)\subseteq(H(G)$. В докладе приводятся новые необходимые, достаточные, а в некоторых случаях необходимые и достаточные условия принадлежности функции из $H(G)$ подпространству $H_0(G)$. Эти результаты являются значительным развитием теорем, анонсированных в [1], и могут быть использованы при ответе на ряд неоднократно обсуждавшихся в литературе вопросов. В основе этих результатов лежит, в частности, следующая

Теорема. *Пусть в интеграле Дирихле элементы матриц* $A(x)$, $A^{-1}(x)$, *компоненты* $\overrightarrow{b}(x)$ *и* $q(x)$ *локально ограничены в* G . *Если функция* $u(x)\in H_0(G)\bigcap Lip_{loc}(G)$, *то для любого векторного поля* $\overrightarrow{g}(x)\in Lip_{loc}(G)$ $(\overrightarrow{g}(x):G\to R^n)$, *удовлетворяющего при некотором* $\varepsilon>0$ *почти всюду в* G *условию* $\nabla\overrightarrow{g}\geq\varepsilon$ $(A^{-1}\overrightarrow{g},\overrightarrow{g})-const$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\partial\Omega}|u|^2\cdot(\overrightarrow{g},\overrightarrow{ds})\leq C_u$$

где Ω *— произвольная ограниченная область с кусочно-гладкой границей* $\partial\Omega$ $(\Omega\subset G)$, C_u *- константа, не зависящая от* Ω .

Эта теорема означает, что в случае, когда векторное поле $\overrightarrow{g}(x)$ имеет бесконечные особенности на некоторой части границы области G со стоками на этой части ∂G и удовлетворяет условиям теоремы, то, грубо говоря, всякая достаточно гладкая функция из $H_0(G)$ в среднем обращается в нуль на соответствующей части границы. Приводимые в докладе достаточные условия принадлежности функции из $H(G)$ подпространству $H_0(G)$ совпадают со сформулированными в теореме необходимыми условиями при конкретном выборе векторного поля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brusentsev A. G.* Characterisation of closure of compact functions set in Dirichlet generalized integral metric // Book of abstracts international conference “Kolmogorov and Contemporary Mathematics”. Moscow, RAS. 2003. P. 143–144.

УДК 517.957:[532.516.5+536.23]

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ВЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВОДНОГО ГАЗА

© В. В. Бублик

bublik@itam.nsc.ru

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Для системы уравнений Навье – Стокса сжимаемого вязкого теплопроводного газа с политропным уравнением состояния изучаются дифференциально инвариантные решения. Указанная система уравнений в случае осесимметричных нестационарных движений газа допускает пятимерную алгебру Ли операторов, а в случае плоских стационарных течений газа — также пятимерную алгебру Ли операторов, не изоморфную первой. Для исследования дифференциально инвариантных решений необходимо для каждой допускаемой подалгебры построить базис дифференциальных инвариантов и найти операторы инвариантного дифференцирования. Такая работа была полностью проведена для всех подалгебр. Для стационарного плоского случая все подалгебры можно разделить на 25 серий (4 серии одномерных подалгебр, 6 — двумерных, 8 — трехмерных, 6 — четырехмерных и одну пятимерную подалгебру, совпадающую с допускаемой алгеброй). Для нестационарного осесимметричного случая все подалгебры можно разделить на 46 серий (11 серий одномерных подалгебр, 18 — двумерных, 12 — трехмерных, 4 — четырехмерных и одну пятимерную подалгебру, совпадающую с допускаемой алгеброй). Доказано, что для части серий подалгебр базис дифференциальных инвариантов содержится среди инвариантов нулевого порядка, для остальных подалгебр — среди инвариантов порядка не выше первого. Для всех подалгебр были исследованы регулярные дифференциально инвариантные решения. Показано, что для построения регулярных дифференциально инвариантных решений достаточно использовать только инварианты из базиса дифференциальных инвариантов. К этим решениям сводятся все остальные регулярные дифференциально инвариантные решения, построенные на основе инвариантов более высокого порядка. Показано, что любое регулярное дифференциально инвариантное решение является в то же время регулярным частично инвариантным решением, построенным на той же самой подгруппе. При этом эти решения полностью совпадают в том случае, если базис дифференциальных инвариантов подгруппы состоит только из инвариантов нулевого порядка. Если же в базисе дифференциальных инвариантов подгруппы содержатся инварианты первого порядка, то дифференциально инвариантная подмодель дает только частный случай частично инвариантной подмодели. Поскольку полное исследование всех регулярных частично инвариантных решений уравнений для указанной модели не проведено, то даже частные случаи исследования таких решений представляют интерес. Построены примеры новых регулярных дифференциально инвариантных решений уравнений. Показано, что часть из них редуцируется к инвариантным решениям. Исследованы также некоторые нерегулярные дифференциально инвариантные решения. Среди них получены как редуцируемые, так и не редуцируемые к инвариантным решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 06-01-00080).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Андреев В. К., Бублик В. В., Бытев В. О.* Симметрии неклассических моделей гидродинамики. Новосибирск: Наука, 2003.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 102–103

УДК 517.9

МЕТОД МУЛЬТИПОЛЕЙ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ СО СКРУГЛЕННЫМИ УГЛАМИ

© Г. О. Бузыкин

gbuzykin@newmail.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Дано описание аналитико-численного метода (метода мультиполей [1]) для решения краевых задач в областях, граница которых содержит входящие углы, скругленные дугой окружности, на примере задачи Дирихле для плоского уравнения Лапласа

$$\Delta\psi\,(w)\,=\,0,\;\; w\in g\,;\qquad \psi\,(w')\,=\,0,\;\; w'\in\gamma\,;\qquad \psi\,(w')\,=\,h\,(w'),\;\; w'\in\Gamma\,, \tag{1}$$

в односвязной области g, граница которой состоит из двух звеньев: контура закругленного угла $\gamma = (ABNCD)$, где B и C — точки сопряжения дуги окружности (BNC) с двумя прямолинейными участками (AB) и (CD), и жордановой кусочно–гладкой дуги $\Gamma = (DA)$. Предполагаем также, что область g допускает расширение до области G, ограниченной бесконечным скругленным углом, т.е. $G \supset g$, $\partial G \supset \gamma$, $G \supset \operatorname{int}\Gamma$, где через $\operatorname{int}\Gamma$ обозначена дуга Γ без концевых точек.

В постановке (1) будем предполагать, что $h(w') \in L_2(\Gamma)$. В этом случае решение $\psi\,(w)$ существует и единственно в пространстве типа Харди $e_2\,(g,\,\Gamma)$, введенном в [2], а функция $\psi\,(w)$ имеет на Γ след $\psi(w')$, понимаемый в смысле предельных значений по всем некасательным путям, расположенным в g и оканчивающимся на Γ, и равный почти всюду $h(w')$.

Граничные мультиполи $\Omega_n\,(w)$ для области G с нулем в точке N и центром в $M = \infty$ определяются по формуле [3]

$$\Omega_n\,(w) := \operatorname{Im}\big[\mathscr{F}(w)\big]^n, \tag{2}$$

где $z = \mathscr{F}(w)$ — конформное отображение G на $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, причем $\mathscr{F}\,(N) = 0$ и $\mathscr{F}\,(M) = \infty$. Система $\{\Omega_n\}$ полна и минимальна в $L_2(\Gamma)$ и, что очевидно, каждая из функций Ω_n гармонична в G и обращается в нуль на $\partial G \setminus M$. Основанный на мультиполях $\Omega_n\,(z)$ и указанных их свойствах метод (получивший одноименное название), заключается в том, что функция $\psi\,(w)$ — решение задачи (1) — строится в виде предела последовательности линейных комбинаций первых N мультиполей, т.е.

$$\psi\,(w)\,=\,\lim_{n\to N}\psi^N\,(w)\,,\qquad \psi^N\,(w)\,=\,\sum\nolimits_{n=1}^{N} a_n^N\,\Omega_n\,(w)\,. \tag{3}$$

Коэффициенты $\{a_n^N\}$ в формуле (3) могут быть найдены, например, из условия минимума их отклонения на Γ в норме L_2 от функции $h\,(w')$, т.е. из условия $\|\psi^N - h\|_{L_2\,(\Gamma)} = \min$, которое приводит, как нетрудно убедиться, к системе линейных уравнений

$$\sum\nolimits_{k=1}^{N} c_{nk}\,a_k^N\,=\,h_n\,,\quad n\,=\,1,\,2,\,\ldots,\,N\,; \tag{4}$$

здесь

$$c_{nk}\,=\,\big(\Omega_n,\,\Omega_k\big),\quad h_n\,=\,\big(h,\,\Omega_n\big)\,, \tag{5}$$

где через $\big(\cdot\,,\cdot\big)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $L_2\,(\Gamma)$.

В [1, 2] доказано, что последовательность $\{\psi^N\,(w)\}$ сходится к решению задачи $\psi\,(w)$ в равномерной норме на любом компакте $E\,\subset\,g\cup\operatorname{int}\gamma$, причем эту последовательность можно дифферецировать любое число раз как в области g, так и на $\operatorname{int}\gamma\,\setminus\,(B\cup C)$. В [1] было

показано, что эта сходимость имеет экспоненциальный характер. Отметим, что в силу своего построения метод мультиполей не требует построения какой–либо сетки.

Конформное отображение $z = \mathscr{F}(w)$, фигурирующее в формуле (2) для мультиполей, находится посредством обращения функции $z = \mathscr{F}^{-1}(w)$, обратной к $\mathscr{F}$. Для $\mathscr{F}^{-1}$ получено явное представление через гипергеометрическую функцию Гаусса

$$\mathscr{F}^{-1}(z) = K_0 \left(\frac{z}{l}\right)^{\beta} \frac{\mathrm{F}\Big(-\frac{\nu}{2},\, -\frac{\nu+1}{2};\; 1-\frac{\beta}{2};\; \big(\frac{l}{z}\big)^2\Big)}{\mathrm{F}\Big(\frac{\nu}{2},\, \frac{\nu+1}{2};\; 1+\frac{\beta}{2};\; \big(\frac{l}{z}\big)^2\Big)}\,, \tag{6}$$

где η — радиус закругления угла, β — величина угла, измеряемая по области, $\nu = (\beta-1)/2$, а параметры K_0 и l находятся по формулам

$$K_0 = \eta\ \mathrm{tg}(\pi\nu)\ e^{-i\pi\frac{\beta}{2}} \frac{\Gamma\Big(1+\frac{\beta}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(1-\frac{\nu}{2}\Big)}{\Gamma\Big(1-\frac{\beta}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{2}+\frac{\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(1+\frac{\nu}{2}\Big)}, \tag{7}$$

$$l = 2\left[\eta\,\frac{\beta\,\Gamma^2\Big(\frac{1}{2}+\nu\Big)}{2\,\kappa\,\Gamma^2(\nu)}\right]^{\frac{1}{\beta}}, \quad \kappa = \nu(\nu+1)\,. \tag{8}$$

Указанное обращение делается при помощи разложения представления (6) для $\mathscr{F}^{-1}$ в ряды специального вида в окрестностях прообразов некоторых точек ∂G и последующего обращения этих рядов. При этом области сходимости полученных рядов для $\mathscr{F}$ покрывают всю область G.

Проведенные в этой работе численные исследования подтвердили экспоненциальную скорость сходимости метода мультиполей в области и на дуге γ, показали высокую точность вычисления решения и его производных в области и в точках соответствующей гладкости γ при сравнительно небольшом числе степеней свободы (т. е. при небольшом N в выражении (3) для приближенного решения), а также выявили погранслойный эффект для погрешности вблизи γ. Кроме того, было проведено исследование поведения коэффициентов в указанных выше линейных комбинациях мультиполей при увеличении длины приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. Докторская дисс. ВЦ АН СССР, 1990.
2. *Власов В. И.* О решении задачи Дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 1. С. 19–22.
3. *Власов В. И.* О решении задачи Дирихле посредством разложения в ряд Фурье // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 5. С. 1012–1015.

УДК 517.953+517.983

РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В R_n^+ ДЛЯ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© Л. Н. Булдыгерова

b_lina@ngs.ru

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

В работе мы рассматриваем краевую задачу в R_n^+ для квазиэллиптических систем

$$\begin{cases} \mathcal{L}(D_x)U = F(x), \quad x \in R_n^+, \\ B(D_x)U\big|_{x_n=0} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Сформулируем условия на операторы $\mathcal{L}(D_x)$ и $B(D_x)$. Обозначим через $l_{kj}(i\eta)$, $b_{kj}(i\eta)$ элементы матриц $\mathcal{L}(i\eta)$, $B(i\eta)$ соответственно.

1. $\mathcal{L}(i\eta)$ — матрица размера $m \times m$. Элементы матрицы $\mathcal{L}(i\eta)$ однородны относительно вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, т. е. для любого $c > 0$ справедливы равенства $l_{kj}(c^\alpha i\eta) = c l_{kj}(i\eta)$, $1/\alpha_k$ — натуральные числа.

2. Равенство $\det\mathcal{L}(i\eta) = 0$, $\eta \in R_n$, имеет место тогда и только тогда, когда $\eta = 0$.

Из условий 1 и 2 вытекает, что уравнение $\det\mathcal{L}(is, i\lambda) = 0$ при $s \in R_{n-1}\backslash\{0\}$ не имеет вещественных корней по λ. Обозначим через μ число корней, лежащих в верхней полуплоскости.

3. Будем считать, что матрица $B(i\eta)$ имеет размер $\mu \times m$, и ее элементы однородны относительно вектора α, т. е. для любого $c > 0$ существует вектор $(\beta_1, \ldots, \beta_\mu)$, $0 \le \beta_k < 1$, такой, что справедливы равенства $b_{kj}(c^\alpha i\eta) = c^{\beta_k} b_{kj}(i\eta)$.

4. Краевая задача (1) удовлетворяет условию Лопатинского.

Известно [1], что краевая задача (1) однозначно разрешима в соболевском пространстве $W_p^l(R_n^+)$, $l = (1/\alpha_1, \ldots, 1/\alpha_n)$, при $|\alpha| > p'$, $1/p + 1/p' = 1$. В случае, когда $|\alpha| \le p'$, краевая задача может быть неразрешимой в $W_p^l(R_n^+)$ даже при $F(x) \in C_0^\infty(R_n^+)$. Для квазиэллиптических уравнений это было установлено в [2].

В настоящей работе мы исследуем разрешимость краевой задачи вида (1) в соболевском пространстве $W_p^l(R_n^+)$, когда $|\alpha| \le p'$. Доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть $|\alpha| \le p'$ и $F(x) \in L_p(R_n^+)$, причем $\operatorname{supp} F(x)$ — компакт. Предположим, что $F(x)$ удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_{R_n^+} x^\nu F(x)\, dx = 0$$

для всех мультииндексов $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ таких, что $|\alpha|/p' + \alpha\nu \le 1$. Тогда краевая задача (1) имеет единственное решение $U(x) \in W_p^l(R_n^+)$.

Автор выражает благодарность Г. В. Демиденко за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционный проект № 2.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Demidenko G. V.* On solvability of boundary value problems for quasi-elliptic systems in R_+^n // J. Anal. Appl. 2006. V. 4, N 1. P. 1–11.
2. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. II // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 1. С. 41–65.

УДК 517.9

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДРОБНОГО ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕКАРЛЕМАНОВСКИМ СДВИГОМ

© М. В. Бурцев, А. Н. Зарубин

burtsevmv@orel.ru, aleks_zarubin@mail.ru

Орловский государственный университет, Орел

1. Уравнение

$$H(-t)U_{tt}(x,t) + H(t)D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) = U_{xx}(x,t) - U(x-\tau,t), \tag{1}$$

где $0 < \tau \equiv const$; $0 < \alpha < 1$; $H(\xi)$ — функция Хевисайда; D^{α}_{ot} — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования, действующий на функцию $U(x,t)$ по переменной t; рассмотрим в области $D = D^+ \cup D^- \cup J$, $D^+ = R \times (0,+\infty)$, $D^- = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} D^-_k$, $D^-_k = \{(x,t):\ k\tau - t < x < (k+1)\tau + t,\ -\tau/2 < t < 0\}$, $J = \{(x,t):\ x > 0,\ t = 0\}$.

Задача V. Найти решение $U(x,t)$ уравнения (1) в области D из класса $D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi) \in C(\overline{D^+})$, $t^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) \in C(D^+ \cup J)$, $U(x,t) \in C(\overline{D^-})$, $U_{xx}(x,t) \in C(D^+ \cup D^-)$, $U_{tt}(x,t) \in C(D^-)$, удовлетворяющее граничным и начальным условиям

$$\lim_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi) = f(x),\ x \le 0, \tag{2}$$

$$U(x,t) = g(x,t),\ (x,t) \in \overline{D^-}_{(-1)}, \tag{3}$$

$$U(x,k\tau - x) = \psi_k(x),\ k\tau \le x \le (2k+1)\tau/2; \tag{4}$$

условиям сопряжения

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0+} D^{\alpha-1}_{0t}U(x,\xi) = \lim\limits_{t\to 0-} U(x,t) = \omega(x),\ x \in \overline{J}, \\ \lim\limits_{t\to 0+} t^{1-\alpha}D^{\alpha}_{0t}U(x,\xi) = \lim\limits_{t\to 0-} U_t(x,t) = \nu(x),\ x \in J, \end{cases} \tag{5}$$

где заданные функции $f(x) \in C(-\infty,0] \cap C^2(-\infty,0)$; $g(x,t) \in C(\overline{D^-}_{(-1)}) \cap C^2(D^-_{(-1)})$, $\psi_k(x) \in C[k\tau,(2k+1)\tau/2] \cap C^2(k\tau,(2k+1)\tau/2)$, причем $f(x) = g(x,0)$, $x \in [-\tau,0]$, $f(-\infty) = 0$, $f(0) = \psi_0(0)$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \max\limits_{x\in[k\tau,(2k+1)\tau/2]} |\psi_k(x)| = 0$.

2. Единственность и существование решения задачи V. Решение задачи Коши в области D^- для уравнения (1) с начальными условиями (3), (5) имеет вид

$$U(x,t) = \{U_k(x,t),\ (x,t) \in \overline{D^-_k}\}, \tag{6}$$

где

$$U_k(x,t) = \phi(x,t)H(x) + \sum_{m=1}^{k} \gamma_m H(x-m\tau) \int\limits_0^{x-m\tau} \eta\left((x-m\tau)^2 - \eta^2\right)^{m-1} \phi(\eta,t)d\eta,$$

а

$$\phi(x,t)=\frac{1}{2}\left[z^{\omega}(x-t)+z^{\omega}(x+t)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t}z^{\nu}(\xi)d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}d\xi\int\limits_{x-(t-\xi)}^{x+(t-\xi)}g(r-\tau,\xi)dr,$$

$$z^{\nu}(x)=\nu(x)H(x)+\sum_{m=1}^{k}(-1)^m\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}\eta\left(x^2-(\eta+m\tau)^2\right)^{m-1}\nu(\eta)d\eta,$$

$z^{\omega}(x)$ совпадает с $z^{\nu}(x)$, если в ней заменить $\nu(x)$ на $\omega(x)$; $\gamma_m=\left(m!\Gamma(m)2^{2m-1}\right)^{-1}$.

Решение задачи Коши в области D^+ для уравнений (1) с начальным условием (2),(5), т.е. с $\overline{\omega}(x)=H(x)\omega(x)+H(-x)f(x)$, получено в форме

$$U(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overline{\omega}(\xi)G(x,\xi,t)d\xi, \tag{7}$$

где

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{m=1}^{+\infty}(-1)^m t^{\alpha(m+1)-1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda(x-m\tau-\xi)}E^{m+1}_{\alpha,\alpha(m+1)}(-\lambda^2t^{\alpha})d\lambda,$$

а $E^{\rho}_{\alpha,\beta}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)k!}$ — обобщенная функция Миттаг – Леффлера; $(\rho)_k$ — символ Похгаммера.

Вопрос существования и единственности решения задачи V сводится к разрешимости интегрального уравнения

$$\omega''(x)-\Gamma(\alpha)\omega'(x)=\gamma_k(x)\equiv$$

$$\omega(x-\tau)-\delta_k(x)\Gamma(\alpha)-\Gamma(\alpha)\sum_{m=1}^{k}\gamma_m H(x-m\tau)\int\limits_{0}^{x-m\tau}(x-m\tau-\eta)^{2(m-1)}\omega(\eta)d\eta,$$

$k\tau<x<(k+1)\tau$, если $\omega(k\tau)=\psi_k(k\tau)$ $(k=0,1,2,\dots)$.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 107–108

УДК 517.948

ОБ АСИМПТОТИКЕ СПЕКТРА ОДНОГО КЛАССА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

© М. Г. Гадоев

gadoev@rambler.ru

Мирнинский политехнический институт, Мирный

Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область, $\partial\Omega \in C^\infty$. Введем пространство $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$ функций $u(x)(x \in \Omega)$ с конечной нормой

$$||u, W^1_{2,\alpha}(\Omega)|| = (\sum_{i=1}^n \int_\Omega \rho^{2\alpha}(x)|u'_{x_i}(x)|^2 dx + \int_\Omega |u(x)|^2 dx)^{1/2}.$$

Здесь число $\alpha \in [0,1), \rho(x) = dist\{x, \partial\Omega\}$. Обозначим через $\overset{\circ}{W}{}^1{}_{2,\alpha}(\Omega)$ замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ в $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

В этой работе исследуется асимптотическое распределение собственных значений (с. з.) оператора

$$Au = -\sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) q(x) u'_{x_i}(x))'_{x_j},$$

заданного в пространстве $H = L_2(\Omega)^l$, в предположении, что матрица $q(x)$ при $x \in \partial\Omega$ имеет лишь простые с.з. Ранее аналогичные исследования приводились [1], в предположении, что матрица $q(x)$ имеет простые с.з. для $x \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. В работах [2, 3] предполагается, что $n = 1$.

Область определения оператора А задается следующим образом:

$$D(A) = \{u \in \overset{\circ}{W}{}^1{}_{2,\alpha}(\Omega) \cap W^2_{2,loc}(\Omega) : \sum_{i,j=1}^n (\rho^{2\alpha}(x) a_{ij}(x) q(x) u'_{x_i}(x))'_{x_j} \in H\}$$

Сформулируем условия на $q(x)$, $a_{ij}(x)$ $(i,j = \overline{1,n})$. Предположим, что

$$a_{ij}(x) \in C^2(\overline{\Omega}), q(x) \in C^2(\overline{\Omega}; End\mathbb{C}^l),$$

$$a_{ij}(x) = \overline{a_{ij}(x)} \quad (x \in \Omega, i,j = \overline{1,n}).$$

$$c|\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \quad (x \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n), c > 0.$$

Далее, предположим, что с. з. $\mu_1(x), \ldots, \mu_l(x)$ матрицы $q(x)(x \in \Omega)$ расположенны на положительной полуоси R_+ и вне угла

$$\Phi = \{z \in \mathbb{C} : |argz| < \varphi\}, \quad \varphi \in (0, \pi];$$

(функция $argz$ принимает значения на $(-\pi, \pi])$, т. е. занумеруем их так, что $\mu_j(x) \in C(\overline{\Omega}), (j = \overline{1,n})$ и $\mu_j(x) \in R_+ \quad (j = \overline{1,\nu}), \quad \mu_j(x) \overline{\in} \Phi \quad (j = \overline{\nu+1,l}), \quad \nu \in \{1, \ldots, l\}$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ последовательность с.з. оператора A из угла Φ, упорядоченных в порядке неубывания их модулей. Положим

$$N(t) = card\{j : |\lambda_j| \leq t\}, t > 0.$$

При выполнении перечисленных условий имеет место следующая

Теорема. *Для любого замкнутого сектора $S \subset \Phi \setminus R_+$ с вершиной в нуле для достаточно больших по модулю $\lambda \in S$ оператор $A - \lambda E$ непрерывно обратим и верна оценка*

$$||(A - \lambda E)^{-1}|| \leq M_S |\lambda|^{-1} \quad (\lambda \in S, |\lambda| \geq M'_S).$$

Имеет место асимптотическая формула

$$N(t) \sim (2\pi)^{-n} \upsilon_n t^{n/2} \int_\Omega \rho^{-n\alpha}(x) \mu^{-n/2}(x) (deta(x))^{-1/2} dx, t \to +\infty,$$

где υ_n — объем единичного шара в R^n, $a(x) = (a_{kj}(x))_{k,j=1}^n$, $\mu(x) = \sum\limits_{k=1}^{\nu} \mu_k^{-n/2}(x)$.

При этом $\lim\limits_{j \to \infty} arg\lambda_j = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самирипур А., Седдики К.* Распределение собственных значений несамосопряженных эллиптических систем, вырождающихся на границе области // Математические заметки. 1997. Т. 61, № 3. С. 463–467.
2. *Бойматов К. Х., Костюченко А. Г.* Распределение собственных значений несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка // Вестник МГУ, сер. 1, матем.,мех. 1990. № 3. С. 24–31.
3. *Бойматов К.Х.* Ассимптотика спектра несамосопряженных систем, дифференциальных операторов второго порядка // Математические заметки. 1992. Т. 51, № 4. С. 8–16.

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМ НОСИТЕЛЕМ ДАННЫХ

© Дж. К. Гвазава

jgvaza@rmi.acnet.ge

Математический институт им. А. Размадзе, Тбилиси, Грузия

На плоскости переменных x, t рассматриваеся класс квазилинейных нестрого гиперболических уравнений второго порядка, допускающих явное представление общего интеграла в виде суммы двух произвольных функций, зависящих от характеристических инвариантов уравнения. В классе параболо-гиперболических решений поставлена задача о нахождении решения, удовлетворяющего условиям

$$\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial \vec{\gamma}} + \gamma_2 u \Big|_{\Gamma} = \gamma_3, \quad \delta_1 \frac{\partial u}{\partial \vec{\delta}} + \delta_2 u \Big|_{\Delta} = \delta_3 \tag{1}$$

на конечных дугах неизвестных характеристик Γ, Δ, выпущенных из фиксированной точки (x_0, t_0), в которой задано значение u_0 искомого решения, $\vec{\gamma}$ и $\vec{\delta}$ — также заданные векторы. Одновременно с решением требуется найти и область его определения. Выявлены условия относительно коэффициентов и правых частей соотношений (1), обеспечивающие разрешимость характеристической задачи в данной постановке. Структура семейств характеристических кривых, покрывающих область определения решения, также поддается описанию. У этих семейств внутри области определения решения обнаруживаются множества всевозможных комбинированных дискриминантных точек, в которых уравнение допускает свободное или сильное характеристическое параболическое вырождение. Само же решение задачи на этих четко определенных множествах теряет регулярность.

УДК 517.94

ОБ УБЫВАНИИ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

© В. Ф. Гилимшина

gilvenera@mail.ru

Башкирский государстенный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа

В неограниченной области Ω пространства $\mathbb{R}_n$ для уравнения

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}(a_{\alpha\beta}(x)u_{x_\beta})_{x_\alpha}=-\Phi(x)+\sum_{\alpha=1}^{n}(\Phi_\alpha(x))_{x_\alpha}. \tag{1}$$

рассматривается задача с сочетающимися краевыми условиями первого и второго типа:

$$u\Big|_{\Gamma_1}=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\Gamma_2}=0. \tag{2}$$

Здесь $\Gamma_2=\partial\Omega\backslash\Gamma_1$, $\Gamma_1\neq\varnothing$, $\mathbf{n}(n_1,n_2,\ldots,n_n)$, — внешняя нормаль к $\partial\Omega$, $\nu(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$, $\nu_\alpha=\sum\limits_{\alpha=1}^{n}a_{\alpha\beta}n_\beta$ — компоненты конормали к $\partial\Omega$. Коэффициенты уравнения $a_{\alpha\beta}(x)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию эллиптичности: существуют положительные постоянные γ,Γ и функция $s(x)$ такие, что для любого вектора $y\in\mathbb{R}_n$ и почти всех $x\in\Omega$ справедливы неравенства:

$$s(x)\gamma|y|^2\leq\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}a_{\alpha\beta}(x)y_\alpha y_\beta\leq s(x)\Gamma|y|^2.$$

Основной целью работы является определение зависимости скорости убывания решения задачи (1), (2) от геометрии неограниченной области.

При довольно широких предположениях на вид области Ω и распределение участков границы с условиями первого и второго типов доказано существование такой уходящей на бесконечность последовательности y_i что решение задачи (1), (2) с финитной функцией Φ удовлетворяет следующей оценке. Существуют положительные числа κ, M, такие, что для решения задачи (1), (2) справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega\backslash\Omega^N}s(x)|\nabla u|^2dx\leq M\exp(-\kappa N)\left(\lambda^{-1/2}(0)\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}+\sum_{\alpha=1}^{n}\|\frac{\Phi_\alpha}{s(x)}\|_{L_2(\Omega)}\right).$$

Доказана точность этой оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кожевникова Л. М.* Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения // Матем. сб. 2005. Т. 196, № 7. С. 67–100.

УДК 517.9

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАНА – ХИЛЛАРДА

© А. Ф. Гильмутдинова

algil@list.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

В работе дается ответ на вопрос, поставленный в [1]. Речь идет о единственности решений начально-краевой задачи

$$\theta(x,0)+\varphi(x,0)=\xi(x), \quad x\in\Omega,$$

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial n}+\lambda\theta\right)(x,t)=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}+\lambda\varphi\right)(x,t)=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbb{R}_+,$$

для системы уравнений

$$(\theta+\varphi)_t=\Delta\theta, \quad \Delta\varphi-\alpha\varphi^3+\delta\varphi+\theta=0,$$

определенной в цилиндре $\Omega\times\mathbb{R}_+$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, параметры $\lambda,\gamma\in\mathbb{R}_+$.

Наш подход состоит в использовании метода фазового пространства [2]. В частности, этот метод был применен при описании особенности типа складки [3]. В нашем случае получен следующий результат.

Считаю необходимым поблагодарить доктора физико-математичеких наук, профессора Сиридюка Георгия Анатольевича за постановку задачи и интерес, проявленный к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц.уравн. 1993. № 3.
2. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht – Boston: VSP, 2003.
3. *Свиридюк Г. А., Карамова А. Ф. (Гильмутдинова А. Ф.)* О складке фазового пространства одного неклассического уравнения. // Дифференц.уравн. 2005. № 10.

УДК 517.322.1

К ТЕОРИИ ВЫВОДА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

© С. О. Гладков*, И. Г. Табакова

* Sglad@newmail.ru

Московский государственный областной университет, Москва

Для большинства неравновесных явлений в твердых телах весьма часто приходится иметь дело с уравнением БольцманаСоответствующие процессы хорошо изучены и освещены.Тем не менее, здесь имеется один довольно тонкий момент, описанию которого посвящается настоящая работа. Пусть, например, речь идет о трехчастичном процессе рассеяния, в котором принимают участие две быстрые частицы и одна медленная. Это могут быть, скажем, а) два фотона и один фонон; б) два электрона и один фонон; в) два фотона и один нерелятивистский (движущийся, скажем, по поверхности Ферми) электрон и т. д. Примеров тому множество, но всех их объединяет одно общее свойство — все они квазиупругие. Действительно, если взять процесс типа а), то в силу того, что фазовая скорость света в веществе $\nu = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, где ε, μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости соответственно, значительно превосходит скорость звука c_s, можно считать, что в законе сохранения энергии $\nu(k_1 - k_2) - c_s k_3 = 0$ последнее слагаемое $c_s k_3$ всегда мало и, следовательно, $k_1 \approx k_2$, где k_1 и k_2 — волновые вектора фотона до и после рассеяния соответственно, а k_3 — волновой вектор фонона. То же касается и примеров б) и в). Мы утверждаем, что всегда в приближении квазиупругого рассеяния частиц (квазичастиц) правая часть кинетического уравнения Больцмана $\dot{f} = L\{f\}$ для функции распределения $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$, где $L\{f\}$ — интеграл столкновений, после интегрирования по всем импульсам может быть представлена в виде

$$\int L\{f\} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = D_1 \Delta n - D_2 \Delta^2 n + D^3 \Delta_3 n - \dots = \sum_{i=1}^{k} D_i \Delta^i n, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, а D_i — коэффициенты диффузии соответствующей размерности. Причем, для фотонов $D_1 = D_3 = \dots = 0$, $D_2 \neq 0$, а для электронов $D_1 \neq 0$, $D_2 = D_3 = \dots = 0$. Левая же часть при этом становится равной $\dfrac{\partial n}{\partial t} = \displaystyle\int \frac{\partial f}{\partial t} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Пелетминский С. В.* Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368 с.
2. *Гладков С. О.* Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. М.: Наука, 1999. 330 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 113–113

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРАНСЗВУКОВОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© С. Н. Глазатов

glaz@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Хорошо известно уравнение, описывающее нестационарное плоско-параллельное околозвуковое течение вязкого и теплопроводящего газа (ВТ уравнение). Оно имеет вид

$$u_{xt} - \mu u_{xxx} + u_x u_{xx} - u_{yy} = f(x, y, t), \tag{1}$$

где $\mu > 0$ — постоянная.

Уравнение (1) рассматривается в области $Q = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, T)$, где $0 < T < +\infty$.

Начально-краевая задача. Найти в области Q решение уравнения (1), удовлетворяющее начально-краевым условиям

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y), \tag{2}$$

$$D_x^j u|_{x=0} = D_x^j u|_{x=2\pi}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3}$$

$$u_y|_{y=0} = u_y|_{y=1} = 0. \tag{4}$$

При определенных условиях на правую часть $f(x, y, t)$ и начальную функцию $\varphi(x, y)$, главным из которых является малость этих функций в нормах подходящих анизотропных пространств С. Л. Соболева, доказаны существование и единственность гладкого решения задачи (1)–(4) такого, что $\int\limits_0^{2\pi} u(x, y, t)dx = 0$ для всех $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

Также при определенных условиях на функции $f(x, y, t)$ и $\varphi(x, y)$ доказана теорема о повышении гладкости этого решения по переменной t.

Кроме этого, в области Q для линеаризованного уравнения Линя – Рейсснера –Цзяня

$$u_{xt} + (k(x, y, t)u_x)_x - u_{yy} = f(x, y, t)$$

рассмотрена начально-краевая задача, аналогичная задаче (1)–(4). Доказаны теоремы существования и единственности гладкого решения этой задачи, такого, что $\int\limits_0^{2\pi} u(x, y, t)dx = 0$ для всех $(y, t) \in (0, 1) \times (0, T)$.

УДК 532.54

К УСТОЙЧИВОСТИ УСТАНОВИВШИХСЯ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ ПО ПЛОТНОСТИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© Ю. Г. Губарев

gubarev@hydro.nsc.ru , Yu.G.Gubarev@mail.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследуются плоские течения однородной по плотности невязкой несжимаемой жидкости в зазоре между двумя покоящимися непроницаемыми твёрдыми параллельными бесконечными поверхностями:

$$Du = -p_x,\ Dv = -p_y,\ u_x + v_y = 0 \text{ в } \tau;\ v = 0 \text{ на } \partial\tau \tag{1}$$

$$u(x,\ y,\ 0) = u_0(x,\ y),\ v(x,\ y,\ 0) = v_0(x,\ y)$$

где $u(x,\ y,\ t),\ v(x,\ y,\ t)$ — компоненты поля скорости жидкости; $p\,(x,\ y,\ t)$ — поле давления; $D \equiv \partial/\partial t + u\partial/\partial x + v\partial/\partial y$ — дифференциальный оператор; $x,\ y$ — декартовы координаты; t — время; $\tau \equiv \{(x,\ y):\ -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < H\}$ — область течения жидкости; $\partial\tau \equiv \{(x,\ y):\ -\infty < x < +\infty;\ y = 0,\ H\}$ — граница области течения; H — ширина зазора между поверхностями. Нижними индексами из независимых переменных обозначаются соответствующие частные производные искомых функций.

Смешанная задача (1) обладает точными стационарными решениями в форме

$$u = U(y),\ v = 0,\ p \equiv \text{const} \tag{2}$$

(здесь U — произвольная функция независимой переменной y).

Изучается устойчивость точных стационарных решений (2) относительно малых плоских возмущений, описываемых начально-краевой задачей вида

$$\xi_{1t} = u' - U\xi_{1x} + \xi_2\frac{dU}{dy},\ \xi_{2t} = v' - U\xi_{2x};\ \xi_{1tt} + 2U\xi_{1tx} + U^2\xi_{1xx} = -p'_x,\ \xi_{1x} + \xi_{2y} = 0 \tag{3}$$

$$\xi_{2tt} + 2U\xi_{2tx} + U^2\xi_{2xx} = -p'_y,\ \omega' = \xi_2\frac{d^2U}{dy^2} \text{ в } \tau;\ \xi_2 = 0 \text{ на } \partial\tau;\ \xi_1(x,\ y,\ 0) = \xi_{10}(x,\ y)$$

$$\xi_{1t}(x,\ y,\ 0) = (\xi_{1t})_0\,(x,\ y),\ \xi_2(x,\ y,\ 0) = \xi_{20}(x,\ y),\ \xi_{2t}(x,\ y,\ 0) = (\xi_{2t})_0\,(x,\ y)$$

где $u'(x,y,t),\ v'(x,y,t),\ p'(x,y,t)$ и $\omega'(x,y,t)$ — малые возмущения полей скорости, давления и завихренности; $\xi_1(x,\ y,\ t),\ \xi_2(x,\ y,\ t)$ — компоненты поля лагранжевых смещений.

Анализ смешанной задачи (3) показывает, что с помощью её уравнений может быть получено основное дифференциальное неравенство в форме

$$\frac{d^2M}{dt^2} - 2\lambda\frac{dM}{dt} + 2\lambda^2 M \geq 0;\ M \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{H}\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)dydx$$

(здесь λ — положительная постоянная величина), интегрирование которого на полуинтервалах $\pi n/(2\lambda) \leq t < \pi(n+1)/(2\lambda)$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ ...)$ позволяет, в свою очередь, прийти к априорной оценке снизу

$$M(t) \geq C\exp(\lambda t);\ C \equiv \mathrm{const} > 0 \tag{4}$$

если справедливы соотношения

$$M\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv M(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ \frac{dM}{dt}\left(\frac{\pi n}{2\lambda}\right) \equiv \frac{dM}{dt}(0)\exp\left(\frac{\pi n}{2}\right) \tag{5}$$

$$M(0) > 0,\ \frac{dM}{dt}(0) \geq 2\lambda M(0)$$

Оценка снизу (4) свидетельствует о том, что точные стационарные решения (2) начально-краевой задачи (1) абсолютно неустойчивы по отношению к малым плоским возмущениям (3), нарастающим во времени не медленнее, чем экспоненциально, с начальными данными, которые удовлетворяют двум последним неравенствам системы соотношений (5), в случае, разумеется, когда у смешанной задачи (3) существуют отвечающие таким возмущениям решения.

Этот вывод наглядно и убедительно подтверждается аналитическим примером установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений (2) в форме

$$U(y) = a - b\exp(cy) \tag{6}$$

где a, b и c — произвольные вещественные постоянные величины, и наложенных на них малых плоских возмущений (3), (5) вида

$$\xi_1(x,\ y,\ t) \equiv f_1(y)\exp(\alpha t + i\beta x),\ \xi_2(x,\ y,\ t) \equiv f_2(y)\exp(\alpha t + i\beta x) \tag{7}$$

$$p'(x,\ y,\ t) \equiv f_3(y)\exp(\alpha t + i\beta x);\ f_1 = -\frac{i\beta f_3}{(\alpha + i\beta U)^2},\ f_3 = -\left[\frac{\alpha + i\beta U}{\beta}\right]^2\frac{df_2}{dy},\ g(y) \equiv (\alpha + i\beta U)f_2$$

$$\eta \equiv -i\beta b\exp(cy),\ w(\eta) \equiv g\eta^{-k},\ k \equiv \pm\frac{\beta}{c};\ z \equiv -\frac{\eta}{\alpha + i\beta a},\ k = -\frac{4}{3},\ \beta = \mp\frac{4c}{3}$$

$$w(z) = \left(1 + \frac{3z}{5} + \frac{6z^2}{5} - \frac{14z^3}{5}\right)\left(C_1 + \frac{25C_2}{1458}\left[\frac{3z^{2/3}\left(5 + 5z - 28z^2\right)}{14z^3 - 6z^2 - 3z - 5} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 + 2z^{1/3}}{\sqrt{3}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ln\left(\frac{1 + z^{1/3} + z^{2/3}}{\left[z^{1/3} - 1\right]^2}\right)\right]\right);\ z_0 \equiv \frac{i\beta b}{\alpha + i\beta a},\ z_H \equiv \frac{i\beta b\exp(cH)}{\alpha + i\beta a}$$

$$C_1 = -\frac{25C_2}{1458}\left(\frac{3z_0^{2/3}\left[5 + 5z_0 - 28z_0^2\right]}{14z_0^3 - 6z_0^2 - 3z_0 - 5} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left[\frac{1 + 2z_0^{1/3}}{\sqrt{3}}\right] + \ln\left(\frac{1 + z_0^{1/3} + z_0^{2/3}}{\left[z_0^{1/3} - 1\right]^2}\right)\right)$$

$$\frac{3z_0^{2/3}\left(5 + 5z_0 - 28z_0^2\right)}{14z_0^3 - 6z_0^2 - 3z_0 - 5} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 + 2z_0^{1/3}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1 + z_0^{1/3} + z_0^{2/3}}{\left[z_0^{1/3} - 1\right]^2}\right) =$$

$$= \frac{3z_H^{2/3}\left(5 + 5z_H - 28z_H^2\right)}{14z_H^3 - 6z_H^2 - 3z_H - 5} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1 + 2z_H^{1/3}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1 + z_H^{1/3} + z_H^{2/3}}{\left[z_H^{1/3} - 1\right]^2}\right)$$

(здесь α — некоторая комплексная постоянная, β — вещественная постоянная величина, C_1 — комплексная постоянная, C_2 — произвольная постоянная величина), поскольку среди малых плоских возмущений (3), (5), (7) всегда есть, что несложно проверить, возмущения, растущие со временем экспоненциально, причём, как это ни удивительно, даже несмотря на то, что для установившихся плоско-параллельных сдвиговых течений (2), (6) имеют место известные достаточные условия линейной устойчивости (Релея, Фьортофта и Арнольда).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00900).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 116–117

УДК 517.948.34

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

© М. К. Дауылбаев*, К. Ж. Тлеубердин

* dauyl@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ линейное интегро-дифференциальное уравнение с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon y \equiv & \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \dots + A_n(t)y = F(t) + \\ & \int\limits_a^1 [H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon) + \dots + H_{n-1}(t,x)y^{(n-1)}(x,\varepsilon)]dx \end{aligned} \tag{1}$$

с начальными условиями в правой точке $t = 1$:

$$y(1,\varepsilon) = \alpha_0,\ y'(1,\varepsilon) = \alpha_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(1,\varepsilon) = \alpha_{n-1}, \tag{2}$$

где α_i, $i = \overline{0, n-1}$ — известные постоянные, а $0 \leqslant a < 1$. Случай $a = 0$ рассмотрен в работах [1–3].

Пусть выполнены следующие условия:

I. Функции $A_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $F(t)$ на отрезке $[0,1]$, а $H_i(t,x)$, $i = \overline{0, n-1}$ в области $D = (0 \leqslant t \leqslant 1,\ a \leqslant x \leqslant 1)$ являются достаточно гладкими.

II. $A_1(t) \geqslant \gamma = \mathrm{const} > 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

III. Число $\lambda = 1$ при достаточно малых ε не является собственным значением ядра

$$K_\varepsilon(t,s) = K(t,s) - \frac{H_{n-1}(t,1)}{A_1(1)} \exp\left(\int\limits_s^1 \frac{A_2(x)}{A_1(x)}dx - \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^1 A_1(x)dx\right) + O(\varepsilon),$$

где

$$K(t,s) = \frac{1}{A_1(s)}\left[H_{n-1}(t,s) + \frac{1}{\overline{W}(s)}\int\limits_s^1 \sum_{j=0}^{n-1} H_j(t,x)\overline{W}_{n-1}^{(j)}(x,s)dx\right].$$

Здесь $\overline{W}(t)$ — вронскиан фундаментальной системы решений $\bar{y}_1(t), \dots, \bar{y}_{n-1}(t)$ вырожденного однородного дифференциального уравнения $L_0\bar{y} = 0$, а $\overline{W}_{n-1}^{(j)}(t,s)$ — определитель, получаемый из вронскиана $\overline{W}(s)$ заменой его $(n-1)$–ой строки строкой $\bar{y}_1^{(j)}(t), \dots, \bar{y}_{n-1}^{(j)}(t)$.

IV.

$$\bar{\omega}(1) = \begin{vmatrix} T_1(1) & \dots & T_{n-1}(1)\bar{H}_n(1) \\ \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ T_1^{(n-2)}(1) & \dots & T_{n-1}^{(n-2)}(1)\bar{H}_n^{(n-2)}(1) \\ \bar{T}_1^{(n-1)}(1) & \dots & \bar{T}_{n-1}^{(n-1)}(1)\bar{\bar{H}}_n^{(n-1)}(1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\bar{T}_i^{(n-1)}(t) \equiv T_i^{(n-1)}(t) + S_i(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $\bar{\bar{H}}_n^{(n-1)}(t) \equiv \bar{H}_n^{(n-1)}(t) + \tilde{H}_n(t)$, а функций $T_i^{(j)}(t)$, $\bar{H}_n^{(j)}(t)$, $S_i(t)$, $\tilde{H}_n(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{0, n-1}$ определенным образом выражаются через коэффициенты уравнения (1).

Как известно из [4, 5], решение дифференциального уравнения, получаемого из (1) при $H_i(t,x) \equiv 0$, $i = \overline{0, n-1}$, уходит на бесконечность при $\varepsilon \to 0$ в полуинтервале $0 \leqslant t < 1$ и не имеет конечного предела. В настоящей работе исследуется вопрос: асимптотическое поведение решения интегро-дифференциальной задачи (1), (2) аналогично ли указанному асимптотическому поведению решения чисто дифференциальной задачи?

Теорема. *Пусть выполнены условия I-IV. Тогда на отрезке* $[a, 1]$ *для решения* $y(t,\varepsilon)$ *задачи (1), (2) справедливы следующие асимптотические при* $\varepsilon \to 0$ *оценки:*

$$\left|y^{(i)}(t,\varepsilon)\right| \leqslant \frac{K}{\bar{\omega}(1)} \left(|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|\right), \quad i = \overline{0, n-3},$$

$$\left|y^{(n-2)}(t,\varepsilon)\right| \leqslant \frac{K}{\bar{\omega}(1)} \left(1 + \exp\left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right) \left(|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|\right),$$

$$\left|y^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right| \leqslant \frac{K}{\bar{\omega}(1)} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \exp\left(-\gamma \frac{t-a}{\varepsilon}\right)\right) \left(|\alpha_0| + \cdots + |\alpha_{n-1}| + \|F(t)\|\right),$$

где $K > 0$, $\gamma > 0$ *— некоторые постоянные, не зависящие от* ε.

Из теоремы следует, что асимптотическое поведение решения интегро-дифференциальной задачи (1), (2) качественно отличается от поведения решений чисто дифференциальной задачи, т.е. при $\varepsilon \to 0$ не уходит на бесконечность на всем интервале $0 \leqslant t < 1$, а только на $0 \leqslant t < a$. На $a < t \leqslant 1$, решение интегро-дифференциальной задачи (1), (2) имеет конечный предел при $\varepsilon \to 0$. При $a = 1$ интегро-дифференциальное уравнение (1) обращается в дифференциальное уравнение и его решение стремится к бесконечности на промежутке $0 \leqslant t < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Касымов К. А., Дауылбаев М. К.* Об оценке решений задачи Коши с начальным скачком любого порядка для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35, № 6. С. 822–830.
2. *Дауылбаев М. К., Касымов К. А.* Задача Коши с начальными скачками для линейных сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений / Ред. Сиб. мат. журн. Сиб. отд. РАН, Новосибирск, 2003. 20 с. (Деп. в ВИНИТИ, 13.03.2003, № 449-В 2003).
3. *Касымов К. А., Дауылбаев М. К.* Сингулярно возмущенные линейные интегро-дифференциальные уравнения с начальными скачками любого порядка // Известия вузов. Математика. 2003. № 7(494). С. 70–74.
4. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
5. *Иманалиев М. И.* Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем. Фрунзе: Илим, 1972. 356 с.
6. *Векуа Н. П.* О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях с малым параметром // Сообщения АН Грузинской ССР. 1964. Т. 36, № 3.

УДК 517.953+517.983

О СВОЙСТВАХ МАТРИЧНЫХ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

© Г. В. Демиденко

demidenk@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Доклад посвящен теории матричных квазиэллиптических операторов

$$\mathcal{L}(D_x) = \begin{pmatrix} l_{11}(D_x) & \dots & l_{1m}(D_x) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{m1}(D_x) & \dots & l_{mm}(D_x) \end{pmatrix}, \quad x \in R^n.$$

Рассматриваются два класса матричных квазиэллиптических операторов в R^n и изучается их действие в некоторых шкалах весовых соболевских пространств [1]:

$$\mathcal{L}(D_x): \ W \to V.$$

Основными результатами являются теоремы об изоморфизме операторов $\mathcal{L}(D_x)$ в специальных пространствах. Эти результаты используются при исследовании краевых задач для квазиэллиптических систем, при изучении симметрических “почти”-гиперболических систем, имеют приложения в теории уравнений, не разрешенных относительно старшей производной [2].

Доказанные теоремы об изоморфизме обобщают некоторые утверждения из [3–5]. Близкие вопросы рассмотрены в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00289) и Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционный проект № 2.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г. В.* О весовых соболевских пространствах и интегральных операторах, определяемых квазиэллиптическими уравнениями // Докл. Академии наук (Россия). 1994. Т. 334, № 4. С. 420–423.
2. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
3. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1056.
4. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса матричных дифференциальных операторов // Докл. Академии наук (Россия). 2003. Т. 391, № 1. С. 10–13.
5. *Демиденко Г. В.* Об одном классе матричных дифференциальных операторов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 103–118.
6. *Hile G. N.* Fundamental solutions and mapping properties of semielliptic operators // Mathematische Nachrichten. 2006. Vol. 279, iss. 13–14. P. 1538–1564.

УДК 517.95

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КЛАССАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСТУЩИХ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

© В. Н. Денисов

V.Denisov.g23@g23.relcom.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Изучаются достаточные условия на младшие коэффициенты параболического уравнения, при выполнении которых решение задачи Коши

$$\Delta\, u+\bar{b}(x,t)\nabla\, u+c(x,\,t)u-\frac{\partial u}{\partial t}=0,\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0, \tag{1}$$

$$u(x,\,0)=u_0(x),\quad x\in\mathbb{R}^N, \tag{2}$$

имеет предел

$$\lim_{t\to\infty}u(x,\,t)=0 \tag{3}$$

равномерно по x на любом компакте K в $\mathbb{R}^N$, при любой начальной функции $u_0(x)$, растущей на бесконечности не быстрее, чем $|x|^m e^{a|x|^n}$, $a>0$, где

$$\bar{b}(x,\,t)\cdot\nabla u=\sum_{i=1}^{N}b_i(x,\,t)\frac{\partial u}{\partial x_i},\quad c(x,t)\leqslant 0,\quad x\in\mathbb{R}^N,\quad t>0.$$

Коэффициенты $b_1(x,t)$, $\ldots$, $b_N(x,t)$ удовлетворяют условию

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N,\,t>0}(1+|x|)\sum_{i=1}^{N}|b_i(x,\,t)|=B<\infty. \tag{4}$$

Будут изучены две группы условий (C_1), (V_1) и (C_2), (V_2).

Условие (C_1). Существуют постоянные $\alpha>0$, $0<k<1$ такие, что

$$c(x,\,t)\leqslant-\frac{\alpha^2}{|x|^{2k}},\quad |x|>1,\ t>0.$$

Условие (V_1). Существуют постоянные $a>0$, $0<k<1$ такие, что

$$|u_0(x)|\leqslant C\,(1+|x|)^{\alpha_1}\cdot\exp\{a|x|^{1-k}\},\quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha_1=\alpha_1(N,k,B).$$

Условие (C_2). Существуют постоянные $\beta>0$, $0<l<1$ такие, что

$$c(x,\,t)\leqslant-\beta^2(1+|x|^{2l}),\quad |x|\in\mathbb{R}^N,\ t>0.$$

Условие (V_2). Существуют постоянные $\alpha_2>0$, $b>0$, $0<l<1$ такие, что

$$|u_0(x)|\leqslant C\,(1+|x|)^{-\alpha_2}\cdot\exp\{b\,|x|^{1+l}\},\quad x\in\mathbb{R}^N,\ \alpha_2=\alpha_2(N,l,B).$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты* $b_1(x,t)$, $\ldots$, $b_N(x,t)$ *удовлетворяют* (4), *и для некоторых* $a>0$, $0<k<1$ *функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (V_1), *а коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_1) *при*

$$\alpha > a(1-k). \tag{5}$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *имеет предел* (3) *равномерно по* x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Условие (5) является точным и не может быть заменено на $\alpha \leqslant a(1-k)$.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* $b_1(x,t)$, $\ldots$, $b_N(x,t)$ *удовлетворяют* (4), *и для некоторых* $b>0$, $0<l<1$ *функция* $u_0(x)$ *удовлетворяет условию* (V_2), *а коэффициент* $c(x,t)$ *удовлетворяет условию* (C_2) *при*

$$\beta > b(1+l). \tag{6}$$

Тогда решение задачи Коши (1), (2) *имеет предел* (3) *равномерно по* x *на любом компакте* K *в* $\mathbb{R}^N$.

Замечание. Условие (6) является точным и не может быть заменено на $\beta \leqslant b(1+l)$.

Обзор работ по стабилизации см. [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00288).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Успехи матем. наук. 2006. Т. 60, № 4. С. 145–212.

УДК 517.95+533

ЗАДАЧИ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© С. Л. Дерябин

SDeryabin@math.usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

Среди всех краевых задач для нелинейных систем уравнений с частными производными особое место занимают задачи со свободными границами. На таких границах заданы значения некоторых искомых функций (в задачах газовой динамики это, как правило, давление), но положение самих границ и законы их движения заранее не известны, и они — искомые элементы в соответствующих начально-краевых задачах. К таким задачам со свободными границами относятся задачи об истечении газа в вакуум.

В задачах об истечении газа в вакуум как в задачах со свободными границами имеются два принципиально различных случая: исходная поверхность раздела газ-вакуум является гладкой, а начальные условия задаются аналитическими функциями; исходная поверхность раздела газ-вакуум имеет угловую точку, или начальные условия задаются функциями, имеющими разрывные производные. В первом случае решение соответствующих начально-краевых задач построено в виде сходящихся рядов в общей трехмерной ситуации. В виде конечных формул получен точный закон движения свободной границы и значения неизвестных функций на ней [1, 2].

Во втором случае исследовались двумерные и осесимметричные течения с угловыми точками на первоначальной поверхности раздела газ-вакуум. Выявлена сложная структура течения, состоящая из нескольких областей, состыкованных между собой с помощью поверхностей слабых разрывов. Для построения решения в каждой отдельной области решена своя начально-краевая задача. Решения построены в виде сходящихся рядов и доказано, что в окрестности особой точки области сходимости рядов носят секторальный характер [1, 2].

Исследование поддержано РФФИ, проект 04-01-00205.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин С. П., Дерябин С. Л.* Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.
2. *Баутин С. П., Дерябин С. Л.* Аналитическое моделирование истечения идеального газа в вакуум // Успехи механики. 2006. Т. 4, № 1. С. 77–120.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 122–123

УДК 517.956

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© Т. И. Дёмина

de_ta@rambler.ru

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В области $\Omega = \{(x,y):\ 0<x<a,\ 0<y<b\}$ рассмотрим телеграфное уравнение

$$u_{xx} - u_{yy} - cu = 0, \quad c = \mathrm{const} \neq 0. \tag{1}$$

Выпишем краевые условия, которые будут использованы при постановке смешанных задач для уравнения (1):

$$u(0,y) = \mu_0(y), \quad u(a,y) = \mu_a(y), \quad 0<y<b, \tag{2}$$

$$u_y(x,b) = \nu_b(x), \quad 0<x<a, \tag{3}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0<x<a, \tag{4}$$

$$u(x,b) = \varphi(x), \quad 0<x<a, \tag{5}$$

$$u_y(x,0) = \nu(x), \quad 0<x<a. \tag{6}$$

Регулярным решением уравнения (1) называется решение, которое непрерывно в области Ω вместе со своими частными прозводными до второго порядка.

Задачи 1 – 3. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям: в случае 1 выполняются условия (2), (3), (4); в случае 2 — условия (2), (5), (6); в случае 3 — условия (2), (3), (6).

Используя метод разделения переменных, а также результаты работ [1, 2], доказаны теоремы.

Теорема 1. *Пусть*

1) $\nu_b(x)$, $\tau(x) \in C^4[0,\ a]$, $\mu_i(y) \in C^4[0,b]$, $i = 0, a$;

2) $\nu_b^{(n)}(0) = \nu_b^{(n)}(a)$, $\mu_i^{(n)}(0) = \mu_i^{(n)}(b)$, $\tau^{(n)}(0) = \tau^{(n)}(a)$, $n = 0,2$, $\nu_b^{(n)}(a) = \tau^{(n)}(a) = \mu_i^{(n)}(b) = 0$, $i = 0,\ a$, $n = 1,3$;

3) $\int\limits_0^a \nu_b^{(4)}(x)\sin\lambda_{4k}x\,dx = O\big(\sin\lambda_{3k}b\big)$, $\int\limits_0^a \tau^{(4)}(x)\sin\lambda_{4k}x\,dx = O\big(\sin\lambda_{3k}b\big)$, $\int\limits_0^b \mu_i^{(4)}(y)\sin\lambda_{2k}y\,dy = O\big(\sin\lambda_{1k}a\big)$, $i = 0,\ a$, $\lambda_{1k} = \sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4b^2} - c}$, $\lambda_{2k} = \frac{\pi(1+2k)}{2b}$, $\lambda_{3k} = \sqrt{\frac{\pi^2k^2}{a^2} + c}$, $\lambda_{4k} = \frac{\pi k}{a}$;

4) $\lambda_{1k}a \neq \pi m$, $\lambda_{3k}b \neq \frac{\pi}{2} + \pi m$, $k, m = 1, 2, \ldots$

Тогда существует единственное решение задачи 1.

Теорема 2. *Пусть*

1) $\varphi(x)$, $\nu(x) \in C^4[0,\ a]$, $\mu_i(y) \in C^4[0,b]$, $i = 0,\ a$;

2) $\varphi^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(a)$, $\nu^{(n)}(0) = \nu^{(n)}(a)$, $\mu_i^{(n)}(b) = 0$, $n = 0,2$, $\mu_i^{(n)}(0) = \mu_i^{(n)}(b)$, $\varphi^{(n)}(a) = \nu^{(n)}(a) = 0$, $i = 0,\ a$, $n = 1,3$;

3) $\int\limits_0^b \mu_i(y)\,dy = 0$, $i = 0,\ a$;

4) $\int\limits_0^a \varphi^{(4)}(x)\sin\lambda_{4k}x\,dx = O\big(\cos\lambda_{3k}b\big)$, $\int\limits_0^a \nu^{(4)}(x)\sin\lambda_{4k}x\,dx = O\big(\cos\lambda_{3k}b\big)$, $\int\limits_0^b \mu_i^{(4)}(y)\cos\lambda_{2k}y\,dy = O\big(\sin\lambda_{1k}a\big)$, $i = 0,\ a$, $\lambda_{1k} = \sqrt{\frac{\pi^2(1+2k)^2}{4b^2} - c}$, $\lambda_{2k} = \frac{\pi(1+2k)}{2b}$, $\lambda_{3k} = \sqrt{\frac{\pi^2k^2}{a^2} + c}$, $\lambda_{4k} = \frac{\pi k}{a}$;

5) $\lambda_{1k}a \neq \pi m\,,\ \lambda_{3k}b \neq \frac{\pi}{2}+\pi m\,,\ k,m=1,2,\ldots$

Тогда существует единственное решение задачи 2.

Теорема 3. *Пусть*

1) $\nu_b(x)\,,\ \nu(x)\in C^4[0,\,a]\,,\ \mu_i(y)\in C^4[0,b]\,,\ i=0,\,a\,;$

2) $\nu_b^{(n)}(0)=\nu_b^{(n)}(a)\,,\ \nu^{(n)}(0)=\nu^{(n)}(a)\,,\ \mu_i^{(n)}(b)=0\,,\ n=0,\,2\,,\ \mu_i^{(n)}(0)=\mu_i^{(n)}(b)\,,\ \nu_b^{(n)}(a)=\nu^{(n)}(a)=0\,,\ i=0,\,a\,,\ n=1,\,3\,;$

3) $\int\limits_0^a \nu_b^{(4)}(x)\sin\lambda_{4k}x\,dx=O\big(\cos\lambda_{3k}b\big)\,,\ \int\limits_0^a \nu^{(4)}(x)\sin\lambda_{4k}x\,dx=O\big(\cos\lambda_{3k}b\big)\,,\ \int\limits_0^b \mu_i^{(4)}(y)\cos\lambda_{2k}y\,dy=O\big(\sin\lambda_{1k}a\big)\,,\ i=0,\,a\,,\ \lambda_{1k}=\sqrt{\frac{\pi^2k^2}{b^2}-c}\,,\ \lambda_{2k}=\frac{\pi k}{b}\,,\ \lambda_3=\lambda_{3k}=\sqrt{\frac{\pi^2k^2}{a^2}+c}\,,\ \lambda_4=\lambda_{4k}=\frac{\pi k}{a}\,;$

4) $\lambda_{1k}a\neq\pi m\,,\ \lambda_{3k}b\neq\pi m\,,\ k,m=1,2,\ldots$

Тогда существует единственное решение задачи 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dunninger D. R., Zachmanoglov E. C.* The condition for uniqueness of the Dirichlet problem for hiperbolic equations in cilindrical domains // J. Math. Mech. 1969. V. 18, N 8.
2. *Дёмина Т. И.* Критерий единственности решения смешанных задач для гиперболического уравнения в цилиндрической области // Известия Кабардино-Балкарского Научного центра РАН. 2004. № 2(12). С. 112 – 115.

УДК 517.956, 517.968.2

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

© М. Т. Дженалиев, М. И. Рамазанов

dzhenali@math.kz, ramamur@mail.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Введение. Нагруженные уравнения, являясь функционально-дифференциальными уравнениями, возникают во многих приложениях и выступают предметом активных научных исследований [1–3]. В докладе рассматриваются граничные задачи для нагруженного параболического уравнения. Особенностью изучаемого уравнения является тот факт, что порядок производной нагруженного слагаемого совпадает с порядком дифференциальной части уравнения, так что нагрузка не является слабым возмущением. Спектральный параметр является коэффициентом нагрузки. Описаны множества значений спектрального параметра, для которых граничная задача оказывается нетеровой.

Постановки задач. Пусть $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$. Рассмотрим в области $Q = \{x \in \mathbb{R}_+,\ t \in \mathbb{R}_+\}$ следующие граничные задачи:

$$Lu + \lambda u_{xx}(x,t)|_{x=t} = f, \tag{1}$$

$$L^* v + \overline{\lambda}\delta''(x-t) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\, d\xi = g, \tag{2}$$

и спектральные задачи:

$$Lu = -\lambda u_{xx}(x,t)|_{x=t} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_t - u_{xx} = -\lambda u_{xx}(x,t)|_{x=t}, \\ u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$L^* v = -\overline{\lambda}\delta''(x-t) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\, d\xi \Longleftrightarrow \begin{cases} -v_t - v_{xx} = -\lambda\delta''(x-t) \otimes \int\limits_0^\infty v(\xi,t)\, d\xi, \\ v(x,\infty) = 0, \quad v(0,t) = v(\infty,t) = v_x(\infty,t) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

где

$$\lambda \in \mathbb{C} \quad \text{— спектральный параметр,} \quad \sqrt{t}\, f \in M(Q), \quad (x+\sqrt{t})g \in L_1(Q), \tag{5}$$

заданные функции, $M(Q) = L_\infty(Q) \cap C(Q), M(\mathbb{R}_+) = L_\infty(\mathbb{R}_+) \cap C(\mathbb{R}_+)$, функция Грина $G(x,\xi,t-\tau)$ для оператора L.

Определим функциональные классы $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ для решений соответственно граничных задач (1) и (2), а также области определения $\mathcal{D}(L)$ и $\mathcal{D}(L^*)$ операторов L и L^* соответственно следующим образом:

$$\mathcal{U} = \{u|\ (x+\sqrt{t}\,)^{-1}u,\ \sqrt{t}(u_t - u_{xx}) \in M(Q),\ \sqrt{t}\, u_{xx}(x,t)|_{x=t} \in M(\mathbb{R}_+)\}, \tag{6}$$

$$\mathcal{V} = \left\{v|\ t^{-1/2}v,\ (x+\sqrt{t}\,)(v_t + v_{xx}) \in L_1(Q),\ t^{-1/2}\int\limits_0^\infty v(\xi,t)\, d\xi \in L_1(\mathbb{R}_+)\right\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{D}(L) = \{u|\ u \in \mathcal{U},\ u(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0\}, \tag{8}$$

$$\mathcal{D}(L^*) = \{v|\ v \in \mathcal{V},\ v(x,\infty) = 0,\ v(0,t) = 0,\ v(\infty,t) = 0,\ v_x(\infty,t) = 0\}. \tag{9}$$

Задача 1. Требуется исследовать вопросы разрешимости граничных задач (1) и (2) при условиях (5)–(9).

Задача 2. Требуется исследовать спектральные задачи (3) и (4) по определению пар $\{\lambda, u_\lambda(x,t)\}$ и $\{\lambda, v_\lambda(x,t)\}$ при условиях (6)–(9).

Основные результаты. Исследование граничных задач (1) и (2) сводится к изучению вопросов разрешимости пары сопряженных интегральных уравнений:

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \mathcal{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau = f_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{10}$$

$$\nu(t) - \lambda \int\limits_t^\infty \mathcal{K}_2(\tau,t)\nu(\tau)\,d\tau = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{11}$$

где $f_1(t)$ и $g_1(t)$ определяются с помощью заданных функций $f(x,t)$ и $g(x,t)$ соответственно, и

$$\mathcal{K}_2(t,\tau) = \frac{t^{3/2}}{2\sqrt{\pi\tau}(t-\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{t^2}{4(t-\tau)}\right).$$

Замечание. Для ядра $\mathcal{K}_2(t,\tau)$ имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{t\to+0} \int\limits_0^t \mathcal{K}_2(t,\tau)\,d\tau = \lim_{t\to+0} \exp\left(\frac{-t}{4}\right) = 1.$$

Из этого предельного соотношения следует, что норма интегрального оператора, действующего в пространстве ограниченных и непрерывных функций и определяемого ядром $\mathcal{K}_2(t,\tau)$, равна единице (хотя ядро $\mathcal{K}_2(t,\tau)$ имеет интегрируемую особенность). Это принципиальным образом отличает уравнение (10) от уравнений Вольтерры второго рода, для которых, как известно, решение существует и единственно. В нашем случае решение соответствующего однородного уравнения

$$\mu(t) - \lambda \int\limits_0^t \mathcal{K}_2(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

для некоторых значений $\lambda \in \mathbb{C}$ может быть и нетривиальным. Это показано в нижеследующих утверждениях.

Теорема 1. *Граничная задача (1) в классе (8) является нетеровой с неотрицательным индексом, определяемым значением модуля спектрального параметра λ.*

Теорема 2. *На комплексной плоскости у оператора L^* (4) нет собственных значений.*

Аналогичное утверждение установлено в спектральной задаче для оператора L^* (3) в классе (9).

Доказательства теорем 1 и 2 основаны на применении метода регуляризации решением характеристических уравнений [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
2. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Математические заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840–853.
3. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничной задаче для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности // Сибирский математический журнал. 2006. Т. 47, № 3. С. 527–547.

УДК 517.95

О СПЕКТРАЛЬНО-НАГРУЖЕННЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© М. Т. Дженалиев*, М. И. Рамазанов*, Б. С. Кошкарова**

dzhenali@math.kz, ramamur@mail.ru, b_koshkarova@mail.ru

* Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан;
** Карагандинский государственный университет им. Е. А. Букетова, Караганда, Казахстан

Постановка задачи. В области $Q = \{x, t | \, x \in \Omega, \ \Omega \subset R^n, \ 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости граничной задачи для спектрально–нагруженного параболического уравнения [1–3]

$$\mathbb{L}_5 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int\limits_{\Gamma_1} \alpha(x, \xi') \frac{\partial^k u(\overline{x}_1, \xi', t)}{\partial x_1^k} d\xi' = f \quad \text{в} \ \ Q; \tag{1}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{в} \ \ \Sigma = \{x, t | x \in \partial\Omega, \ t \in (0, 2\pi)\}, \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(x, 2\pi), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

где $\partial\Omega$ — граница области Ω, $x' = \{x_2, \ldots, x_n\}$, $\xi' = \{\xi_2, \ldots, \xi_n\}$,

$$\left\{ \begin{array}{c} \Gamma_1 - \ \text{сечение области} \ \ \Omega \ \text{при фиксированном} \ x_1 = \overline{x}_1, \\ \alpha \in L_2(\Gamma_1; W_2^{2m}(\Omega)), \ f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(\Omega)) - \ \text{заданные функции}, \\ k \geqslant 2, \quad m = \left\{ \begin{array}{ll} k/2, & \text{если } k - \ \text{четное число}, \\ (k-1)/2, & \text{если } k - \ \text{нечетное число}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Основной результат. Имеет место

Теорема. *Пусть $n \geqslant 3$, Ω — единичный шар с центром в начале координат. В этом случае для любых $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0,1))$, $\alpha \in \mathbb{C}$ граничная задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение $u(x,t)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} \alpha \cdot \text{meas}\{\Gamma_1\} \neq n, & \text{если } k = 2, \\ \text{для любых } \alpha, & \text{если } k \geqslant 3; \end{array} \right. \\ \delta_s \neq 0, \ \forall s \in S, \ \ S = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{array} \right.$$

где используются обозначения:

$$\delta_s = 1 + \alpha \cdot \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial^k \beta_s(\overline{x}_1, x')}{\partial x_1^k} dx' \neq 0, \ \forall s \in S,$$

$$\beta_s(r) = \int\limits_0^1 G_s(r, \rho) d\rho, \ \ \forall s \in S. \tag{4}$$

В соотношении (4) $G_s(r,\rho)$ — обобщенная функция Грина эллиптической части оператора задачи (1)–(3)

$$G_s(r,\rho) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \dfrac{[I_\nu(\lambda) K_\nu(\lambda r) - I_\nu(\lambda r) K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda\rho)}{I_\nu(\lambda)}, & 0 \leq \rho \leq r, \\ \dfrac{\rho^{\nu+1}}{r^\nu} \cdot \dfrac{[I_\nu(\lambda) K_\nu(\lambda\rho) - I_\nu(\lambda\rho) K_\nu(\lambda)] \cdot I_\nu(\lambda r)}{I_\nu(\lambda)}, & r \leq \rho \leq 1, \end{array} \right.$$

здесь $I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя, $\nu = n/2 - 1$.

Для изучения задачи (1)–(3) в области Q рассматривается следующая вспомогательная нелокальная задача:

$$\mathbb{L}_6 u \equiv (-1)^m \Delta^m v(x,t) = F(x,t), \quad \{x,t\} \in Q, \tag{5}$$

$$u(x,t) = 0, \quad \frac{\partial^j v(x,t)}{\partial \vec{n}^j} = G_j(x,t), \quad \{x,t\} \in \Sigma, \quad j = \overline{0, m-1}, \tag{6}$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi), \quad x \in (0,1), \tag{7}$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$,

$$F(x,t) \equiv (-1)^m \Delta^m f(x,t), \quad G_j(x,t) \equiv \frac{\partial^j f(x,t)}{\partial \vec{n}^j}, \quad j = \overline{0, m-1},$$

$$v(x,t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int\limits_{\Gamma_1} \alpha(x,\xi') \frac{\partial^k u(\overline{x}_1, \xi', t)}{\partial x_1^k} d\xi', \quad \{x,t\} \in Q.$$

Граничные задачи (1)–(3) и (5)–(7) взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи (5)–(7) будет таковым и для задачи (1)–(3). Обратно, если регулярное решение задачи (1)–(3) обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи (5)–(7).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дженалиев М. Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М., 1995.
3. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* О граничных задачах для “существенно” нагруженных параболических уравнений в ограниченных областях. I (одномерный случай) // Докл. АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 32–36.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 128–129

УДК 517.968.72

ПРИЗНАКИ КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Д. С. Джумабаев*, Э. А. Бакирова

* dzhumabaev@list.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Одним из основных методов исследования интегро-дифференциальных уравнений является метод Некрасова [1], где с помощью фундаментальной системы решений соответствующего однородного дифференциального уравнения и ядра интегрального члена строится вспомогательное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Предполагая, что это интегральное уравнение однозначно разрешимо, решение краевой задачи сводится к нахождению решения системы алгебраических уравнений, определяемых по краевым условиям, фундаментальной матрице и резольвенте построенного уравнения.

Другим часто применяемым методом исследования краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений является метод функций Грина. В этом методе предполагается однозначная разрешимость краевой задачи для соответствующего дифференциального уравнения и исходная краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с ядром, составляемым через функцию Грина и ядра интегрального члена исходного интегро-дифференциального уравнения. Однако эти методы дают лишь достаточные условия однозначной разрешимости краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения.

В сообщении рассматривается линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + f(t), \quad t \in [0,T], \quad x \in R^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{2}$$

где $A(t)$, $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |x_i|$.

Возьмем $h > 0: \ mh = T$ и задачу (1), (2) аппроксимируем двухточечной краевой задачей для нагруженных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + \sum_{i=1}^{m} \int_{(i-1)h}^{ih} K(t,s)dsy[(i-1)h] + f(t), \quad t \in [0,T], \quad y \in R^n, \tag{3}$$

$$By(0) + Cy(T) = d, \quad d \in R^n, \tag{4}$$

Применяя к задаче (3), (4) метод параметризации [2], получим систему уравнений относительно параметров $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)' \in R^{nm}$

$$B\lambda_1 + C\Big[I + D_{\nu m}(h)\Big]\lambda_m + C\sum_{i=1}^{m} H^i_{\nu m}(h)\lambda_i = b_1, \tag{5}$$

$$\Big[I + D_{\nu s}(h)\Big]\lambda_s + \sum_{i=1}^{m} H^i_{\nu s}(h)\lambda_i - \lambda_{s+1} = b_{s+1}, \quad s = \overline{1, m-1}, \tag{6}$$

где

$$D_{\nu r}(h) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)d\tau_1 + \dots + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)\dots \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} A(\tau_\nu)d\tau_\nu \dots d\tau_1,$$

$$H^i_{\nu r}(h) = \int\limits_{(r-1)h}^{rh} K_i(\tau_1)d\tau_1 + \int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_1} K_i(\tau_2)d\tau_2 d\tau_1 + \dots +$$

$$\int\limits_{(r-1)h}^{rh} A(\tau_1)\dots \int\limits_{(r-1)}^{\tau_{\nu-2}} A(\tau_{\nu-1}) \int\limits_{(r-1)h}^{\tau_{\nu-1}} K_i(\tau_\nu)d\tau_\nu d\tau_{\nu-1}\dots d\tau_1, \quad r=\overline{1,m}, \quad i=\overline{1,m},$$

Матрицу, соответствующую левой части систем линейных уравнений (5), (6), обозначим через $Q_\nu(h)$.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $\nu \in \mathbb{N}$ *матрица* $Q_\nu(h) : R^{nm} \to R^{nm}$ *обратима и выполняются неравенства*

$$a)\ \|[Q_\nu(h)]^{-1}\| \le \gamma_\nu(h),$$

$$b)\ q_\nu(h) = \gamma_\nu(h)\max(1, h\|C\|)\Big\{e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu}\frac{(\alpha h)^j}{j!} + m\beta h\Big(e^{\alpha h} - \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\Big)\Big\} < 1,$$

где $\alpha = \max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t)\|$, $\beta = \max\limits_{(t,s)\in[0,T]\times[0,T]}\|K(t,s)\|$. *Тогда краевая задача (3), (4) имеет единственное решение* $y(t)$ *и справедлива оценка*

$$\|y\|_1 = \max_{t\in[0,T]}\|y(t)\| \le M_\nu(h)\max(\|f\|_1, \|d\|),$$

где

$$M_\nu(h) = \Big\{\gamma_\nu(h)\Big(e^{\alpha h} - 1 + e^{\alpha h}m\beta h\Big)\max\Big(1 + h\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\Big) + e^{\alpha h}\Big\}h\times$$

$$\Big\{\gamma_\nu(h)\Big(e^{\alpha h} + e^{\alpha h}m\beta h\Big)\max\Big(1, h\|C\|\Big)\frac{1}{1-q_\nu(h)}\frac{(\alpha h)^\nu}{\nu!} + 1\Big\} +$$

$$\gamma_\nu(h)\max\Big[1 + h\|C\|\sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}, \sum_{j=0}^{\nu-1}\frac{(\alpha h)^j}{j!}\Big]h.$$

Теорема 2. *Краевая задача (1), (2) корректно разрешима тогда и только тогда, когда существуют числа* $h > 0 :\ mh = T$, $\nu \in \mathbb{N}$, *при которых матрица* $Q_\nu(h)$ *обратима и вместе с неравенствами* a), b) *теоремы 1 имеет место*

$$\delta_{\nu l}(h) = \frac{1}{2}\Big[(\alpha + \beta T)M_{\nu l}(h) + 1\Big]\beta T h < 1.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Некрасов А. И.* Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений // Тр. ЦАГИ. 1934. Вып. 190. С. 1–25.
2. *Джумабаев Д. С.* Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, № 1. С. 50–66.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 130–131

УДК 517.956

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© Т. Д. Джураев, Б. И. Жамолов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Пусть $D = D_1 \cup J \cup D_2$, где $D_1 = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ 0 < y < h\}$, $D_2 = \{(x,y):\ -y < x < y+1,\ -\frac{1}{2} < y < 0\}$, $J = \{(x,y):\ 0 < x < 1,\ y = 0\}$, $h \in R$. В области D рассмотрим уравнения

$$(a\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial x} + c)Lu = 0, \tag{1}$$

$$\left(a\frac{\partial^2}{\partial y^2} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\right)Lu = 0, \tag{2}$$

где $a,\, b,\, c \in R,\ a \neq 0$,

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y) \in D_2. \end{cases}$$

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:
1) непрерывна в $\overline{D}$;
2) является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;
3) удовлетворяет граничным условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$u_{xx}(0,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{3}$$

$$u_{xx}(1,y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h, \tag{4}$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

где n — внутренняя нормаль, $\varphi_i,\ \psi_i\,(i = \overline{1,4})$ — заданные функции, причём $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^1(0 \leqslant y \leqslant h)$, $\varphi_3(y)$, $\varphi_4(y) \in C(0 \leqslant y \leqslant h)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x) \in C^1\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $\psi_3(x) \in C^1\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$;
4) выполняются условия склеивания

$$u(x,-0) = u(x,+0),$$

$$u_y(x,-0) = u_y(x,+0).$$

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:
1) $u(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$;

2) $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D при $y \neq 0$;

3) частные производные по y первого, второго и третьего порядков функции $u(x,y)$ непрерывны в области D;

4) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad u(1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

$$u|_{AC} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{AC} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{AC} = \psi_4(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{BC} = \psi_5(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,$$

где n — внутренняя нормаль, φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 — заданные функции, причём $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y) \in C^3(0 \leqslant y \leqslant h)$, $\psi_1(x) \in C^3\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $\psi_2(x) \in C^2\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $\psi_4(x) \in C^1\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $\psi_3(x) \in C^2\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$, $\psi_5(x) \in C^1\left(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1\right)$, $\varphi_1(0) = \psi_1(0)$.

В работе получены явные решения задач 1 и 2.

Если в задаче 1 условия (3) и (4) заменить условиями

$$u_x(0,y) = \varphi_3(y), \quad u_x(1,y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant h,$$

то решение задачи 1 в этом случае сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
2. *Джураев Т. Д., Мамажанов М.* Об одном классе краевых задач для уравнения высокого порядка с параболо-гиперболическим оператором // УзМЖ. 1995. № 4. С. 35–41.
3. *Жамолов Б. И.* Краевые задачи для уравнения параболо-гиперболического типа четвертого порядка // УзМЖ. 2006. № 4. С. 11–25.

УДК 517.956.3

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Т. Д. Джураев, О. С. Зикиров

mathinst@uzsci.net, zikirov@yandex.ru

Институт математики им. В. И.Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В настоящее время нелокальные задачи с интегральными условиями весьма активно исследуются (см., например, [1–4]), но при этом в основном рассматриваются уравнения второго порядка, как в одномерных [1, 2], так и в многомерных [3] областях. Следует отметить, что задачи с интегральными условиями для уравнений в частных производных высокого, в частности, третьего порядка еще мало исследованы.

В данной работе рассматривается нелокальная задача с интегральными граничными условиями для одного уравнения в частных производных третьего порядка.

В области $D = \{(x,y) : 0 < x < l, \;\; 0 < y < h\}$ исследуется классическая разрешимость следующей ЗАДАЧИ: найти в области D решение $u(x,y)$ уравнения

$$\left(\alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + c(x,y)u = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad \int\limits_0^h u(x,y)dy = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad \int\limits_0^l u(x,y)dx = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \tag{3}$$

где α, β — заданные постоянные, причем $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$, а $\psi_i(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i = 1,2)$ — заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяюшее условиям согласования

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \quad \int\limits_0^h \varphi_1(y)dy = \psi_2(0),$$

$$\int\limits_0^l \psi_1(x)dx = \varphi_2(0), \quad \int\limits_0^l \psi_2(x)dx = \int\limits_0^h \varphi_2(y)dy.$$

Очевидно, что прямые $x = const$, $y = const$ являются характеристиками уравнения (1) и граничные условия задаются в интегральном виде, поэтому задачу (1)–(3) будем называть интегральной задачей Гурса.

Под *классическим решением задачи* (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $C^2(\overline{D})\bigcap C^3(D)$, удовлетворяющую уравнению (1) и условиям (2), (3).

В работе доказывается существование и единственность классического решения нелокальной задачи (1)–(3).

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $\alpha = \beta > 0$ *и коэффициент* $c(x,y)$ *уравнения (1) ограничен вместе со своими производными и удовлетворяет условиям*

$$c(x,y) \in C^2(D), \quad c_{xy} \leq 0, \quad c_x c_y - c^2 \geq 0 \quad \textit{в области} D.$$

Пусть выполнены условия

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x) \in C^2[0,l], \quad \varphi_1(y),\ \varphi_2(y) \in C^2[0,h].$$

Тогда задача (1)–(3) имеет не более одного классического решения в области D.

Отметим, что рассмотренная задача с интегральными условиями может быть изучена для общего линейного уравнения в частных производных третьего порядка вида

$$\left(\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y}\right) u_{xy} + Lu = f(x,y), \tag{4}$$

где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu \equiv a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c\,(x,y)u_{yy} + a_1(x,y)u_x + b_1(x,y)u_y + c_1(x,y)u.$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (4) являются заданными действительными функциями в области D.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пулькина Л. С.* // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 7. С. 887–892.
2. *Пулькина Л. С.* // Математические заметки. 2003. Т. 74, вып. 3. С. 435–445.
3. *Кожанов А. И., Пулькина Л. С.* // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, № 9. С. 1166–1179.
4. *Кожанов А.И.* // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 763–774.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 134–135

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

© Т. Д. Джураев, А. Г. Ходжаниязов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В последние годы возрос интерес к изучению спектральных задач для неклассических уравнений математической физики (см., например, [1–3]).

В работе [4] впервые были поставлены и исследованы спектральные краевые задачи для уравнений составного типа третьего и четвертого порядков: в частности, были вычислены собственные значения и собственные функции ряда краевых задач для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u_{xx}+u_{yy}\right)+\lambda u=0.$$

В настоящем сообщении речь идёт об одной новой спектральной краевой задаче для уравнения

$$u_{xxx}+\operatorname{sign} y\, u_{yyy}+\lambda u=0, \tag{1}$$

которое как при $y>0$, так и при $y<0$ является уравнением составного типа (см. [5]).

Задача. В прямоугольной области $D=\{(x,\,y):\ 0<x<p,\ -q<\ y<q\}$ найти собственные значения и собственные функций уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям:

$$u|_{\partial D}=0,\ \ u_x(0,\,y)=0,\ \ u_y(x,\,-q)=0,$$

а также условиям склеивания:

$$u\left(x,-0\right)u\left(x,+0\right),\ \ u_y\left(x,-0\right)=u_y\left(x,+0\right),\ \ u_{yy}\left(x,-0\right)=u_{yy}\left(x,+0\right).$$

Для поставленной задачи найдены собственные значения, которые являются корнями уравнений

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}ap\right)=\frac{1}{2}e^{3ap},\ a<0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}bq\right)=\frac{1}{2}e^{3bq},\ b<0,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}bq\right)=\frac{1}{2}e^{-3bq},\ b>0,$$

где $a=\frac{\sqrt[3]{-\mu}}{2},\ \ b=\frac{\sqrt[3]{-\nu}}{2}$.

Собственные функции задачи имеют вид

$$u_{kl}\left(x,y\right)=X_k\left(x\right)Y_l\left(y\right)=X_k\left(x\right)\begin{cases}Y_{1l}\left(y\right), & y>0,\\ Y_{2l}\left(y\right), & y<0\end{cases}\ \ (k=1,2,\ldots,\ \ l=\pm1,\pm2,\ldots),$$

где

$$X_k\left(x\right)=e^{2a_kx}-\left(\cos\sqrt{3}a_kx+\sqrt{3}\sin\sqrt{3}a_kx\right)e^{-a_kx},$$

$$Y_{1l}\left(y\right)=M_1e^{2b_ly}+\left(N_1\cos\sqrt{3}b_ly+Q_1\sin\sqrt{3}b_ly\right)e^{-b_ly},\ \ y>0,$$

$$Y_{2l}\left(y\right) = M_2 e^{-2b_l y} + \left(N_2 \cos\sqrt{3}b_l y + Q_2 \sin\sqrt{3}b_l y\right) e^{b_l y},\ \ y < 0,$$

здесь

$$M_1 = e^{-3b_l q} + 2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}b_l q + 2\cos\sqrt{3}b_l q,\ \ M_2 = 3e^{-3b_l q},$$

$$N_1 = 2e^{-3b_l q} + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}b_l q - 5\cos\sqrt{3}b_l q,\ \ N_2 = 3\left(\sqrt{3}\sin\sqrt{3}b_l q - \cos\sqrt{3}b_l q\right),$$

$$Q_1 = -2\sqrt{3}e^{-3b_l q} + 3\sin\sqrt{3}b_l q - \sqrt{3}\cos\sqrt{3}b_l q,\ \ Q_2 = 3\left(\sqrt{3}\cos\sqrt{3}b_l q + \sin\sqrt{3}b_l q\right).$$

Доказано, что $\lambda = 0$ не является собственным числом задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А.* Спектральная теория дифференциальных операторов. Разложение по фундаментальным функциям самосопряженных эллиптических операторов. М.: изд. МГУ, 1988.
2. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. М.: изд. МГУ, 1988.
3. *Кальменов Т. Ш.* Спектр краевой задачи со смещением для волнового уравнения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1.
4. *Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А.* Вычисление собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков // Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения. Ташкент: Фан, 1989. С. 24–36.
5. *Джураев Т. Д., Попелек Я.* О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1734–1745.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 136–137

УДК 517.958:539.4

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

© В. Л. Дильман

dilman@74.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

В сообщении рассматривается напряженное состояние мягкой поперечной неоднородной прослойки прямоугольного сечения в листовом образце (плоская деформация) под растягивающей нагрузкой. Напряженное состояние неоднородного пластического слоя при плоской деформации описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4Z(x,y)^2, \tag{3}$$

которая содержит три неизвестных безразмерных компонента тензора напряжений σ_x, σ_y, $\tau_{xy} = \tau$, т. е. замкнута в напряжениях. Здесь (1) и (2) — уравнения равновесия, (3) — условие пластичности Мизеса, $Z(x,y)$ — предел текучести. Основной материал и материал прослойки предполагаются однородными и изотропными, с одинаковыми механическими характеристиками в упругой зоне, но с разными пределами текучести. Носителем системы (1)–(3) является прямоугольная область, моделирующая поперечное сечение прослойки. Из соображений симметрии рассматривается четверть сечения: $x \in [0;1]$, $y \in [0;\chi]$, где χ — относительная толщина прослойки. Имеют место граничные условия

$$\tau(0,y) = 0, \quad \sigma_x(1,y) = 0, \quad \tau(1;y) = 0, \quad \tau(x;0) = 0.$$

Пусть в каждый момент нагружения известно наибольшее значение τ на контактной поверхности:

$$\tau(x_0,\chi) = \max \tau(x,\chi) = \alpha, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \quad x \in [0;1]$$

Обозначения: $Z(x,\chi) = K_c$ (считаем $Z(x,0) = 1$); K — коэффициент механической неоднородности соединения, то есть отношениепредела текучести основного материала соединения к K_c. По условию, $K >1$.

Система (1)–(3) исключением неизвестной σ_y сводится к квазилинейной системе уравнений гиперболического типа, которая в характеристической форме [1] в случае, когда функция Z зависит от одной переменной, может быть записана в виде (когда Z зависит y):

$$\frac{d(\sigma_x + \nu_i)}{dy} = \frac{dZ}{dy}\left(-1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{Z}\right)^2 \pm \frac{1}{3}\left(\frac{\tau}{Z}\right) - \dots\right), \qquad i = 1,2, \tag{4}$$

где

$$\nu_i = \sqrt{Z^2 - \tau^2} \pm \arcsin \tau/Z, \qquad i = 1;2.$$

В случае, когда τ относительно мала (наиболее важный случай в приложениях к сварным соединениям), уравнения (4) приближенно интегрируются вдоль характеристик:

$$\sigma_x + \nu_i - Z = \mathrm{const}\,. \tag{5}$$

Например, если $\max\tau \leq 0,3$, относительная ошибка в последнем равенстве составляет около 0,02. Точнее говоря, имеет место

Предложение 1. *Относительная ошибка в равенстве (5) не превышает*

$$\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{K_c-1}{K_c}+\frac{\alpha}{3(1-\alpha)}\right).$$

Формула (5) позволяет, применяя известную методику [2], вычислить максимальные значения касательных напряжений на контактной поверхности.

Предложение 2. *В пределах точности, указанной в предложении 1,*

$$\alpha=\max\tau(\chi)=\frac{2K_c(K-1)}{1+K_c}\left(1+\frac{(K-K_c^2)(K-1)}{K(1+K_c)^2}\right).$$

Пусть γ — острый угол наклона характеристики к положительному направлению оси OX. Уравнения (5) позволяют получить результат, обобщающий теорему H. Hencky [3].

Теорема. *В пределах указанной точности на характеристиках с положительным углом наклона к оси OX*

$$\sigma_x=Z(2\gamma-\pi/2-\sin 2\gamma+1)+C,\qquad \sigma_y=Z(2\gamma-\pi/2+\sin 2\gamma+1)+C;$$

на характеристиках с отрицательным углом наклона к оси OX

$$\sigma_x=Z(-2\gamma+\pi/2-\sin 2\gamma+1)+C,\qquad \sigma_y=Z(-2\gamma+\pi/2+\sin 2\gamma+1)+C.$$

При $Z=1$ отсюда получаются известные формулы [3].

Полученные результаты, в частности, формула предложения 2, позволяют, с помощью методики работы [4], найти напряженное состояние и предельную нагрузку для мягкой прослойки переменной прочности, расположенной поперек растягиваемой полосы, в практически важном случае, когда основной материал в зонах вблизи прослойки вовлекается в пластическую деформацию.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 05-08-18179).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978. 688 с.
2. *Дильман В. Л.* Напряженное состояние и прочность неоднородных соединений, содержащих трещиноподобные поверхностные макродефекты на границе твердого и мягкого участков // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2002. Т. 9, вып. 1. С. 186–187.
3. *Генки Г. О.* О некоторых статически определимых случаях равновесия в пластических средах // Теория пластичности / Под. ред. Ю.Н.Работнова. М.: Изд-во иностр. лит., 1948. С. 80–101.
4. *Дильман В. Л., Остсемин А. А.* Напряженное состояние пластического слоя с переменной прочностью по толщине // Изв.РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 141–148.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 138–139

УДК 517.929

НЕКОРРЕКТНАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

© Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков

Yurii.Dolgii@usu.ru, oakjar@gmail.com

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

Постановка задачи. Рассматривается линейная система дифференциальных уравнений с последействием

$$\frac{dx(t)}{dt}=\int\limits_{-r}^{0} d_s\eta(t,s)x(t+s), \tag{1}$$

где $t\in\mathbb{R}$, $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $r>0$. Матричная функция η измерима по Лебегу на множестве $\mathbb{R}\times[-r,0]$ и $\eta(\cdot,0)=0$. Для почти всех $t\in\mathbb{R}$ существует конечная вариация $v(t)=var_{[-r,0]}\eta(t,\cdot)$ и функция v локально интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}$. При указанных условиях система (1) для любого начального момента $t_0\in\mathbb{R}$ и произвольной функции $\varphi\in\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ имеет единственное решение $x(\cdot,t_0,\varphi)$ на полуоси $[-r,+\infty)$, удовлетворяющее условию $x(s,\varphi)=\varphi(s)$ при $s\in[-r,0]$ [1]. При продолжении этого решения на полуось $(-\infty,-r)$ возникают большие проблемы, связанные с некорректностью этой задачи. При ее решении удобно использовать функциональное пространство состояний $\varphi\in\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, выбирая в качестве элементов решений системы (1) при $t>t_0$ функции $x_t(\vartheta,t_0,\varphi)=x(t+\vartheta,t_0,\varphi)$, $\vartheta\in[-r,0]$, $\varphi\in\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$ [2]. Использование функционального пространства состояний позволяет ввести эволюционное описание рассматриваемой системы $x_t(\vartheta,t_0,\varphi)=(T(t,t_0)\varphi)(\vartheta)$, $\vartheta\in[-r,0]$, $\varphi\in\mathbf{C}([-r,0],\mathbb{R}^n)$, $t>t_0$. В работе [3] показано, что при дополнительных требованиях для функции η операторы $T(t,t_0)$, $t>t_0$, допускают расширения по непрерывности на сепарабельное пространство $\mathbf{H}=\mathbb{R}^n\times\mathbf{L}_2([-r,0),\mathbb{R}^n)$ со скалярным произведением $(\varphi,\psi)=\psi^\top(0)\varphi(0)+\int_{-r}^0\psi^\top(s)\varphi(s)ds$ и являются вполне непрерывными при $t\geq t_0+r$. Предполагаем эти требования выполненными. Задача продолжения решения системы (1) в сторону убывания времени тесно связана с некорректной задачей восстановления предыстории $\varphi\in\mathbf{H}$ динамического процесса, порождаемого этим решением, по его истории $x_t(\vartheta,t_0,\varphi)$, $t>t_0$. Произвольный элемент $u\in\mathbf{H}$ будем считать некоторым приближением точной истории динамического процесса в фиксированный момент времени t. Тогда для приближенного восстановления предыстории $\varphi\in\mathbf{H}$ в произвольный момент времени t_0, $t_0<t$, требуется найти решение уравнения

$$T\varphi=T(t,t_0)\varphi=u. \tag{2}$$

При решении поставленной задачи будем использовать метод регуляризации [4].

Регуляризованные решения. Нахождение регуляризованного решения уравнения (2) связано с поиском элемента φ_α, минимизирующего функционал $M^\alpha[\varphi,u]=(T\varphi-u,T\varphi-u)+\alpha\Omega[\varphi]$, $\varphi,u\in\mathbf{H}$, где Ω — стабилизирующий функционал, а параметр регуляризации α определяется как функция допустимой погрешности δ из уравнения невязки $(T\varphi_\alpha-u,T\varphi_\alpha-u)=\delta^2$. Стабилизирующий функционал имеет вид $\Omega[\varphi]=\int_{-r}^0\left(\varphi^\top(s)Q(s)\varphi(s)+\varphi'^\top(s)P(s)\varphi'(s)\right)ds$ $+\varphi^\top(0)G\varphi(0)$, где G, $Q(s)$, $P(s)$, $s\in[-r,0]$, — положительно определенные матрицы, и элементы матричной функции Q интегрируемы с квадратом по Лебегу, а матричной функции

P — дифференцируемы и их производные интегрируемы с квадратом по Лебегу. Регуляризованное решение φ_α удовлетворяет системе интегродифференциальных уравнений

$$\left(T^*T\varphi\right)(\vartheta) + \alpha\Big(Q(\vartheta)\varphi(\vartheta) - \big(P(\vartheta)\varphi'(\vartheta)\big)'\Big) = \left(T^*u\right)(\vartheta), \quad \vartheta \in [-r, 0], \tag{3}$$

с краевыми условиями

$$\left(T^*T\varphi\right)(0) + \alpha\big(G\varphi(0) - P(0)\varphi'(0)\big) = \left(T^*u\right)(0), \quad \varphi'(-r) = 0.$$

Для получения явной формы системы (3) и краевых условий необходимо использовать представления оператора T и сопряженного к нему оператора T^*.

Краевые задачи. Рассмотрим задачу продолжения решений системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)x(t-r) \tag{4}$$

в сторону убывания времени. Здесь элементы матричной функции A локально интегрируемы по Лебегу, а элементы матричной функции B локально интегрируемы с квадратом по Лебегу на $\mathbb{R}$. Пусть $t_0 = 0$, $t = mr$ и $T = T(mr, 0)$, где m — натуральное число. Тогда краевую задачу для системы интегродифференциальных уравнений (3) можно заменить на краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений [5]. Алгоритм продолжения решений системы (4) в сторону убывания времени можно упростить, если применить итерационную процедуру. В ней строится последовательность регуляризованных решений $\varphi_{k\alpha}$ при следующих условиях: $t_0 = (k-1)r$, $t = kr$, $T = T(kr, (k-1)r)$, $u = \varphi_{(k-1)\alpha}$, $k = 1, 2, \ldots$, $\varphi_{0\alpha} \in \mathbf{H}$. В стационарном случае, при выполнении условия $\det B \neq 0$, краевая задача определяющая регуляризованные решения в итерационной процедуре имеет вид

$$\varphi_k'' = P^{-1}Q\varphi_k + \alpha^{-1}P^{-1}\left(\psi_k - \varphi_{k-1}\right),$$

$$\psi_k' = -\left(B^{-1}AB\right)^\top \psi_k - B^\top \chi_k,$$

$$\chi_k' = A\chi_k + B\varphi_k,$$

$$\varphi_k(0) = \chi_k(-r), \varphi_k'(-r) = 0, \psi_k(0) = B^\top \chi_k(0),$$

$$\psi_k(-r) + \alpha B^\top\left(G\varphi_k(0) + P\varphi_k'(0)\right) = \varphi_{k-1}(-r), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Краевая задача сингулярно зависит от параметра регуляризации α. Получены асимптотические формулы для регуляризованных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Долгий Ю. Ф.* Характеристическое уравнение в задаче асимптотической устойчивости периодической системы с последействием // Труды института математики и механики. Екатеринбург: УрО РАН, 2005. Т. 11, № 1. С. 85–96.
4. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.
5. *Долгий Ю. Ф., Путилова Е. Н.* Продолжение назад решений линейного дифференциального уравнения с запаздыванием как некорректная задача // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 8. С. 1317–1323.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 140–141

УДК 517.9

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ОСРЕДНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СРЕДАХ С РАЗЛИЧНЫМИ ПЕРИОДАМИ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ

© В. Ю. Дубинская

DubinskajaW@yandex.ru

Московский физико-технический институт, Долгопрудный

Введение. Численный анализ дифференциальных уравнений, описывающих различные процессы в композиционных материалах, нередко требует настолько большого количества вычислений, что становится практически нереализуемым. Метод асимптотического осреднения позволяет заменять исходные уравнения на уравнения с т. н. эффективными коэффициентами, которые либо постоянны, либо меняются слабо. Численное решение осредненных задач существенно менее трудоемко.

Постановка задачи. В области трёхмерного пространства

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbf{R}^3 : \ 0 < x_1 < T_1, \ \ 0 < x_2 < T_2, \ \ |x_3| < h/2 \right\}$$

рассматривается следующая краевая задача:

$$\mathbf{L}u \equiv \frac{\partial}{\partial x_m} \left(a_{mn} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{h} \right) \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = f(x_1, x_2), \quad x \in \Omega;$$

$$a_{3n} \left(\frac{x_1}{\varepsilon}, \frac{x_2}{\delta}, \frac{x_3}{h} \right) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad x_3 = \pm h/2;$$

$$\langle u \rangle_{\Omega} = 0,$$

где $a_{mn}(\xi)$ — 1-периодические по ξ_1 и ξ_2 бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям симметрии и эллиптичности, $T_1 \simeq T_2 \simeq 1$, $h << \delta << \varepsilon$. По переменным x_1 и x_2 на функцию u накладываются также условия T_1 - и T_2 -периодичности соответственно.

Построение формального асимптотического решения. Формальное асимптотическое решение задачи представляется в виде ряда по степеням трех малых величин:

$$u^{(\infty)} \simeq \sum_{p,q,r \geq 0} \varepsilon^p \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^q \left(\frac{h}{\delta} \right)^r \sum_{|i|=p} N_i^{q,r}(\xi) D^i v(x_1, x_2),$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (x_1/\varepsilon, x_2/\delta, x_3/h)$.

Функции $N_i^{q,r}(\xi)$ отыскиваются в три этапа, каждый из которых представляет собой решение обыкновенного дифференциального уравнения. В первом имеет место параметрическая зависимость от первой и второй быстрых переменных, во втором — от первой быстрой переменной. В первой из этих трёх ячеечных задач возникают краевые условия, в двух остальных — условия периодичности. Эффективные коэффициенты $\hat{a}^3_{\alpha\beta}$ выражаются непосредственно через коэффициенты $a_{mn}(\xi)$.

Функция $v(x_1, x_2)$ вновь отыскивается в виде ряда по степеням ε, δ/ε и h/ε :

$$v(x_1, x_2) \simeq \sum_{k,l,m \geq 0} \varepsilon^k \left(\frac{\delta}{\varepsilon} \right)^l \left(\frac{h}{\delta} \right)^m v_k^{l,m}(x_1, x_2).$$

Нулевое приближение $v_0^{0,0}(x_1,x_2)$ можно отыскивать, не прибегая к вычислению функций $N_i^{q,r}(\xi)$, соответствующих компонентам асимптотического ряда более высокого порядка.

Обозначим
$$u_{(P)}^{(Q,R)} = \sum_{\substack{p=\overline{0,P},\\ q=\overline{0,Q},\\ r=\overline{0,R}.}} \varepsilon^p \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^q \left(\frac{h}{\delta}\right)^r \sum_{|i|=p} N_i^{q,r}(\xi) D^i v_{(P)}^{(Q,R)}(x_1,x_2),$$

$$v_{(P)}^{(Q,R)} = \sum_{\substack{k=\overline{0,P},\\ l=\overline{0,Q},\\ m=\overline{0,R}.}} \varepsilon^k \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^l \left(\frac{h}{\delta}\right)^m v_k^{l,m}(x_1,x_2).$$

Тогда имеет место

Теорема *Для разности точного и приближенного решений верны следующие интегральные оценки:*
$$\left\| u - u_{(P)}^{(Q,R)} \right\|_{L_2(\Omega)} = \underline{\underline{O}} \left(\varepsilon^{P+1} + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{Q+1} + \left(\frac{h}{\delta}\right)^{R+1} \right),$$
$$\left\| u - u_{(P)}^{(Q,R)} \right\|_{W_2^1(\Omega)} = \underline{\underline{O}} \left(\varepsilon^{P} + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^{Q} + \left(\frac{h}{\delta}\right)^{R} \right).$$

Доказательство. При доказательстве были использованы априорные оценки для решения исходной задачи через правые части уравнения и краевого условия.

Замечание. Аналогичные результаты получены для трёхпериодической среды с периодами неоднородности различной степени малости. В этом случае все три ячеечные задачи будут периодическими. В средах, для которых ячейку периодичности характеризуют только два малых параметра, различных по порядку, решение ячеечных задач расщепляется не на три одномерные составляющие, а две: одномерную (с параметрической зависимостью от двух других переменных) и частично осреднённую двумерную. Эффективные коэффициенты в этом случае через коэффициенты исходного уравнения явно не выражаются.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М: Наука, 1984
2. *Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.* Методы осреднения и модели колебания тонких пластин // Международная конференция им. И. Г. Петровского “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”. Москва, 17–22 мая 2004.
3. *Пшеничнов Г. И.* Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок. М: Наука, 1982
4. *Резцов М. В.* Осреднение системы уравнений теории упругости в тонком слое толщины h с периодом неоднородностей ε // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, № 9. С. 1413–1414.
5. *Дубинская В. Ю.* Осреднение стационарной задачи теплопроводности в тонкой неоднородной пластине // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30, № 4. С. 632–634.
6. *Дубинская В. Ю.* Асимптотическое разложение решения стационарной задачи теплопроводности в среде с двумя малыми параметрами // Труды Московского математического общества. 2001. Т. 62. С. 105–135.

УДК 517.95

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© И. Е. Егоров, В. Е. Федоров

niipmi@sitc.ru

Научно исследовательский институт математики при ЯГУ, Якутск

Настоящий доклад посвящен обзору некоторых результатов исследования разрешимости в пространствах С. Л. Соболева краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка вида

$$\sum_{i=1}^{p} k_i(x,t)D_t^i u + Mu = f(x,t), \tag{1}$$

где M — сильно эллиптический оператор порядка $2m$, а коэффициент при старшей производной по времени может менять знак произвольным образом.

В работе В. Н. Врагова (1978, [1]) впервые была дана постановка корректной краевой задачи для уравнения вида (1) при $p = 2m$. В дальнейшем эти результаты были обобщены И. Е. Егоровым (1987, [2]) на случай, когда уравнение имеет разный порядок по времени и по пространственным переменным. Им также была исследована (1988, [2]) краевая задача для уравнения (1) при $p = 2s+1$. В. Е. Федоров изучал разрешимость первой краевой задачи для уравнения (1) при $p = 2s$, а также исследовал гладкость решения этой задачи (1992, [2]). Далее И. Е. Егоровым (1998, [3]) для уравнения (1) при $p = 2s+1$ была рассмотрена краевая задача, постановка которой сильно отличается от ранее изученных. Аналогичная краевая задача в случае уравнения четного порядка ($p = 2s$) исследована в совместной работе И. Е. Егорова, В. Е. Федорова (1999, [4]).

А. В. Чуешевым (2000, [5]) была исследована разрешимость краевых задач для уравнения (1) с достаточно общими краевыми условиями и гладкость их решений как в случае нечетного, так и в случае четного порядка по времени. Кроме того, им изучена краевая задача для уравнения нечетного порядка с нелинейностью вида $f(x,t,u)$ (2001, [5]). В работах А. П. Львова (2000-2005, [6]) была исследована разрешимость различных нелокальных краевых задач для уравнения (1) при $p = 1$, $p = 3$, $p = 2s+1$, в том числе с нелинейностью $f(x,t,u)$.

В настоящее время авторами ведутся исследования по изучению новых краевых задач для уравнений вида (1). В докладе приводится постановка некоторых из них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Врагов В. Н.* О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанно-составного типа // Математический анализ и смежные вопросы математики. Новосибирск: Наука, 1978. С. 5–13.
2. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. 133 с.
3. *Egorov I. E.* On one boundary value problem for an equation with varying time direction // Математические заметки ЯГУ. 1998. Т. 5, № 2. С. 77–84.
4. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа высокого порядка // Математические заметки ЯГУ. 1999. Т. 6, № 1. С. 26–35.
5. *Чуешев А. В.* Разрешимость краевых задач для уравнений смешанного типа высокого порядка / Диссертация : кандидата физ.-мат. наук. Новосибирск: НГУ, 2001. 183 с.
6. *Львов А. П.* Нелокальные краевые задачи для уравнений математической физики с меняющимся направлением времени / Диссертация : кандидата физ.-мат. наук. – Якутск: ЯГУ, 2006. 91 с.

УДК 517.955.8

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИНАМИКИ ТОНКОГО НЕОДНОРОДНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ И РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ

© А. А. Егорова

alena.egorova@gmail.com

Научно исследовательский институт математики при ЯГУ, Якутск

В работе строится полное асимптотическое разложение трехмерной задачи линейной теории вязкоупругости в тонком неоднородном стержне, закрепленном с одного конца и испытывающем действие распределенных по торцу сил на другом конце. Усреднение проводится по методу Н. С. Бахвалова [1]. Рассматривается область типа тонкого стержня $x \in C_\varepsilon = (0,T) \times \beta_\varepsilon,\ t > 0,\ \beta_\varepsilon = \{x' = (x_2,x_3) | x'/\varepsilon \in \beta\},\ \beta$ — двумерная ограниченная область с кусочно-гладкой границей, и строится асимптотическое по $\varepsilon > 0$ разложение решения системы уравнений:

$$-\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A^0_{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_m}\left(A^1_{mj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}\right) = 0,$$

где A^0_{mj}, A^1_{mj} — некоторые матрицы-функции, удовлетворяющие естественным условиям типа эллиптичности соответствующих дифференциальных операторов. Коэффициенты системы уравнений — гладкие функции всюду в C_ε, за исключением некоторого набора поверхностей, где они разрывны, и на которых решение удовлетворяет естественным условиям сопряжения. Граничные и начальные условия имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv n_m\left(A^0_{mj}(x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A^1_{mj}(x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}\right)|_{(0,T)\times\partial\beta_\varepsilon} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \equiv n_m\left(A^0_{mj}(x/\varepsilon)\frac{\partial u}{\partial x_j} + A^1_{mj}(x/\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x_j}\right)|_{x_1=T} = f_\varepsilon(t,x)|_{x_1=T},$$

$$u|_{x_1=0} = 0,\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = 0$$

Показано, что коэффициенты асимптотических разложений решения находятся из вспомогательных задач упругости [2] и задач составного типа [3] на “ячейке периодичности”, а также из задач на функции типа “пограничного слоя”, которые описывают поведение стержня в окрестности точки закрепления и точки приложения сил. Выведены усредненные уравнения для продольных, крутильных и поперечных колебаний стержня(на функции, зависящие только от одного пространственного переменного). При наличии дополнительных условий симметрии (см. [4]) система уравнений, описывающая усредненную модель, распадается на уравнения 2-го порядка для продольных и 4-го порядка для поперечных смещений. Показано, что эти уравнения содержат интегральные члены типа свертки, доказана теорема о близости решений для усредненной и исходной задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах М.: Наука, 1984.
2. *Козлова М. В., Панасенко Г. П.* Осреднение трехмерной задачи теории упругости в неоднородном стержне // Выч. мат. и мат. физ. 1991. Т. 31, № 10.
3. *Кожанов А. И.* К теории уравнений составного типа: Автореферат диссертации доктора физико-математических наук: 01.01.02. Новосибирск, 1993. 26 с.
4. *Panasenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems I // Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2, № 3. P. 325–352.

УДК 517.95

ЕДИНСТВЕННОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА СО СПЕЦИАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ СОПРЯЖЕНИЯ

© **И. П. Егорова, Н. А. Куликова** *

* kulikovana@mail.ru

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара

Рассмотрим уравнение

$$L(u)=\begin{cases} u_{xx}+y^m u_{yy}=0, & y>0,\ 0<m<1,\\ u_{xy}-\frac{q}{x+y}(u_x+u_y)=0, & y<0,\ -1<2q<0\end{cases}$$

на множестве D, ограниченном прямыми $x+y=0$, $x=1$ и гладкой кривой

$$\Gamma\equiv\Gamma_0:(x_0-\frac{1}{2})^2+\frac{4}{(2-m)^2}y^{2-m}=\frac{1}{4}.$$

Пусть $D_+=D\bigcap(y>0)$, $D_-=D\bigcap(y<0)$. Для уравнения $L(u)$ доказывается единственность решения задачи в следующей постановке.

Задача V. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

$$u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D_+),\, u(x,y)\in C^1(D_-),\, u_{xy}\in C(D_-);$$

$$L(u)\equiv 0,\, (x,y)\in D_+\cup D_-;$$

$u(x,y)$ подчиняется краевым условиям

$$u(x,y)\mid_\Gamma=\varphi(x,y),\, (x,y)\in\Gamma,$$

$$u(1,y)\mid_{x=1}=\psi(y),\, y\in[-1,\,0];$$

$u(x,y)$ подчиняется условию сопряжения

$$\nu_+(x)=\nu_-(x),\ x\in(0,1),$$

при этом

$$\nu_+(x)=\lim_{y\to+0}u_y(x,y),\ x\in(0,1),$$

$$\nu_-(x)=\frac{\partial}{\partial x}\int_x^1(t-x)^{-r_1}\,u_1(t,0)\,dt+\int_x^1(t-x)^{-r_2}\,u_2(x,-t)\,dt,$$

где $0<r_1,\,r_2<1$, $\varphi(x,y)$, $\psi(y)$ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi(1,0)=\psi(0)$.

В области D_- методом Римана найдено решение задачи Гурса с данными $u(x,y)=\tau(x)$, $0\le x\le 1$, $u(1,y)=\psi(y)$, $-1\le y\le 0$. Исходя из него, получено выражение для функции $\nu_-(x)$

$$\nu_-(x)=-\int_x^1(t-x)^{-r_1}\,\tau'(t)\,dt+\Psi(x),$$

где

$$\Psi(x) = -\int_x^1 (t-x)^{-r_2}(1-t)^q\,dt\times$$
$$\times\int_{-t}^0 [(1+s)^{-q}\,\psi(s)]'\left(\frac{s-x}{1+s}\right)^q F\left(-q,-q;1;\frac{(s-x)(t-y)}{(t+x)(y+1)}\right)\,dt,$$

и доказан принцип локального экстремума.

Лемма. *Пусть функция* $u(x,y)\in C(\overline{D_-})\cap C^1(D_-)$, $u(x,y)\in C(D_-)$ *является в области* D_- *решением уравнения* $L(u)$ *и* $u(1,y)\equiv 0$, $-1\le y\le 0$. *Если функция* $\tau(x)=u(x,0)$ *из класса* $C[0,1]\cap C^1(0,1)$ *достигает свое наибольшее положительное (наименьшее отрицательное) значение на отрезке* $[0,1]$ *в точке* $x_0\in(0,1)$, *то* $\nu_-(x_0)>0$ $(\nu_-(x_0)<0)$.

В области D_+ известен принцип экстремума [1]. Основываясь на этих принципах экстремума, доказана теорема единственности решения задачи V для уравнения $L(u)$.

Теорема. *Если существует решение задачи* V, *то оно единственно.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М., 1985. С. 266–269.

УДК 517.925.54:517.962.27/.8

ВСТРЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

© А. О. Егоршин

egorshin@math.nsc.ru

Институт математики РАН им. С. Л. Соболева, Новосибирск

Рассматривается математическая модель двусторонних процессов. В модели используются финитные системы независимых векторов и процессы их двусторонней (встречной) ортогонализации Грама – Шмидта (Г – Ш), а также ее обобщение: процессы биортогонализации двух независимых систем. Показано, что такие встречные процессы лежащат в основе рекуррентных формул и уравнений вычислительной алгебры: QR и QL разложений, RL и LR факторизаций, двух типов (окаймление и суммирование) рекуррентных формул обращения матриц.

1. Новые результаты получены для частного случая такой модели — однородных систем: циклических систем, порожденных (частично) изометрическими операторами. В такой модели возможно взаимодействие указанных встречных (counter) процессов. Они называются далее — прямой (forward) и возвратный (backward). Различные уравнения таких процессов используются как в теории (например, ортогонализация полиномов на окружности), так и во многих прикладных областях. В частности, это уравнения распространения в "средах", инвариантных к "сдвигу" (изотропных, стационарных).

Рассматривается новое приложение встречных процессов. Это задачи аппроксимации функций (непрерывного или дискретного аргумента) решениями стационарных обыкновенных линейных дифференциальных (разностных) уравнений [1]. В случае, когда коэффициенты уравнений неизвестны, мы приходим к задачам математического моделирования (функций, процессов, их уравнений; в приложениях такие задачи называются также задачами идентификации) [2]. Когда коэффициенты уравнений заданы, эти задачи аппроксимации приводят к известным (например, т. н. фильтр Калмана) линейным задачам сглаживания и фильтрации, но реализуемым "быстрыми" (fast) рекуррентными алгоритмами без уравнения Риккати.

Показано, что быстрые алгоритмы в однородных, стационарных системах есть следствия одной леммы о существовании двусторонних процессов ортогонализации Г – Ш [3].

2. Встречные процессы. Пусть в унитарном пространстве H задана система векторов $|x_0, \cdots, x_N| = \{x_i\}_0^N = X_N = X$ с элементами $x_i \in E_{(i)}$, $i = \overline{0, N}$. Элемент представляет собой набор из m_i векторов x_{ij}, $j = \overline{1, m_i}$: $x_i = |x_{i1}, \cdots, x_{im_i}|$. Конструкции X и x_i считаем строками. Тогда матрица Грама системы X записывается так: $\Gamma = \Gamma(X) = (X, X)$. Если $\det \Gamma = 0$, система векторов X называется вырожденной. Через $X_{l,k}$, ($k = \overline{0, N}$, $l = \overline{0, k}$) обозначаем отрезок $|x_l, \cdots, x_k|$ последовательности X, а через X_k — ее начальный отрезок $|x_0, \cdots, x_k|$. Через Через $S(x, \cdots, y)$ обозначаем подпространство — замкнутую линейную оболочку векторов аргументов $x, \cdots, y$. В частности, $S = S(X)$, $S_k = S(X_k)$, $S_{l,k} = S(X_{l,k})$. Обозначим через $\Pi_{l,k} = I - P_{l,k} = \Pi(X_{l,k}) = \Pi(S_{l,k})$ — проектор на $S_{l,k}^{\perp} = H \ominus S_{l,k}$. В частности, $\Pi_{0,k} = \Pi_k$. Удобно считать, что $\Pi_{-1} = \Pi_{1,0} = \Pi_{k+1,k} = I$.

Определение 1 (встречных процессов ортогонализации).

a) *Прямой:* $f_k = \Pi_{k-1} x_k$, $h_k = (f_k, f_k)$, $k = \overline{0, N}$.

b) *Возвратный:* $f_{i/k} = \Pi_{1+i,k} x_i$, $f_{0/k} = \widetilde{f}_k$, $h_{i/k} = (f_{i/k}, f_{i/k})$, $h_{0/k} = \widetilde{h}_k$, $i = \overline{0, k}$.

Лемма (о встречных процессах ортогонализации). *Пусть X — невырожденная система векторов. Тогда:*

1) *элементы f_l и $f_{i/l}$ процессов ортогонализации не вырождены:* $\det h_l \neq 0$, $\det h_{i/l} \neq 0$, $l = \overline{0, N}$, $i = \overline{0, l}$;

2) *проекторы* Π_k *с помощью элементов ортогонализации* f_k *и* $\widetilde{f}_k$ *определяются рекурентными формулами с начальными условиями* $\Pi_{-1} = \Pi_{1,0} = I$;

3) *для значений* $k = \overline{-1, N-1}$ *имеют место следующие равенства:* $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_k - f_{k+1}a_{k+1}(\,\cdot\,, f_{k+1})$, $\Pi_{k+1}(\cdot) = \Pi_{1,k+1} - \widetilde{f}_{k+1}\widetilde{a}_{k+1}(\,\cdot\,, \widetilde{f}_{k+1})$, *где* $a_{k+1} = h^{-1}_{k+1}$ *и* $\widetilde{a}_{k+1} = \widetilde{h}^{-1}_{k+1}$.

3. Элементы линейной алгебры. Из этой леммы вытекают представления: $\Phi = XR$ и $\widetilde{\Phi} = XL$, где Φ и $\widetilde{\Phi}_n$ — строки ортонормальных элементов в H . Отсюда следуют рекуррентно вычисляемые QR QL представления. Из этих представлений выводятся рекуррентные формулы обращения и факторизации для матриц Грама: $(X, X)^{-1} = RR^*$ — Фробениуса и $(X, X) = R^{-*}R^{-1}$ — Холесского. Из $(X, X)^{-1} = RR^* = LL^*$ получим известные уравнения Риккати для обращения матриц с аддитивными факторизованными приращениями. Общий вид перечисленных уравнений (а не только для самосопряженных матриц) получается из двусторонних алгоритмов биортогонализации двух независимых систем X и Y [3].

Показано, что в цепи подпространств системы X существует и может быть найден базис с заданной матрицей Грама. В частности, существует базис с теплицевой матрицей Грама. Ей (и только ей) соответствует однородная система векторов.

4. Однородные системы.

Определение 2. Систему X назовем *однородной*, если ее элементы связаны изометрическими соотношениями: $x_{i+1} = Ux_i$, $x_i = U^*x_{i+1}$, $i = \overline{0, N-1}$.

Теорема (о быстрых алгоритмах). *Пусть система* X *невырождена и* $k = \overline{0, N-1}$. *Тогда*

1) *для векторов ортогонализации* f *и* $\widetilde{f}$ *имеем* $f_0 = \widetilde{f}_0 = x_0$ *и* $f_{k+1} = Uf_k - \widetilde{f}_k\widetilde{\theta}_{k+1}$, $\widetilde{f}_{k+1} = \widetilde{f}_k - Uf_k\theta_{k+1}$, *где* $\theta_{k+1} = a_k\mu_{k+1}$, $\widetilde{\theta}_{k+1} = \widetilde{a}_k\mu^*_{k+1}$, $\mu_{k+1} = (\widetilde{f}_k, Uf_k)$.

2) *Матрицы Грама* h *и* $\widetilde{h}$ *не вырождены и связаны следующими нелинейными рекуррентными соотношениями:* $h_0 = \widetilde{h}_0 = (x_0, x_0)$ *и* $h_{k+1} = h_k - \mu_{k+1}\widetilde{h}^{-1}_k\mu^*_{k+1}$, $\widetilde{h}_{k+1} = \widetilde{h}_k - \mu^*_{k+1}h^{-1}_k\mu_{k+1}$.

3) *Для нормирующих множителей* a *и* $\widetilde{a}$ *эти уравнения могут быть представлены в виде:* $a_0 = \widetilde{a}_0 = h^{-1}_0$ *и* $a_{k+1} = (I - \theta_{k+1}\widetilde{\theta}_{k+1})^{-1}a_k$, $\widetilde{a}_{k+1} = (I - \widetilde{\theta}_{k+1}\theta_{k+1})^{-1}\widetilde{a}_k$.

4) *Если система векторов* X *одномерна* $(m = 1)$, *то для всех* $k = \overline{0, N}$: $a_{k+1} = (1 - \theta^2_{k+1})^{-1}a_k$, $1 - \theta^2_{k+1} > 0$.

5. Динамические системы. В $E = E^{N+n+1}$ задан оператор $\mathcal{R} : E \to E^{N+1}$ такой, что для $y \in E$ имеем: $\mathcal{R}y = \{\sum_{i=0}^n \alpha^*_i y_{k+i}\}^N_0 = A^*y$. Матрица этого оператора в E есть A^* , где A — ленточная, теплицева $(N + n + 1) \times (N + 1)$ -матрица “скользящего” вектора — коэффициентов α оператора $\mathcal{R}$. Его ядро есть $K = S^{\perp}(A)$.

Рассматривается следующая вариационная задача математического моделирования (аппроксимационной идентификации). Для последовательности отсчетов $y = \{y_i\}^{N+n}_1$ найти минимум величины $J = J(\widetilde{y}) = \|y - \widetilde{y}\|^2_E$ при условии, что $A^*\widetilde{y} = 0$ [1].

Решение поставленной задачи сглаживания — проекция $\widehat{y}$ вектора y на ядро K . Это “обычная” линейная задача проектирования. Задача же идентификации является существенно нелинейной. Это минимизация по α длины соответствующего перпендикуляра [2]. Здесь величины $\widehat{J} = J(\widehat{y}) = \widehat{J}(\alpha) = y^*A(A^*A)^{-1}A^*y$. Развитая в п.п. 2, 4 теория позволяет использовать при решении этих задач (в том числе при реализации специальных итерационных процедур поиска оптимальных коэффициентов уравнения α) быстрые алгоритмы теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00776).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Егоршин А. О.* Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65(12). С. 29–48.
2. *Егоршин А. О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих коэффициентов для последовательностей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2001. Том III, № 2(6). С. 78–96.
3. *Егоршин А. О.* Симметрия порядка: некоторые следствия в анализе и приложениях для разностных и дифференциальных уравнений // Труды III международной конференции “Симметрия и дифференциальные уравнения”, Красноярск 25–29 августа 2002г. Красноярск: Изд. Ин–та вычислительного моделирования СО РАН, 2002. С. 84–90.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 148–149

УДК 51(075)

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ

© М. М. Ерекешева

e_meruert@mail.ru

Актюбинский государственный педагогический институт, Актобе, Казахстан

Дифференциальные уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где правые части этих уравнений непрерывны в области

$$t \geq t_0, |x_s| \leqslant H, s = \overline{1, n} \tag{2}$$

и допускают существование единственного решения при наперед заданных начальных условиях $t_0, x_1^0, \ldots, x_1^0$ в области (2), $X_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0$, $s = \overline{1, n}$.

Пусть возмущение действует непрерывно, тогда наряду с уравнениями (1), рассмотрим уравнения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + R_s(t, x_1, \ldots, x_n), \quad s = \overline{1, n}, \tag{3}$$

где функции $R_1, \ldots, R_n$ характеризуют эти постоянно действующие возмущения и в отличие от функций $X_1, \ldots, X_n$ практически никогда неизвестны. Эти функции, вообще говоря, не обращаются в нуль при $x_1, \ldots, x_n = 0$. Относительно них лишь предполагаем, что они обеспечивают существование единственного решения для уравнений (3), определенного в области (2) и удовлетворяющего наперед заданным начальным условиям, взятым из этой области. Кроме того, предполагаем, что функции $R_1, \ldots, R_n$ удовлетворяют в области (2) условию

$$\int\limits_{t_0}^{t} |R_s(r, x_1, \ldots, x_n)| d\tau < \rho, \quad s = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где ρ — достаточно малое положительное число. Постоянно действующие возмущения, характеризуемые функциями $R_1, \ldots, R_n$ и удовлетворяющие условию (4), будем называть *малыми в среднем и исчезающими на бесконечности*, т. е. $R_s \in MC_\infty^0$.

Определение 1. Невозмущенное решение называется *устойчивым* при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 > 0$ существуют два таких положительных числа δ и ρ, зависящих от ε и t_0, что всякое возмущенное решение $x_s = x_s(t)$, $s = \overline{1, n}$, удовлетворяющее в начальный момент t_0 условию

$$|x_s(t_0)| \leqslant \delta, \quad s = \overline{1, n}, \tag{5}$$

удовлетворяет при $t \geq t_0$ условию

$$|x_s(t)| \leqslant \varepsilon, \quad s = \overline{1, n}, \tag{6}$$

каковы бы ни были функции $R_1, \ldots, R_n$ в возмущенных уравнениях, лишь бы они в области (2) удовлетворяли условию (4).

Определение 2. Если при выполнении условий (4), (5) неравенства при каком-нибудь $t \succ t_0$ нарушаются, то невозмущенное решение называется *неустойчивым* при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности, т. е. $R_s MC_\infty^0$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если для уравнений без возмущений (1) существует функция $V(t,x)$ такая, что*

$$1)\quad c_1^2\|x\|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant c_0^2\|x\|^2, \quad c_0 = const \succ 0, \quad c_1 = const \succ 0,$$
$$2)\quad \|\mathrm{grad}_x V(t,x)\| \leqslant c_2^2\|x\|^2 \quad \textit{или} \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x_s}\right| \succ c_2^2\|x\|^2, \quad c_2 = const > 0,$$
$$3)\quad V'(t,x) \geq c_3^2\|x\|^2, \quad c_3 = const \succ 0,$$

то невозмущенное решение неустойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности.

Теорема 2. *Если для уравнений без возмущений (1) существует функция $V(t,x)$ такая, что*

$$1)\quad V(t,x) \geq c_1^2\|x\|^2, \quad c_1 = const > 0,$$
$$2)\quad \|\mathrm{grad}_x V(t,x)\| \leqslant c_2^2\|x\| \quad \textit{или} \quad \left|\frac{\partial V}{\partial x_s}\right| \succ c_2^2\|x\|, \quad c_2 = const > 0,$$
$$3)\quad V' = \lambda V + W(x),$$

где λ — положительная постоянная, $W(s) \leqslant 0$, т. е. либо тождественно обращается в нуль, либо представляет собой знакопостоянную функцию, то невозмущенное решение неустойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в среднем и исчезающих на бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бияров Т. Н.* Об устойчивости нелинейных систем с постоянно действующими возмущениями // Сб. Международной конференции "Управление динамическими системами". Алматы, Изд. КазГУ, 1987. С. 24–36.
2. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976. 214 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 150–151

УДК 517

ОБ ω-ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ПРОСТЕЙШИХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ В ПЛОСКОСТИ

© Л. С. Ефремова

lef@uic.nnov.ru

Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород

Рассмотрим косое произведение отображений интервала

$$F(x,\, y) = (f(x),\ g_x(y)) \ \text{ для всех } \ (x,\, y) \in I, \tag{1}$$

где $I = I_1 \times I_2$ — замкнутый прямоугольник на плоскости ($I_1,\ I_2$ — отрезки). Обозначим через $T^1(I)$ пространство всех C^1-гладких отображений вида (1) с C^1-нормой.

Изучению ω-предельных множеств цилиндрических каскадов (косых произведений над иррациональным поворотом окружности, заданных на цилиндре и имеющих отображения в слоях вида $g_x(y) = y + \phi(x)$, $y \in R^1$, $x \in S^1$, где R^1 — вещественная прямая, S^1 — окружность) посвящены работы А. Б. Крыгина, выполненные во второй половине 70-х годов XX века. Что касается косых произведений отображений интервала, то изучение различных аспектов топологической динамики систем такого рода начато в начале 90-х годов XX века и, в значительной степени, связано с достижениями одномерной динамики. Так, в статьях ряда авторов (Kolyada S., Snoha L.; Smital J., Lopez V. J.; Balibrea F., Garcia J. L., Munoz J. L.) установлен допустимый топологический тип ω-предельных множеств непрерывных отображений вида (1). В то же время представляет интерес получение условий, при выполнении которых косые произведения отображений интервала обладают ω-предельными множествами того или иного типа. В [1] указаны следующие условия, при выполнении которых каждая траектория отображения (1) сходится к некоторой периодической орбите.

Теорема 1 [1]. *Пусть $F \in T^1(I)$ таково, что при каждом $x \in Per(f)$ отображение $\widetilde{g}_x$ (где $Per(f)$ — множество периодических точек факторотображения f , $\widetilde{g}_x = g_{f^{m-1}(x)} \circ \ldots \circ g_{f(x)} \circ g_x$, m — (наименьший) период x) имеет лишь притягивающие и отталкивающие периодические точки. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1.a) *множество $Per(F)$ периодических точек F замкнуто;*

(1.b) *ω-предельное множество траектории произвольной точки из I есть периодическая орбита.*

В условиях теоремы 1 периодические точки всех отображений $\widetilde{g}_x$ являются изолированными, и остается открытым вопрос об эквивалентности утверждений (1.a) и (1.b) для C^1-гладких косых произведений отображений интервала, имеющих вертикальные слои с неизолированными и, следовательно, негиперболическими периодическими точками. В данной работе получены аналитические условия, при выполнении которых траектория произвольной точки фазового пространства отображения (1) сходится к периодической орбите.

Будем использовать l_1-норму точки $z(x,\, y) \in I$ $||z||_1 = |x| + |y|$. Для нормы матрицы Якоби $\frac{\partial F(x,\, y)}{\partial (x,\, y)}$ отображения $F \in T^1(I)$ в точке $z(x,\, y) \in I$, согласованной с l_1-нормой, справедливо

$$\left\| \frac{\partial F(x,\, y)}{\partial (x,\, y)} \right\|_1 = \max \left\{ |f'(x)| + \left| \frac{\partial}{\partial x} g_x(y) \right|,\ \left| \frac{\partial}{\partial y} g_x(y) \right| \right\}.$$

Прежде, чем ввести понятие регулярной (иррегулярной) точки, отметим, что множество (наименьших) периодов периодических точек C^1-гладкого отображения вида (1) с замкнутым множеством периодических точек ограничено.

Определение. Пусть $F \in T^1(I)$, $Per(F)$ — замкнутое множество, а $x^0 \in Per(f)$. Точку $x_0 \in W^s(x^0, f^M)$ (где $W^s(x^0, f^M)$ — устойчивое многообразие точки x^0 относительно отображения f^M, M — наибольший элемент множества (наименьших) периодов периодических точек F) назовем *регулярной*, если либо

(2.1) $x_0 \in \{f^{-Mn}\}_{n\geq 0}$, либо

(2.2) $x_0 \in W^s(x^0, f^M) \setminus \{f^{-Mn}(x^0)\}_{n\geq 0}$, и при этом выполнено одно из следующих двух условий:

(2.2a) слой $\{x^0\} \times I_2$ не содержит невырожденного отрезка, состоящего из неподвижных точек отображения F^M;

(2.2b) слой $\{x^0\} \times I_2$ содержит невырожденный отрезок, состоящий из неподвижных точек отображения F^M, причем существует натуральное число n_0 такое, что для любого $n \geq n_0$ выполнено неравенство $B_n = \sup\limits_{y\in I_2} \left\| \frac{\partial F^M(x_{Mn}, y)}{\partial(x,y)} \right\|_1 \leq 1$.

Точку $x_0 \in W^s(x^0, f^M)$, не являющуюся регулярной, будем называть *иррегулярной*.

Обозначим через R_f (I_f) множество всех регулярных (иррегулярных) точек. Обратим внимание на то, что R_f (I_f) состоит из целых f^M-траекторий и является f^M-инвариантным множеством.

Следующая теорема обобщает сформулированную выше теорему 1.

Теорема A. *Пусть* $F \in T^1(I)$, *и* $I_f = \emptyset$. *Тогда утверждения* (1.a) *и* (1.b) *эквивалентны.*

Рассмотрим случай непустого множества I_f.

Теорема B. *Пусть* $F \in T^1(I)$, *и для любой точки* $x_0 \in I_f$ *выполнено следующее условие: ряд* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(B_n - 1)$ *сходится. Тогда утверждения* (1.a) *и* (1.b) *эквивалентны.*

В работе построены примеры отображений, удовлетворяющих условиям теорем A и B.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ефремова Л. С.* О неблуждающем множестве и центре треугольных отображений с замкнутым множеством периодических точек в базе // Динамич. системы и нелинейные явления. Киев: Ин-т математики АН Украины. 1990. С. 15–25.
2. *Ефремова Л. С.* Об одномерном аттракторе простейшего косого произведения отображений интервала // Мат. заметки (в печати).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 152–153

УДК 530.1+519.6

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОКИНЕТИКИ ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД

© Б. М. Жапбасбай, Х. Х. Имомназаров *

* imom@omzg.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Постановка задачи. Пусть область $\Omega \subset R^2$ заполнена проводящей пористой средой, насыщенной проводящей жидкостью. Электрокинетические явления в такой среде описываются краевой задачей [1, 2]

$$-\mathrm{div}\left(\frac{1}{\chi\,\rho_0}\,\nabla p - \frac{\gamma}{\chi}\,\nabla\phi\right) = f_p, \qquad -\mathrm{div}\left(\frac{\gamma}{\chi\,\rho_0}\,\nabla p + \frac{\sigma\,\chi - \gamma^2}{\chi}\,\nabla\phi\right) = f_\phi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$-\frac{1}{\chi\,\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\gamma}{\chi}\,\frac{\partial \phi}{\partial n}\,|_{\partial\Omega} = g_p, \qquad -\frac{\gamma}{\chi\,\rho_0}\,\frac{\partial p}{\partial n} - \frac{\sigma\,\chi - \gamma^2}{\chi}\,\frac{\partial \phi}{\partial n}\,|_{\partial\Omega} = g_\phi, \tag{2}$$

где $p(\mathbf{x})$ — поровое давление, $\phi(\mathbf{x})$ — потенциал электрического поля, $f_p(\mathbf{x})$ и $f_\phi(\mathbf{x})$ — источники фильтрационной и электрической природы соответственно, $\chi(\mathbf{x})$ — коэффициент трения, $\sigma(\mathbf{x}) = \sigma_l(\mathbf{x}) + \sigma_s(\mathbf{x})$, $\sigma_l(\mathbf{x})$ и $\sigma_l(\mathbf{x})$ — проводимости упругого пористого тела и жидкости соответственно, $\gamma(\mathbf{x})$ — электрокинетический коэффициент, $\rho_0(\mathbf{x}) = \rho_{0,l}(\mathbf{x}) + \rho_{0,s}(\mathbf{x})$, $\rho_{0,s}(\mathbf{x}) = \rho^f_{0,s}(\mathbf{x})(1 - d_0(\mathbf{x}))$, $\rho_{0,l}(\mathbf{x}) = \rho^f_{0,l}(\mathbf{x})d_0(\mathbf{x})$, $\rho^f_{0,s}(\mathbf{x})$ и $\rho^f_{0,l}(\mathbf{x})$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, $d_0(\mathbf{x})$ — пористость, функции $g_p(\mathbf{x})$ и $g_\phi(\mathbf{x})$ удовлетворяют интегральным соотношениям

$$\int_{\partial\Omega} g_p\,d\omega = 0, \qquad \int_{\partial\Omega} g_\phi\,d\omega = 0. \tag{3}$$

Решение прямой задачи электрокинетики в прямоугольной области. Построим аналитическое решение задачи электрокинеки для прямоугольной области $\Omega = [0,a] \times [0,b]$ и в отсуствии источников. Решение данной задачи имеет вид [3]:

$$\begin{aligned} p(x,y) = p_0 &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^p}{\lambda_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^p}{\lambda_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{b}x\right] \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^p}{\mu_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^p}{\mu_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{a}y\right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = \phi_0 &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^\phi}{\lambda_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n^\phi}{\lambda_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{b}x\right] \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^\phi}{\mu_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n^\phi}{\mu_n} \cosh\left[\frac{n\pi}{a}y\right] \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right), \end{aligned} \tag{7}$$

где коэффициенты

$$A_n^p = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_p(0,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi, \quad B_n^p = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_p(a,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi,$$

$$C_n^p = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_p(\xi,0)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi, \quad D_n^p = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_p(\xi,b)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi,$$

$$A_n^\phi = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_\phi(0,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi, \quad B_n^\phi = \frac{2}{b}\int_0^b \acute{g}_\phi(a,\xi)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right)d\xi,$$

$$C_n^\phi = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_\phi(\xi,0)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi, \quad D_n^\phi = \frac{2}{a}\int_0^a \acute{g}_\phi(\xi,b)\cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)d\xi,$$

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b}\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \quad \mu_n = \frac{n\pi}{a}\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right),$$

$$\acute{g}_p = -\gamma\frac{\rho_0}{\sigma}g_\phi - \frac{\rho_0}{\sigma}(\sigma\chi-\gamma^2)g_p, \qquad \acute{g}_\phi = -\frac{1}{\sigma}g_\phi + \frac{\gamma}{\sigma}g_p.$$

Численное моделирование прямой задачи электрокинетики. При построения разностной схемы уравнений (1)–(2) в двумерном случае, использовался интегро-интерполяционный метод [4] на равномерной по каждому направлению сеточной области $\overline{\Omega}$, полученная СЛАУ решалась методом неполной факторизации [5].

Приведем результаты численного моделирования для уравнений (1)–(2) ($f_p(\mathbf{x}) = 0$ и $f_\phi(\mathbf{x}) = 0$). Размер разностной области брался по пространству 129x129 узла, $\Omega = [0,1]\times[0,1]$.

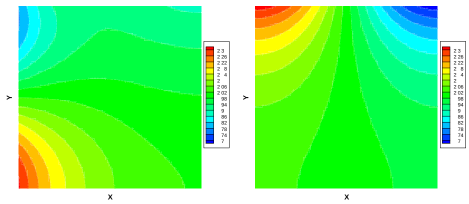


Рис. 1. Распределение давления (слева) и потенциала электрического поля (справа).

Работа выполнена при финансовой поддержке проектов РАН № 16.12 и СО РАН № 1.6, 42, а также гранта Фонда содействия отечественной науке (“Доктора наук РАН”).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dorovsky V. N., Imomnazarov Kh. Kh.* A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium // Mathl. Comput. Modelling. 1994. V. 20, N 7. P. 91–97.
2. *Имомназаров Х. Х.* Модифицированные законы Дарси, учитывающие электромагнитные поля // Доклады РАН. 2003. Т. 389, № 1. С. 33–34.
3. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с.
4. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численный методы математической физике. 2-е изд. М.: Научный мир, 2003. 316 с.
5. *Ильин В. П.* Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995. 288 с.

УДК 517.9

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОМЕРНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© О. Г. Жукова*, Р. К. Романовский

* ogzh@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск

Рассматривается краевая задача, моделирующая процесс теплопереноса в стержне при заданном температурном режиме на концах в рамках гиперболического закона теплопроводности [1]:

$$\begin{cases} c\rho\dfrac{\partial T}{\partial t}+\dfrac{\partial q}{\partial x}=0, \quad \tau\dfrac{\partial q}{\partial t}+k\dfrac{\partial T}{\partial x}+q=0, \qquad (x,t)\in[-l,l]\times[0,\infty), \\ \\ (T,q)_{t=0}=(0,0), \quad T(-l,t)=\mu_1(t), \quad T(l,t)=\mu_2(t), \quad \mu_1(0)=\mu_2(0)=0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь T, q — температура и тепловой поток, c, ρ, k — удельная теплоемкость, плотность, удельная теплопроводность, τ — период релаксации, μ_1, μ_2 — заданные непрерывные функции. Краевая задача (1) однозначно разрешима (в обобщенном смысле) в классе непрерывных функций с некоторыми дополнительными условиями гладкости [2, 3].

В рамках модели (1) тепловой импульс распространяется с конечной скоростью $a=\sqrt{k/(\tau c\rho)}$. Зафиксируем

$$t^*\in[l/a,2l/a], \qquad T^*(x)\in C[-l,l].$$

За время t^* идущие от концов стержня тепловые импульсы успевают пройти не менее половины стержня точно один раз. Будем называть пару функций (μ_1,μ_2) управлением. Поставим задачу вычисления управления (μ_1,μ_2) на отрезке $[0,t^*]$, обеспечивающего в рамках модели (1) выполнение равенства

$$T(x,t^*)=T^*(x), \qquad x\in[-l,l].$$

В римановых инвариантах $u_1=T+\beta q$, $u_2=T-\beta q$, $\beta=\sqrt{\tau/(k\,c\rho)}$ гиперболическая система (1) принимает вид

$$Lu=\left(\frac{\partial}{\partial t}+A\frac{\partial}{\partial x}+B\right)u=0, \quad A=\operatorname{diag}(a,-a), \quad B=\frac{1}{2\tau}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \quad u=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix}.$$

Матрица Римана второго рода гиперболического оператора L дается формулой (см. [3])

$$V(x,t)=(v_{ij})=\exp\left(-t/(2\tau)\right)\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{at+x}{at-x}}I_1\left(\dfrac{r}{2\tau}\right) & I_0\left(\dfrac{r}{2\tau}\right)\\ I_0\left(\dfrac{r}{2\tau}\right) & \sqrt{\dfrac{at-x}{at+x}}I_1\left(\dfrac{r}{2\tau}\right)\end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $r=\sqrt{t^2-(x/a)^2}$, $I_k(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента [4].

Представим функцию $T^*(x)$ в виде

$$\begin{cases} T^*=T_1+T_2, \quad T_k\in C[-l,l], \\ \\ T_1=0 \text{ на } [-l+at^*,l], \quad T_2=0 \text{ на } [-l,l-at^*]. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим

$$K_1(s,t) = \sum v_{i1}(-l + at^* - s, t), \quad K_2(s,t) = -\sum v_{i2}(l - at^* - s, t),$$
$$M_1(x,s) = \sum v_{i1}(x + at^* - s, t^*), \quad M_2(x,s) = -\sum v_{i2}(x - at^* - s, t^*), \tag{4}$$

где v_{ij} — элементы матрицы (2).

Теорема. *Каждой паре (T_1, T_2) функций (3) отвечает точно одно решение (μ_1, μ_2) поставленной задачи управления. Имеют место формулы*

$$\mu_1(t) = \frac{1}{2}\left[\exp\left(-t/(2\tau)\right)\varphi(-l - a(t - t^*)) + \int\limits_{-l-a(t-t^*)}^{-l+at^*} K_1(s,t)\varphi(s)ds\right],$$

$$\mu_2(t) = \frac{1}{2}\left[\exp\left(-t/(2\tau)\right)\psi(l + a(t - t^*)) + \int\limits_{l+a(t-t^*)}^{l-at^*} K_2(s,t)\psi(s)ds\right],$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ — решения интегральных уравнений Вольтерра второго рода на $[-l, l]$

$$\exp\left(-t^*/(2\tau)\right)\varphi(x) + \int\limits_{x}^{-l+at^*} M_1(x,s)\varphi(s)ds = 2T_1(x),$$

$$\exp\left(-t^*/(2\tau)\right)\psi(x) + \int\limits_{x}^{l-at^*} M_2(x,s)\psi(s)ds = 2T_2(x),$$

K_i, M_i *— функции* (4).

Обоснование проводится по схеме, близкой к примененной в работе [3], где рассматривается задача граничного управления процессом теплопереноса в полубесконечном стержне.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карташов Э. М., Ремизова О. И.* // Изв. РАН. Сер. Энергетика. 2002. № 3. С. 146–156.
2. *Воробьева Е. К., Романовский Р. К.* // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 3. С. 531–540.
3. *Романовский Р. К., Жукова О. Г.* // Докл. АН ВШ РФ. 2006. № 1 (6). С. 69–77.
4. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 736 с.

УДК 517.925:62.50

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ

© С. С. Жуматов

anar@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Вырожденная система управления приводится к эквивалентной и канонической формам. С помощью построения функции Ляпунова устанавливается достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия относительно вектор-функции ω.

Одним из важных классов неявных систем являются модели вида

$$H(t,x(t))\dot{x}(t) = F(t,x), \quad H \in R^{s\times n}, \quad x \in R^n, \quad F \in R^s, \quad t \in I = (\alpha, \beta). \tag{1}$$

Такие системы линейных уравнений, не разрешенные относительно старшей производной или алгебро-дифференциальные системы, важные для приложений, как экономические системы управления, теория электрических цепей и т. д, изучались многими авторами. Обзор этих работ приведен в [1]. В этих работ доказаны существование и единственность решений, исследованы приводимость систем с переменными матрицами к системам с постоянными матрицами, вырожденные системы приведены к различным каноническим видам, рассматривались вопросы их эквивалентности системам с постоянными и кусочно-постоянными коэффициентами, построены алгоритмы решения вырожденных линейных систем. В настоящей работе исследуется задача установления эквивалентности и устойчивости вырожденных систем. Полученные результаты являются распространением некоторых результатов полученных в [2, 3], на нелинейные системы. К системе типа (1) приводятся также задача построения систем по заданному многообразию. Пусть дифференциальное уравнение [4]

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2}$$

описывает динамические процессы систем автоматического управления, где $x \in R^n$, $f = (t,x) \in R^n$ — вектор-функция состояния системы управления, обеспечивающая существование и единственность решений уравнений (2) на интервале $t \in I = (\alpha, \beta)$ и обладающая $n-s$-мерным гладким интегральным многообразием $\Omega(t)$, определяемым векторным уравнением $\omega(t,x) = 0 \quad \omega \in R^s, s \le n$. В силу того, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным для системы (2) имеет место

$$\dot{\omega} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} f(t,x) = F(t,x,\omega), \tag{3}$$

где $F(t,x,0) \equiv 0$ — функция Еругина [5].

Рассмотрим неявную дифференциальную систему, возникающей при построении систем по заданному многообразию $\Omega(t)$:

$$H(t,x(t))\dot{x}(t) = f(t,x), \quad H \in R^{s\times n}, \quad x \in R^n, \quad \omega \in R^s, \ s \le n, \quad t \in I = (\alpha, \beta). \tag{4}$$

где $H(t,x(t)) = \partial\omega/\partial x$, $f(t,x) = F(t,\omega(t,x)) - \partial\omega/\partial t$, α, β — конечные или бесконечные числа, $F(t,0) \equiv 0$ — функция Еругина, а многообразие $\Omega(t)$ задано в линейном виде $\omega(t,x) \equiv H_1(t)x = 0$, где $H_1(t) \in R^{s\times n}$ — заданная непрерывная матрица. Нашей целью является установление достаточных условий устойчивости программного многообразия вырожденных систем. Рассмотрим случай, когда характеристическое уравнение матрицы $H(t)$ при $s = n$ имеет r нулевых корней.

Выбирая функцию Еругина линейной относительно вектор-функции ω $F(t,x,\omega)=-A_2(t)\omega$ и принимая во внимание линейность заданного многообразия, систему (4) преобразуем к виду

$$H(t)\dot{x}=-A(t)x-q(t), \tag{5}$$

где $H(t)\in R^{s\times s}$, $A(t)=A_2(t)H_1(t)$, $q(t)=\partial\omega/\partial t$.

Введём оператор $L(t)=-A(t)-H(t)d/dt$.

Теорема 1. *Пусть* $A(t)$, $H(t)\in C^{2m}(\alpha,\beta)$, $\operatorname{rank}H(t)=s-r$ *и матрица* $H(t)$ *имеет в интервале* (α,β) *полный жорданов набор относительно оператора* $L(t)$, *который складывается с* r *клеток порядка* $l_1,\ldots,l_r$ *при* $\max\limits_i l_i=m$. *Тогда существуют неособые при всех* $t\in(\alpha,\beta)$ $(s\times s)$ *-матрицы* $\widetilde{M}(t)$, $G_1(t)\in C^1(\alpha,\beta)$ *такие, что умножением на* $\widetilde{M}(t)$ *и заменой* $x=G_1(t)y$ *система (5) приводится к центральной канонической форме*

$$\begin{Vmatrix} E_{s-l} & 0\\ 0 & J\end{Vmatrix}\dot{y}=\begin{Vmatrix} M(t) & 0\\ 0 & E_l\end{Vmatrix}y+\widetilde{M}(t)q(t), \tag{6}$$

где $l=l_1+\cdots+l_r$, $J=\operatorname{diag}(J_1,\ldots,J_r)$, J_j *— жордановые клетки порядка* l_j $j=\overline{1,r}$.

Вместе с системой (5) рассмотрим систему аналогичного вида

$$P(t)\dot{y}+Q(t)y=0,\quad t\in I, \tag{7}$$

где P и Q — абсолютно непрерывные $s\times s$ матрицы, ограниченные на промежутке I, а детерминант матрицы P равен нулю для всех $t\in I$.

Теорема 2. *Системы (5) и (7) асимптотически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует такая матрица Ляпунова* L *, что для любой фундаментальной матрицы* Y *решений системы (7) существует фундаментальная матрица* X *решений системы (5), для которой имеет место представление* $X=LY$.

Теперь рассмотрим вопрос о построении устойчивых систем управления по заданноому программному многообразию

$$\dot{x}=f(t,x)-B(t)\xi,\quad \dot{\xi}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=P^T\omega, \tag{8}$$

где $B(t)\in R^{s\times k}$ — непрерывная, $P\in R^{s\times k}$ — постоянная матрицы, φ, $\sigma\in R^k$ — векторы, а нелинейная вектор-функция $\varphi(\sigma)$ удовлетворяет локальным условиям квадратичной связи и дифференцируема по σ. Тогда с учетом, что многообразие $\Omega(t)$ является интегральным и для системы (8), система (5) будет иметь вид

$$H(t)\dot{x}=-A_2(t)\omega-q(t)-H(t)B(t)\xi,\quad \dot{\xi}=\varphi(\sigma),\quad \sigma=P^T\omega, \tag{9}$$

Система (9) приводится к центральной канонической форме и путем построения для нее функции Ляпунова получено достаточное условие абсолютной устойчивости относительно вектор-функции ω.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуматов С. С.* Центральная каноническая форма и устойчивость вырожденных систем управления // Математический журнал. Алматы. 2003. Т. 3, № 3. С. 48–54.
2. *Яковец В. П.* Деякі властивості вироджених лінійних систем // Укр. мат. журнал. Киев. 1997. Т. 49, № 9. С. 1278–1296.
3. *Мазаник С. А.* О линейных дифференциальных системах, эквивалентных относительно обобщенного преобразования Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 9. С. 1619- 1622.
4. *Майгарие Б. Ж.* Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. Алма-Ата, 1981. 316 с.
5. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, в. 16. С. 659–670.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 158–159

УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

© А. Х. Жураев

apakov.1956@mail.ru

Наманганский инженерно-педагогический институт, Наманган, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$U_{xxx} - U_{yy} = 0 \tag{1}$$

в области $D = \{(x;y) : 0 < x < a,\ 0 < y < b\}$, где $b = const > 0$.

Задача. Найти непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую в области D уравнению (1) краевыми условиями

$$u\,(x,0) = u\,(x,b) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant a \tag{2}$$

$$u\,(0,y) = \varphi_1\,(y)\,, u_x\,(a,y) = \varphi_2\,(y)\,, u_{xx}\,(a,y) = \varphi_3\,(y)\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \tag{3}$$

где $\varphi_i\,(y) \in C'\,[0,b]$, $\varphi_i\,(0) = \varphi_i\,(b) = 0$, $i = 1,2,3.$

Единственность решения задачи доказывается так же, как в работе [1] Следуя работе [2], имеем решения вспомогательной задачи (1)–(2) в виде:

$$U\,(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[{}_{1n} e^{-k_n x} + e^{\frac{1}{2}k_n x} \left({}_{2n} \cos \nu_n x + {}_{3n} \sin \nu_n x \right) \right] \sin \frac{\pi n}{b} y. \tag{4}$$

С помощью условий (3) получим систему алгебраических уравнений для определения C_{in} $(i = 1,2,3)$:

$$\begin{cases} A_{1n} = C_{1n} + C_{2n}, \\ A_{2n} = -k_n\, C_{1n} e^{-k_n a} + k_n e^{\frac{1}{2}k_n a} \left[C_{2n} \cos\left(\nu_n a + \frac{\pi}{3}\right) + C_{3n} \sin\left(\nu_n a + \frac{\pi}{3}\right)\right], \\ A_{3n} = k_n^2\, C_{1n} e^{-k_n a} - k_n e^{\frac{1}{2}k_n a} \left[C_{2n} \cos\left(\nu_n a - \frac{\pi}{3}\right) + C_{3n} \sin\left(\nu_n a - \frac{\pi}{3}\right)\right], \end{cases}$$

где $A_{in} = \frac{2}{b} \int\limits_0^b \varphi_i\,(\eta) \sin \frac{\pi n}{b} \eta d\eta$, $(i = 1,2,3)$.

Находим определитель этой системы:

$$\Delta = \sqrt{3} k_n^3 e^{k_n a} \left(\frac{1}{2} + e^{-\frac{3}{2}k_n a} \cos \nu_n a \right) \neq 0.$$

Подставив найденные значение C_{in} в (4), имеем:

$$U\,(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_{1n} D_{1n}\,(x) + A_{2n} D_{2n}\,(x) + A_{3n} D_{3n}\,(x) \right] \sin \frac{k\pi}{b} y, \tag{5}$$

где

$$D_{1n}\,(x) = \frac{\sqrt{3} k_n^3}{\Delta} \left[\frac{1}{2} e^{k_n (a-x)} + e^{-\frac{1}{2}k_n (a-x)} \cos\left(\nu_n\,(a-x)\right) \right],$$

$$D_{2n}\left(x\right)=\frac{k_n^2}{\Delta}\left[e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a-\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin\nu_n x-e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n\left(a-x\right)-\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$D_{3n}\left(x\right)=\frac{k_n}{\Delta}\left[e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a+\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin\nu_n x-e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n\left(a-x\right)+\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Равномерная сходимость ряда (5) доказывается с помощью интегрального признака Коши.

Вычисляя производные, получим

$$D_{1n}^{(p)}\left(x\right)=\frac{\sqrt{3}k_n^{p+3}}{\Delta}\left[(-1)^p\frac{1}{2}e^{k_n(a-x)}+e^{-\frac{1}{2}k_n(a-x)}\cos\left(\nu_n\left(a-x\right)-p\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$D_{2n}^{(p)}\left(x\right)=\frac{k_n^{p+2}}{\Delta}\left[(-1)^p e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a-\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin(\nu_n x+p\frac{\pi}{3})-\right.$$
$$\left.e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n\left(a-x\right)-(p+1)\frac{\pi}{3}\right)\right],$$

$$D_{3n}^{(p)}\left(x\right)=\frac{k_n^{p+1}}{\Delta}\left[(-1)^p e^{k_n\left(\frac{1}{2}a-x\right)}\sin\left(\nu_n a+\frac{\pi}{3}\right)+e^{-k_n\left(a-\frac{1}{2}x\right)}\sin(\nu_n x+p\frac{\pi}{3})-\right.$$
$$\left.e^{\frac{1}{2}k_n(a+x)}\sin\left(\nu_n\left(a-x\right)+\frac{\pi}{3}-p\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Функции $D_{in}^{(p)}(x)$ при $p=3$ удовлетворяют тождествам

$$D_{in}^{(3)}(x)+\lambda_n D_{in}(x)=0,\quad i=1,2,3$$

Для функции $D_{in}(x)$, $i=1,2,3$, имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} D_{1n}(0) & D'_{1n}(a) & D''_{1n}(a)\\ D_{2n}(0) & D'_{2n}(a) & D''_{2n}(a)\\ D_{3n}(0) & D'_{3n}(a) & D''_{3n}(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Подставив значения A_{in} в ряд (5) имеем решения задачи в виде

$$U\left(x,y\right)=\frac{2}{b}\int\limits_0^b R_1\left(x,y,\eta\right)\varphi_1\left(\eta\right)d\eta+\frac{2}{b}\int\limits_0^b R_2\left(x,y,\eta\right)\varphi_2\left(\eta\right)d\eta+\frac{2}{b}\int\limits_0^b R_3\left(x,y,\eta\right)\varphi_3\left(\eta\right)d\eta,$$

где

$$R_i\left(x,y,\eta\right)=\sum_{n=1}^{\infty}D_{in}\left(x\right)\sin\frac{\pi n}{b}y\sin\frac{\pi n}{b}\eta.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Апаков Ю. П.* Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. // Материалы III международный конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. Нальчик, 5–8 декабря 2006 г. С. 37–39.
2. *Иргашев Б. Ю., Апаков Ю. П.* Первая краевая задача для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа // Уз. МЖ. 2006. № 2. С. 44–51.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 160–161

УДК 517.946

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© Д. А. Жураев [*], И. Исломов

[*] davron-0112@rambler.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

В работе изучается интегральная формула для систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами факторизирующий оператором Гельмгольца в ограниченной области. Для этого вводится следующее обозначение.

Пусть $x = (x_1,\ x_2)$ и $y = (y_1, y_2)$ точки 2-х мерного вещественного евклидова пространства R^2 и $x^T = ({}_1, {}_2)^T$ — вектор-столбец, транспонированный вектор к x,

$$r = |x-y|\,, \quad \alpha = |x_1 - y_1|\,, \quad \omega = i\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_2, \quad u \geq 0, \quad \omega_0 = i\alpha + y_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^T, \quad u(x) = (u_1(x), u_2(x))^T, \quad u^0 = (1,1) \in R^2,$$

$E(x) = \left\| \begin{matrix} {}_1 & 0 \\ 0 & {}_2 \end{matrix} \right\|$ — диагональная матрица.

Через $A_{2\times 2}(x)$ обозначим класс матриц $D(x^T)$ с элементами, состоящими из линейных функций с постоянными коэффициентами из C, для которых выполняется условие:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E((|x|^2 - \lambda^2)u^0),$$

где $D^*(x^T)$ — эрмитова сопряженная матрица $D(x^T)$, λ — постоянное.

Обозначим через G односвязную область R^2, граница которой состоит из отрезка $[a,b]$ и некоторой гладкой кривой S, лежащей на полуплоскости $y_2 > 0$.

Рассмотрим в G систему дифференциальных уравнений

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \tag{1}$$

где характеристическая матрица $D(x^T) \in A_{2\times 2}(x)$. Обозначим через $P(G)$ класс вектор-функций, имеющих непрерывную производную первого порядка в G, удовлетворяющих системе (1) и непрерывных в $\overline{G} = G \cup \partial G$.

Пусть $u(x) \in P(G)$ и задано значения вектор-функции $u(y)\ /_s = f(x)$. Требуется восстановление значения вектор-функции в G, исходя из значений $f(x)$. Для решения этой задачи верна следующая теорема:

Теорема. *Пусть $u(x) \in P(G)$ и удовлетворяет граничному условию $|u(y)| \leqslant 1$ на $[a,b]$, если*

$$u_\sigma(x) = \int\limits_{\partial G} N_\sigma(y,x)u(y)ds_y, \quad x \in G, \tag{2}$$

где (см. [1]*)*

$$N_\sigma(y,x) = \left(E\left(\Phi_\sigma(y,x)u^0\right)D^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)D(t)^T, \quad x \in G,$$

$\Phi_\sigma(y,x)$ — функция Карлемана для уравнения Гельмгольца на области G (см. [2]*) для решения задача Коши, $t = (t_1,\ t_2)$ — единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y на ∂G, тогда верно следующее неравенство:*

$$|u(y) - u_\sigma(y)| \leqslant c(x)e^{\sigma x_2}, \quad x \in G.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарханов Н. Н.* Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа // Ин-т физики АН СССР, Красноярск. 1980. С. 147–160.
2. *Ярмухамедов Ш. Я.* О продолжении решения уравнения Гельмгольца // Докл. АН. 1997. Т. 357, № 3. С. 320–323.

УДК 517.9

УРАВНЕНИЕ БУССИНЕСКА – ЛЯВА НА ГРАФЕ

© **А. А. Замышляева**

alzama@mail.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Рассматривается уравнение Буссинеска – Лява [1]

$$(\lambda - \Delta)u_{tt} = \alpha(\Delta - \lambda')u_t + \beta(\Delta - \lambda'')u, \tag{1}$$

описывающее продольные колебания графа, состоящего из упругих стержней. Г. А. Свиридюк [2] впервые рассмотрел начально-краевую задачу для полулинейного уравнения соболевского типа первого порядка на графе. Многомерное, вообще говоря, уравнение (1) удается свести к одномерному уравнению, определенному на ориентированном графе. Пусть $G = G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathcal{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathcal{E} = \{E_j\}$ — множество дуг. Мы предполагаем, что каждая дуга имеет длину $l_j > 0$. На графе G нас будут интересовать задача с краевыми

$$u_j(0,t) = u_k(l_k,t), \quad E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i) \cup E^{\omega}(V_i); \tag{2}$$

$$\sum_{E_j \in E^{\alpha}(V_i)} u_{jx}(0,t) - \sum_{E_k \in E^{\omega}(V_i)} u_{kx}(l_k,t) = 0 \tag{3}$$

и начальными

$$u_j(t,0) = u_{j0}(x), \quad u_{jt}(t,0) = u_{j1}(x), \quad x \in (0, l_j) \tag{4}$$

условиями для уравнения

$$\lambda u_{jtt} - u_{jxxtt} = \alpha(u_{jxxt} - \lambda' u_{jt}) + \beta(u_{jxx} - \lambda'' u_j). \tag{5}$$

Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество дуг с началом (концом) в вершине V_i. Условие (2) требует, чтобы все решения были непрерывными на вершинах графа, а (3) — аналог условия Кирхгоффа — в случае, когда граф состоит из единственной дуги с двумя вершинами, превращается в условие Неймана.

Задачу (2)–(4) для уравнения (3) удалось редуцировать к задаче Коши для уравнения соболевского типа второго порядка и применить абстрактные результаты о морфологии фазового пространства такого уравнения [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
2. *Свиридюк Г. А.* Уравнения соболевского типа на графах // Некласс. уравн. матем. Физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. С. 221–225.
3. *Замышляева А. А.* Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболев-ского типа второго порядка // Вычислит. технол. 2003. Т. 8, № 4. С. 45–54

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 163–164

УДК 517.95

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ВАРИАЦИОННОМ ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ – СТОКСА

© В. М. Ипатова

ipatval@mail.ru

Московский физико-технический институт (ГУ), Долгопрудный Московской обл.

Пусть G – ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$, с непрерывной по Липшицу границей ∂G, $0 < T < +\infty$, $Q = G \times (0,T)$, $\Gamma = \partial G \times [0,T]$. В [1,2] сформулирован вариационный метод построения решений системы Навье-Стокса

$$u_t + (u\nabla)u - \mu\triangle u = \nabla P + \hat{f}, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad u|_{t=0} = u_0, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{3}$$

при котором условие соленоидальности (3) не включается в определение решения задачи (1)–(2), а удовлетворяется посредством минимизации функционала $J = \int_Q (\operatorname{div} u)^2 dQ$. Заметим, что исследование разрешимости начально-краевой задачи (1)–(2) является весьма сложной проблемой, поскольку для ее решений не удается получить глобальных априорных оценок. В настоящей работе предлагается заменить уравнение движения (1) на уравнение

$$u_t + (u\nabla)u + \frac{u}{2}\operatorname{div} u - \mu\triangle u = f, \tag{4}$$

где вектор-функцию $f = \nabla P + \hat{f}$ будем считать известной. Подобная замена оправдана тем, что при выполнении условия соленоидальности (3) уравнения (1) и (4) совпадают, но разрешимость начально-краевой задачи (4), (2) может быть исследована, что будет показано ниже.

Обозначим через $H = (L_2(G))^n$, $(\cdot,\cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в H; $H^k \subset H$, $k = 1, 2$ — пространства вектор-функций высоты n равных нулю на Γ, все пространственные производные которых до порядка k включительно принадлежат H; H^{-k} — сопряженные с H^k пространства при отождествлении H со своим сопряженным;

$$Y = L_2(0,T;H^1), \quad Y^* = L_2(0,T;H^{-1}),$$

$$V = \{u \in Y, u_t \in Y^*\}, \quad W = \{u \in L_2(0,T;H^2), u_t \in (L_2(Q))^2\}.$$

Умножая (4) на u скалярно в H, получаем для гладких решений задачи (4),(2) равенство $(u_t,u)+\mu\|\nabla u\|^2 = (f,u)$. Используя вытекающую из него априорную оценку и метод Галеркина со специальным выбором базиса [3], можно показать, что верна следующая

Теорема 1. *При всех $u_0 \in H$ и $f \in Y^*$ задача (4),(2) имеет хотя бы одно решение $u \in Y \cap L_\infty(0,T;H)$, для которого при почти всех $t \in [0,T]$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|^2 + \mu\int_0^t \|\nabla u\|^2 dt' \leq \frac{1}{2}\|u_0\|^2 + \int_0^t (f,u)dt'.$$

Более полные результаты удается получить для случая $n = 2$. А именно, справдлива

Теорема 2. *Пусть* $n = 2$, *тогда при всех* $u_0 \in H$ *и* $f \in Y^*$ *задача (4),(2) имеет единственное решение* $u \in V$. *Если к тому же* $u_0 \in H^1$, $f \in (L_2(Q))^2$ *и граница* ∂G *есть кривая класса* C^2, *то* $u \in W$.

Обозначим через F разрешающий оператор задачи (4),(2), то есть представим ее решение в виде $u = F(u_0, f)$. Кроме того, введем в рассмотрение линеаризонанную задачу

$$v_t + (u\nabla)v + \frac{u}{2}\mathrm{div}v + (v\nabla)u + \frac{v}{2}\mathrm{div}u - \mu\triangle v = h, \tag{5}$$

$$v|_\Gamma = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \tag{6}$$

Имеет место следующая

Теорема 3. *Пусть* $n = 2$, *тогда* F *задает непрерывное и дифференцируемое отображение пространства* $H \times Y^*$ *на* V, *причем его производная Фреше является разрешающим оператором задачи (5)–(6). Если к тому же граница* $\partial G \in C^2$, *то* F *непрерывен и дифференцируем по Фреше как оператор, действующий из* $H^1 \times (L_2(Q))^2$ *на* W.

Автор благодарит В. И. Агошкова за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Agoshkov V. I.* Iterative processes for some boundary value problems of hydrodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2004. V. 19, N 3. P. 207–222 .
2. *Агошков В. И., Ботвиновский Е. А.* Численное решение нестационарной системы Стокса методами теории оптимального управления и сопряженних уравнений // Международная конференция “Тихонов и современная математика”. Тезисы докладов секции “Вычислительная математика”. Москва, МГУ, 19-25 июня 2006 г. С. 14–15.
3. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 165–166

УДК 517.95+517.97

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ОКЕАНА С НЕПРЕРЫВНОЙ ПО ЛИПШИЦУ ПЛОТНОСТЬЮ И РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ АССИМИЛЯЦИИ ДАННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

© В. М. Ипатова

ipatval@mail.ru

Московский физико-технический институт (ГУ), Долгопрудный

Разрешимость уравнений крупномасштабной динамики океана была изучена в [1–3] при предположении, что плотность воды $\rho = \rho(T, S)$ является линейной функцией температуры T и солености S. В настоящей работе устанавливается существование решений для модели, в которой плотность считается нелинейной непрерывной по Липшицу функцией, $|\rho(T_1, S_1) - \rho(T_2, S_2)| \leq L\sqrt{(T_1 - T_2)^2 + (S_1 - S_2)^2}$, $\forall T_1, T_2, S_1, S_2 \in \mathbf{R}$, а также исследуется разрешимость задачи вариационной ассимиляции данных наблюдений в этой модели. Пусть Ω — открытое подмногообразие сферы радиуса R с кусочно-гладкой границей, x, y, r — сферические координаты, $H(x, y)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, $z = R - r$, $G = \{(x, y) \in \Omega, 0 < z < H(x, y)\}$, Σ — боковая граница G, Ω_H — нижняя граница G при $z = H(x, y)$, $\mathbf{n}_\Sigma = (\mathbf{n}, 0)$ и $\mathbf{n}_H$ — векторы внешней нормали к Σ и Ω_H, $0 < t_1 < \infty$, $D = \Omega \times (0, t_1)$; $(u, v, w) \equiv (\mathbf{u}, w)$ — вектор скорости, $w = w(\mathbf{u}) = div \int_z^{H(x,y)} \mathbf{u} dz'$, $\xi = \xi(x, y, t)$ — возвышение уровня поверхности океана. Далее символ ϕ используется как общее обозначение функций u, v, T, S.

Система уравнений динамики океана записывается в виде

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + (A + B(u))\mathbf{u} + g\nabla\xi + g/\rho_0 \nabla \int_0^z \rho dz' = \mathbf{f}, \tag{1}$$

$$\frac{dT}{dt} + A_T T = f_T, \quad \frac{dS}{dt} + A_S S = f_S, \quad \xi_t + div \int_0^H \mathbf{u} dz = Q_w, \tag{2}$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla + w(\mathbf{u}) \partial/\partial z$, $B(u)\mathbf{u} = (2\omega \sin y + u \mathrm{tg} y/R)(-v, u)$, $A_\phi = -\mu_\phi \triangle - \nu_\phi \partial^2/\partial z^2$, $g, \rho_0, \omega, \mu_\phi, \nu_\phi$ — положительные постоянные, $A_u = A_v = A$, $\mathbf{f}, f_T, f_S$ — заданные функции.

Систему (1)–(2) дополним начальным условием

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0, \ T = T^0, \ S = S^0, \ \xi = \xi^0 \quad \text{при} \quad t = 0 \tag{3}$$

и граничными условиями

$$\nu \mathbf{u}_z = -\frac{\tau}{\rho_0} + \frac{w(\mathbf{u})}{2}\mathbf{u} \quad \nu_\psi \psi_z = \gamma_\psi(\psi - \psi_s) + \frac{w(\mathbf{u})}{2}\psi + Q_\psi \quad \text{при} \ \ z = 0, \tag{4}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \times \mathbf{n} = \nabla T \cdot \mathbf{n} = \nabla S \cdot \mathbf{n} = 0 \ \text{ на } \ \Sigma; \ \ (\mu_\phi \nabla\phi, \nu_\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}) \cdot \mathbf{n}_H = 0 \ \text{ на } \ \Omega_H, \tag{5}$$

где ψ означает T и S, γ_ψ — положительные постоянные, τ, ψ_s, Q_ψ — заданные функции.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ и $\| \cdot \|$, $(\cdot, \cdot)_0$ и $\| \cdot \|_0$, $(\cdot, \cdot)_D$ и $\| \cdot \|_D$ скалярное произведение и норму в $L_2(G)$, $L_2(\Omega)$ и $L_2(D)$. Пусть $H^k(G) = W_2^k(G)$ и $\mathbf{H}_0^k(G)$ есть пространства Соболева

функций и вектор-функций, удовлетворяющих условию $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ на Σ, $H^{-k}(G)$ и $\mathbf{H}_0^{-k}(G)$ — сопряженные к ним пространства,

$$X=\{\mathbf{u}\in L_2(0,t_1;\mathbf{H}_0^1(G)),\ \mathbf{u}_t\in L_{4/3}(0,t_1;\mathbf{H}_0^{-2}(G))\},\quad Y=\{T\in L_2(0,t_1;H^1(G)),$$

$$T_t\in L_{4/3}(0,t_1;H^{-2}(G))\},\quad Z=\{\xi\in L_2(D),\ \xi_t\in L_2(D)\},\quad V=X\times Y\times Y\times Z,$$

$$\mathcal{H}=(L_2(G))^4\times L_2(\Omega),\quad W=V\cap L_\infty(0,t_1;\mathcal{H}),\quad P=L_2(0,t_1;\mathbf{H}_0^{-1}(G));$$

$$U=\{\mathbf{u},T,S\},\ \Xi=\{\mathbf{u},T,S,\xi\},\quad \|\Xi\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2+\|T\|^2+\|S\|^2+g\|\xi\|_0^2,$$

$$[\phi,\phi_1]=\mu_\phi(\nabla\phi,\nabla\phi_1)+\nu_\phi\,(\partial\phi/\partial z,\partial\phi_1/\partial z)+\gamma_\phi(\phi,\phi_1)_0|_{z=0},$$

$$[U,U_1]=[u,u_1]+[v,v_1]+[T,T_1]+[S,S_1],\quad \gamma_u=\gamma_v=0.$$

Введем в рассмотрение неравенство

$$\|\Xi(t)\|^2/2+\int_0^t[U,U]dt'\le\|\Xi^0\|^2/2+$$
$$\int_0^t\big((F,U)+g/\rho_0(\int_0^z\rho dz',\operatorname{div}\mathbf{u})+(F_0,U)_0|_{z=0}+g(Q_w,\xi)_0\big)dt'. \tag{6}$$

Теорема 1. *При всех* $\Xi^0=\{\mathbf{u}^0,T^0,S^0,\xi^0\}\in\mathcal{H}$, $\mathbf{f}\in P$, $f_T,f_S\in L_2(0,t_1;H^{-1}(G))$, Q_w, T_s, Q_T, S_s, Q_S, *принадлежащих* $L_2(D)$, *и* $\tau\in(L_2(D))^2$ *задача (1)–(5) имеет хотя бы одно решение* $\Xi\in W$, *для которого при почти всех* $t\in[0,t_1]$ *верно неравенство (6).*

Пусть в области $D_1\subset D$ известны данные наблюдений за возвышением уровня поверхности океана $\xi=\xi_{obs}(x,y,t)$ и за поверхностной температурой $T|_{z=0}=T_{obs}(x,y,t)$, которые мы продолжим нулем на $D\setminus D_1$. Данные наблюдений используются для отыскания потоков влаги Q_w, тепла Q_T и соли Q_S. Будем считать, что $q=\{Q_w,Q_T,Q_S\}$ разыскивается в пространстве $Q=E\times(L_2(D))^2$, где $E=L_p(0,t_1;W_2^1(\Omega))\cap L_2(D)$, $1<p\le 2$. Обозначим через $\mathcal{U}(q)\subset W$ множество всех решений задачи (1)–(5), отвечающих данному значению q и удовлетворяющих (6). Рассмотрим множество M всех пар $\{q,\Xi\}$ таких, что $q\in Q$, $\Xi\in\mathcal{U}(q)$. Определим на M функционал

$$J(q,\Xi)=\alpha(\|Q_w-Q_w^a\|_E^2+\|Q_T-Q_T^a\|_D^2+\|Q_S-Q_S^a\|_D^2)+\|\chi\xi-\xi_{obs}\|_D^2+\|\chi T|_{z=0}-T_{obs}\|_D^2,$$

где $\alpha=const\ge 0$, χ — характеристическая функция множества D_1, $Q_w^a\in E$ и $Q_T^a,Q_S^a\in L_2(D)$ — заданные функции. Рассмотрим следующую задачу вариационной ассимиляции данных: найти элемент $\{q,\Xi\}\in M$, для которого

$$J(q,\Xi)=\inf_{\{q',\Xi'\}\in M}J(q',\Xi'). \tag{7}$$

Используя вытекающую из (6) априорную оценку, можно показать, что верна

Теорема 2. *При всех* $\alpha>0$ *и* $\xi_{obs},T_{obs}\in L_2(D)$ *задача (7) имеет решение.*

Автор благодарит В. И. Агошкова за полезные замечания. Работа выполнена в рамках проекта “Методы решения задач вариационного усвоения данных наблюдений и управления сложными системами” ОМН РАН и при поддержке РФФИ (проект 07-01-00714).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lions J. L., Temam R., Wang S.* On the equations of the large-scale ocean // Nonlinearity. 1992. № 5. P. 1007–1053.
2. *Temam R., Ziane M.* Some mathematical problems in geophysical fluid dynamics. Handbook of Mathematical Fluid Dynamics. Amsterdam: Elsevier, 2004. V. 3.
3. *Агошков В. И., Ипатова В. М.* Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 2. С. 1–3.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 167–168

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© С. С. Исамухамедов *, Н. К. Мамадалиев **

** mamadaliev57@mail.ru

* *Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан;*
** *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

Рассмотрим уравнение

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0, \tag{1}$$

где $\alpha = -n + \alpha_0$, $0 < \alpha_0 < \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть D — область, ограниченная гладкой кривой σ с концами в точках $O(0,0)$, $A(1,0)$, лежащей в верхней полуплоскости $y > 0$ и характеристиками $OC : x - 2\sqrt{-y} = 0$, $AC : x + 2\sqrt{-y} = 1$ уравнения (1). Эллиптическую и гиперболическую части смешанной области D обозначим через D_1 и D_2, соответственно. Постановка смешанных краевых задач для уравнения (1) зависит от значения коэффициента α. Известно [1], что при $\alpha > 0$ производная по y решения уравнения (1), а при $\alpha \geq 1$ и само решение будут, вообще говоря, неограниченными в окрестности точек параболической линии. Так, например, при $\alpha \geq 1$ для определения решения $u(x,y)$, ограниченного во всей смешанной области D, достаточно задавать его значение лишь на дуге σ [3], а характеристики OC и AC следует освободить от граничных данных, или же только на одной из характеристик [4], освободив дугу σ и вторую характеристику от данных.

Задача T_n [5]. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x,y) \in \left(\overline{D}\right)$;
2. $u(x,y)$ — обобщенное решение из класса R [2] в D_2, а в D_1 дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1);
3. На OA выполняется условие склеивания

$$(-1)^n \lim_{y\to -0} (-y)^\alpha \left[u - A_n^-(\tau)\right]'_y = \lim_{y\to +0} y^\alpha \left[u_y + A_n^+(u)\right] = \nu(x),$$

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \tau(x), \quad A_n^+(u) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i y^{i-1} \frac{\partial^{2i} u}{\partial x^{2i}};$$

4. $u|_\sigma = f(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, $u|_{OC} = \varphi(x)$, $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, f, φ — достаточно гладкие функции.

Когда $n = 0$ и $0 < \alpha < 1$, $A_n^-(\tau) = A_n^+(u) = 0$, вообще говоря, в этом случае u_y может быть неограниченной при $y \to 0$ [1]. Поэтому при рассмотрении задачи T_0 вместо непрерывности u_y берется условие

$$-\lim_{y\to -0} (-y)^\alpha u_y = \lim_{y\to +0} y^\alpha u_y = \nu(x).$$

Отметим, что при $\frac{1}{2} < \alpha_0 < 1$ эта задача исследована в работе [5] другим методом.

При определенных ограничениях на заданные функции доказано существование и единственность решения задачи T_n.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Уравнения смешанного типа. М., 1959.
2. *Кароль И. Л.* К теории уравнений смешанного типа // Доклады АН СССР. 1953. Т. 88, № 3.
3. *Кароль И. Л.* К теории краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа // Матем. сб. 1956. Т. 38, № 3.
4. *Исамухамедов С. С.* Краевые задачи типа задачи E для уравнения смешанного типа второго рода // В сб. “Краевые задачи для дифференциальных уравнений”, 2. Ташкент, 1972.
5. *Салахитдинов М. С., Исамухамедов С. С.* Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода // Сердика Българско математическо списанае. 1977. Т. 3. С. 181–188.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 169–170

УДК 517.946

ПРОДОЛЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© Т. Ишанкулов

itolib@rambler.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Пусть D_ρ — ограниченная односвязная область на комплексной плоскости $z = x + iy$ с кусочно-гладкой границей, состоящей из угла

$$G_\rho = \left\{ \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{2\rho} \right\}$$

и гладкой кривой S, лежащей внутри G_ρ; $C_\alpha(E)$ — множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера на плоскости E; $L_{p,2}(E)$ — множество функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям

$$f(z) \in L_p(|z| \leqslant 1), |z|^{-2} f(\frac{1}{z}) \in L_p(|z| \leqslant 1).$$

Через $u_{p,2}(A, B, D_\rho)$ обозначим множество решений в области D_ρ уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + A(z)w + B(z)\bar{w} = 0, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

где $A, B \in L_{p,2}(E) \cap C_\alpha(E)$, $p > 2$.

Рассматривается задача описания функций $\varphi \in (S)$, которые являются следами $w \in u_{p,2}(A, B, D_\rho)$. Обозначим через $X_j^\sigma(z, \xi)$ $(j = 1, 2)$ решения уравнения (1) по переменной z из класса $u_{p,2}(A, B, E)$, соответствующие по теореме взаимности [1] аналитическим функциям

$$\frac{1}{2}\Phi(z, \zeta), \ \frac{1}{2i}\Phi(z, \zeta),$$

где Φ — функция Карлемана дуги S относительно области D_ρ [2]:

$$\Phi(z, \zeta) = \frac{1}{\zeta - z} \exp\left\{\sigma\left[(-i\zeta)^\rho - (-iz)^\rho\right]\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть $w \in u_{p,2}(A, B, D_\rho) \cap (\bar{D}_\rho)$ и $w(z) = \varphi(z), z \in S$. Тогда справедливы следующие эквивалентные формулы продолжения:*

$$w(z) = \lim_{\sigma \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \Omega_1^\sigma(z, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \Omega_2^\sigma(z, \zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta}, \quad z \in D_\rho, \tag{2}$$

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \Omega_1(z, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \Omega_2(z, \zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\bar{\zeta} + \int\limits_0^\infty I(z, \sigma)d\sigma, \quad z \in D_\rho, \tag{3}$$

где Ω_j — основные ядра Коши,

$$I(z, \sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \gamma_1^\sigma(z, \zeta)\varphi(\zeta)d\zeta - \gamma_2^\sigma(z, \zeta)\bar{\varphi}(\zeta)d\zeta,$$

$$\gamma_j^\sigma = \frac{\partial}{\partial\sigma}\Omega_j^\sigma, \quad \Omega_1^\sigma = X_1^\sigma + iX_2^\sigma, \quad \Omega_2^\sigma = X_1^\sigma - iX_2^\sigma.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in L(S) \cap C(\overset{0}{S})$ *. Для того чтобы существовала функция* $w \in u_{p,2}(A, B, D_\rho) \cap C(D_\rho \cup \overset{0}{S})$ *такая, что ее сужение на* $\overset{0}{S}$ *совпадает с* φ *, необходимо и достаточно, чтобы интеграл*

$$\left| \int\limits_0^\infty I(z,\sigma) d\sigma \right| \leqslant \infty$$

сходился равномерно на каждом компакте $K \subset G_\rho$ *. Если это условие выполнено, то продолжение осуществляется эквивалентными формулами (2) и (3).*

Из теоремы 2 при $A(z) \equiv 0, B(z) \equiv 0, \rho = 1$ следует

Теорема (Фока – Куни). *Пусть* $\varphi \in L(S) \cap C(\overset{0}{S})$ *. Для того чтобы существовала функция* $w \in A(\bar{D}_1) \cap C(D_1 \cup \overset{0}{S})$ *такая, что* $w(z) = \varphi(z), z \in \overset{0}{S}$ *необходимо и достаточно, чтобы интеграл*

$$\left| \int\limits_0^\infty \int\limits_S \varphi(\zeta) \exp[-i\sigma(\zeta - z)] d\zeta d\sigma \right| < \infty$$

сходился равномерно на каждом компакте $K \subset \{\mathrm{Im} z > 0\}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959. 628 с.
2. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.
3. *Фок В. А., Куни Ф. М.* О введении гасящей функции в дисперсионные соотношения // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 6. С. 1195–1198.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 171–172

УДК 517.962.22

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

© Г. М. Кадиров, Н. Раджабов *

* nusrat38@mail.ru

Таджикский государственный национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Пусть $\Gamma = \{x : a < x < b\}$ — множество точек на вещественной оси, $c \in \Gamma$. На Γ рассмотрим следующее модельное уравнение второго порядка

$$y^{''}(x) + \left[\frac{\alpha sgn(x-c)}{|x-c|} + \frac{b_1}{|x-c|^{\alpha}}\right] y^{'}(x) + \frac{b_1 y(x)}{|x-c|^{2\alpha}} = \frac{f(x)}{|x-c|^{2\alpha}}, \tag{1}$$

где $\alpha = const > 1\,, b_1, b_2$ заданные постоянные числа, $f(x)$ — заданная функция, причем $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$.

Проблеме получения многообразия решений и исследованию граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков с сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1–5]. В настоящей работе в зависимости от корней характеристических уравнений

$$\lambda^2 - b_1\lambda + b_2 = 0 \quad \text{и} \quad \mu^2 + b_1\mu + b_2 = 0 \tag{2}$$

для уравнения (1) получено представление многообразия решений через произвольные постоянные, которые используются для выяснения постановок задач типа Коши и их исследования, когда соответствующие условия заданы в особой точке.

В случае, когда корни уравнения (2) вещественные и разные, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в уравнении (1)* $\alpha > 1$, $f(x) \in C(\overline{\Gamma})$. *Корни уравнений(2) вещественные и разные. Кроме того, пусть* $b_1 > \sqrt{b_1^2 - 4b_2} > 0$, $f(c-0) = 0$ *со следующим ассимптотическим поведением*

$$f(x) = 0\left[\exp\left[-|\mu_2|\,\omega_c^{\alpha}(x)\right](c-x)^{\gamma}\right], \gamma > \alpha, \quad \text{при} \quad x \to c-0.$$

Тогда любое решение уравнения (1) из класса $C^2(\Gamma)$ *представимо в виде*

$$y(x) = \begin{cases} K_{11}\left[c_1, c_2\right] + K_{12}[f], & \text{при} \quad a < x < c, \\ K_{21}\left[c_3, c_4\right] + K_{22}[f], & \text{при} \quad c < x < b, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$K_{11}\left[c_1, c_2\right] \equiv c_1 \exp\left[\mu_1 \omega_c^{\alpha}(x)\right] + c_2 \exp\left[\mu_2 \omega_c^{\alpha}(x)\right],$$

$$K_{12}[f] \equiv \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_2}} \int_x^c \frac{\exp\left[\mu_1(\omega_c^{\alpha}(x) - \omega_c^{\alpha}(t))\right] - \exp\left[\mu_2(\omega_c^{\alpha}(x) - \omega_c^{\alpha}(t))\right]}{(c-t)^{\alpha}} f(t)dt$$

$$K_{21}\left[c_3, c_4\right] \equiv C_3 \exp\left[\lambda_1 \omega_c^{\alpha}(x)\right] + C_4 \exp\left[\lambda_2 \omega_c^{\alpha}(x)\right],$$

$$K_{22}[f] \equiv \frac{1}{\sqrt{b_1^2 - 4b_2}} \int_c^x \frac{\exp\left[\lambda_1(\omega_c^{\alpha}(x) - \omega_c^{\alpha}(t))\right] - \exp\left[\lambda_2(\omega_c^{\alpha}(x) - \omega_c^{\alpha}(t))\right]}{(t-c)^{\alpha}} f(t)dt,$$

$$\lambda_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}, \qquad \lambda_2 = \frac{b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}}{2}, \quad \mu_2 = -\lambda_1, \quad \mu_1 = -\lambda_2,$$

$$\omega_c^\alpha(x) = \left[(\alpha-1)\,|x-c|^{\alpha-1}\right]^{-1}, \quad c_j(j=\overline{1,4}) \quad \text{произвольные постоянные числа.}$$

Когда корни уравнений (2) являются вещественными и разными, для уравнения (1) ставятся и исследуются следующие задачи типов Коши и линейного сопряжения.

Задача R_1. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^2(\Gamma)$, удовлетворяющее следующим условиям в точке $x=c$.

$$\begin{cases} [P_{11}(y(x))]_{x=c-0} = A_{11}, \quad [P_{12}(y(x))]_{x=c-0} = A_{12}, \\ \\ [P_{13}(y(x))]_{x=c+0} = A_{13}, \quad [P_{14}(y(x))]_{x=c+0} = A_{14}, \end{cases}$$

где

$$P_{11}(y(x)) = \exp\left[-\mu_1\omega_c^\alpha(x)\right]\left[\mu_2 y(x) - (c-x)^2 y^{'}(x)\right],$$

$$P_{12}(y(x)) = \exp\left[-\mu_2\omega_c^\alpha(x)\right]\left[\mu_1 y(x) - (c-x)^2 y^{'}(x)\right],$$

$$P_{13}(y(x)) = \exp\left[-\lambda_1\omega_c^\alpha(x)\right]\left[\lambda_2 y(x) + (x-c)^2 y^{'}(x)\right],$$

$$P_{14}(y(x)) = \exp\left[-\lambda_2\omega_c^\alpha(x)\right]\left[\lambda_1 y(x) + (x-c)^2 y^{'}(x)\right],$$

$A_{1j}(j=\overline{1,4})$ заданные постоянные числа.

Задача R_2. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^2(\Gamma)$, удовлетворяющее следующим условиям линейного сопряжения в точке $x=c$.

$$\sum_{k=1}^{2} B_{jk}\left[P_{1k}(y(x))\right]_{x=c-0} + \sum_{k=3}^{4} B_{jk}\left[P_{1k}(y(x))\right]_{x=c+0} = D_j, j=1,2,3,4,$$

где $B_{jk}(j,k=1,2,3,4)$, $D_j(j=1,2,3,4)$ — заданные постоянные числа.

Замечание 1. Утверждение, подобное теореме 1, получено и в случаях, когда корни уравнений (2) являются вещественно равными и комплексно-сопряженными.

Замечание 2. Задачи типов R_1 и R_2 ставятся и исследуются и в случаях, когда корни уравнений (2) являются вещественно равными и комплексно-сопряженными.

Замечание 3. Утверждение, подобное теореме 1, получено и в случаях, когда λ_1, λ_2 вещественно разные $b_1 < 0$, $|b_1| > \sqrt{b_1^2 - 4b_2}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rajabov N.* Linear conjugate boundary value problems for first order ordinary system of linear differential eguations with singular or Super–singular coefficients // Proceedings of the second ISAAC Congress, Khiwer Academic Publishers. 2000. V. 1. P. 175–183.
2. *Rajabov N.* Introduction to ordinary differential equations with singular and super-singular coefficients. Dushanbe: TSNU, 1998. 158 p.
3. *Раджабов Н., Кадиров Г. М.* К теории одного класса модельных обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с левой граничный сверх–сингулярной точкой // Труды международной научной конференции по дифференциальным и интегральным уравнениям с сингулярными коэффициентами (Душанбе, 25–28 октября 2003 г.). Душанбе, 2003. С. 128–130.
4. *Rajabov N.* Linear conjugate boundary value problems for the second order linear ordinary Differential Eguations with singular coefficients // ICM 1998, Berlin, August 18–27, 1998. Abstract of short Communications and poster section. Berlin, 1998. P. 196.
5. *Rajabov N.* Higher order ordinary differential eguations with super–singular points // Partial Differential and Integral Eguations. Kluwer Academic Publishers, 1999. P. 347–358.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 173–174

УДК 519.624.2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУММ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ ПОПРАВОК ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© С. И. Кадченко

kadchenko@masu.ru

Магнитогорский государственный университет, Магнитогорск

Одним из приложений теории регуляризованных следов в области вычислительной математики является *неитерационный* метод регуляризованных следов (РС) нахождения собственных чисел дискретных операторов, теоретически обоснованный в работе [1].

Идея метода РС состоит в следующем. Рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ — его ортонормированные собственные функции, соответствующих этим собственным числам. Допустим, что кратность собственного числа μ_n оператора T равна ν_n. Обозначим через n_0 количество всех неравных друг другу собственных чисел μ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = |\mu_{n_0+1} + \mu_{n_0}|/2$ с центром в начале координат комплексной плоскости. Пусть $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — собственные числа оператора $T+P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ для которых $\mu_n \neq \mu_{n-1}$ выполняются неравенства $q = 2\|P\|/|\mu_{n+\nu_n} - \mu_n| < 1$, то первые $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственные числа $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператора $T+P$ являются решениями системы нелинейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{m_0} \beta_k^p = \sum_{k=1}^{m_0} \mu_k^p + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0),\ p = \overline{1, m_0}.$$

Здесь $\alpha_k^{(p)}(m_0) = \dfrac{(-1)^k p}{2\pi k i} Sp \int\limits_{T_{n_0}} \mu^{p-1} \Big[PR_\mu(T)\Big]^k d\mu$ — k-тые поправки теории возмущений оператора $T+P$ целого порядка p, $R_\mu(T)$ — резольвента оператора T.

Теорема. *Пусть T — дискретный полуограниченный снизу оператор, а P — ограниченный оператор, действующие в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Допустим, что система собственных функций $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ оператора T является базисом H. Если существует $n_0 \in N$ такое, что для всех $n \geq n_0$ для которых $\mu_n \neq \mu_{n-1}$ выполняется неравенство $q < 1$, тогда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(p)}(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0} \sum_{m=0}^{p-1} C_p^m \mu_k^m V_{kk}^{p-m} + \sum_{\substack{j_1,\dots,j_p=1 \\ \bigcap\limits_{n=1}^{p} \{j_n\} = \varnothing}}^{m_0} \prod_{s=1}^{p} a_{j_s j_r} + \Delta_p(m_0),$$

$$|\Delta_1(m_0)| \leq \Big| \sum_{k=2}^{t_1} \alpha_k^{(1)}(m_0) \Big| + m_0 \rho_{n_0} \frac{q^{t_1+1}}{1-q},\ t_1 \in N,$$

$$|\Delta_p(m_0)| \leq \Big| \sum_{k=2}^{t_p} \alpha_k^{(p)}(m_0) - \sum_{j_1=1}^{m_0} \Big(\sum_{m=0}^{p-2} C_p^m \mu_{j_1}^m V_{j_1 j_1}^{p-m} +$$

$$+\sum_{\substack{j_2,\dots,j_p=1\\ \bigcap\limits_{n=1}^{p}\{j_n\}=\varnothing}}^{m_0}\prod_{s=1}^{p}a_{j_s j_r}\Big)\Big|+pm_0\rho_{n_0}^{p}\frac{q^{t_p+1}}{1-q},\ p=\overline{2,m_0},\ t_p\in N.$$

Здесь $\Delta_p(m_0)=\sum\limits_{k=1}^{m_0}\widetilde{\Delta}_{kp}(m_0)$, $\widetilde{\Delta}_{kp}(m_0)=\beta_k^p-\widetilde{\beta}_k^p(m_0)$, $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ *— собственные числа оператора* $T+P$, *занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности,* $\{\widetilde{\beta}_k(m_0)\}_{k=1}^{m_0}$ *— приближенные значения по Бубнову-Галеркину соответствующих собственных чисел* $\{\beta_k\}_{k=1}^{m_0}$ *оператора* $T+P$, $a_{km}=\mu_k\delta_{km}+V_{km}$, $V_{km}=(P\omega_k,\omega_m)$, $\rho_{n_0}=|\mu_{n_0+1}+\mu_{n_0}|/2$, $r=\begin{cases} s+1,\ s\neq p,\\ 1,\ s=p.\end{cases}$

Численные эксперименты показали большую вычислительную эффективность разработанного метода вычисления числовых рядов поправок теории возмущений для дискретных операторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровский В. В., Кадченко С. И., Кравченко В. Ф., Садовничий В. А.* Новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел спектральной задачи Орра – Зоммерфельда // Докл. РАН. 2001. Т. 378, № 4. С. 443–446.

УДК 517.95+533

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

© А. Л. Казаков

AKazakov@math.usurt.ru

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

Обобщенная задача Коши (ОЗК) отличается от задачи Коши в традиционной постановке тем, что граничные условия для неизвестных функций заданы не на одной, а на двух или нескольких поверхностях, а от смешанной задачи тем, что для каждой неизвестной функции ставится единственное граничное условие. Ранее ОЗК рассматривалась в работах С. Л. Соболева [1], Н. А. Леднева [2], В. М. Тешукова [3, 4], С. П. Баутина [5] и других. В классе аналитических функций доказаны теоремы существования и единственности решений обобщенных задач Коши с данными на двух и на трех поверхностях, в том числе, для систем с особенностью.

Доказанные теоремы используются при построении кусочно-аналитических течений невязкого нормального газа. Теоремы для системы с особенностью позволяют описать некоторые течения газа, передающие фокусировку на ось или в центр симметрии волны сжатия и последующее расхождение ударной волны, имеющей конечную скорость движения. Кроме того, под действие теорем попадают некоторые ранее решенные задачи газовой динамики [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04-01-00205).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Соболев С. Л.* Об аналитических решениях систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными // Математический сборник. 1931. Т. 38, № 1–2. С. 107–147.
2. *Леднёв Н. А.* Новый метод решения дифференциальных уравнений с частными производными // Математический сборник. 1948. Т. 22, № 2. С. 205–266.
3. *Тешуков В. М.* Построение фронта ударной волны в пространственной задаче о поршне // Динамика сплошной среды. 1978. Т. 33. С. 114–133.
4. *Тешуков В. М.* О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикладная математика и механика. 1982. Т. 46, № 2. С. 225–234.
5. *Баутин С. П., Казаков А. Л.* Обобщенная задача Коши и ее приложения. Новосибирск: Наука, 2006. 399 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 176–177

УДК 517.96

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ СО СПЕКТРАЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© Б. Т. Калимбетов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В работе на основе метода регуляризации [1] рассматривается слабо нелинейная сингулярно возмущенная задача

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = A(t)y + \int\limits_0^t \exp\left(\varepsilon^{-1}\int\limits_s^t \mu(\theta)d\theta\right)K(t,s)y(s,\varepsilon)ds + \varepsilon f(y,t) + h(t),$$

$$y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

где оператор A(t) содержит тождественные нулевые точки $\lambda(t) \equiv 0$ кратности $k-p<n$, n — размерность системы (1), $f(y,t)$ — многочлен по y, и предпринята попытка построить ее асимптотическое решение.

Задача о тождественной необратимости предельного оператора рассмотрена в работе [2], где была изучена задача Коши для системы дифференциальных уравнений со слабой нелинейностью, предельная система для которой, в отличие от (1), однородна. Кроме того, ненулевые точки спектра могли быть только в левой полуплоскости. Для решения построена асимптотика типа пограничного слоя. Сингулярно возмущенные системы с необратимым предельным оператором в случае, когда собственные значения могут быть чисто мнимыми, были рассмотрены в работе [3], где был предложен алгоритм построения регуляризованного асимптотического решения задачи. Основная трудность, возникающая при решении задач с вырожденным предельным оператором, заключается в том, что вырожденная система

$$0 = A(t)\overline{y} + h(t), \tag{2}$$

или не имеет решений вообще, или у нее их бесчисленное множество. Поэтому заранее не ясно, к какому решению системы (2) стремится истинное решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1) (при $\varepsilon \to +0$). Это приводит к тому, что мы не можем с самого начала сказать, какие ограничения следует наложить на область определения функции $h(t)$, чтобы такая постановка была корректной. Естественно, эта трудность была бы преодолена, если бы нам удалось каким-нибудь образом найти предельное решение задачи (1). В 1976 г. И. С. Ломовым [4] эта трудность была преодолена сравнительно просто. Как известно, в этом случае система (2) разрешима, если выполнено условие $h \perp \operatorname{Ker} A^*$ при каждом $t \in [0,T]$. Следует отметить, что если $h(t)$ не удовлетворяет этим условиям ортогональности, то решение задачи (1) при естественном предположении $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$ хотя и существует, но будет неограниченно возрастать при $\varepsilon \to +0$.

Определение 1. Задачу (1) назовем *нерезонансной*, если существует целочисленный вектор $m \equiv |m_1, m_2, \dots, m_p|$ с $|m| \geqslant 2$, такой, что при некоторых $i \in \{1,2,\dots\}$ имеет место тождества

$$(m,\lambda(t)) \neq \lambda_i(t), \quad |m| \geqslant 2, \quad i = \overline{1,p}, \quad \forall t \in [0,T],$$

где $\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\dots,\lambda_p(t)$ — ненулевые собственные значения матрицы $A(t)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f = (f_1(y,t), f_2(y,t), \dots, f_n(y,t))$ есть функция *класса* Ω, если каждая ее компонента разлагается в ряд

$$f_i(y,t) = \sum_{|m|\geqslant 0} f_i^{(m)}(t)(y-\varphi(t))^m \equiv \sum_{m_1+\ldots+m_n=0} f_i^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)(y-\varphi_1(t))^{m_1}\ldots(y-\varphi_n(t))^{m_n},$$

в котором $f_i^{(m)}(t) \in C^\infty[0,T]$, $|m| \geqslant 0$ и который сходится абсолютно и равномерно по $t \in [0,T]$ в полицилиндре $\Pi = \{y : \ |y_i - \varphi_i(t)| < R, \ i = \overline{1,p} \ , \forall t \in [0,T]\}$, где $R > 0$ — постоянная.

Регуляризованное асимптотическое решение задачи (1) строится в предположениях

1) $A(t) \in C^\infty([0,T], C^{n^2})$, $h(t) \in C^\infty([0,T], C^n)$, $K(t,s) \in C^\infty(0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, C^{n^2})$, $f(y,t)$ — многочлен по y:

$$f(y,t) = \sum_{0 \leqslant |m| \leqslant l} f^{(m)}(t) y^m$$

с коэффициентами $f^{(m)}(t) \in C^\infty([0,T], C^n)$, $0 \leqslant |m| \leqslant l < \infty$;

2) спектр $\{\lambda_j(t)\}$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет требованиям:

$$\lambda_j(t) \neq 0, \quad j = \overline{1,p}; \quad \lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,p}, \quad p < n;$$

$$\lambda_j(t) \equiv 0, \quad j = \overline{p+1,n}; \quad \operatorname{Re} \lambda_i(t) \leqslant 0, \quad i = \overline{1,p};$$

3) $\lambda_{n+1}(t) \equiv \mu(t) \in C^\infty\left([0,\mathrm{T}], \mathrm{R}^1 \right)$, $\lambda_{n+1}(t) \neq \lambda_j(t)$, $j = \overline{1,n}$, $\forall t \in [0,T]$.

Доказываются нормальная и однозначная разрешимость итерационных задач и обосновывается сходимость формальных решений к точным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400 с.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
3. *Сафонов В. Ф.* Асимптотическое решение синулярно возмущенной нелинейной задачи с нулевой точкой спектра предельного оператора // Тр. Моск. энерг. ин-та. 1978. Вып. 357. С. 95–97.
4. *Ломов И. С.* Регуляризация сингулярных возмущений по спектру предельного оператора // Вестн. МГУ. Сер. матем. мех. 1976. № 3. С. 6–13.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 178–179

УДК 517.95

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© Т. Ш. Кальменов, У. А. Искакова *

* ulzada@list.ru

Центр физико-математических исследований МОН РК, Алматы, Казахстан

В области $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < \pi,\ -1 < t < 1\}$ рассматривается

Задача Коши. Найти решение уравнения

$$Lu = u_{tt}(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{t=-1} = \tau(x), \quad u_t\big|_{t=-1} = \nu(x). \tag{2}$$

Известно [1], что задача (1), (2) относится классу некорректных задач. В работах [2, 3] рассматриваемая задача сведена к интегральным уравнениям первого рода и даны различные методы регуляризации этой задачи.

Пусть решение $u(x,t) \in C^2(\overline{\Omega})$ существует и на боковых границах области Ω принимает значения

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad u(\pi,t) = \varphi_2(t), \tag{3}$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ неизвестные функции. Тогда имеем смешанную задачу Коши (1)–(3). Предполагая выполненными условия

$$\tau(0) = \tau(\pi) = 0, \quad \nu(0) = \nu(\pi) = 0, \quad \varphi_j(-1) = \varphi_j'(-1) = 0, \quad j = 1,2, \tag{4}$$

после некоторой замены задача (1)–(3) принимает вид

$$Lu = \triangle w = g, \tag{5}$$

$$w\big|_{t=-1} = 0, \quad w_t\big|_{t=-1} = 0, \quad w\big|_{x=0} = 0, \quad w\big|_{x=\pi} = 0, \tag{6}$$

где

$$g = g(x,t) = f(x,t) - \tau''(x) - (t+1)\nu''(x) - \frac{\pi - x}{\pi}\varphi_1''(t) - \frac{x}{\pi}\varphi_2''(t).$$

Для задачи (5), (6) известны следующие утверждения [4].

Теорема 1. *Смешанная задача Коши (5), (6) сильно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{g_{k1}}{\lambda_{k1}} \right|^2 < \infty,$$

где

$$g_{km} = \left(g(x,-t), u_{km}(x,t)\right)_0, \quad m = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

функции $u_{km}(x,t)$ являются собственными функциями спектральной задачи Коши для уравнения Лапласа с отклоняющимся аргументом

$$\triangle u_{km}(x,t) = \lambda_{km} u_{km}(x,-t), \tag{8}$$

$$u_{km}\big|_{x=0}=0,\quad u_{km}\big|_{x=\pi}=0,\quad \frac{\partial u_{km}}{\partial t}\bigg|_{t=-1}=0,\quad u_{km}\big|_{t=-1}=0. \tag{9}$$

Лемма. *Асимптотика собственных значений задачи (8), (9), не превосходящих* $\frac{1}{17}$, *при больших* k *имеет следующий вид*

$$\lambda_{k1}=4k^2e^{-2k}(1+o(1)).$$

Введя обозначения $\mu(x,t)=(1+t)\nu(x)$, $\psi(x,t)=\frac{\pi-x}{\pi}\varphi_1''(t)+\frac{x}{\pi}\varphi_2''(t)$ и определив число g_{k1} по формуле (7), имеем

$$\psi_{k1}=f_{k1}+k^2\tau_{k1}+k^2\mu_{k1}-\lambda_{k1}d_{k1}\,,\quad k=1,2,\ldots,\quad \text{где } d_{k1}=g_{k1}/\lambda_{k1}.$$

Имеет место

Теорема 2. *Пусть функции* $\tau(x)$, $\nu(x)\in C^2([0,\pi])$, $\varphi_j(t)\in C^2([-1,1])$, $j=1,2$, *удовлетворяют условиям (4), где* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ *— боковые данные, подлежащие определению. Решение задачи (1), (2) является ограниченным в* $L_2(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{n}2mb_{mn}^{+}\psi_{2m,1}\right|^2<\infty,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{m=1}^{n}(2m-1)b_{mn}^{-}\psi_{2m-1,1}\right|^2<\infty\,,$$

где b_{mn}^{+}, b_{mn}^{-} *— определенные числа.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адамар Ж. С.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978.
2. *Тихонов А. Н.* О нелинейных уравнениях первого рода // Доклады АН СССР. 1965. Т. 161, № 5. С. 1023–1026.
3. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Известия АН СССР. 1956. Т. 20, № 6. С. 819–842.
4. *Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. Алматы. 2006. № 1(48). С. 36–44.

УДК 517.43

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Т. Ш. Кальменов, А. Ш. Шалданбаев *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи.

Определение 1. Операторы вида

$$L(\lambda)=\lambda^n A_0+\lambda^{n-1}A_1+\cdots+\lambda A_{n-1}+A_n,$$

где A_i — операторы, $i=\overline{0,n}$, называются пучками.

Пучки с вполне непрерывными коэффициентами изучались в работах [1, 2]. В работе [1] изучена природа спектра и получены теоремы полноты. В работе [2] изучен квадратичный пучок (n=2) и указано его приложение к задачам механики.

В связи с этими работами возникает вопрос: "А как меняются спектральные свойства пучка, если коэффициенты окажутся неограниченными операторами?"

Пусть $\Omega\subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB: 0\le t\le T,\, x=0;\quad BC: 0\le x\le l,\, t=T;\quad CD: 0\le t\le T,\, x=l;\quad DA: 0\le x\le l, t=0.$$

Через $C^{4,2}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ четырежды непрерывно дифференцируемых по x и дважды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma=AB\cup AD\cup CD$.

Задача. Изучить спектральные свойства пучка

$$L(\lambda)u=u_{tt}(x,t)-2\lambda u_{xx}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)+\lambda^2u(x,t), \tag{1}$$

$$DL(\lambda)=\big\{u\in C^{4,2}(\Omega)\cap C^{2,1}(\overline{\Omega});\quad u|_{t=0}=u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\quad u_t(x,T)+u_{xx}(x,0)=0,$$
$$u_t(x,T-t)+u_{xx}(0,t)=0,\quad u_t(l,T-t)+u_{xx}(l,t)=0\big\}. \tag{2}$$

Определение 2. Нетривиальный элемент $u(x,t)$ пространства $L^2(\Omega)$, удовлетворяющий уравнению

$$L(\lambda)u=0,$$

назовем собственным вектором пучка, а значение параметра λ, соответствующее этому собственному вектору, собственным значением пучка.

2. Полученные результаты.

Теорема. *Пучок* (1), (2) *имеет бесконечное множество собственных значений:*

$$\lambda_{mn}=(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{T}-\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2,\quad n=0,1,2\ldots;\, m=1,2\ldots,$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\sin\frac{m\pi}{l}x\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\quad n=0,1,2\ldots;\, m=1,2\ldots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. LXXVII, № 1. С. 11–14.
2. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 496 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 181–182

УДК 517.929

О ВЛИЯНИИ МЛАДШЕГО ЧЛЕНА НА КОРРЕКТНУЮ РАЗРЕШИМОСТЬ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Т. Ш. Кальменов, А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB : 0 \leq t \leq T,\, x = 0; \quad BC : 0 \leq x \leq l,\, t = T; \quad CD : 0 \leq t \leq T,\, x = l; \quad DA : 0 \leq x \leq l,\, t = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Периодическая задача. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и a — константа.

Определение 1. Под регулярным решением задачи (1)–(3) будем понимать функцию $u(x,t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2), (3).

Определение 2. Функцию $u(x,t) \in L^2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи (1)-(3), если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}\left(\overline{\Omega}\right)$ и удовлетворяющая краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f.

Определение 3. Краевая задача (1)–(3) называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и единственно.

Целью настоящей работы является исследование влияния младшего члена на сильную разрешимость краевой задачи (1)–(3) в пространстве $L^2(\Omega)$.

2. Основные результаты.

Основными результатами наших исследований являются следующие теоремы 1, 2.

Теорема 1. *Спектральная задача*

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x,t) + au_x(x,t) = \lambda u(x,t),$$

$$u|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0,$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 + \frac{2m\pi i}{l} \cdot a, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots;\, n = 0, 1, 2, \ldots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t)=\frac{2}{\sqrt{Tl}}\exp\left(\frac{2m\pi i}{l}x\right)\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{T},\quad m=0,\pm1,\pm2,\ldots;\, n=0,1,2,\ldots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, *где* $\Omega=[0,l]\times[0,T]$.

Теорема 2. *Если* $\mathrm{Re}\ a\neq 0$, *то существует обратный оператор* $\overline{L}^{\,-1}$, *который является нормальным и компактным. Имеет место оценка*

$$\|\overline{L}^{\,-1}\|\leq K^{-1},\quad K=max\left\{\frac{\pi}{2T},\ \frac{2\pi}{l}|\mathrm{Re}\ a|\right\}.$$

Спектр оператора $\overline{L}$ *дискретен, т. е. не имеет предельных точек на конечной части плоскости.*

Если $\mathrm{Re}\ a=0$, $\mathrm{Im}\ a\neq\dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T}-\dfrac{2m\pi}{l}$, $m=\pm1,\pm2\ldots;\, n=0,1,2,\ldots$ *и обе величины* $\dfrac{2\pi T}{l^2}$, $\dfrac{T\cdot\mathrm{Im}\ a}{l}$ *рациональны, то обратный оператор* $\overline{L}^{\,-1}$ *существует, ограничен, но некомпактен. Оператор* $\overline{L}$ *самосопряжен, его спектр состоит из счетного множества собственных значений и непрерывного спектра, заполняющего всю числовую ось* $(-\infty,\ +\infty)$. *Точки непрерывного спектра являются предельными точками собственных значений.*

Если $\mathrm{Re}\ a=0, \mathrm{Im}\ a\neq\dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T}-\dfrac{2m\pi}{l}$, $m=\pm1,\pm2\ldots;\, n=0,1,2,\ldots$ *и хотя бы одна из двух величин* $\dfrac{2\pi T}{l^2}$, $\dfrac{T\cdot\mathrm{Im}\ a}{l}$ *иррациональна, то обратный оператор* $\overline{L}^{\,-1}$ *существует, но неограничен. Оператор* $\overline{L}$ *самосопряжен и его спектр состоит из счетного множества собственных значений, среди которых имеется счетное множество бесконечнократных собственных значений.*

Если $\mathrm{Re}\,a=0$, $\mathrm{Im}\,a=\dfrac{(-1)^n\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2m}\cdot\dfrac{l}{T}-\dfrac{2m\pi}{l}$, $m=\pm1,\pm2\ldots;\, n=0,1,2,\ldots$ *для некоторых значений* $n=0,1,2,\ldots;\, m=\pm1,\pm2,\ldots$, *то обратный оператор не существует. Оператор* $\overline{L}$ *является самосопряженным. Если обе величины* $\dfrac{2\pi T}{l^2}$, $\dfrac{T\cdot\mathrm{Im}\ a}{l}$ *рациональны, то спектр состоит из счетного множества собственных значений, среди которых имеется счетное множество бесконечнократных собственных значений. Если хотя бы одна из двух величин* $\dfrac{2\pi T}{l^2}$, $\dfrac{T\cdot\mathrm{Im}\ a}{l}$ *иррациональна, то спектр оператора* $\overline{L}$ *заполняет всю числовую ось* $(-\infty,\ +\infty)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977. 357 с.
4. *Вейль Г.* Избранные труды. М.: Наука, 1984. 510 с.

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ – НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© Т. Ш. Кальменов, М. Т. Шоманбаева *

* mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками: $AB: 0 \le t \le T, x = 0$; $BC: 0 \le x \le l, t = T$; $CD: 0 \le t \le T, x = l$; $DA: 0 \le x \le l, t = 0$. Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Задача Коши – Неймана. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t\,(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$u|_{t=0} = u_x\,|_{x=0} = u_x\,|_{x=l} = 0, \tag{1.2}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$.

Определение 1.1. Под *регулярным решением* задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1.1) и краевые условия (1.2) [1].

Определение 1.2. Функцию $u(x,t) \in L^2(\Omega)$ назовем *сильным решением* задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих краевым условиям задачи, такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f при $n \to \infty$ [1].

2. Полученные результаты

Теорема 2.1. *Спектральная задача*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t), \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \tag{2.2}$$

имеет бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad m, n = 0, 1, 2 \ldots, \tag{2.3}$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}, \quad m, n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, *где* $\Omega = [0,l] \times [0,T]$.

Теорема 2.2. *(a) Для единственности сильного решения краевой задачи*

$$Lu = u_t\,(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{2.5}$$

$$u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \tag{2.6}$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\pi T}{l^2} \neq \frac{2n+\frac{1}{2}}{m^2}, \quad \forall\ n = 0,1,2,\ldots,\ m = 1,2,\ldots$$

(б) Для существования сильного решения краевой задачи (2.5)–(2.6) необходимо и достаточно

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(f,u_{mn})}{\lambda_{mn}}\right|^2 < +\infty,$$

где λ_{mn} *и* u_{mn} *— из* (2.3) *и* (2.4), $(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* $L^2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 185–186

УДК 517.98

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

© Б. Е. Кангужин

kanbalta@mail.ru

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Пусть $b < \infty$, $n < \infty$, $p_k(x) \in C^k[0,b]$, $k = 0,\dots,n-2$. В функциональном пространстве $L_2[0,b]$ рассмотрим дифференциальный оператор L

$$L\,y \,=\, l\,(y) \,\equiv\, y^{(n)} \,+\, \sum_{k=0}^{n-2} p_k\,(x)\;y^{(k)}\,(x)$$

с областью определения

$$D\,(L) \,=\, \left\{ y \,\in\, W_2^n\,[0,b]\;:\; y^{(s)}(0) \,=\, \int\limits_0^b l\,(y)\;\sigma_{s+1}\,(x)\;dx, \quad s = 0,\dots,n-1 \right\},$$

где граничные функций $\sigma_1\,(x)$, $\sigma_2\,(x)$, $\dots$, $\sigma_n\,(x) \in L_2[0,b]$.

Известно, что существует ограниченный обратный оператор L^{-1}. Дифференциальный оператор, на самом деле, в общем случае задается набором $2\,n\,-\,2$ функции:

$\sigma_1\,(x)\,,\, \sigma_2\,(x)\,,\,\dots\,,\sigma_n\,(x) \,\in\, L_2[0,b]$ — граничные функции,

$p_1\;(x)\,,\, p_2\;(x)\,,\,\dots,\, p_{n-2}\;(x)$ — коэффициенты дифференциального выражения.

Обратная задача спектрального анализа: по спектральным данным определить коэффициенты дифференциального выражения и граничные функции. По каким спектральным данным можно (однозначно) восстановить оператор?

Для определения таких данных обычно поступают следующим образом: надо написать теорему разложения по корневым функциям исходного оператора для достаточно широкого класса функции и те данные, которые входят в эти разложения решают обратную задачу.

Покажем, что указанные разложения записываются через матричную спектральную функцию распределения. В этом состоит цель первой части настоящей работы.

Пусть $y_1\,(x,\lambda)\,,\, y_2\,(x,\lambda)\,,\,\dots, y_n\,(x,\lambda)$ — фундаментальная система решений однородного дифференциального уравнения $l\;(y) \,=\, \lambda\; y\,(x)$, подчиненная данным Коши в нуле: $y_k^{(s)}\;(0) \,=\, \delta_{k,s+1}$. Здесь $\delta_{k,s+1}$ — символ Кронекера. Введем необходимые для дальнейшего выражения по формулам:

$$\Delta\,(\lambda) = \det\,[\delta_{kj} \;-\; \lambda\;\langle y_k\,,\,\sigma_j\rangle],$$

$$\kappa_1\,(x,\lambda)\;,\,\kappa_2\,(x,\lambda)\;,\,\dots,\kappa_n\,(x,\lambda)\;:\; l\,(\kappa_s) = \lambda\,\kappa_s\;,\kappa_s^{(j)}\,(0) = \lambda\,\langle\kappa_s\,,\,\sigma_{j+1}\rangle,$$

$$\Omega_1(x,\lambda)\,,\dots,\Omega_n(x,\lambda)\;:\; l^+\,(\Omega_k) \;=\; \lambda\,\Omega_k \,+\, \sigma_k\,(x)\,,$$

$$M_k(x,\lambda) = \sigma_k\,(x) \,+\, \lambda\,\Omega_k\,(x,\lambda)\,,$$

$$\lambda_m\;,\; k_m\;:\; \Delta\,(\lambda_m) = 0\,,\,\Delta^{(1)}\,(\lambda_m) = 0\,,\,\dots,\,\Delta^{(k_m-1)}\,(\lambda_m) = 0,$$

$$\Delta^{(k_m)}\,(\lambda_m) \neq 0,$$

$$d_{m,j} = \frac{1}{j!}\lim_{\lambda\to\lambda_m}\frac{d^j}{d\lambda^j}\,\frac{(\lambda\,-\,\lambda_m)^{k_m}}{\Delta\,(\lambda)}, \qquad D_m = [d_{i,j}],$$

$$\overrightarrow{M}_{km}(\xi) = \left[M_k(\xi, \lambda_m) \, , \, \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} M_k(\xi, \lambda_m) \, , \ldots , \frac{1}{(k_m - 1)!} \frac{\partial^{k_m - 1}}{\partial \lambda^{k_m - 1}} M_k(\xi, \lambda_m) \right],$$

$$\overrightarrow{\kappa}_{km}(\xi) = \left[\kappa_k(\xi, \lambda_m) \, , \, \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \kappa_k(\xi, \lambda_m) \, , \ldots , \frac{1}{(k_m - 1)!} \frac{\partial^{k_m - 1}}{\partial \lambda^{k_m - 1}} \kappa_k(\xi, \lambda_m) \right],$$

$$S_{k,t}^{(m)} = \left\langle \overrightarrow{\kappa}_{km}^{T}(\xi) \, , \, \overrightarrow{M}_{tm}(\xi) \right\rangle,$$

$$\sigma_{kt}^{(m)} \; = \; D_m \, S_{kt}^{(m)} \, D_m.$$

Теорема. *Пусть оператор L обладает базисной в $L_2[0, b]$ системой корневых функции. Тогда существует матричная функция распределения* $\left\{ \sigma_{kt}^{(m)}, \quad k, \, t = 1, \ldots, n, \quad \lambda_m \in \sigma(L) \right\}$ *такая, что справедливы формулы*

$$\varphi_j(\lambda) = \langle M_j(\xi, \lambda) \, , \, f(\xi) \rangle,$$

$$f(x) = \sum_{\lambda_m \in \sigma(L)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \left\langle \overrightarrow{M}_{km} \, , \, f \right\rangle \sigma_{kt}^{(m)} \, \overrightarrow{\kappa}_{tm}^{T}(x) \, .$$

Причем верен аналог равенства Парсеваля

$$\langle f \, , \, g \rangle = \sum_{\lambda_m \in \sigma(L)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{n} \left\langle \overrightarrow{M}_{km}, \, f \right\rangle \sigma_{kt}^{(m)} \left\langle \overrightarrow{\kappa}_{tm}^{T}(x) \, , \, g \right\rangle.$$

Таким образом, в формулировке теоремы фигурируют собственные значения $\{\lambda_m\}$ исходного оператора и матричная функция распределения $\left\| \sigma_{kt}^{(m)} \right\|$, которые называем спектральными данными исходного дифференциального оператора.

В данном пункте рассматривается обратная задача спектрального анализа. По спектральным данным дифференциального оператора надо найти его коэффициенты и набор соответствующих граничных функций. Коэффициентные обратные задачи для отдельных классов дифференциальных операторов более-менее изучены. Новым моментом является восстановление граничных функций. Поэтому в настоящей работе исследуется восстановление граничных функций. Пусть $b < \infty$, $n < \infty$. В $L_2[0, b]$ рассмотрим оператор L

$$L \, y = l(y) \; \equiv \; y^{(n)}$$

с областью определения

$$D(L) = \left\{ y \, \in \, W_2^n \, [0, b] \, : \, y^{(s)}(0) \, = \, \int\limits_0^b l(y) \; \sigma_{s+1}(x) \, dx, \quad s = 0, \ldots, n - 1 \right\},$$

где $\sigma_1(x) \, , \, \sigma_2(x) \, , \, \ldots \, , \sigma_n(x) \; \in \; L_2[0, b]$.

Из теоремы следует существование матричной функции распределения $\left\{ \sigma_{kt}^{(m)} \, , \; k, \, t \; = 1, \ldots, n, \, \lambda_m \in \; \sigma(L) \right\}$, для которой справедлива теорема о разложений при некоторых дополнительных условиях. Рассмотрим задачу восстановления оператора L по матричной функции распределения. В работе указан аналог процедуры Гельфанда – Левитана решения задачи восстановления.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 187–188

УДК 517.956.22

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© В. В. Карачик

karachik@math.susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение. В 1899 г. Альманси [1] доказал следующее замечательное утверждение: если $f(x)$ полигармоническая функция порядка m в звездной области Ω с центром в начале координат, тогда существуют единственные функции $u_0(x), \dots, u_{m-1}(x)$ гармонические в Ω такие, что $f(x) = u_0(x) + |x|^2 u_1(x) + \dots + |x|^{2(m-1)} u_{m-1}(x)$. Основываясь на свойствах гармонических полиномов $G_{(\nu)}(x)$, введенных в [5], распространим это утверждение на аналитические функции действительных переменных (теорема 1). Этот результат будет уточнен в теоремах 2 и 3, где даются формулы нахождения функций $u_k(x)$. Следует заметить, что в [2] (Теорема 2.2) формула Альманси была уже распространена на голоморфные функции. Оказалось, что полученная ниже формула (5) несколько отличается от формулы (2.9), найденной в [2]. Интересные свойства полигармонических функций, опирающиеся на формулу Альманси, были получены А. В. Бицадзе в [3]. Формулы, задающие взаимно однозначное соответствие между гармоническими в Ω функциями и решениями уравнения Гельмгольца в Ω, полученные в примере, совпадают, с ранее найденными И. Н. Векуа в [4].

1. Представление аналитических функций. Рассмотрим полиномы следующего вида, введенные в [4]

$$G_k^s(x_{(n)}) = \sum_{i=0}^{[k/2]} (-1)^i \frac{|x_{(n-1)}|^{2i} x_n^{k-2i,!}}{(2,2)_i (n-1+2s,2)_i}, \tag{1}$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\dots(a+kb-b)$ — обобщенный символ Похгаммера, причем следует считать, что $(a,b)_0 = 1$, $t^{m,!}$ — факториальная степень $t^{m,!} = t^m/m!$, а $[a]$ — целая часть числа a. В [4] установлено, что произведение полиномов вида (1) дает гармонические полиномы, названные G-полиномами

$$G_{(\nu)}(x_{(n)}) = G_{\nu_1-\nu_2}^{\nu_2}(x_{(n)}) \cdots G_{\nu_{n-1}-\nu_n}^{\nu_n}(x_{(2)}) x_1^{\nu_n}, \tag{2}$$

где $\nu \in \mathbb{N}_0^n$, $\nu_1 \ge \dots \ge \nu_n$ и $\nu_n = 0,1$. Эти полиномы составляют базис среди гармонических полиномов и они ортогональны на единичной сфере. Используя оценки для полиномов $G_{(\nu)}(x_{(n)})$ [5], можно доказать следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой функции $f(x)$, аналитической в начале координат, существуют гармонические функции $u_0(x), \dots, u_n(x), \dots$, определенные в некоторой окрестности начала координат $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, такие, что $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x|^{2k} u_k(x)$, $x \in \mathcal{D}$.*

Замечание. Доказательство не является конструктивным так же, как и формула Альманси. Оно опирается лишь на оценки для полиномов (2) и не позволяет строить гармонические функции $u_k(x)$ по известной функции $f(x)$.

2. Полигармонические функции. Рассмотрим область $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, обладающую свойством звездности $\forall x \in \mathcal{D}$, $\forall t \in [0,1]$ $tx \in \mathcal{D}$ и определим на ней следующую последовательность функций:

$$G_k(x;u) = \begin{cases} u(x), & k = 0, \\ \dfrac{1}{4^k} \dfrac{|x|^{2k}}{k!} \displaystyle\int_0^1 \dfrac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} u(\alpha x)\, d\alpha, & k > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $u(x)$ некоторая гармоническая в $\mathcal{D}$ функция. Система функций $\{G_k(x;u) \mid k = 0,1,\dots\}$ является 0-нормированной относительно оператора Δ в $\mathcal{D}$ [6], т.е. в области $\mathcal{D}$ верны равенства $\Delta G_k(x;u) = G_{k-1}(x;u)$ и $\Delta G_0(x;u) = 0$.

Сначала на основании свойств функций (3) устанавливается следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любой полигармонической в звездной области $\mathcal{D}$ функции $P(x)$ имеет место представление $P(x) = G_0(x;v_0)+G_1(x;v_1)+\cdots+G_m(x;v_m)$, где гармонические функции $v_0(x),\dots,v_m(x)$ находятся из равенства*

$$v_k(x) = \Delta^k P(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta^{k+s} P(\alpha x)\, d\alpha,$$

при $k = 0,\dots,m$.

Обобщением данного результата является следующая теорема.

Теорема 3. *Для любой функции $f(x)$, аналитической в начале координат имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} G_i(x;v_i) \equiv v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} \frac{|x|^{2k}}{k!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!} \alpha^{n/2-1} v_k(\alpha x)\, d\alpha,\ x \in \mathcal{D}, \tag{4}$$

в котором гармонические функции $v_0(x),\dots,v_n(x),\dots$ определены в некоторой звездной области $\mathcal{D}$ с центром в начале координат и задаются формулой

$$v_k(x) = \Delta^k f(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{4^s} \frac{|x|^{2s}}{s!} \int_0^1 \frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!} \alpha^{n/2-1} \Delta^{k+s} f(\alpha x)\, d\alpha. \tag{5}$$

Пример. Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta v(x) + \lambda v(x) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,$$

в звездной области Ω . Разложим его решение в формулу (4). Вычислим функции $v_k(x)$ из (5). Верно равенство

$$v_k(x) = (-\lambda)^k \left(v(x) + \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4\left(-\lambda\alpha(1-\alpha)|x|^2\right) \alpha^{n/2-1} v(\alpha x) d\alpha \right) = (-\lambda)^k u(x),$$

где обозначено

$$g_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-t)^k}{(2,2)_k (m,2)_k}, \quad u(x) = v(x) + \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4\left(-\lambda\alpha(1-\alpha)|x|^2\right) v(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \tag{6}$$

Тогда формула (4) примет вид

$$v(x) = u(x) - \lambda \frac{|x|^2}{4} \int_0^1 g_4\left(\lambda(1-\alpha)|x|^2\right) u(\alpha x) \alpha^{n/2-1} d\alpha. \tag{7}$$

Формулы (6) и (7), задающие взаимно однозначное соответствие между гармоническими в Ω функциями и решениями уравнения Гельмгольца, после некоторых преобразований, совпадают с ранее полученными И. Н. Векуа в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Almansi E.* Sull'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^{2n} u = 0$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1899. V. 3, N 2. P. 1–51.
2. *Aronszajn N., Creese M. T., Lipkin L. J.* Polyharmonic Functions. Oxford Univ. Press, New York, 1983.
3. *Бицадзе А. В.* О некоторых свойствах полигармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 5. С. 825–831.
4. *Векуа И. Н.* Новые методы решения элллиптических уравнений. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.
5. *Karachik V. V.* On some special polynomials // Proceedings of AMS. 2004. V. 132. P. 1049–1058.
6. *Karachik V. V.* Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V. 287, N 2. P. 577–592.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 189–190

УДК 517.9

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ СРЕД ЛЮБОГО ВИДА АНИЗОТРОПИИ И ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ

© А. Л. Карчевский

karchevs@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Потребности математического моделирования и интерпретации данных в геофизике требуют нахождения решений системы дифференциальных уравнений теории упругости и уравнений Максвелла.

В данном докладе будет представлены аналитические решения для вышеприведенных систем в частотной области для горизонтально-слоистых сред любого вида анизотропии. Будут приведены устойчивые алгоритмы их вычисления.

Рассмотрим среду — N_l-слойную структуру с границами раздела x_3^k ($k=\overline{0,N_l}$), $x_3^0=0$; m-ый слой — интервал $[x_3^{m-1},x_3^m]$, последний N_l+1 (подстилающий) слой — полупространство $[x_3^{N_l},\infty)$, воздух — полупространство $x_3\in(-\infty,0]$.

Для перехода в частотную область для уравнений теории упругости в терминах смещений

$$\rho\frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2}=\sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{mjkl}(x_3)\frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right)+F(t)\frac{\partial}{\partial x_m}\delta(x_1,x_2,x_3-x_3^*),\qquad m=1,2,3.$$

применяется преобразование Фурье по горизонтальным пространственным переменным и преобразование Лапласа по временной переменной, после чего приходим к системе из трех дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U+iBU\right)+iB'\frac{\partial}{\partial x_3}U-DU=\hat F(p,x_3-x_3^*)\tag{1}$$

Из уравнений Максвелла

$$H=\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E+\sigma E+j^e,\qquad \operatorname{rot}E=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(H+j^m),$$

$$j^e=f^e(t)\,(\beta_1,\beta_2,\beta_3)'\,\delta(x_1,x_2,x_3-x_3^*),\quad j^m=f^m(t)\,(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)'\,\delta(x_1,x_2,x_3-x_3^*)$$

мы получаем соотношение только для E и после этого применяем те же интегральные преобразования для горизонтальных и временной переменных. $\hat E_3$ может быть выражена и подставлена в первых два уравнения, после чего приходим к системе вида (1) для двух дифференциальных уравнений второго порядка.

Условия склейки в точках разрыва среды

$$\left[A\frac{\partial}{\partial x_3}U+iBU\right]_{x_3^k}=0,\quad [U]_{x_3^k}=0,\qquad k=\overline{0,N_l}.$$

Краевые условия в случае уравнений теории упругости:

$$\left(A\frac{\partial}{\partial x_3}U + iBU\right)\Bigg|_{x_3=0} = 0, \qquad U \to 0 \ (x_3 \to +\infty)$$

Краевые условия в случае уравнений электродинамики:

$$U \to 0 \ (x_3 \to \pm\infty)$$

В докладе в обоих случаях будут представлены аналитические решения для системы дифференциальных уравнении второго порядка (1), удовлетворяющие приведенным условиям склейки и краевым условиям, и приведены устойчивые алгоритмы их вычисления.

Работа поддержана грантами РФФИ (05-01-00171, 05-01-00559) и интеграционными проектами СО РАН, УрО РАН и ДВО РАН (проекты 16, 26, 57).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карчевский А. Л.* Метод численного решения системы упругости для горизонтально слоистой анизотропной среды // Геология и геофизика. 2005. Т. 46, № 3. С. 339–351.
2. *Карчевский А. Л.* Прямая динамическая задача сейсмики для горизонтально-слоистых сред // Сибирские электронные математические известия. 2005. Т. 2. С. 23-61. (pdf-файл статьи: http://semr.math.nsc.ru/V2/v2p23-61.pdf).
2. *Карчевский А. Л.* Аналитическое решение уравнений Максвелла в частотной области для горизонтально-слоистых анизотропных сред и его представление, удобное для вычислений // Геология и геофизика. 2007. Т. 48, № 8 (в печати).

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА В ОБЛАСТЯХ ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

© В. В. Катрахов, Е. Д. Емцева

katrakhov@mail.ru, emtseva@mail.ru

Владивостокский государственный университет экономики и сервиса, Владивосток

Целью данной работы является изучение сингулярной эллиптической краевой задачи в областях плоскости Лобачевского, которые могут содержать изолированные граничные точки. В работе вводятся и изучаются новые функциональные пространства, которые совпадают с пространствами типа Соболева – Никольского – Бесова вне особой точки. Также вводится понятие сигма-следа в особой точке. Основной результат состоит в доказательстве однозначной разрешимости поставленной сингулярной краевой задачи вида

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega_{\mathcal{O}},$$

с краевым условием на части границы G

$$u\big|_G = g(x), \quad x \in G,$$

и в граничной точке $\mathcal{O}$

$$\sigma u\big|_{\mathcal{O}} = \psi(\varphi), \quad \varphi \in \Theta,$$

где Θ — единичная окружность.

При доказательстве основной теоремы для исследования регулярной составляющей решения применялась общая теория сильно эллиптических краевых задач, изложенная, например, в [5] и [6].

Основные результаты работы имеют место и для пространств Лобачевского любых размерностей, а также для метагармонических операторов любого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Катрахов В. В.* Об одной сингулярной краевой задаче для уравнения Пуассона // Мат. сб., 1991. Т. 182, № 6. С. 849–876.
2. *Катрахов В. В., Киселевская С. В.* Сингулярная краевая задача в областях на конусе // Докл. РАН. 2006. Т. 407, № 6. С. 732–735.
3. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987. 735 с.
4. *Катрахов В. В., Мазелис Л. С.* Непрерывность, пополнение, замыкание в метрических пространствах. Владивосток: ДВГУ, 2000. 112 с.
5. *Ладынежская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
6. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

© В. В. Катрахов, П. Н. Зайцев, А. В. Ляхов

katrakhov@mail.ru, dolphin_land@mail.ru, aleck_3712@mail.ru

Воронежский государственный университет, Воронеж

В докладе предполагается изложить новые результаты по многомерным сингулярным эллиптическим краевым задачам с точечными особенностями в областях всех типов пространств с постоянной кривизной, то есть в евклидовых, гиперболических (пространств Лобачевского) и на сфере.

Будет изложена теория операторов преобразования, теория функциональных пространств в одномерном и многомерном случаях и собственно теория краевых задач. В теории функциональных пространств основное внимание будет уделено новому в рассматриваемых случаях понятию сигма-следа и прямым и обратным теоремам вложения с этим следом.

Основной результат состоит в том, что поставленные краевые задачи в указанных функциональных пространствах имеют единственное и корректное по Адамару решение.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 193–193

УДК 517.926.7

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ШОУОЛТЕРА – СИДОРОВА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

© А. В. Келлер

alevtinak@inbox.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Рассматривается обощенная задача Шоуолтера – Сидорова

$$P(u(0) - u_0) = 0, \tag{1}$$

для системы уравнений

$$L\,\dot{u} = Mu + f. \tag{2}$$

Здесь L и M — квадратные матрицы порядка n, $\det L = 0$, причем матрица M $L-$ регулярна (т. е. существует число $\lambda \in \mathbf{C}$ такое, что $\det(\lambda L - M) = 0$), кроме того, P — проектор вдоль ядра разрешающей группы системы уравнений (2), а $u, f : [0, T] \to \mathbf{R}^n$ — вектор-функции, определяемые в докладе.

Модель межотраслевого баланса В. В. Леонтьева "затраты-выпуск" с учетом запасов является частным случаем системы (2).

Алгоритмы численного решения задачи Коши

$$u(0) = u_0$$

системы уравнений (2) рассмотрены в [1] для $f = const$ и в [2] для $f = f(t)$.

Применяя те же подходы — метод фазового пространства, метод построения разрешающих групп операторов и метод Гаусса для численного интегрирования — разработан алгоритм численного решения задачи (1), (2). Взяв в качестве матриц

$$L = \begin{pmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{20} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{10304189}{11996000} & \frac{-70836357}{119960000} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{15} & \frac{13}{15} \end{pmatrix},$$

получено численное решение. Сравнение его с решениями по неявной схеме Эйлера и по методу Рунге – Кутта, показывает, что представленный алгоритм дает более точный результат.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свиридюк Г. А., Брычев С. В.* Численное решение систем уравнений леонтьевского типа // Изв ВУЗ. Матем. 2003. № 8. С. 46–52.
2. *Burlachko I. V., Sviridyuk G. A.* An Algorithm for Solving the Cauchy Problem for Degenerate Linear Sistems of Ordinary Differential Equations // Computational Mathematics and Mathimatical Physics. 2003. V. 43, N 11. P. 1613–1619.

УДК 517.9

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВА

© А. А. Коваленко

nazgash@gorodok.net

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

В настоящей работе рассматриваются смешанные краевые задачи для псевдопараболических уравнений с постоянными коэффициентами

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(D_t, D_x)u = f(t,x), \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}_n^+,\\
&B_j(D_x)u|_{x_n=0} = 0, \quad j=1,\dots,\mu,\ t>0,\ x'\in\mathbb{R}_{n-1},\\
&D_t^k u|_{t=0} = 0, \quad k=0,\dots,l-1,\ x\in\mathbb{R}_n^+,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где

$$\mathcal{L}(D_t, D_x) = L(D_t, D_x) + L'(D_x),$$

при этом $L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum\limits_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k$ — оператор главной части, а $L'(D_x)$ — младшая часть дифференциального оператора $\mathcal{L}(D_t, D_x)$.

Главная часть оператора $\mathcal{L}(D_t, D_x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

1. Символ $L(i\eta, i\xi)$ однороден относительно вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha)$, $\alpha_0 > 0$, $1/\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1,\dots,n$, т. е.

$$L(c^{\alpha_0} i\eta, c^{\alpha} i\xi) = c\, L(i\eta, i\xi), \quad c>0.$$

2. Оператор $L_0(D_x)$ является квазиэллиптическим, т.е. $L_0(i\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$

3. При $\operatorname{Re}\tau \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}_n$, $|\tau| + |\xi| \neq 0$ выполнено неравенство

$$\tau^l + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{L_{l-k}(i\xi)}{L_0(i\xi)}\tau^k \neq 0.$$

Будем рассматривать граничные операторы, не содержащие операторы D_t:

$$B_j(D_x) = D_{x_n}^{m_j} + \sum_{k<m_j} b_{j,k}(D_{x'})D_{x_n}^k, \quad m_j < 1/\alpha_n,$$

при этом символы $B_j(i\xi)$ являются однородными относительно вектора α из условия 1 с показателями β_j, $0 \leq \beta_j < 1$, т. е.

$$B_j(c^{\alpha} i\xi) = c^{\beta_j} B_j(i\xi), \quad c>0.$$

Будем предполагать, что для задачи (1) выполнено условие Лопатинского.

Известно [1], что при $|\alpha|/p' + l\alpha_0 \leqslant 1$ задача (1) корректно разрешима при дополнительных условиях ортогональности на правую часть $f(t,x)$. В работе доказаны следующие теоремы

о необходимых и достаточных условиях разрешимости задачи (1) в шкале соболевских пространств $W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1}), 1 < p \leqslant 2$:

Теорема 1 (об условной разрешимости). *Пусть* $\frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 \leq 1$ *и для некоторых целых неотрицательных чисел* σ_j, $j = 1, \ldots, n$ *выполнено неравенство*

$$\frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\sigma_j + \alpha_{\min} > 1 \geq \frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\sigma_j, \quad \alpha_{min} = \min\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}.$$

Тогда смешанная задача (1) имеет единственное решение $u(t,x) \in W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})$, $\gamma > \gamma_0$, *для любой функции* $f(t,x) \in W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1}), s = (\frac{1}{\alpha_0} - l, 0, \ldots, 0)$, *удовлетворяющей условиям*

$$(1 + \langle x \rangle)^{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j\alpha_j} f(t,x) \in W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{+}_{1}; L_1(\mathbb{R}^{+}_{n})),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n}} x^{\sigma} f(t,x)\, dx = 0, \quad \sigma \in \Sigma = \left\{\sigma \Big| \frac{|\alpha|}{p'} + l\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \sigma_j\alpha_j \leqslant 1\right\}.$$

Для решения справедлива оценка

$$\|u(t,x), W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \sum_{k=0}^{l} \|D^k_t u(t,x), W^{0,(1-k\alpha_0)r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\|$$

$$\leq c \left(\|f(t,x), W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})\| + \| \|(1 + \langle x \rangle)^{\sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_j\alpha_j} f(t,x), L_1(\mathbb{R}^{+}_{n})\|, W^{s}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{+}_{1})\| \right)$$

с константой $c > 0$, *не зависящей от* $f(t,x)$.

Теорема 2 (о необходимых условиях разрешимости). *Пусть* $\Gamma(\tau, s)$ *— контур в комплексной плоскости, охватывающий все корни уравнения* $\mathcal{L}(\tau, is, i\lambda) = 0$, $|\tau| \leqslant A$, $s \in \mathbb{R}_{n-1}\backslash\{0\}$. *Если для некоторых неотрицательных целых чисел* σ_j, $j = 1, \ldots, n$ *выполнено неравенство из теоремы 1 и при некотором* $j = 1, \ldots, \mu$

$$\psi_j(\tau, s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma(\tau,s)} \frac{B_j(is, i\lambda)}{\mathcal{L}(\tau, is, i\lambda)}\, d\lambda \not\equiv 0,$$

то для разрешимости смешанной задачи (1) в пространстве $W^{l,r}_{p,\gamma}(\mathbb{R}^{++}_{n+1})$, $1 < p \leqslant 2, \gamma > \gamma_0$, *необходимо выполнение условий*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{+}_{n}} x^{\sigma} f(t,x)\, dx = 0, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Автор выражает глубокую признательность профессору Г. В. Демиденко за неоценимые комментарии и обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Демиденко Г. В.* Смешанные задачи для одного класса уравнений Соболева // Теоремы вложения и их приложения. №1. Новосибирск, 1982. С. 44–74.
3. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Сер. Мат. 1954. Т. 18, №1. С. 3–50.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 196–196

УДК 517.9

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

© А. И. Кожанов

kozhanov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Для уравнений соболевского типа

$$Au_t + Bu = f(x,t), \tag{1}$$

$$Au_{tt} + Bu_t + Cu = f(x,t), \tag{2}$$

в случае вырождающихся эллиптических операторов A, B и C второго порядка, действующих по пространственным переменным, в работах [1–4] была исследована разрешимость первой начально-краевой задачи в классе регулярных решений. В настоящем докладе излагаются результаты, касающиеся продолжения исследований данных работ. В частности, рассматриваются уравнения вида (1) и (2), имеющие вырождение как по пространственным, так и по временнóй переменной, уравнения, у которых порядки операторов A и B в случае (1), A, B и C в случае (2) разные, уравнения более высокого порядка по выделенной (временнóй) переменной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кожанов А. И.* О свойствах решений для одного класса псевдопараболических уравнений // Докл. РАН. 1992. Т. 236, № 5. С. 781–786.
2. *Kozhanov A. I.* Certain classes of degenerate Sobolev – Galpern equations // Sib. Adv. Math. 1994. V. 4, N 1. P. 65–94.
3. *Кожанов А. И.* Вырождающиеся уравнения соболевского типа // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН. 1998. С. 4–13.
2. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP, Utrecht, 1999.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 197–198

УДК 517.9

ПОВЕДЕНИЕ ПРИ $x \to \infty$ РЕШЕНИЙ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© Л. М. Кожевникова

kosul@mail.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

В неограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}_{n+1} = \{\overline{\mathbf{y}} = (x, \mathbf{y}) \mid \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}_n\}$, расположенной вдоль оси Ox, рассматривается уравнение

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^j D_x^j \widehat{T}^{\overline{\beta}} (a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) T^{\overline{\alpha}} D_x^i u) = \Phi, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega. \tag{1}$$

Множество индексов $\overline{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$ определяется двумя параметрами $q,\ k \in \mathbb{N},\ q \le k$. Φ — линейный непрерывный функционал с ограниченным носителем. Комплексные псевдодифференциальные операторы $T^{\overline{\alpha}},\ \widehat{T}^{\overline{\alpha}}$ определяются сопряженными символами $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z}),\ \overline{A}^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$, соответственно. Комплекснозначные функции $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z})$ удовлетворяют условию: существуют числа $A > 0,\ \ \nu(\overline{\alpha}) > 0,\ \nu(\overline{\alpha}) \in \left[\frac{i}{k}, 1\right]$ такие, что при п. в. $(x, \mathbf{z}) \in \Omega$ справедливы неравенства $\mid A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z}) \mid \le A \mathcal{D}^{\frac{k\nu - i}{k\nu}}(\mathbf{z}), \quad \overline{\alpha} = (i, \alpha) \in \mathcal{S}$. Здесь $\mathcal{D}(\mathbf{z}),\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}_n$ — действительная неотрицательная непрерывная функция, такая, что $\mathcal{D}(\mathbf{z}) \ne \mathbf{0}$ для $\mathbf{z} \ne \mathbf{0}$. Действительные функции $a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}),\ \overline{\alpha}, \overline{\beta} \in \mathcal{S}$, считаем измеримыми и удовлетворяющими некоторому условию малости.

Рассмотрим первую краевую задачу

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{\overline{\alpha},\overline{\beta} \in \mathcal{S}} (-1)^{|\overline{\alpha}|} D_{\overline{\mathbf{y}}}^{\overline{\alpha}} (a_{\overline{\alpha}\overline{\beta}}(\overline{\mathbf{y}}) D_{\overline{\mathbf{y}}}^{\overline{\beta}} u) = \Phi, \quad \overline{\mathbf{y}} \in \Omega; \tag{1'}$$

$$D_x^i u \Big|_{\partial\Omega} = 0,\ i < k; \quad D_{y_s}^{\alpha_s} u \Big|_{\partial\Omega} = 0,\ \alpha_s < m_s,\ s = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Здесь $\overline{\alpha} = (i, \alpha) = (i, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндексы с целыми неотрицательными числами $i,\ \alpha_s,\ s = \overline{1, n}, \quad \mid \overline{\alpha} \mid = i + \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Множество $\mathcal{S}$ определяется параметрами $q,\ k,\ l_s,\ m_s \in \mathbb{N},\ q \le k,\ l_s \le m_s,\ s = \overline{1, n},\ \max\limits_{s = \overline{1, n}} \frac{l_s}{m_s} \le \frac{q}{k}:\ \mathcal{S} = \left\{ \overline{\alpha} \ \Big| \ \max\limits_{s = \overline{1, n}} \frac{l_s}{m_s} \le \nu(\overline{\alpha}) = \frac{i}{k} + \frac{\alpha_1}{m_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{m_n} \le 1 \right\}$.

Уравнение $(1')$ является частным случаем уравнения (1) при $\mathcal{D}^2(\mathbf{z}) = \sum\limits_{s=1}^{n} \left\{ z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s} \right\}$, $A^{\overline{\alpha}}(x, \mathbf{z}) = \iota^{|\alpha|} \mathbf{z}^{\alpha} = (\iota z_1)^{\alpha_1} (\iota z_2)^{\alpha_2} \cdots (\iota z_n)^{\alpha_n}$.

Рассматриваются обобщенные решения уравнения (1) в классе функций, соответствующем однородной задаче Дирихле. Работа посвящена исследованию зависимости поведения на бесконечности решения уравнения (1) от геометрии неограниченной области Ω.

Предполагается, что для любого $r > 0$ сечение $\Omega \cap \{x = r\} \ne \varnothing$. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ назовем λ*-последовательностью области* Ω, если существует число $\theta > 0$ такое, что справедливы неравенства

$$\frac{1}{\theta \Delta_N^{2[k,q]}} \le \lambda(x_N, x_{N+1}) \equiv \inf \left\{ J_{x_N}^{x_{N+1}}(g) \ \middle| \ g(\overline{\mathbf{y}}) \in C_0^{\infty}(\Omega), \ \int\limits_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} g^2 d\overline{\mathbf{y}} = 1 \right\},$$

где $\rho^{[k,q]}$ равно ρ^k или ρ^q при $\rho < 1$ или $\rho \geq 1$, $\Delta_N = x_{N+1} - x_N$, $\Omega_{x_N}^{x_{N+1}} = \{\overline{\mathbf{y}} \in \Omega \mid x_N < x < x_{N+1}\}$, $J_{x_N}^{x_{N+1}}(g) = \int\limits_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \left(|D_x^k g|^2 + |D_x^q g|^2\right) d\mathbf{y}dx + \int\limits_{\Omega_{x_N}^{x_{N+1}}} \mathcal{D}^2(\mathbf{z})|F_{\mathbf{y}\to\mathbf{z}}[g]|^2 d\mathbf{z}dx$, $N = \overline{0,\infty}$.

Приведем необходимое и достаточное условие существования λ-последовательности:

$$\text{при любом } r_1 > 0 \text{ найдется } r_2 > r_1 \text{ такое, что } \lambda(r_1, r_2) > 0. \tag{3}$$

При этом λ-последовательность можно построить начиная с любого $x_0 > 0$.

Теорема 1. *Пусть область Ω удовлетворяет условию (3) и $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ — λ-последовательность области Ω. Тогда существуют положительные постоянные κ, M такие, что для решения $u(\overline{\mathbf{y}})$ уравнения (1) при всех $N \geq 2$ справедлива оценка*

$$J_{x_N}(u) \leq M \exp(-\kappa N). \tag{4}$$

Показано, что для областей с нерегулярным поведением границы оценка (4) является более точной, чем оценка, установленная О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян в работе [1] для эллиптического уравнения второго порядка.

Для трубчатых областей вида $\Omega(f) = \{(x, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}_{n+1} \big| \, x > 0, |\, \mathbf{y} \,| < f(x)\}$ с положительной функцией $f(x)$ можно выразить оценку (3) в терминах функции $f(x)$.

Теорема 2. *Существуют положительные постоянные $\widetilde{\kappa}$, $\widetilde{M}$ такие, что для решения $u(\overline{\mathbf{y}})$ уравнения (1) в трубчатой области $\Omega(f)$ справедлива оценка*

$$J_r(u) \leq \widetilde{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa} \int\limits_1^r \frac{dx}{\phi(f)^{\left[\frac{1}{k}, \frac{1}{q}\right]}(x)}\right), \quad r \geq r_0. \tag{5}$$

Здесь $\phi(r)$, $r \geq 0$ монотонно возрастающая непрерывная функция такая, что $\phi(0) = 0$, определяемая по функции $\mathcal{D}(\mathbf{z})$. Например, для функции $\mathcal{D}^2(\mathbf{z}) = \sum\limits_{s=1}^{n} \left\{z_s^{2m_s} + z_s^{2l_s}\right\}$ $\phi(r) = r^{[m,l]}$, $r \geq 0$, где $m = \max\limits_{s=\overline{1,n}} m_s$, $l = \min\limits_{s=\overline{1,n}} l_s$, $l_s \leq m_s$, $l_s, m_s \in \mathbb{N}$, $s = \overline{1,n}$.

В областях $\Omega(f_a)$, $\Omega(f_{-a})$ с функциииями $f_a(x) = x^a$, $0 < a < q/l$, $f_{-a}(x) = x^{-a}$, $0 < a$, для решений задачи $(1')$, (2) оценка (5) соответственно принимает вид

$$J_r(u) \leq \widetilde{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa}_a r^{1-al/q}\right), \quad J_r(u) \leq \widetilde{M} \exp\left(-\widetilde{\kappa}_{-a} r^{1+am/k}\right), \quad r \geq r_0.$$

Отсюда видно, что для расширяющихся областей решение убывает быстрее с уменьшением l и увеличением q. В случае сужающихся областей решение убывает быстрее с уменьшением k и увеличением m.

В следующей теореме для широкого класса трубчатых областей устанавливается точность оценки (4) в случае эллиптического уравнения второго порядка.

Теорема 3. *Пусть положительная функция $f(x)$ и возрастающая последовательность положительных чисел $\{x_N\}_{N=0}^{\infty}$ удовлетворяют условиям*

$$\overline{\omega}^{-1} \leq \frac{\Delta_{N+1}}{\Delta_N} \leq \overline{\omega}, \ \overline{\omega} \geq 1, \quad \Delta_N \leq \omega_1 \inf_{[x_N, x_{N+1})} f(x), \ \omega_1 \geq 1, \quad N = \overline{0,\infty}.$$

Тогда для неотрицательного решения уравнения $(1')$ при $q = k = l_s = m_s$, $s = \overline{1,n}$ в трубчатой области $\Omega(f)$ существуют положительные числа K, μ, такие, что справедливы неравенства

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega_{x_N}(f))} \geq \mu \exp(-KN), \quad N \geq 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00354-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Мат. сб. 1980. Т. 112, № 4. С. 588—610.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 199–200

УДК 517.951

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

© А. В. Корниенко*, **О. В. Корниенко**

* akornienko@mail.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Работа посвящена изучению спектральных характеристик дифференциального оператора, порождённого граничной задачей для линейной системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа. Простейшим примером классической системы уравнений в частных производных, попадающих в поле наших рассмотрений, может служить система уравнений смешанного типа:

$$\frac{\partial u^1}{\partial t} - \operatorname{sign}(t)\frac{\partial u^2}{\partial x} - \varepsilon u^2 = f^1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial t} + \frac{\partial u^1}{\partial x} + \varepsilon u^1 = f^2,$$

эллиптическая при $t > 0$ и гиперболическая при $t < 0$. Вопросы спектральной теории граничных задач для уравнений смешанного типа изучались в [1], [2]; в меньшей степени они изучены для систем уравнений смешанного типа. Отметим работу [3], в которой изучалась задача Римана – Гильберта для однородной системы уравнений Лаврентьева – Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы. Интересующие нас вопросы будем исследовать методом модельных операторов [4], [5].

Пусть $t \in V_t \equiv [T_1, T_2]$, $-\infty < T_1 < 0 < T_2 < +\infty$; $H_t = \mathcal{L}_2(V_t)$; H_x — некоторое сепарабельное комплексное гильбертово пространство. Через H_x^2 обозначим гильбертово пространство, равное ортогональной сумме двух копий гильбертова пространства $H_x : H_x^2 = H_x \oplus H_x$; а через H — тензорное произведение пространств H_t и H_x^2: $H = H_t \otimes H_x^2$ [4]. Известно, что $H = H_t^2 \otimes H_x$. Для $f(t) \in H$ рассмотрим уравнение со спектральным параметром λ

$$L(D_t, B)u \equiv aD_t u(t) + bBu(t) = \lambda u(t) + f(t), \tag{1}$$

(под уравнением мы понимаем систему) и граничные условия вида

$$u(T_1) = u(T_2). \tag{2}$$

Здесь D_t — операция дифференцирования по переменной $t \in V_t$, $u(t) = (u^1(t), u^2(t))^T$, T — операция транспонирования, $a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & -\operatorname{sign}(t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B : H_x \to H_x$ — линейный замкнутый неограниченный оператор с плотной в H_x областью определения $\mathfrak{D}(B)$, не зависящей от $t \in V_t$, полная система $\{\varphi^s;\, s \in S\}$, собственных элементов которого образует базис Рисса в H_x; собственному значению $B(s)$ принадлежит собственный элемент φ^s.

Нас интересуют спектральные характеристики задачи (1), (2). Приведём вначале некоторые общие подходы изучения граничной задачи (1), (2). Обозначим через $\mathfrak{D}$ — линейное многообразие, состоящее из гладких вектор-функций $u(t) \in \mathbf{C}(V_t, H_x) \cap \mathbf{C}^1(V_t^{\pm}, H_x)$, удовлетворяющих условиям (2) и принадлежащих для любого $t \in V_t^{\pm}$ области определения $\mathfrak{D}(B)$ оператора B. Здесь $\mathbf{C}(V_t, H_x) = \mathbf{C}(V_t) \otimes H_x$, $\mathbf{C}(V_t) = C(V_t) \otimes U$; $\mathbf{C}^1(V_t^{\pm}, H_x) = \mathbf{C}^1(V_t^{\pm}) \otimes H_x$, $\mathbf{C}^1(V_t^{\pm}) = C^1(V_t^{\pm}) \otimes U$; $V_t^{\pm} = V_t^- \cup V_t^+, V_t^- = (T_1, 0), V_t^+ = (0, T_2)$.

Определение. Пусть $f(t) \in H$. Элемент $u(t) \in H$ называем *обобщённым решением граничной задачи* (1)–(2), если найдётся последовательность таких гладких вектор-функций $u_n(t) \in \mathfrak{D}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n(t) - u(t)\|_H = \lim\limits_{n\to\infty} \|L(D_t, B)u_n(t) - \lambda u(t) - f(t)\|_H = 0.$

Для $m=1,2; s\in S,$ положим

$$w_{m,s} = \mathrm{ch}(B(s)T_1)\cos(B(s)T_2) + (-1)^{m+1}\sqrt{\mathrm{ch}^2(B(s)T_1)\cos^2(B(s)T_2)-1},$$

$$a_{m,s} = \mathrm{ch}(B(s)T_1) - w_{m,s}\cos(B(s)T_2), \quad b_{m,s} = \mathrm{sh}(B(s)T_1) + w_{m,s}\sin(B(s)T_2),$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество $s\in S$, для которых выполнено равенство $a_{1,s}b_{2,s}-a_{2,s}b_{1,s} = 0$, то есть положим:

$$\mathfrak{S} = \Big\{ s : a_{1,s}b_{2,s} - a_{2,s}b_{1,s} = 0; s\in S \Big\}.$$

Теорема 1. *Зависимость свойств системы собственных вектор-функций оператора $L : H \to H$ от параметров задачи (1), (2) следующая:*

1. *Система собственных вектор-функций оператора L минимальна в гильбертовом пространстве H .*
2. *Система собственных вектор-функций оператора L полна в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{S}$ пусто.*
3. *Система собственных вектор-функций оператора L образует базис в гильбертовом пространстве H , если $0\in \bigcap\limits_{s}\bigcap\limits_{m,l=1}^{2}\Gamma^l_{m,s}$ ($\Gamma^l_{m,s}$ — некоторое множество, определяемое параметрами задачи).*

Пример. Положив в (1) $B = D_x + 1$ при условиях периодичности по x , получим оператор $L : H\to H$, порождённый системой уравнений смешанного типа в замкнутой области $V = V_t\times V_x$, $V_t = [-\pi,\pi]$, $V_x = [0,2\pi]$, при условиях периодичности по t и по x , система собственных вектор-функций которого полна в $H = \mathbb{L}_2(V) = L_2(V)\oplus L_2(V)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е. И.* Уравнения смешанного типа со спектральным парамером. М.: изд-во МГУ, 1988. 150 с.
2. *Кальменов Т. Ш.* О регулярных краевых задачах и спектре для уравнений гиперболического и смешанного типов: Дисс. ...доктора. физ. – мат. наук. М., МГУ, 1982. 241 с.
3. *Солдатов А. П.* Задача Римана – Гильберта для системы Лаврентьева – Бицадзе в смешанной области с характеристическим участком границы // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 398, № 12. С. 1653–1663.
4. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. М.: Наука – МАИК "Наука/Интерпериодика 2000. 175 с. (Тр. МИАН. Т. 229).
5. *Романко В. К.* О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 9. С. 1574–1585.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 201–202

УДК 517.951

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОТИПНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

© Д. В. Корниенко, В. В. Корниенко

dmkornienko@mail.ru, V_V_Kornienko@mail.ru

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец

Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_1(D)u \equiv a_1 D_t u + b_1 B(D_x)u = \lambda u + f, \quad \text{при} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{1}$$

$$L_2(D)u \equiv a_2 D_t u + b_2 B(D_x)u = \lambda u + f, \quad \text{при} \quad a_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{2}$$

где D_t и $B(D_x) = \sum\limits_{|\alpha|\le r} b_\alpha D_x^\alpha$ дифференциальные операции соответственно по $t \in V_t = [T,0], -\infty < T < 0,$ и $x = (x_1, \ldots, x_m) \in V_x$ — замкнутой ограниченной области евклидова пространства $\mathbb{R}^m, D = D_t D_x, \alpha$ — целочисленный мультииндекс $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m, b_\alpha(x) = b_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}(x), D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}\ldots D_{x_m}^{\alpha_m}, u = u(t,x) = \big(u^1(t,x), u^2(t,x)\big)^T$ является вектор — столбцом. Присоединим к системам (1) и (2) краевые условия

$$\Gamma_t u \equiv u^1\Big|_{t=T} = u^1\Big|_{t=0} = 0, \qquad \Gamma_x u = 0. \tag{3}$$

описывающие поведение вектор — функции $u(t,x)$ в граничных точках множества $V = V_t \times V_x$ по переменным t и x соответственно. Обозначим через B сильное расширение в гильбертовом пространстве $H_x = L_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям $\Gamma_x u = 0$. В дальнейшем считаем, что полная система $\{\varphi^s;\, s \in S\}$, собственных элементов оператора B образует базис Рисса в H_x; собственному значению $B(s)$ принадлежит собственный элемент φ^s. Через ϱB, σB; $P\sigma B$, $C\sigma B$ и $R\sigma B$ принято обозначать резольвентное множество, спектр; точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора B соответственно. Положим $H_t = L_2(V_t), H_{tx} = H_t \otimes H_x$ — тензорное произведение пространств H_t и H_x [1]. Через H обозначим гильбертово пространство, равное ортогональной сумме двух копий гильбертова пространства $H_{tx} : H = H_{tx} \oplus H_{tx}$. Известно, что $H = H_t^2 \otimes H_x$, где $H_t^2 = H_t \oplus H_t$, и норма в гильбертовом пространстве H вектор — функций $u : V \to H_x^2$ вычисляется по формуле $|u;\, H| = \big||u(t);\, H_x^2|;\, H_t\big|$.

Определение. Элемент $u \in H$ называется *обобщённым решением задачи* (1)–(3), если найдётся последовательность $\{u_n\}$ гладких и удовлетворяющих условиям (3) вектор — функций $u_n = u_n(t,x)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - u;\, H| = \lim\limits_{n\to\infty} |L_1(D)u_n - \lambda u - f;\, H| = 0$.

Это определение ставит в соответствие задаче (1)–(3) замкнутый оператор L_1 [2]. Под спектральными свойствами задачи (1)–(3) мы понимаем соответствующие свойства оператора L_1. Аналогично определяется оператор L_2, сопоставляемый задаче (2)–(3).

Пусть $A(K) = \{A(k) : k \in \mathbb{Z}\}$, $A(k) = -ik\frac{\pi}{T}$. Обозначим через $\overline{A(K)}$ пополнение множества $A(K)$ символом $A(\infty) = \lim\limits_{k\to\infty} A(k) = i\cdot\infty$; а через $(B(S))'$ — предельные точки множества $B(S) = \{B(s);\, s \in S\}$. Пусть $AB = A(K) \cap B(S)$, $\overline{A}B' = \overline{A(K)} \cap (B(S))'$. Будем считать, что $A(k) \in (B(S))'$ и, в частности, $A(\infty) \in (B(S))'$, если найдутся такие последовательности $\{k_j\}_{j=1}^\infty, k_j \in \mathbb{Z}; \{B(s_j)\}_{j=1}^\infty, s_j \in S$; что $\lim\limits_{j\to\infty} |A(k_j) - B(s_j)| = 0$ и $\lim\limits_{j\to\infty} A(k_j) = A(k)$.

Теорема 1. *Зависимость структуры спектра σL_1 оператора L_1 от параметров задачи (1), (3) следующая:*

1. *Если* $0 \in P\sigma B$, *то* $P\sigma L_1 = \mathbb{C}$.

2. *Если множество* AB *не пусто, то* $P\sigma L_1 = \mathbb{C}$.

3. *Если* $AB = \varnothing$, *а множество* $\overline{A}B'$ *не пусто, то* $C\sigma L_1 = \mathbb{C}$.

4. *Если* $AB = \overline{A}B' = \varnothing$, *то* $\sigma L_1 = \varnothing$ *и, следовательно,* $\varrho L_1 = \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Зависимость структуры спектра* σL_2 *оператора* L_2 *от параметров задачи (2), (3) следующая:*

1. *Если* $0 \in P\sigma B$, *то* $P\sigma L_2 = \mathbb{C}$.

2. *Если* $0 \in C\sigma B$, *то* $\sigma L_2 = P\sigma L_2 \cup C\sigma L_2 = \mathbb{C}$.

3. *Если* $0 \notin \sigma B$, *то* $\sigma L_2 = P\sigma L_2 \cup C\sigma L_2$. *Причём* $C\sigma L_2 = \overline{P\sigma L_2} \setminus P\sigma L_2$.

Теорема 3. *Зависимость свойств системы собственных вектор — функций оператора* $L_2 : H \to H$ *от параметров задачи (2), (3) следующая:*

1. *Система собственных вектор — функций оператора* L_2 *минимальна в гильбертовом пространстве* H.

2. *Система собственных вектор — функций оператора* L_2 *полна в гильбертовом пространстве* H *тогда и только тогда, когда множество* AB *пусто, то есть* $0 \notin P\sigma L_2$.

3. *Если множество* AB *пусто, то существует последовательность из полной системы собственных вектор — функций оператора* L_2, *не являющаяся базисом в гильбертовом пространстве* H.

Случай $m = 1, B(D_x) = D_x + \varepsilon$, при условиях периодичности по x рассмотрен в [3].

Авторы выражают глубокую благодарность проф. А. А. Дезину и проф. В. К. Романко за постановку задачи и обсуждение полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дезин А. А.* Дифференциально-операторные уравнения. Метод модельных операторов в теории граничных задач. М.: Наука–МАИК "Наука/Интерпериодика 2000. 175 с. (Тр. МИАН. Т. 229).
2. *Романко В. К.* Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, №1. С. 47–50.
3. *Корниенко Д. В.* Об одной спектральной задаче для двух гиперболических систем уравнений // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, №1. С. 91–100.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 203–204

УДК 517.951

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

© Д. В. Корниенко *, О. В. Корниенко

* dmkornienko@mail.ru

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец

Выписав две эллиптические системы

$$\frac{\partial u^1}{\partial t}-\frac{\partial u^2}{\partial x}-\varepsilon u^2=f^1,\quad \frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{\partial u^1}{\partial x}+\varepsilon u^1=f^2; \tag{1}$$

$$-\frac{\partial u^1}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\varepsilon u^2=f^1,\quad \frac{\partial u^2}{\partial t}+\frac{\partial u^1}{\partial x}+\varepsilon u^1=f^2, \tag{2}$$

отметим, что система (1) подобна системе (2) в следующем смысле: после умножения первого уравнения системы (2) на -1 и формальной замены $-f^1$ на f^1 (в силу произвольности правой части), получаем систему (1). Эти преобразования могут наводить на мысль о совпадении свойств разрешимости краевых задач для данных систем безотносительно к условиям, определяющим краевую задачу. Тем не менее исследования показывают, что спектральные свойства дифференциальных операторов, порождаемых рассматриваемой задачей различны. Системы (1) и (2) будем в дальнейшем называть *эллиптическими системами первого и второго типа* соответственно.

Рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений в частных производных

$$L_1(D)u\equiv a_1D_tu+b_1B(D_x)u=\lambda u+f,\quad\text{при}\quad a_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad b_1=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}; \tag{3}$$

$$L_2(D)u\equiv a_2D_tu+b_2B(D_x)u=\lambda u+f,\quad\text{при}\quad a_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}; \tag{4}$$

где D_t и $B(D_x)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant r}b_\alpha D_x^\alpha$ — дифференциальные операции соответственно по $t\in V_t=[0,T]$, $0<T<+\infty$, и $x=(x_1,\ldots,x_m)\in V_x$ — замкнутой ограниченной области евклидова пространства $\mathbb{R}^m$, $D=D_tD_x$, α — целочисленный мультииндекс $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_m$, $b_\alpha(x)=b_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}(x)$, $D_x^\alpha=D_{x_1}^{\alpha_1}\ldots D_{x_m}^{\alpha_m}$, $u=u(t,x)=\big(u^1(t,x),u^2(t,x)\big)^T$ является вектор-столбцом. Присоединим к системам (1) и (2) краевые условия

$$\Gamma_tu\equiv\mu u(0)-u(T)=0;\quad \mu\in\mathbb{C},\quad \mu\neq0;\qquad \Gamma_xu=0, \tag{5}$$

описывающие поведение вектор-функции $u(t,x)$ в граничных точках множества $V=V_t\times V_x$ по переменным t и x соответственно. Обозначим через B сильное расширение в гильбертовом пространстве $H_x=L_2(V_x)$ дифференциальной операции $B(D_x)$, первоначально заданной на гладких функциях, удовлетворяющих условиям $\Gamma_xu=0$. В дальнейшем считаем, что полная система $\{\varphi^s;\, s\in S\}$, собственных элементов оператора B образует базис Рисса в H_x; собственному значению $B(s)$ принадлежит собственный элемент φ^s. Через ϱB, σB; $P\sigma B$, $C\sigma B$ и $R\sigma B$ принято обозначать резольвентное множество, спектр; точечный, непрерывный и остаточный спектры оператора B соответственно. Положим $H_t=L_2(V_t)$, $H_t^2=H_t\oplus H_t$ — ортогональная сумма двух копий гильбертова пространства H_t. Через H обозначим тензорное произведение гильбертовых пространств H_t^2 и H_x: $H=H_t^2\otimes H_x$ [1]. Известно, что

$H = H_t \otimes H_x^2$ и норма в гильбертовом пространстве H вектор-функций $u : V \to H_x^2$ вычисляется по формуле $|u;\, H| = \big||u(t);\, H_x^2|;\, H_t\big|$.

Определение. Элемент $u \in H$ называется *обобщённым решением задачи* (3)–(5), если найдётся последовательность $\{u_n\}$ гладких и удовлетворяющих условиям (5) вектор-функций $u_n = u_n(t,x)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - u;\, H| = \lim\limits_{n\to\infty} |L_1(D)u_n - \lambda u - f;\, H| = 0$.

Это определение ставит в соответствие задаче (3)–(5) замкнутый оператор L_1 [2]. Под спектральными свойствами задачи (3)–(5) мы понимаем соответствующие свойства оператора L_1. Аналогично определяется оператор L_2, сопоставляемый задаче (4)–(5).

Теорема 1. *Спектр σL_1 оператора $L_1 : H \to H$ состоит из замыкания на комплексной плоскости точечного спектра $P\sigma L_1$ оператора L_1. Множество $C\sigma L_1 = \sigma L_1 \setminus P\sigma L_1$ образует непрерывный спектр оператора L_1. Система собственных вектор-функций оператора L_1 образуют базис Рисса в пространстве H.*

Теорема 2. *Зависимость свойств системы собственных вектор-функций оператора $L_2 : H \to H$ от параметров задачи (4), (5) следующая:*

1. *Система собственных вектор-функций оператора L_2 минимальна в гильбертовом пространстве H.*

2. *Система собственных вектор-функций оператора L_2 полна в гильбертовом пространстве H тогда и только тогда, когда $0 \notin P\sigma L_2$.*

3. *Если $0 \notin P\sigma L_2$, то система собственных вектор-функций оператора L_2 образует базис в H; построенный базис не является базисом Рисса в H.*

Пример 1. Спектр периодической задачи для эллиптической системы первого типа, рассматриваемой в $V = [0, 2\pi]^2$, состоит из собственных значений

$$\lambda_{m,k,s} = ik + i(-1)^m\,[is + \varepsilon]\,;\ m = 1,2;\quad k,s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Точки спектра расположены (достаточно редко) на прямых, параллельных мнимой оси. Собственные вектор-функции образуют ортонормированный базис в $H = \mathbb{L}_2\big(V\big)$.

Пример 2. Точечный спектр периодической задачи для эллиптической системы второго типа, рассматриваемой в $V = [0, 2\pi]^2$, даётся формулой

$$\lambda_{m,k,s} = (-1)^m \sqrt{-k^2 + (is + \varepsilon)^2};\ m = 1,2;\ k,s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Точки точечного спектра расположены достаточно редко на комплексной плоскости. Система собственных вектор-функции не является полной в $H = \mathbb{L}_2\big(V\big)$, при $\varepsilon = 1$.

Авторы выражают глубокую благодарность проф. В. К. Романко за постановку задачи и всестороннюю поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. 207 с.
2. *Романко В. К.* Смешанные краевые задачи для одной системы уравнений // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286, № 1. С. 47–50.

УДК 517.977

О НОВЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ УСЛОВИЯХ ТОЧЕЧНОЙ ПОЛНОТЫ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

© А. А. Коробов

alexegor@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается следующее дифференциально-разностное уравнение n-го порядка

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-h), \quad t > 0. \tag{1}$$

Рассмотрим тело кватернионов $\mathbb{D}$ как четырехмерную алгебру над полем вещественных чисел. Действие правыми умножениями индуцирует каноническое вещественное четырехмерное представление тела кватернионов.

Напомним определение. Система (1) называется точечно полной в момент T, если для каждого $x_1 \in \mathbb{R}^n$ найдется такая непрерывная функция $x(t)$, $t \geq -h$, что $x(T) = x_1$. Пара матриц (A, B) называется *точечно полной*, если для любого положительного параметра h система (1) является точечно полной. В. М. Попов нашел эффективные условия, когда пара вещественных матриц (A, B) точечно полна [1]. В [2] начата работа по перенесению его результатов на матрицы A и B, все элементы которых являются элементами тела кватернионов. В настоящем докладе анонсируется следующий общий результат.

Теорема. *Пусть* $A, B \in M_m(\mathbb{D})$. *Если ранг вещественной матрицы* B *меньше* 8, *то пара* (A, B) *точечно полна.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Popov V. M.* Pointwise degeneracy of linear, time-invariant, delay-differential equations // J. Differential Eqns. 1972. V. 11, N 3. P. 541–561.
2. *Korobov A. A.* New effective conditions for the pointwise completeness of linear systems with delay // Differ. Uravn. Protsessy Upr. 2006. № 3. P. 28–54 (electronic).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 206–207

УДК 517.983.51

СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© О. В. Коробова

ollis@mail.ru

Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск

В работе исследуется сингулярная система дифференциальных уравнений вида

$$MB\frac{d\overline{u}}{dt} = \Lambda A\overline{u}(t) + \overline{f}(t), \tag{1}$$

с начальным условием

$$\overline{u}(0) = \overline{u}_0. \tag{2}$$

Здесь M, Λ — квадратные матрицы порядка s; A, B — замкнутые линейные операторы с плотной областью определения, действующие из E_1 в E_2; E_1, E_2 — банаховы пространства; $\overline{u}(t)$ — искомая вектор-функция, каждая компонента которой является функцией со значениями в E_1; $\overline{f}(t)$ — заданная вектор-функция, имеющая компоненты со значениями в E_2; оператор B необратим, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{R(B)} = R(B)$; оператор A непрерывно обратим,

$$A\overline{u}(t) = \begin{pmatrix} Au_1(t) \\ \vdots \\ Au_s(t) \end{pmatrix}.$$

Если пучок матриц $(\mu M - \Lambda)$ регулярен [1], то существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что

$$P(\mu M - \Lambda)Q = \mu \begin{pmatrix} E_{s-q} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

где E_{s-q} и E_q единичные матрицы соответствующих размерностей, L — квадратная матрица порядка $(s-q)$ [2].

Пусть выполнено условие

I. Матрица L имеет s-q различных отличных от нуля собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-q}$. Тогда для матрицы L существует невырожденная матрица C такая, что

$$C^{-1}LC = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_{s-q}).$$

С помощью замены переменных $\overline{u} = Q\overline{v}$ и $\overline{v_1} = C\overline{w}$, где $\overline{v_1}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_{s-q}(t) \end{pmatrix}$, система (1) распадается на $s-q$ независимых задач

$$B\frac{dw_l}{dt} = \lambda_l Aw_l(t) + q_l(t), \tag{3}$$

с начальными условиями

$$w_l(0) = w_l^0, l = \overline{1, s-q} \tag{4}$$

и q уравнений

$$0 = Av_l(t) + g_l(t), l = \overline{s-q+1, s} \tag{5}$$

Здесь $\overline{q}(t) = C^{-1}\overline{g_1}(t), \overline{g}(t) = P\overline{f}(t), \overline{g_1}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_{s-q}(t) \end{pmatrix}$.

Каждая из новых задач (3)–(4) исследуется методами работ [3–5], а из уравнений (5) функции $v_l(t)$, $l = \overline{s-q+1, s}$ находятся следующим образом

$$v_l(t) = -A^{-1}g_l(t), l = \overline{s-q+1, s}.$$

После чего, возвращаясь к исходным переменным, восстанавливается решение исходной задачи (1)–(2).

Задачу Коши (1)–(2) в обобщенных функциях можно переписать в виде системы сверточных уравнений относительно $\tilde{\overline{u}}(t) \in K'_+(E_1)$ ($K'_+(E_1)$ — класс обобщенных функций с ограниченным слева носителем)

$$(MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \tilde{\overline{u}}(t) = \overline{f}(t)\theta(t) + MB\overline{u}_0\delta(t), \tag{6}$$

где $\theta(t)$ — функция Хевисайда, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака.

Определение. *Матричной фундаментальной оператор-функцией* дифференциального оператора $(MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t))$ на классе $K'_+(E_2)$ будем называть такую обобщенную матричную оператор-функцию E(t), что на основном пространстве $K(E_2^*)$ справедливы равенства

$$(MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * E(t) * \tilde{\overline{u}}(t) = \tilde{\overline{u}}(t) \;\; \forall \tilde{\overline{u}}(t) \in K'_+(E_2)$$

и

$$E(t) * (MB\delta'(t) - \Lambda A\delta(t)) * \tilde{\overline{v}}(t) = \tilde{\overline{v}}(t) \;\; \forall \tilde{\overline{v}}(t) \in K'_+(E_1).$$

Таким образом, если существует свертка $E(t) * (\overline{f}(t)\theta(t) + MB\overline{u}_0\delta(t))$, то она является единственным решением системы сверточных уравнений (6) в классе $K'_+(E_1)$, т. е.

$$\overline{u}(t) = E(t) * (\overline{f}(t)\theta(t) + MB\overline{u_0}\delta(t)). \tag{7}$$

Используя представление (7), была исследована связь между обобщенным и непрерывным решениями задачи Коши (1)–(2). Были рассмотрены следующие случаи: оператор B фредгольмов и имеет полный A-жорданов набор, оператор B нетеров и имеет полный A-жорданов набор, операторный пучок $(B - \lambda A)$ спектрально ограничен.

Полученные результаты допускают обобщение на случай системы N-го порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бояринцев Ю. Е.* Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1988.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.
3. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб.мат.журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
4. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах // Сиб.мат.журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1393–1406.
5. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е. Ю.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Дифференц.уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С. 769–774.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 208–209

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С КОНЦАМИ

© С. А. Корольков

sergei.korolkov@rambler.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Пусть M — риманово многообразие с концами $D_1, \ldots, D_m$. Зафиксируем некоторый конец D_i. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — непрерывные ограниченные на D_i функции. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* D_i, и использовать обозначение $f_1(x) \sim f_2(x)$, если для некоторого гладкого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ конца D_i выполнено равенство

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D_i \setminus B_k} |f_1(x) - f_2(x)| = 0.$$

Отношение “ $\sim$ ” является отношением эквивалентности, не зависит от выбора исчерпания конца D_i и, таким образом, разбивает множество всех непрерывных ограниченных на D_i функций на классы эквивалентности (см., например, [2]). Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$.

Введем понятие предела по концу многообразия.

Определение 1. Будем говорить, что число b является *пределом функции* $u(x)$ *по концу* D_i и использовать обозначение $\lim\limits_{D_i} u(x) = b$, если $u(x) \sim b$ на D_i, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{D_i \setminus B_k} |u(x) - b| = 0$$

для некоторого исчерпания $\{B_k\}$ конца D_i.

Несложно показать, что определение предела не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ в силу свойств отношения “ $\sim$ ” (см., например, [2]).

Определим поток гармонической функции по концу многообразия.

Определение 2. *Потоком гармонической функции* u *по концу* D_i назовем число

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u = \int\limits_{\partial B(0,r)\cap D_i} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\mu',$$

где $B(0,r)$ — геодезический шар радиуса r такой, что $B \subset B(0,r)$, ν — единичная внешняя нормаль к $B(0,r)$.

Заметим, что в силу формулы Грина определение потока не зависит от r.

Всюду далее будем считать, что $D_1, \ldots, D_s$ — концы параболического типа, $D_{s+1}, \ldots, D_{s+l}$ — концы гиперболического типа, $s + l = m$.

Обозначим через $\mathbb{H}(M)$ пространство гармонических на M функций.

Пусть D_j — конец гиперболического типа. Будем говорить, что функция f_j принадлежит *классу допустимых на конце* D_j *функций*, если на конце D_j существует гармоническая функция u такая, что $u \sim f_j$ на конце D_j.

Всюду далее через K_j будем обозначать класс допустимых на конце D_j функций, $j = s+1, \ldots, s+l$.

Пусть теперь D_i — конец параболического типа. Обозначим через $\mathbb{HA}_i(D_i)$ такое подпространство гармонических на конце D_i функций, что для любой функции $u \in \mathbb{HA}_i(D_i)$ существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{D_i} u$.

Обозначим через $\mathbb{HA}(M)$ такой класс гармонических на M функций, что любая функция $u \in \mathbb{HA}(M)$ на каждом конце параболического типа D_i принадлежит $\mathbb{HA}_i(D_i)$, т.е.

$$\mathbb{HA}(M) = \{u \in \mathbb{H}(M) : u|_{D_i} \in \mathbb{HA}_i(D_i),\, i = 1, \dots, s\}.$$

Далее будем рассматривать многообразия M, которые имеют гиперболический тип. Заметим, что многообразие с концами имеет гиперболический тип тогда и только тогда, когда оно содержит хотя бы один конец гиперболического типа (см. [1]).

Пусть $a_1, \dots, a_s$ — некоторый набор констант, а $f_{s+1}, \dots, f_{s+l}$ — набор функций, заданных на концах $D_{s+1}, \dots D_{s+l}$ соответственно. Будем говорить, что на многообразии M разрешима *обобщенная краевая задача третьего рода* (1) для набора констант $a_1, \dots, a_s$ и набора функций $f_{s+1}, \dots, f_{s+l}$, если на M существует функция $u(x) \in \mathbb{H}(M)$ такая, что

$$\operatorname*{flux}_{D_i} u(x) = a_i,\, i = 1, \dots, s, \quad u(x)|_{D_j} \in [f_j],\, j = s+1, \dots, s+l. \tag{1}$$

Нам также потребуется определение Δ-строгого конца многообразия (см. [2]). Пусть $v_j(x)$ — емкостный потенциал конца D_j.

Определение 3. Будем говорить, что конец D_j многообразия M является Δ*-строгим*, если $v_j(x) \in [0]$ на D_j.

Очевидно, что каждый Δ-строгий конец D_j многообразия M имеет гиперболический тип.

Основные результаты работы содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Пусть M такое, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ концы D_j являются Δ-строгими. Тогда на многообразии M разрешима обобщенная краевая задача третьего рода (1) для любых констант $a_1, \dots, a_s$ и любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$.*

Теорема 2. *Пусть M такое, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ концы D_j являются Δ-строгими. Если $a_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, s$, то решение обобщенной краевой задачи третьего рода (1) в классе функций $u \in \mathbb{HA}(M)$ существует и единственно для любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$.*

Теорема 3. *Пусть M такое, что для всех $j = s+1, \dots, s+l$ концы D_j являются Δ-строгими. Если для всех $i = 1, \dots, s$, для которых $a_i \neq 0$, существует неограниченная на конце D_i функция $u \in \mathbb{HA}_i(D_i)$, то решение обобщенной краевой задачи третьего рода (1) в классе функций $u \in \mathbb{HA}(M)$ существует и единственно для любых непрерывных ограниченных функций $f_j \in K_j$, $j = s+1, \dots, s+l$.*

Теорема 4. *Предположим, что на M выполнены следующие условия*

1) для каждого $i = 1, \dots, s_1 \leq s$ существует неограниченная на конце D_i функция $u \in \mathbb{HA}_i(D_i)$,

2) для всех $j = s_1+1, \dots, s$ любая функция $u \in \mathbb{HA}_j(D_j)$ ограничена на D_j,

3) для всех $p = s+1, \dots, s+l$ классы допустимых функций K_p состоят только из констант.

Тогда

$$\dim \mathbb{HA}(M) = s_1 + l.$$

Автор выражает глубокую благодарность д. ф.-м. н., профессору А. Г. Лосеву, а также к. ф.-м. н., доценту Е. А. Мазепе за полезные обсуждения и замечания по теме настоящей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Grigor'yan A.* Analitic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds // Bull. Amer. Math. Soc. 1999. V. 36. P. 135–249
2. *Мазепа Е. А.* Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43, № 3. С. 591–599.

УДК 517.95

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШАРЕ

© Б. Д. Кошанов

koshanov@list.ru

Центр физико-математических исследований МОН РК, Алматы, Казахстан

В данной работе в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений пространстве произвольной размерности. Отметим, что полученные формулы функции Грина имеют самостоятельное значение. В частности, в теории упругости важное место занимает явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

Постановка задачи. Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области $\Omega_\delta = \{x : \|x\| < \delta\} \subset R^n$ (n — натуральное число, δ — положительное число) с границей $S_\delta = \partial\Omega_\delta = \{x : \|x\| = \delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial \overrightarrow{n}_x^i} u\right|_{|x|=\delta} = 0, \ \ i = 0, 1, 2, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где $\overrightarrow{n}_x = \dfrac{x}{|x|}$ — нормаль к $\partial\Omega_\delta$ в точке x, Δ — оператор Лапласа.

Используя свойства симметричности фундаментального решения, доказана следующая:

Теорема. *A) В случае нечетного n функция Грина задачи Дирихле (1)–(2) представима в виде:*

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n},$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-n},$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)\ldots(2m-2k+4-n)\,c_{2m,n}\cdot\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\cdot$$
$$\left(1 - \left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1 - \left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad k = 2, \ldots, m$$

$$c_{2m,n} = \frac{1}{(m-1)!\,2^{m-1}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2-n)}\cdot\frac{1}{(2\pi)^n}.$$

B) Утверждение A) остается справедливым при четных n, если $2m < n$.
C) Когда n четное и $2m \geqslant n$, то функция Грина задачи Дирихле (1)–(2) представима в виде:

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|,$$

$$g^1_{2m,n}(x,y) = c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-n}\ln|x-y|,$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = (2m-n)(2m-2-n)\dots(2m-2k+4-n)\,c_{2m,n}\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\,\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\cdot$$

$$\ln|x-y|\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},\quad k=2,\dots,m,$$

$$c_{2m,n} = \frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)\cdot 2^{2m-1}\pi^{n/2}}\,.$$

Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областей [3–4]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами. Явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеется в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частыми производными. М.: Мир, 1966. 351 с.
2. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982. 336 с.
3. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д., Искакова У. А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Препринт. Алматы, 2005. 54 с.
4. *Кальменов Т. Ш., Кошанов Б. Д.* О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // Доклады НАН РК. 2006. Т. 5. С. 9–12.
5. *Begehr H., Vanegas C. J.* Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation // Math. Nachr. 2006. V. 279. P. 38–57.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 212–213

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ОПЕРАТОРАМИ М. САЙГО НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

© И. А. Кузнецова

kirilina@samara-gsm.ru

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара

Рассмотрим уравнение

$$|y|^m u_{xx} - u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, в конечной области D, ограниченной характеристиками уравнения (1)

$$AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0,\ \ BC : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1,$$

$$AC_1 : x - \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} = 0,\ \ BC_1 : x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} = 1.$$

Пусть $D^+ = D\bigcap(y>0)$, $D^- = D\bigcap(y<0)$, I – интервал прямой $y=0$. $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ – аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0)\in I$, с характеристиками AC и BC_1 соответственно. Для уравнения (1) рассмотрим следующую краевую задачу.

Задача 1. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (1) из класса $u(x,y) \in C(\overline{D})\bigcap C^1(D^+\bigcup I)\bigcap C^1(D^-\bigcup I)\bigcap C^2(D^+\bigcup D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} &A_1\left(I_{0_+}^{a,b,\beta-1-a}U\left[\Theta_0(t)\right]\right)(x) + A_2\left(I_{0_+}^{a-\beta+1,b+2\beta-1,\beta-a-1}U_y(t,-0)\right)(x) = \varphi_1(x),\\ &B_1\left(I_{1_-}^{a_1,b_1,\beta-1-a_1}U\left[\Theta_1(t)\right]\right)(x) + B_2\left(I_{1_-}^{a_1-\beta+1,b_1+2\beta-1,\beta-a_1-1}U_y(t,+0)\right)(x) = \varphi_2(x)\end{aligned} \tag{2}$$

и условию сопряжения

$$\lim_{y\to+0} U_y(x,y) = \lim_{y\to-0} U_y(x,y), \tag{3}$$

где $\beta = \frac{m}{2m+4}$, $A_1 > 0$, $A_2 < 0$, B_1, B_2 — ненулевые действительные константы одного знака,

$$-\beta < a < 1-\beta, b > 1, -\beta < a_1 < 1-\beta, b_1 > 1. \tag{4}$$

$\left(I_{0_+}^{\alpha,\beta,\eta} f\right)(x)$ — обобщенный оператор дробного интегрирования [1]. $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — такие заданные функции, что

$$\varphi_1(x) \in H^{\lambda_1}(\overline{I}), 0 < a+\beta < \lambda_1 \le 1, \varphi_2(x) \in H^{\lambda_2}(\overline{I}), 0 < a_1+\beta < \lambda_2 \le 1.$$

Используя решения задачи Коши [2] для уравнения (1) в областях D^- и D^+, найдем [3] $U\left[\Theta_0\right]$ и $U\left[\Theta_1\right]$ и подставим в краевые условия (2).

После преобразования получим

$$\nu_-(x) = \frac{1}{K_1}\left\{\left(D_{0_+}^{1-2\beta}\tau(t)\right)(x) - \left(D_{0_+}^{1-2\beta}g_1(t)\right)(x)\right\},$$

$$\nu_+(x) = \frac{1}{K_2}\left\{\left(D_{1_-}^{1-2\beta}\tau(t)\right)(x) - \left(D_{1_-}^{1-2\beta}g_2(t)\right)(x)\right\},$$

где $\tau(x) = \tau_-(x) = \tau_+(x)$,

$$g_1(x) = \frac{1}{A_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{0_+}^{-(a+\beta),-b,2\beta-1}\varphi_1(t)\right)(x), \;\; g_2(x) = \frac{1}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\left(I_{1_-}^{-(a_1+\beta),-b_1,2\beta-1}\varphi_2(t)\right)(x).$$

Единственность решения задачи 1 следует из принципа экстремума гиперболических уравнений [4] и свойств дробных производных [5], а существование решения сводится к вопросу разрешимости характеристического сингулярного уравнения на конечном отрезке

$$C_1\mu(x) + \frac{C_2}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\mu(x)}{t-x}dt = F(x),$$

где

$$C_1 = \frac{A_1\gamma_2\Gamma(1-\beta) - A_2}{A_1\gamma_1\Gamma(\beta)} - \frac{B_1\gamma_2\Gamma(1-\beta) + B_2}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\cos 2\beta\pi, \;\; C_2 = \frac{B_1\gamma_2\Gamma(1-\beta) + B_2}{B_1\gamma_1\Gamma(\beta)}\sin 2\beta\pi,$$

$$\mu(x) = x^{1-2\beta}\nu(x), \;\; F(x) = x^{1-2\beta}\left(D_{0_+}^{1-2\beta}(g_2(t) - g_1(t))\right)(x),$$

причем $C_1^2 + C_2^2 \neq 0$.

Согласно теории сингулярных интегральных уравнений [6], сформулированы условия существования решения задачи 1, а само решение выписано в явном виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saigo M.* A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, № 2. P. 135–143.
2. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М., 1981. С. 448.
3. *Репин О. А.* Нелокальная краевая задача для параболо-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 23, № 1. С. 173–176.
4. *Нахушев А. М.* К теории вырождающихся гиперболических уравнений // Сообщения АН Груз. ССР. 1975. Т. 77, № 3. С. 545–548.
5. *Agmon S., Nirenberg L., Protter M.* A maximum principe for a class of hyperbolic equation and applications to mixed elliptic-hyperbolic type // Communs Pure and Appl. Math. 1953. V. 4. P. 455–470.
6. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Н. и тех., 1987. С. 688.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 214–215

УДК 517.925

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕНИ С ПЕРИОДОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© А. А. Кульжумиева*, Ж. А. Сартабанов

* aiman-80@mail.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Пусть $D_a = \partial_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} a_j\partial_j$ — оператор дифференцирования по многомерному времени $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ в направлении постоянного вектора $(1, a_1, \ldots, a_m)$, где $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$, $(j = 0, \ldots, m)$. Далее будем считать $a = (a_1, \ldots, a_m)$, $t_0 = \tau \in (-\infty, +\infty) = R$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in R^m$, вектор-функция $\sigma = t - a\tau$ — характеристика оператора D_a.

Исследуем вопрос о существовании периодических решений системы вида

$$D_a x = A(\tau, t, \sigma)x + f(\tau, t, \sigma, x). \tag{1}$$

Здесь $n \times n$-матрица $A(\tau, t, \sigma)$ обладает свойством некритичности, т. е. при любых фиксированных (τ, t, σ) линейная однородная система, соответствующая системе (1), не имеет $(\theta(\sigma), \omega, \omega)$-периодических решений, кроме нулевого. Также матрица $A(\tau, t, \sigma)$ и заданная n-вектор-функция $f(\tau, t, \sigma, x)$ удовлетворяют условиям

$$A(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega) = A(\tau, t, \sigma) \in C^{(0,1,1)}_{\tau,t,\sigma}(R \times R^m \times R^m), \quad \forall k \in Z^m, \tag{2}$$

$$f(\tau + \theta(\sigma), t + k\omega, \sigma + k\omega, x) = f(\tau, t, \sigma, x) \in C^{(0,1,1,1)}_{\tau,t,\sigma,x}(R \times R^m \times R^m \times R^n), \quad \forall k \in Z^m, \tag{3}$$

$k\omega = (k_1\omega_1, \ldots, k_m\omega_m)$ — кратный вектор-период, $\theta(\sigma)$ — некоторая положительно определенная ω-периодическая и непрерывно дифференцируемая функция

$$0 < \theta(\sigma + k\omega) = \theta(\sigma) \in C^1_\sigma(R^m), \quad \forall k \in Z^m,$$

причем $\theta(0) = \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_m$ — положительные рационально несоизмеримые постоянные.

Как видно из соотношений (2) и (3) матрица $A(\tau, t, \sigma)$ и вектор-функция $f(\tau, t, \sigma, x)$ по переменной τ имеют период $\theta(\sigma)$, ω-периодично зависящий от характеристики $\sigma \in R^m$.

Заметим, что для исследования поставленного вопроса нам достаточно ограничиться решениями системы (1), которые удовлетворяют начальным условиям вида

$$x|_{\tau=0} = u(t) \in U, \tag{1_0}$$

где U — пространство непрерывно дифференцируемых ω-периодических n-вектор-функций с нормой $\|u\| = \sup |u(t)|$ при $t \in R^m$:

$$U = \{u(t)| \;\; u(t + k\omega) = u(t) \in C^1_t(R^m), \quad \forall k \in Z^m\},$$

$|\cdot|$ — знак евклидовой метрики.

Теперь введем пространство V n-вектор-функций $v(\tau,t,\sigma)$ таких, что

$$V=\{v(\tau,t,\sigma)|\ \ v(\tau+\theta(\sigma),t+k\omega,\sigma+k\omega)=v(\tau,t,\sigma)\in C(R\times R^m\times R^m),\quad \forall k\in Z^m;$$

$$\|v\|=\sup|v(\tau,t,\sigma)|\le\triangle,\quad (\tau,t,\sigma)\in R\times R^m\times R^m\},$$

где $\triangle=const>0$.

Отсюда ясно, что U является подпространством пространства V с метрикой индуцированной метрикой пространства V.

Допустим, что единственное периодическое решение линейной системы

$$D_ax=A(\tau,t,\sigma)x+f(\tau,t,\sigma)$$

удовлетворяет оценке

$$\|x^\star(\tau,t,\sigma)\|=\|[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}X^{-1}(h_0,h,\sigma)f(h_0,h,\sigma)ds\|\le\eta\triangle$$

для всех $f\in V$, интегрирование проводится вдоль характеристики $h_0=s$, $h=\sigma+as$, $\eta>0$ — постоянная, которая ограничивает действующий на f оператор.

Тогда на основе [1] нетрудно показать, что $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$-периодическое решение системы (1) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(\tau,t,\sigma)=\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}K(\tau,t,\sigma,h_0)f(h_0,h,\sigma,x(h_0,h,\sigma))ds,\tag{4}$$

где $K(\tau,t,\sigma,h_0)=[X^{-1}(\tau+\theta(\sigma),t,\sigma)-X^{-1}(\tau,t,\sigma)]^{-1}X^{-1}(h_0,h,\sigma)$ – ядро.

Определим оператор

$$(Tx)(\tau,t,\sigma)=\int\limits_{(\tau,\sigma)}^{(\tau+\theta(\sigma),t)}K(\tau,t,\sigma,h_0)f(h_0,h,\sigma,x(h_0,h,\sigma))ds,$$

где вектор-функция $f(\tau,t,\sigma,x)$ ограничена числом $M>0$ при $x=0$ и удовлетворяет условию Липшица относительно x с постоянной $L>0$.

При выполнении условий

$$\eta L<1,\quad \eta M\le(1-\eta L)\triangle\tag{4}$$

оператор T переводит пространство V в себя и является сжимающим. Следовательно, в силу полноты пространства V оператор T имеет единственную неподвижную точку $x^\star(\tau,t,\sigma)\in V:\ Tx^\star=x^\star$, которая является единственным периодическим решением интегрального уравнения (4).

Дифференцируемость решения $x^\star(\tau,t,\sigma)$ по всем аргументам следует из условия (2) и (3).

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема *При выполнении условий (2), (3) и (5) некритическая система (1) допускает единственное* $(\theta(\sigma),\omega,\omega)$*-периодическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кульжумиева А. А., Сартабанов Ж. А.* Многопериодические решения систем дифференциальных уравнений с многомерным временем и переменным периодом // Материалы Междунар. конф. "Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры". 5-8 октября 2005. Брест. Ч. 1. С. 163–165.

УДК 517.956

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ДАЛАМБЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

© С. В. Лексина

lesveta@rambler.ru

Самарский государственный университет, Самара

Для системы

$$u_{tt} - Au_{xx} = 0, \tag{1}$$

описывающей продольно-крутильное колебание длинной естественно закрученной нити [1], рассмотрены смешанные задачи в прямоугольной области $D = [0 \le x \le l] \times [0 \le t \le T]$ с начальными и финальными условиями по t, $u(x,t)$ — вектор-столбец, A — постоянная матрица второго порядка.

Построены аналоги формул Даламбера для системы (1) (то есть решение задачи Коши). Используя полученные формулы, решены смешанные задачи I и II.

Задача I. Найти функцию $u(x,t) \in \tilde{W}_2^2(D)$ [2], удовлетворяющую системе (1) в области D, начальным условиям $u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$, краевым условиям

$$u(0,t) = \mu(t), u(l,t) = \nu(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Причем выполнены условия согласования $\mu(0) = \varphi(0), \nu(0) = \varphi(l)$, где φ, ψ, μ, ν — вектор-функции.

Задача II. Найти функцию $u(x,t) \in \tilde{W}_2^2(D)$, удовлетворяющую системе (1) в области D, финальным условиям $u(x,T) = \Phi(x), u_t(x,T) = \Psi(x)$, краевым условиям (2). Причем выполнены условия согласования $\Phi(0) = \mu(T), \Phi(l) = \nu(T)$, где Φ, Ψ — вектор-функции.

Получено в явном виде единственное решение смешанных задач I и II при $0 \le T \le \frac{l}{\max[\lambda_1,\lambda_2]}$, где λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы A.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горошко О. Ф., Чиж А. А.* К вопросу о продольно-крутильных колебаниях упругой естественно закрученной нити (каната) переменной длины с концевым грузом, движущимся по жестким направляющим // Техника. Стальные канаты. Киев, 1964. Т. 1. С. 56–64.
2. *Ильин В. А.* Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах за произвольный промежуток времени // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 5, № 11. С. 1517–1534.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 217–217

УДК 517.956.2

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННОЙ РАЗРЫВНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© М. Г. Лепчинский

mmyth@mail.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Рассматривается полулинейная эллиптическая краевая задача

$$Lu(x) + g_0(x, u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где нелинейность g_0 борелева и может иметь разрывы первого рода по фазовой переменной, причем g_0 удовлетворяет условию подлинейного роста

$$|g_0(x, u)| \leq b|u|^r + a(x), \quad 0 \leq r < 1,\ b > 0,\ a \in L_q(\Omega).$$

Предполагается, что ядро $N(L)$ оператора L *нетривиально* и 0 — наименьшее его собственное значение.

Обобщенным решением задачи (1)–(2) будем называть функцию $u \in W_q^2(\Omega)$, удовлетворяющую граничному условию (2) и для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Lu(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))],$$

$g_-(x, u) = \liminf\limits_{s \to u} g_0(x, s)$, $g_+(x, u) = \limsup\limits_{s \to u} g_0(x, s)$.

Определим функции

$$G_+(x) = \liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{t^{r+1}} \int_0^t g_0(x, s) ds$$

и

$$G_-(x) = \liminf_{t \to -\infty} \frac{1}{|t|^{r+1}} \int_0^t g_0(x, s) ds.$$

Теорема. *Пусть для каждой ненулевой функции $\varphi \in N(L)$ выполняется неравенство*

$$0 < \int_{\varphi(x)<0} |\varphi(x)|^{r+1} G_-(x) dx + \int_{\varphi(x)>0} |\varphi(x)|^{r+1} G_+(x) dx. \tag{4}$$

Тогда исходная краевая задача имеет обобщенное решение.

Замечание. Мы предлагаем условия, гарантирующие существование обобщенных решений, которые распространяют известные условия K. C. Chang [1] и Ландесмана – Лазера на случай неограниченных нелинейностей.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта р_урал_а № 07-01-96000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chang K. C.* Variational Methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. 1981. V. 80, N 1. P. 102–129

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 218–219

УДК 517.9

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ УСЛОВИЯХ НА ОТКРЫТОЙ ГРАНИЦЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА – ГОРДОНА

© А. Р. Майков

a_maikov@phys.msu.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Исследование возможности редукции начально-краевых задач, поставленных в пространственно неограниченных областях, к задачам в их ограниченных подобластях привлекает к себе все более широкий интерес в последние десятилетия. Это объясняется потребностью в эффективных методах численного моделирования нестационарных волновых процессов различной физической природы. Один из способов редукции основан на использовании так называемых условий на открытой границе, которые известны и под другими названиями — условий излучения, или безотражательных, или искусственных граничных условий. Схема использования условий на открытой границе может быть кратко описана следующим образом: из первоначальной неограниченной области $\Omega \in \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ искусственно выделяется ограниченная подобласть $\Omega_{\rm int}$, и на $S_{\rm open} = \partial\Omega_{\rm int} \backslash \partial\Omega$ ставятся упомянутые условия. Вместо исходной задачи, поставленной в $\Omega \times (0,T)$ (назовем ее Задачей I), в $\Omega_{\rm int} \times (0,T)$ численно решается Задача II, которую составляют уравнения, начальные и граничные условия Задачи I вместе с условиями на $S_{\rm open}$. известно

Далее мы ограничимся обсуждением лишь тех случаев, когда система описывается в области $\Omega_1 := \Omega \backslash \Omega_{\rm int}$ уравнением

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U + \gamma^2 U = 0, \qquad 0 \le \gamma \equiv \text{const}, \tag{1}$$

а в $\Omega_{\rm int}$ — каким-либо более сложным образом. Будем предполагать, что геометрия $\partial\Omega_1$ и граничные условия допускают применение к (1) метода разделения переменных, и тем самым (1) сводится к последовательности независимых уравнений с одной пространственной переменной x, каждое из которых имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \left(\nu_j^2 + \frac{\mu_j^2 - 1/4}{x^2}\right) u_j = 0, \qquad x > x_1,\ t \in (0,T) \tag{2}$$

с константами $\nu_j \ge \gamma$ и $\mu_j \ge 0$ *. Можно показать, что если U — достаточно гладкая функция и $U|_{t=0} = \partial U/\partial t|_{t=0} = 0$, то имеют место равенства

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(x_1,t) + \frac{\partial u_j}{\partial x}(x_1,t) + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t-\tau) u_j(x_1,\tau)\, d\tau = 0, \tag{3}$$

где $\mathcal{K}(t) \equiv \mathcal{K}(t; x_1, \nu, \mu)$ — функция из $L^1(0,\infty)$, преобразование Фурье которой по t нетрудно найти аналитически. Эти равенства можно было бы использовать в качестве точных условий

*Примерами областей, для которых возможен переход от (1) к уравнениям (2), служат полубесконечный регулярный волновод произвольного сечения, полубесконечные рупоры или внешность шара, а также полупространство $x^1 > 0$ в прямоугольной декартовой системе координат (x^1, x^2, x^3), если U удовлетворяет в этом полупространстве условиям периодичности по x^2 и по x^3. Если $d = 2$, то примерами могут служить плоские аналоги перечисленных областей.

для U на открытой границе (поверхности $x = x_1$), аналогично тому, как используются парциальные условия излучения [1] при решении численном решении уравнения Гельмгольца. Однако из-за нелокального по времени характера (3) вычислительные затраты оказались бы чрезвычайно высокими. В [2] был предложен существенно более экономичный класс алгоритмов, основанных на использовании приближенных условий. Последние получаются из (3) заменой $\mathcal{K}$ аппроксимирующими их функциями $\widetilde{\mathcal{K}}^{(j)}(t)$ некоторого специального вида.

Результаты численного решения ряда задач свидетельствуют о перспективности такого подхода; в то же время вопросы корректности приближенных условий (существования и единственности решения Задачи II, сходимости его к решению Задачи I) изучены еще недостаточно. По этой причине интересным представляется исследование указанных вопросов применительно к следующей модельной начально-краевой задаче, поставленной в полуполосе $x > x_0$, $t \in (0, T)$:

$$Lu = f(x,t), \quad l[u] = g(t), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \tag{4}$$

где $L\eta := \rho(x)\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \left(\nu^2 + \frac{\mu^2 - 1/4}{x^2} + q(x)\right)\eta$, $l[\eta] := -\frac{\partial \eta}{\partial x}(x_0,t)\sin\alpha + \eta(x_0,t)\cos\alpha$; α, ν, μ — константы, причем $\nu,\ \mu \geq 0$; $f \in L^2((x_0,\infty)\times(0,T))$, $g \in L^2(0,T)$, $u_0 \in W_2^1(0,\infty)$, $u_1 \in L^2(0,\infty)$, $\rho,\ k \in C^2([x_0,\infty))$, $q \in C([x_0,\infty))$, причем для некоторого $x_1 > x_0$ справедливо $f(x,t) = u_0(x) = u_1(x) = q(x) \equiv 0$, $\rho(x) = k(x) \equiv 1$ при $x \geq x_1$ и $\inf_{x\in(x_0,x_1)} k(x) > 0$, $\inf_{x\in(x_0,x_1)} \rho(x) > 0$. Пусть $\widetilde{u}$ — функция, заданная в прямоугольнике $(x_0,x_1)\times(0,T)$, удовлетворяющая в нем (4) и, кроме этого, приближенным условиям на открытой границе $x = x_1$: $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial t}(x_1,t) + \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x_1,t) + \int\limits_0^t \widetilde{\mathcal{K}}(t-\tau)\widetilde{u}(x_1,\tau)\,d\tau = 0$, причем вид $\widetilde{\mathcal{K}}$ не обязательно такой, как в [2]. Через $W_p^m(\cdot)$ $(m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty)$ будем обозначать пространства Соболева, через $F[\cdot]$ — преобразование Фурье на $\mathbb{R}$, через X — интервал (x_0,x_1). Будем предполагать, что $m \geq 2$, и что при $m \geq 3$ в дополнение к перечисленным выше выполнены условия $\rho, q \in W_\infty^{m-2}(X)$, $k \in W_\infty^{m-1}(X)$. Кроме того, потребуем, чтобы в системе, описываемой (4), были невозможны резонансы (более детальную формулировку этого условия см. в [3]). В этом случае, как показано в [3],

1. если решение $u \in W_2^m(X\times(0,T))$ задачи (4) существует, то для любой $\widetilde{\mathcal{K}} \in L^1(0,T)$ решение $\widetilde{u}$ соответствующей задачи с приближенными условиями существует и единственно в $W_2^m(X\times(0,T))$;
2. $\|\widetilde{u} - u\|_{W_2^m(X\times(0,T))} = O\left(\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0,T)}\,\|u\|_{W_2^m(X\times(0,T))}\right)$ при $\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{L^1(0,T)} \to 0$;
3. если $\widetilde{\mathcal{K}}$ допускает представление $\widetilde{\mathcal{K}} = F\left[\widetilde{\mathfrak{K}}\right]$, где $\widetilde{\mathfrak{K}} \in L^2(\mathbb{R})\bigcap L^\infty(\mathbb{R})$, то $\|\widetilde{u} - u\|_{W_2^m(X\times(0,T))} = O\left(\|\widetilde{\mathfrak{K}} - F^{-1}[\mathcal{K}]\,\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\,\|u\|_{W_2^m(X\times(0,T))}\right)$.

Оценки п. п. 2 и 3 являются равномерными относительно $T \in (0,\infty)$.

Аналогичные оценки справедливы для $\|u - \widetilde{u}\|_{W_\infty^m}$ и, по-видимому, для $\|u - \widetilde{u}\|_{C^m}$. Равномерность оценок по T указывает на принципиальную возможность построения приближенных ядер $\widetilde{\mathcal{K}}^{(j)}$, пригодных для использования в (3) вместо $\mathcal{K}$ при сколь угодно больших T; в пользу этого говорят и результаты проведенных тестовых расчетов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Свешников А. Г.* Принцип излучения // Докл. АН СССР. 1950. Т. 3, № 5. С. 517–520.
2. *Sofronov I. L.* Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl. 1998. T. 221. C. 92–115.
3. *Майков А. Р.* О приближенных условиях на открытой границе для одного класса гиперболических уравнений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2006. Т. 46, № 6. С. 1080–1095.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 220–221

УДК 517.934

О ДИНАМИЧЕСКОМ ОБРАЩЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

© **В. И. Максимов**

maksimov@imm.uran.ru

Институт математики и механики УрО РАН, Екатеринбург

В докладе обсуждаются задачи динамического обращения для систем с распределенными параметрами, описываемыми дифференциальнвми включениеми. В области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ рассмотрим смешанную граничную задачу

$$x_t(t,\eta) - \Delta_L x(t,\eta) + a_0(\eta)x(t,\eta) + \beta(x(t,\eta) - \psi(\eta)) \ni (Bu(t))(\eta) + f(t,\eta) \quad \text{на} \quad Q = T \times \Omega, \ (1)$$

$$\alpha_1 x(t,\sigma) + \alpha_2 \partial x(t,\sigma)/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times (t_0, \vartheta)$$

с начальным условием

$$x(t_0,\eta) = x_0(\eta) \quad \text{при п. в.} \quad \eta \in \Omega.$$

Здесь $T = [t_0, \vartheta]$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$, $\psi \in H^2(\Omega)$, $f(\cdot) \in L_2(Q)$, β — максимально монотонный граф на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $0 \in D(\beta) = \{z \in \mathbb{R} : \beta(z) < +\infty\}$, $\partial x/\partial n$ — производная по внешней нормали, $\Delta_L x = \sum_{i=0}^n \partial^2 x/\partial \eta_i^2$ — оператор Лапласа, $(U, |\cdot|_U)$ — равномерно выпуклое банахово пространство, $B \in \mathcal{L}(U;H)$ — линейный непрерывный оператор, $H = L_2(\Omega)$. Включения (1) используются для описания процесса управления термостатом, параболической задачи с препятствием, задачи Сигнорини и т.д.

Пусть выполнено

Условие. Справедливы соотношения

a) $\psi(\sigma) \equiv 0$ или $\alpha_1\psi(\sigma) + \alpha_2 \partial\psi(\sigma)/\partial n \leqslant 0$ п. в. на Γ и $\beta_\lambda(r) \leqslant 0$ $\forall r \in \mathbb{R}$ при $\alpha_2 \neq 0$, $\beta_\lambda(-\psi(\sigma)) = 0$ п. в. на Γ при $\alpha_2 = 0$;

b) $\alpha_1/\alpha_2 > 0$ при $\alpha_2 > 0$.

Здесь $\beta_\lambda = \lambda^{-1}(1 - (1 + \lambda\beta)^{-1})$ — аппроксимация Иосиды β.

Тогда для любых $u(\cdot) \in L_2(T;U)$) существует единственное решение $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ включения (1) со следующими свойствами:

$$x(\cdot) \in W(T) \cap C(T;V) \cap L_2(T;H^2(\Omega)), \quad x(t) \in D(\varphi) = \{x \in H : \varphi(x(t)) < +\infty\}$$

$$\forall t \in T, \quad t \to \varphi(x(t)) \in AC(T).$$

Здесь $AC(T)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $z(\cdot) : T \to \mathbb{R}$, $W(T) = \{z(\cdot) \in L_2(T;H) : z_t(\cdot) \in L_2(T;H)\}$.

Остановимся на одной из обсуждаемых задач. Пусть решение включения (1) $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, u(\cdot))$ зависит от изменяющегося во времени неизвестного возмущения $u(\cdot) \in L_2(T;U)$. Функция $x(\cdot)$ также неизвестна. В моменты $t \in T$ фазовое состояние $x(t)$ измеряется с ошибкой. Результаты измерений — элементы $\xi^h(t) \in H$ — удовлетворяют неравенствам

$$|\xi^h(t) - x(t)|_H \leqslant h.$$

Здесь $h \in (0,1)$ — величина информационной погрешности. Задача динамического обращения состоит в построении алгоритма, который позволяет восстановить неизвестный вход (возмущение) $u = u(\cdot)$ в "реальном времени".

Для решения задачи может быть использован подход, основанный на методе вспомогательных позиционно-управляемых моделей [1, 2]. При этом законы выбора управлений в моделях

основываются на тех или иных модификациях принципа экстремального сдвига Н. Н. Красовского [3].

Наряду с включением (1), введем еще одно включение (назовем его, следуя [1, 2], моделью):

$$w_t^h(t,\eta) - \Delta_L w^h(t,\eta) + a_0(\eta) w^h(t,\eta) + \beta(w^h(t,\eta) - \psi(\eta)) \ni (Bu^h(t))(\eta) + f(t,\eta) \quad \text{на} \quad Q = T \times \Omega,$$
$$\alpha_1 w^h(t,\sigma) + \alpha_2 \partial w^h(t,\sigma)/\partial n = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma = \Gamma \times (t_0, \vartheta) \tag{2}$$

с начальным условием

$$w^h(t_0,\eta) = w_0^h(\eta) \quad \text{при п. в.} \quad \eta \in \Omega.$$

Пусть $u_*(\cdot; x(\cdot))$ означает элемент минимальной $L_2(T;U)$-нормы из множества $U_*(x(\cdot))$ всех функций $u(\cdot) \in L_2(T;U)$, порождающих решение $x(\cdot)$, т. е.

$$u_*(\cdot; x(\cdot)) = \arg\min\{|u(\cdot)|_{L_2(T;U)} : u(\cdot) \in U_*(x(\cdot))\},$$

где

$$U_*(x(\cdot)) = \{\tilde{u}(\cdot) \in L_2(T;U) : x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, \tilde{u}(\cdot))\}.$$

Обсуждаемая задача сводится к задаче конструирования закона управленияпо принципу обратной связи $u^h(t) = \mathcal{U}(t, \xi^h(t), w^h(t))$ такого, что имеет место сходимость

$$u^h(\cdot) \to u_*(\cdot; x(\cdot)) \text{ в } L_2(T;U) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Для решения задачи введем функцию $\alpha(h) : (0,1) \to \mathbb{R}^+ = \{z \in \mathbb{R} : z > 0\}$ со свойствами

$$\alpha(h) \to 0, \quad h^{2/3}\alpha^{-1}(h) \to 0 \quad \text{при } h \to 0. \tag{3}$$

Закон формирования управления $u^h(t)$ зададим по правилу $\mathcal{U} : T \times H \times H \to U$:

$$\mathcal{U}(t, \xi^h(t), w^h(t)) = \alpha^{-1}(h) B^*(\xi^h(t) - w^h(t)), \tag{4}$$

где $(t, \xi^h(t), w^h(t))$, символ B^* означает сопряженный оператор, а символ $w^h(\cdot)$ — решение включения (2) с управлением $u^h(\cdot)$, определенным согласно (4).

Теорема. *Пусть выполнено условие* (3). *Тогда управление* $u^h(\cdot)$ *решает задачу динамического обращения.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 07-01-00008), Программы поддержки фундаментальных исследований Президиума РАН 22 “Процессы управления”, Урало-Сибирского междисциплинарного проекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Osipov Ju. S., Kryazhimskii A. V.* Inverse Problems for Ordinary Differential Equations: Dynamical Solutions. Gordon and Breach, London, 1995.
2. *Maksimov V. I.* Dynamical Inverse Problems of Distributed Systems. VSP, 2002.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 222–222

УДК 517.946

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ КОШИ – РИМАНА

© З. Маликов

faridun22@rambler.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Пусть G область, граница которой состоит из части гиперплоскости $y_m = 0$ и некоторой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_m > 0$. В области G рассмотрим систему Коши – Римана [1]

$$A(D_1, D_2, :, D_m)u(x) = 0, \quad x \in G, \tag{1}$$

где $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Если $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ и является решением системы (1), тогда верна следующая интегральная формула:

$$u(x) = \int\limits_{\partial G} A(D_1, D_2, :, D_m)\frac{1}{r^{m-2}}A^*(t_1, t_2, :, t_m)u(y)\,dS_y,$$

где $x,\, y \in R^m$, $r = |y - x|$, $t_1, t_2, :, t_m$ — единичная внешняя нормаль, проведенная в точке y на поверхности ∂G, A^* — сопряженная матрица к A.

Постановка задачи. Пусть $u(x) \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$, является решением системы (1) и $u(x)|_S = f(x)$. Задача восстановления функции $u(x)$ по значением функции $f(x)$ является задачей Коши для системы Коши – Римана.

Существование решения задачи Коши играет важную роль. В работе доказывается существование решения этой задачи, а также строится регуляризованное решение данной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дезин А. А.* Труды математического института им. В. А. Стеклова // Изв. АН СССР, М. 1962. Т. 68. С. 10–54.
2. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математического физики. Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 223–224

УДК 517.92

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ УРАВНЕНИЯМИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© М. Ш. Маматов

mamatovmsh@mail.ru

Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан

1. Рассматриваются следующая игровая задача, описываемая уравнением

$$\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-u(x,t)+\upsilon(x,t)\,, \tag{5}$$

$\overline{P}=\{u:|u|\le\rho\,,\,p>0\}\,,\ \overline{Q}=\{|\upsilon|\le\sigma,\,\sigma>0\}\,,\ (x,t)\in D=\{(x,t):\,0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}\,,$

$$z(x,0)=f(x),\ \ 0<x<1, \tag{6}$$

$$z(0,t)=z(1,t)=0,\ \ 0\le t\le T, \tag{7}$$

где u,υ — управляющие параметры, u — управление преследования, υ — управления убегание. Далее, в R выделено непустое терминальное множество $\overline{M}$. Игра (1)–(3) считается завершенной, если $z(x,t_0)\in\overline{M}$, $0<a\le x\le b<1$, и для некоторого $t=t_0$, $t_0\le T$.

Предположим, что существует и притом единственное достаточно гладкое решение $z(x,t)$ задача (1)–(3) при любых допустимых значений управляющих параметров $u=u(x,t)$ и $\upsilon=\upsilon(x,t)$.

2. В области D выберем сеть узловых точек (x_k,t_k) на пересечении координатных линий $x=x_i,\ \ x_i=ih,\ \ h=\frac{1}{n};\ \ t=t_k,\ \ t_k=kl,\ \ l=\frac{T}{K}$.

$$\frac{z_{i,k+1}-z_{i,k}}{l}=\frac{z_{i-1,k}-2z_{i,k}+z_{i+1,k}}{h^2}-u_{i,k}+\upsilon_{i,k}, \tag{8}$$

$$i=1,2,\dots,n-1,\ \ k=0,1,\dots,r-1;$$

$$z_{i,0}=f(ih),\ \ i=1,2,\dots,n-1, \tag{9}$$

$$z_{0,k}=z_{n,k}=0,\ \ k=0,1,\dots,r. \tag{10}$$

где $u_{i,k}=u(ih,kl)\in\overline{P},\ \ \upsilon_{i,k}=\upsilon(ih,kl)\in\overline{Q}$ — управляющие параметры.

Уравнение (4) является простейшим из всех известных разностных уравнений, соответствующих (1).

Решение дискретной задачи (4)–(6) осуществляется следующим образом. По известным начальным значением $z_{i,0}$ и $u_{i,0},\,\upsilon_{i,0}$ $(i=0,1,\dots,n)$ вычисляются в любом порядке по формуле (4) значения $z_{i,1}$ $(i=1,2,\dots,n-1)$. Далее, по найденным значениям $z_{i,1}$ $(i=1,2,\dots,n-1)$ и известным граничным значением $z_{0,1}$ и $z_{n,1}$ вычисляются по той же формуле (4) значения $z_{i,2}$ $(i=1,2,\dots,n-1)$ и так далее. Определение значений искомой функции по формуле (4) на $(k+1)$-м слое ($(k+1)$-м слоем мы будем называть совокупность узлов $x=ih$ $(i=0,1,\dots,n)$, $t=(k+1)l$) по ее значениям на k-м слое и граничным значениям $z_{0,k}$ и $z_{n,k}$ и есть процесс решения “по шагам”.

3. Теперь для удобства запишем задачу (4)–(6) в матричном виде

$$z_{k+1}=Cz_k-lu_k+l\upsilon_k,\ \ k=0,1,\dots,r-1;\ \ z_0=f,$$

где z_k — искомые матрицы-столбцы $\{z_{1,k}, z_{2,k}, \dots, z_{n-1,k}\}$, $u_k = \{u_{1,k}, u_{2,k}, \dots, u_{n-1,k}\}$, $\upsilon_k = \{\upsilon_{1,k}, \upsilon_{2,k}, \dots, \upsilon_{n-1,k}\}$, $f = \{f(h), f(2h), \dots, f((n-1)h)\}$ — начальный вектор, C — $(n-1)$-мерная квадратная Якобиева (трехдиагональная) матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} 1-\frac{2l}{h^2} & \frac{l}{h^2} & \cdots & 0 \\ \frac{l}{h^2} & 1-\frac{2l}{h^2} & \frac{l}{h^2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & \frac{l}{h^2} & 1-\frac{2l}{h^2} \end{pmatrix}$$

4. Ясно, что в игре (7) $M = M_0 + M_1$, где M_0 — линейное подпространство R^{n-1} , M_1 — подмножество подпространства L — ортогонального дополнения M_0 в R^{n-1}. Через $\prod$ обозначим матрицу ортогонального проектирования из R^{n-1} на L, через $A+B$ и $A \pm B$ — соответственно алгебраическую сумму и геометрическую разность множеств A, B,

$$P = \underbrace{\overline{P} \times \overline{P} \times \ldots \times \overline{P}}_{n-1}, \qquad Q = \underbrace{\overline{Q} \times \overline{Q} \times \ldots \times \overline{Q}}_{n-1}.$$

Пусть $W(0) = \{0\}$, $W(m) = \sum\limits_{i=0}^{m-1} [\prod C^i lP \pm \prod C^i lQ]$ для $m = 1, 2, \dots$, $W_1(m) = M_1 + W(m)$ для всех $m = 0, 1, \dots$

Теорема. *Предположим, что N — наименьшее из тех чисел m, для каждого из которых имеет место включение $\prod C^m z_0 \in W_1(m)$. Тогда из точки z_0 можно завершить преследование за N шагов.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сатимов Н. Ю., Маматов М. Ш.* Об одном классе линейных дифференциальных и дискретных игр между группами преследователей и убегающих // Дифференциальные уравнения. 1990 Т. 26, № 9. С. 1541–1551.
2. *Маматов М. Ш.* Об одной задаче преследования, управляем разностными уравнениями второго порядка // Труды международной конференции “Современые проблемы математической физики и информационных технологии”. Ташкент, 2005. Т. 2. С. 22–25.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 225–226

УДК 517.958

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ БИНГАМА

© А. Е. Мамонтов

relic@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Уравнения движения вязких (включая неньютоновские) сжимаемых жидкостей имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \qquad \frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbb{P}_r + \rho \mathbf{f}; \tag{1}$$

здесь ρ — плотность жидкости, $\mathbf{u}$ — скорость, $\mathbf{f}$ — заданные внешние силы, $\mathbb{P}_r$ — тензор напряжений, div — оператор дивергенции по пространственным переменным $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, а t — время. Жидкость Бингама [1, 2] характеризуется тем, что в ней при малых напряжениях тензор скоростей деформаций $\mathbb{D} = \operatorname{Sym}(\nabla \otimes \mathbf{u})$ равен 0, т. е. в областях с малыми $\mathbb{P}_r$ (за вычетом шаровой части) движение твердотельное — строго говоря, такие среды не являются жидкостями в смысле аксиом (постулатов) Стокса [3]. Эта модель находит свое применение при изучении движений таких сред, как пасты, цементы, суспензии, некоторые виды нефтей, и др. [4, 5]. Таким образом, жидкость Бингама описывается определяющим уравнением (замыкающим систему (1)) вида

$$\mathbb{P}_r = \mathbb{P}_f + \mathbb{P}_b, \tag{2}$$

где $\mathbb{P}_f$ — тензор напряжений стоксовой (т. е. удовлетворяющей аксиомам Стокса) жидкости, а $\mathbb{P}_b$ есть многозначная функция от $\mathbb{D}$, задаваемая формулой

$$\mathbb{P}_b = p_* \begin{cases} \mathbb{T}\left(\dfrac{\mathbb{D}}{|\mathbb{D}|}\right), & \mathbb{D} \neq 0, \\ \text{любой из } \overline{\mathcal{P}}, & \mathbb{D} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{P}$ — некоторая ограниченная выпуклая область в пространстве $\mathbb{S}_n$ симметричных тензоров ранга 2, действующих в $\mathbb{R}^n$, причем $0 \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ вписана в единичный шар пространства $\mathbb{S}_n$; $p_* \geqslant 0$ — заданное (постоянное) пороговое напряжение, а $\mathbb{T}$ — тензорное поле, действующее из единичной сферы $S_1 \subset \mathbb{S}_n$ в $\partial \mathcal{P}$. Другими словами, $p_* \mathcal{P}$ есть область напряжений, соответствующих твердотельному движению, а $\mathbb{T}$ определяет связь напряжений и скоростей деформаций при выходе напряжений в критическую зону $p_* \partial \mathcal{P}$. Значение $p_* = 0$ соответствует $\mathbb{P}_b \equiv 0$, т. е. стоксовой жидкости. Рассмотрение общей (анизотропной) формы (3) не требует серьезных дополнительных усилий по сравнению с изотропной (когда $\mathcal{P}$ есть единичный шар в $\mathbb{S}_n$, а $\mathbb{T}$ — тождественное отображение), обычно рассматриваемой в литературе. Вопрос о разрешимости в целом по времени задач для системы (1)–(3) до сих пор изучался (при $p_* > 0$) только для случая одномерных движений ($n = 1$) или для несжимаемой жидкости (см., например, работы [6–8] и библиографии в них).

В представленной работе доказано существование в целом решений задачи для системы (1)–(3), описывающей движение в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей, т. е. задачи в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0, T)$ с условием прилипания:

$$\rho|_{t=0} = \rho_0 \geqslant 0; \quad \rho \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{w}_0; \quad \mathbf{u}|_{\partial \Omega} = 0. \tag{4}$$

При этом мы опираемся на результат [9, 10], полученный для этой задачи в случае $p_* = 0$. Буквальное повторение тех же результатов для $p_* > 0$ затруднительно, т. к. тогда (2)

определяет многозначную функцию от $\mathbb{D}$. Мы избрали более естественный путь (аналогично тому, как это делалось в [6] для случая $n=1$): регуляризация бингамовского тензора $\mathbb{P}_b$ и сведе́ние его к стоксовому, с последующим предельным переходом в построенных на основе [9, 10] решениях регуляризованной задачи. Это удобно еще и потому, что позволяет отследить появление «твердотельных зон» (где $\mathbb{D}=0$) и поведение в них напряжений.

Следуя [9, 10], мы задаем стоксову часть $\mathbb{P}_f$ тензора $\mathbb{P}_r$ в виде $\mathbb{P}_f=-\rho\mathbb{I}+\mathbb{P}(\mathbf{u})$ (т. е. давление $p(\rho)=\rho$), где $\mathbb{P}$ удовлетворяет лишь требованиям типа коэрцитивности, монотонности, непрерывности и выпуклости (возможны и нелокальные формы). В качестве примера можно указать уравнения напряженного состояния классических неньютоновских жидкостей при достаточно быстром росте вязкости как функции от $\mathbb{D}$. Бингамовский член $\mathbb{P}_b$ берется в виде (3), при этом от $\mathbb{T}$ требуются непрерывность и выполнение неравенств $\mu(\mathbb{B}_1)\equiv\mathbb{T}(\mathbb{B}_1):\mathbb{B}_1>0$, $\mathbb{T}(\mathbb{B}_2):\mathbb{B}_1\leqslant\mathbb{T}(\mathbb{B}_1):\mathbb{B}_1=\mu(\mathbb{B}_1)$ при всех $\mathbb{B}_{1,2}\in S_1$. Тривиальный пример дается упомянутым изотропным случаем, когда $\mu\equiv 1$. Имеются и нетривиальные примеры пар $(\mathcal{P},\mathbb{T})$ (т. е. анизотропных $\mathbb{P}_b$).

Решение строится в функциональных пространствах Орлича. В частности, используется пространство $Y=\{\,\mathbf{v}\mid\mathbb{D}(\mathbf{v})\in L_M(Q_T),\ \mathbf{v}|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0\,\}$ (здесь M — достаточно быстро растущая N-функция) и N-функции $\Phi_\gamma(s)=(1+s)\ln^\gamma(1+s)$, $\Psi_\gamma=\overline{\Phi}_\gamma$.

Теорема. *Пусть произвольно заданы* $T>0$ *и входные данные класса* $\mathbf{f}\in K_{\Psi_{\beta/2}}(Q_T)$, $\rho_0\in L_{\Phi_\beta}(\Omega)$, $\mathbf{w}_0/\rho_0\in L_{\Psi_{\beta/2}}(\mathrm{supp}\rho_0)$, $\beta>7/2$. *Тогда задача (1)–(4) имеет в* Q_T *решение класса* $\rho\in L_\infty(0,T,L_{\Phi_\beta}(\Omega))$, $\rho\geqslant 0$, $\mathbf{u}\in Y$, *удовлетворяющее энергетическому равенству*

$$\int\limits_\Omega\left(\frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{2}+\rho\ln\rho\right)d\mathbf{x}\,\Bigg|_0^t+\int\limits_0^t\int\limits_\Omega\left[(\mathbb{P}(\mathbf{u})+\mathbb{P}_b(\mathbf{u})):\mathbb{D}(\mathbf{u})-\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\right]d\mathbf{x}ds=0.$$

Уравнения (1) выполняются на множестве $\{\mathbb{D}=0\}$ *в том смысле, что величина* $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ *есть вполне определенный тензор со значениями из* $p_*\overline{\mathcal{P}}$. *Решение есть предел решений задач с аппроксимирующими стоксовыми тензорами, сходящихся к нему сильно в соответствующих пространствах, за исключением слабой сходимости величин* $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ *в твердотельных зонах.*

Доказательство теоремы основано на энергетических равенствах для приближенных и точного решений и на соображениях монотонности, приспособленных к случаю разрывных и многозначных функций. Интересно отметить, что значения $\mathbb{P}_b(\mathbf{u})$ в твердотельных зонах «размазываются» по всему множеству $p_*\overline{\mathcal{P}}$ в процессе перехода к слабому пределу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bingham E. C.* Fluidity and Plasticity. New York, McGrew—Hill Book Co., 1922.
2. *Prager W.* Introduction to Mechanics of Continua. New York, Ginn and Co., 1961.
3. *Серрин Дж.* Математические основы классической механики жидкости. М.: Изд. иностр. лит., 1963.
4. *Prasad D., Kytomaa H. K.* Particle stress and viscous compaction during shear of dense suspensions // Intern. J. of Multiphase Flow. Sep. 1995. V. 21, N 5. P. 775–785.
5. *Malvern L. E.* Introduction to the mechanics of a continuous medium. New Jersey, Prentice—Hall, Inc. Englewood Cliffs, 1969.
6. *Basov I. V., Shelukhin V. V.* Generalized solutions to the equations of compressible Bingham flows // Z. Angew. Math. Mech. 1999. V. 79, N 3. P. 185–192.
7. *Shelukhin V. V.* Bingham viscoplastic as a limit of non-newtonian fluids // J. of math. fluid mechanics, 2002. V. 4. P. 109–127.
8. *Málek J., Růžička M., Shelukhin V. V.* Hershel – Bulkley fluids: existence and regularity of steady flows // Math. models and methods in appl. sciences, 2005. V. 15, N 12. P. 1845–1861.
9. *Мамонтов А. Е.* О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье – Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. I // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40, № 2. С. 408–420.
10. *Мамонтов А. Е.* О глобальной разрешимости многомерных уравнений Навье – Стокса сжимаемой нелинейно вязкой жидкости. II // Сиб. мат. журнал. 1999. Т. 40, № 3. С. 635–649.

УДК 517.95

НЕОБХОДИМЫЕ НЕЛОКАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДИФФУЗИОННО-ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© М. О. Мамчуев

mamchuev@rambler.ru

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < l,\ 0 < y < T\}$, рассмотрим диффузионно-волновое уравнение

$$u_{xx}(x,y) - D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = 0, \tag{1}$$

где D_{0t}^{γ} — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования порядка γ ([1, с. 9]), $\alpha \in (0,2)$.

Пусть $n \in \{1,2\}$ таково, что $n-1 < \alpha \le n$. *Регулярным решением* уравнения (1) в области Ω называется функция $u = u(x,y)$ из класса $D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y) \in C(\bar{\Omega})$, $1 \le k \le n$, $u_{xx}(x,y), D_{0y}^{\alpha}u(x,y) \in C(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках $(x,y) \in \Omega$ ([2, с. 103]).

Рассмотрим операторы $\mathcal{N}_{0l}^{\theta,x,y}$ и $\mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}$, которые действуют по формулам

$$\mathcal{N}_{0l}^{\theta,x,y}\nu(x) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \frac{\nu(\xi)}{y^{1-\theta}} e_{1,\beta}^{1,\theta}\left(-\frac{|x-\xi|}{y^{\beta}}\right)d\xi, \quad \mathcal{R}_{0y}^{\delta,x}\mu(y) = \frac{1}{2}\int\limits_0^y \frac{\mu(\eta)}{(y-\eta)^{1-\delta}} e_{1,\beta}^{1,\delta}\left(-\frac{|x|}{(y-\eta)^{\beta}}\right)d\eta,$$

где $\beta = \alpha/2$, $e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\mu)\Gamma(\delta-\beta n)}$ — функция типа Райта ([2]).

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть $u = u(x,y)$ — регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0} D_{0y}^{\alpha-k}u(x,y) = \tau_k(x), \quad 1 \le k \le n, \quad 0 < x < l,$$

производная u_x непрерывна вплоть до участков границы $x = 0$ и $x = l$ и $u_x(0,y), u_x(l,y) \in L[0,T]$. Тогда функция $u(x,y)$ удовлетворяет нелокальным условиям:

$$u(0,y) = 2\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,0,y}\tau_k(\xi) + 2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,l}u_x(l,\eta) - D_{0y}^{-\beta}u_x(0,\eta) + 2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}u(l,\eta), \tag{2}$$

$$u(l,y) = 2\sum_{k=1}^{n}\mathcal{N}_{0l}^{\beta-k+1,l,y}\tau_k(\xi) - 2\mathcal{R}_{0y}^{\beta,l}u_x(0,\eta) + D_{0y}^{-\beta}u_x(l,\eta) + 2\mathcal{R}_{0y}^{0,l}u(0,\eta). \tag{3}$$

Замечание. При $\alpha = 1$ условия (2) и (3) совпадают с необходимыми нелокальными условиями для уравнения Фурье ([3, с. 275]).

Работа выполненна при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-96625-р_ юг_ а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.
3. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

УДК 517.9

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ПОЛУПРОВОДНИКЕ

© Н. А. Манакова

mymmi@ems.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, причем область Ω занимает полупроводник. Предположим, что в полупроводнике имеется источник тока свободных зарядов и он "заземлен".

Рассмотрим неклассическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(\lambda x - \Delta x) - \Delta_p x + \alpha |x|^{p-2} x = f, \quad \Delta_p x \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\frac{\partial x}{\partial s_i}|^{p-2} \frac{\partial x}{\partial s_i}), \tag{1}$$

где $p > 2$, $\alpha > 0$. Уравнение (1) определяет распределение потенциала электрического поля в полупроводнике. Начально-краевая задача для уравнения (1) в случае отрицательности параметра α рассматривалась в работе [1] и доказана локальная разрешимость данной задачи в слабом обобщенном смысле. Нас будет интересовать задача оптимального управления для уравнения (1), которая дает возможность минимизировать штрафные санкции, выбрав внешнюю нагрузку таким образом, чтобы поддерживать необходимое распределение потенциала электрического поля в пласте. Необходимо найти решения начально-краевой задачи

$$(\lambda - \Delta)(x(s,0) - x_0(s)) = 0, \quad s \in \Omega; \quad x(s,t) = 0, \quad (s,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

для уравнения (1) методом Галеркина – Петрова – Фаэдо. Этот метод в приложении к уравнениям, неразрешенным относительно старшей производной по времени, в случае необратимости оператора при производной был рассмотрен в [2]. В цилиндре $Q = \Omega \times (0,T)$ зададим функционал штрафа и рассмотрим задачу

$$J(x,u) = \frac{1}{p}\|x - z_d\|^p_{L_p(0,t;\overset{0}{W}{}^1_p)} + \frac{N}{q}\int_0^T \|u\|^q_{L_q(0,T;W_p^{-1})} dt, \tag{3}$$

где $\mathfrak{U}_{ad} \subset L_q(0,T;W_p^{-1})$ — замкнутое, выпуклое множество, для которого выполнено

$$0 = (\mathbb{I} - P)u = \begin{cases} 0, \ \lambda > -\lambda_1; \\ \langle u, \varphi_1 \rangle, \ \lambda = -\lambda_1. \end{cases}$$

Здесь λ_1 — первое собственное значение однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа $-\Delta$ в области Ω, φ_1 – первый собственный вектор оператора $\lambda - \Delta$, а через P обозначим проектор вдоль $\operatorname{coker}(\lambda - \Delta)$ на замыкание $\operatorname{im}(\lambda - \Delta)$ в топологии W_p^{-1}.

Теорема. *Пусть $\lambda \geq -\lambda_1$, тогда существует оптимальное управление в задаче (1)–(3).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Корпусов М. О., Свешников А. Г.* О "разрушении" решения сильно нелинейного уравнения псевдопараболического типа с двойной нелинейностью // Математические заметки. 2006. № 6. С. 879–899.
2. *Свиридюк Г. А.* Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска // Изв. вузов. Математика. 1989. № 2. С. 55–61.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 229–229

УДК 517.954

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© И. И. Матвеева

matveeva@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В настоящей работе рассматриваются краевые задачи для одного класса систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной по времени

$$A_0 D_t u + A_1(D_x)u = f(t,x),$$

где A_0 — вырожденная числовая матрица, $A_1(D_x)$ — матричный дифференциальный оператор по $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Этот класс был введен в книге [1] и называется классом псевдопараболических систем. В частности, он содержит линеаризованную систему Навье – Стокса.

Задача Коши и смешанные краевые задачи в R^{++}_{n+1} для псевдопараболических систем рассматривались в [1], и для этих задач были доказаны теоремы о разрешимости в весовых соболевских пространствах $W^l_{p,\gamma}$ с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$. Характерной особенностью этих теорем является тот факт, что разрешимость краевых задач устанавливается не во всей шкале пространств $W^l_{p,\gamma}, 1 < p < \infty$. В большинстве случаев возникают ограничения на показатель суммируемости вида $p > p^*$, где число $p^* > 1$ зависит от порядка системы и размерности n. В случае, когда $p \leqslant p^*$, для разрешимости на данные необходимо накладывать дополнительные требования типа условий ортогональности некоторым полиномам. Отметим, что такая ситуация является типичной в теории краевых задач для уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной (см., например, [1, 2]).

В настоящей работе исследуется разрешимость краевых задач в специальных весовых соболевских пространствах $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, введенных в [3], с экспоненциальным весом по t и степенными весами по x. Пространства такого типа оказываются более удобными при доказательстве существования решений уравнений и систем, не разрешенных относительно старшей производной (см., например, [1, 4–6]), при этом, как показывают примеры, при соответствующем выборе степенного веса могут иметь место теоремы о безусловной разрешимости краевых задач во всей шкале пространств $W^l_{p,\gamma,\sigma}$, $1 < p < \infty$.

Автор выражает благодарность Г. В. Демиденко за полезные дискуссии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (интеграционный проект № 2.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.
2. *Матвеева И. И.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для систем не типа Коши – Ковалевской // Сиб. журн. индустр. мат. 2001. Т. 4, № 2. С. 184–204.
3. *Демиденко Г. В.* Задача Коши для уравнений и систем соболевского типа // Краевые задачи для уравнений с частными производными. Новосибирск: Ин-т математики АН СССР. Сиб. отд-ние, 1986. С. 69–84.
4. *Matveeva I. I.* On a class of boundary value problems for systems of Sobolev type // J. Anal. Appl. 2005. V. 3, N 2. P. 129–150.
5. *Матвеева И. И.* О разрешимости задачи Коши для псевдопараболических систем в весовых соболевских пространствах // В кн.: Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск, Институт математики СО РАН, 2005. С. 177–185.
6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* О смешанных краевых задачах для псевдопараболических систем // Сиб. журн. индустр. мат. 2005. Т. 8, № 4. С. 34–50.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 230–231

УДК 517.95

ПРЯМОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© М. В. Мендзив

menmar@mail.ru

Омский государственный технический университет, Омск

Работа является продолжением исследований, выполненных в [1, 2]. Признаки устойчивости из этих работ распространены на системы с коэффициентами, периодически зависящими от времени. Условия на матрицы, отвечающие за устойчивость, существенно ослаблены по сравнению с [1, 2].

1. Рассмотрим в области $\Pi = [0,1] \times [0,\infty)$ краевую задачу

$$\begin{cases} Lu = \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + A(x,t)\dfrac{\partial}{\partial x} + B(x,t)\right) u = 0, \qquad u|_{t=0} = h(x), \\ u_+(0,t) = P_0 u_-(0,t), \quad u_-(1,t) = P_1 u_+(1,t). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $u : \Pi \to \mathbb{C}^N$, $A,\ B : \Pi \to Mat(N, \mathbb{C})$, $A,\ B \in C^1(\Pi)$, P_i — гладкие на $[0,\infty)$ матрицы соответствующих размеров,

$$A(x,t+T) = A(x,t),\ \ B(x,t+T) = B(x,t),\ \ P_i(x,t+T) = P_i(x,t),\ T > 0, \tag{2}$$

$A = \operatorname{diag}(a_1 I_1, \ldots, a_n I_n)$, $a_1 > \ldots > a_m > 0 > a_{m+1} > \ldots > a_n$, I_k — единичная матрица порядка N_k, $\sum N_k = N$, $h_0 \in C^1([0,1])$, $u = \begin{bmatrix} u_+ \\ u_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, \ldots, u_m)^\tau \\ (u_{m+1}, \ldots, u_n)^\tau \end{bmatrix}$, u_k — строка размера N_k, τ — знак транспонирования, выполняются условия согласования нулевого и первого порядков

$$\begin{cases} \left[h_0^+ - P_0(0)h_0^-\right]_{x=0} = 0,\ \left[h_0^- - P_1(0)h_0^+\right]_{x=1} = 0, \\ \left[h_1^+ - P_0(0)h_1^- + P_0'(0)h_0^-\right]_{x=0} = 0, \left[h_1^- - P_1(0)h_1^+ + P_1'(0)h_0^+\right]_{x=1} = 0, \\ h_1 = (Ah_0' + Bh_0)_{t=0}. \end{cases} \tag{3}$$

При указанных условиях задача (1) однозначно разрешима в классе гладких функций.

Обозначим H линеал гладких функций $h : [0,1] \to \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условиям (3), со скалярным произведением $\langle g, h\rangle = \int\limits_0^1 h^* g\, dx$ и нормой $\|h\| = \sqrt{\langle h, h\rangle}$. Ограничение решения $u(x,t)$ задачи (1) на каждую горизонталь $t = \text{const}$ — элемент H; будем обозначать его $u(t)$.

Будем говорить, что решение $u = 0$ краевой задачи (1) экспоненциально устойчиво, если существуют такие постоянные $\mu > 0$, $\nu > 0$, что для любого решения задачи (1) верна оценка

$$\|u(t)\| \le \mu e^{-\nu t}\|h\|, \quad t \ge 0. \tag{4}$$

Построим по фиксированной гладкой матрице

$$G = \operatorname{diag}(G_1, \ldots, G_n)$$

с диагональными блоками порядков $N_1, \dots, N_n$ со свойствами

$$G^* = G, \quad G(x, t+T) = G(x,t), \quad m_1 I \le G \le m_2 I \quad (m_k > 0),$$

матрицы

$$F(x,t) = G'_t + (GA)'_x - GB - B^* G,$$

$$F_0(t) = \left[(GA)_- + P_0^*(GA)_+ P_0\right]_{x=0},$$

$$F_1(t) = \left[(GA)_+ + P_1^*(GA)_- P_1\right]_{x=1},$$

где $(GA)_+ = \mathrm{diag}(a_1 G_1, \dots, a_m G_m)$, $(GA)_- = \mathrm{diag}(a_{m+1} G_{m+1}, \dots, a_n G_n)$.

Теорема 1. *Пусть существует матрица $G(x,t)$ с указанными выше свойствами такая, что выполняются неравенства*

$$a)\ F \le 0 \ \ (t \ge 0), \qquad F \le -mI \quad (m = \mathrm{const} > 0) \qquad \text{хотя бы при одном} \quad t_0 \ge 0,$$

$$b)\ F_0 \le 0, \ F_1 \ge 0 \qquad\qquad \text{при} \quad t \ge 0.$$

Тогда решение $u = 0$ краевой задачи (1) экспоненциально устойчиво.

2. Рассмотрим в полуплоскости $t \ge 0$ задачу Коши

$$Lu = 0, \quad u\Big|_{t=0} = h(x), \tag{5}$$

где L — оператор (1) с матрицами (2), h — гладкая финитная функция со значениями в $\mathbb{C}^N$. В этом случае ограничение решения $u(x,t)$ задачи Коши (5) на каждую горизонталь $t = \mathrm{const}$ — также гладкая финитная функция. Решение $u = 0$ задачи (5) будем называть экспоненциально устойчивым, если при некоторых μ, $\nu = \mathrm{const} > 0$ для любого решения $u(t)$ задачи (5) справедлива оценка (4).

Теорема 2. *Для экспоненциальной устойчивости решения $u = 0$ задачи (5) достаточно существование матрицы G с указанными свойствами такой, что выполняются неравенства*

$$a)\ F \le 0 \qquad \text{при} \quad t \ge 0,$$

$$b)\ F \le -mI \ (m > 0) \qquad \text{хотя бы на одном отрезке}\, [t_0, t_1], \quad t_0 \ge 0.$$

Заметим, что в случае любых гладких A, B требование на матрицу F должно быть усилено: $F \le -mI \quad (t \ge 0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воробьева Е. В., Романовский Р. К.* Об устойчивости решений задачи Коши для гиперболических систем с двумя независимыми переменными // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 6. С. 1290–1292.
2. *Романовский Р. К., Воробьева Е. В., Макарова И. Д.* Об устойчивости решений смешанной задачи для почти линейной системы на плоскости // Сиб. журн. индустриальной математики. 2003. Т. VI, № 1 (13). С. 118–124.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 232–233

УДК 517

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОСТИ В ЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

© И. З. Меражов

maths@sibupk.nsk.su

Институт вычислительной математики и математической геофизики,
Сибирский университет потребительской кооперации, Новосибирск

Рассмотрена полная система дифференциальных уравнений электромагнитоупругости состоящая из следующих уравнений:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1,2,3; \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}H = \frac{\partial D}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}E = -\mu\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, $\rho = \rho(x)$ — плотность неоднородной среды, $\rho(x) > 0$, $u = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор смещений с компонентами $u_i = u_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, $E = (E_1, E_2, E_3)$ и $H = (H_1, H_2, H_3)$ — вектора электрической и магнитной напряженности с компонентами $E_i = E_i(x,t)$, $H_i = H_i(x,t)$, $i = 1,2,3$, $D = (D_1, D_2, D_3)$ — вектор электрической напряженности с компонентами $D_i = D_i(x,t)$, $i = 1,2,3$.

Для тензоров напряжений $T_{ij}(x,t)$ и деформаций $S_{kl}(x,t)$ и компонент электрической индукции $D_j(x,t)$ имеют место представления:

$$T_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl}S_{kl} - \sum_{k=1}^{3} e_{kij}E_k, \quad i = 1,2,3, \quad j = 1,2,3, \tag{3}$$

$$S_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \quad k = 1,2,3, \quad l = 1,2,3, \tag{4}$$

$$D_j = \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{jk}E_k + \sum_{k,l=1}^{3} e_{jkl}S_{kl}, \quad j = 1,2,3, \tag{5}$$

$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x)$ — модули упругости, $e_{kij} = e_{kij}(x)$ — пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(x)$ — диэлектрические модули, $\mu = \mu(x)$ — магнитная проницаемость.

Систему (1), (2) будем рассматривать совместно с условиями

$$u|_{t<0} = 0, \quad E|_{t<0} = 0, \quad H|_{t<0} = 0, \tag{6}$$

Система (1), (2) описывает распространение связанных электроупругих волн. Связь упругих и электрических процессов определяется пьезоэлектрическими модулями среды. Так как тензоры c_{ijkl}, e_{kij}, ε_{ij} удовлетворяют следующим условиям симметричности

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji},$$

удобно ввести новые обозначения, т. е. пару индексов (ij), относительно которых тензоры симметричны, заменим одним индексом p, принимающим значения от 1 до 6. Упорядочения здесь следующее:

$$(11) \to 1, \quad (22) \to 2, \quad (33) \to 3, \quad (23) = (32) \to 4, \quad (13) = (31) \to 5,$$

$$(12) = (21) \to 6, \qquad c_{ijkl} = c_{pq}, \quad e_{kij} = e_{kp}.$$

Набор характеристик электромагнитоупругой среды дается в литературе в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{\alpha\beta}(6 \times 6) & e_{\alpha k}(6 \times 3) \\ e_{k\alpha}(3 \times 6) & \varepsilon_{ij}(3 \times 3) \end{pmatrix}.$$

В данной работе рассмотрены анизотропные среды кубической, тетрогональной и гексогональной структуры.

Показано, что систему электромагнитоупругости (1), (2) можно записать в виде t-гиперболической, симметрической по Фридрихсу системы уравнений первого порядка, т. е. в виде

$$A_0 \frac{\partial}{\partial t} U + \sum_{j=1}^{3} A_j \frac{\partial}{\partial x_j} U + QU = 0.$$

В области $(x_1, x_2) \in R^2, x_3 \in [0, H]$ рассмотрена симметрическая t-гиперболическая по Фридрихсу система дифференциальных уравнений первого порядка со следующим начальным условием и граничными условиями:

$$U|_{t<0} = 0, \qquad G_1 U|_{x_3=0} = g_1(x_1, x_2, t), \qquad G_2 U|_{x_3=H} = g_2(x_1, x_2, t).$$

Предполагается, что в данной области функции входящие в $A_j(x)$, $j = 0, 1, 2, 3$, представлены в виде постоянной и малой добавки к ней, зависящей от всех трех переменных. Следовательно матрицы тоже представится в виде суммы

$$A_j = B_j^0 + B_j^1(x), \qquad j = 0, 1, 2, 3,$$

и решение будем искать в виде

$$U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t),$$

где $U_0(x, t)$ — решение задачи с постоянными коэффициентами, нулевой правой частью и неоднородными граничными условиями, а $U_1(x, t)$ — решение задачи с постоянными коэффициентами, однородными граничными условиями и правую часть входить решение $U_0(x, t)$.

Прямая линеаризованная задача заключается в нахождении $U(x, t) = U_0(x, t) + U_1(x, t)$, а обратная задача — в нахождении неизвестных коэффициентов входящие в матрицу $B_j^1(x)$.

Основные результаты работы составляют теоремы существования и единственности решения прямой и обратной многомерных линеаризованных задач для системы дифференциальных уравнений электромагнитоупругости, а также получены оценки устойчивости решения многомерной линеаризованной обратной задачи.

Работа поддержана грантом РФФИ № 03-05-64081.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 234–235

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С УСЛОВИЕМ ФРАНКЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ЛИНИИ ВЫРОЖДЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

© Г. М. Мирсабурова

Термезский государственный университет, Термез, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\, |y|^m\, u_{xx} + u_{yy} - \frac{m}{2y} u_y = 0, \quad m > 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A = A(-1,0)$ и $B = B(1,0)$ и характеристиками AC и BC уравнения (1).

В задаче Трикоми во всех точках характеристики AC задается значение искомой функции: $u(x,y)|_{AC} = \psi(x)$. В настоящей работе исследуется корректности задачи, где часть характеристики AC освобождена от краевого условия и это не достающее условие Трикоми эквивалентно заменена нелокальным условием Франкля [1] на отрезке вырождения AB. Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 и C_1 соответственно точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)$ — интервал оси $y = 0$. Пусть $p(x) \in C^2[-1,c]-$ диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ в множества точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$.

Задача TF. Требуется найти в области Ω функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $u(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$;
2. $u(x,y) \in C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в этой области;
3. $u(x,y)$ является обобщенным решением класса R_1 [2] ($\tau'(x)$, $v(x) \in H$, определение для $\tau(x)$ и $v(x)$ см. ниже) в области $\Omega^-(EC_0 \cup EC_1)$;
4. на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y \to +0} y^{-\frac{m}{2}} \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x \in I/\{c\}, \tag{2}$$

причем эти пределы при $x = \pm 1$, $x = c$ могут иметь особенности порядка ниже единицы

5.

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x)\ , \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1; \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{AC_0} = \psi(x)\ , \qquad -1 \leqslant x \leqslant (c-1)/2; \tag{4}$$

$$u(p(x),0) = \mu\, u(x,0) + f(x)\ , -1 \leqslant x \leqslant c, \tag{5}$$

где $f(x) \in C[-1\,,\,c] \cap C^{1,\alpha}(-1,c)$, $\psi(x) \in C[-1\,,\,(c-1)/2] \cap C^{1,\alpha}(-1,\,(c-1)/2)$, $\varphi(x) \in C^{0,\alpha}[-1,1]$, причем $\varphi(x) = (1-x^2)\widetilde{\varphi}(x)$, $\widetilde{\varphi}(x) \in C^{0,\alpha}[-1,1]$, $f(-1) = 0$, $\varphi(-1) = 0$.

Условие (4) является аналогом условия Франкля [1].

Имеет место следующий принцип экстремума: решение задачи TF при выполнении условия $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, своего положительного максимума и отрицательного минимума достигает на σ_0. Из принципа экстремума следует единственность решения задачи TF.

Существование решения задачи TF докажем в случае $c = 0$. В силу формул Даламбера [3, с. 39], дающих в области Ω^- решение видоизмененной задачи Коши с начальными данными

$$u(x,0) = \tau(x)\ ,\ x \in \overline{I};\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x),\quad x \in I, \tag{6}$$

где $I = (-1,1)$ — интервал оси $y = 0$, и решение видоизмененной задачи N [3, с. 143] с краевыми условиями

$$u|_{\sigma_0} = \varphi(x)\ ,\ x \in \overline{I}\ ;\ \lim_{y\to +0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x)\ ,\ \ x \in I, \tag{7}$$

согласно условиям (3)–(5) задача TF эквивалентно сводится к решению следующего сингулярного интегрального уравнения

$$\int\limits_{-1}^{0}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)dt = F_2(x)\ \ ,\quad x \in (-1,0), \tag{8}$$

где

$$F_2(x) = -\frac{1+\mu^2}{2\mu}\int\limits_{-1}^{0}\frac{\nu(t)dt}{x+t} + R[\nu] + F_1(x)\ \ ,\quad x \in I, \tag{9}$$

$R[\nu]$ — регулярный оператор. Заметим, что $\nu(-x) + \mu\nu(x) = -\psi'\left(-\frac{1+x}{2}\right) + \mu\psi'\left(\frac{x-1}{2}\right) - f'(x)$, $x \in (-1,0)$.

Применяя метод регуляризации Карлемана – Векуа [4] к уравнению (8), преобразуем его к виду

$$\nu(x) = -\frac{1+\mu^2}{2\mu\,\pi^2}\int\limits_{-1}^{0}\sqrt{\frac{-s}{-x}}\,\frac{\nu(s)}{s+x}ds + R_2[\nu] + F_2(x), \tag{10}$$

где $R_2[\nu]$ — регулярный оператор. Из (10), вводя новые переменные $s = -e^{-t}$, $x = -e^{-y}$ и обозначив $\rho(y) = \nu(-e^{-y})\cdot e^{-y}$, $K(x) = -(1+\mu^2)/2\mu\pi\,\mathrm{ch}(x/2)$, получим уравнение Винера-Хопфа

$$\rho(y) = \int\limits_{0}^{\infty} K(y-t)\rho(t)dt + R_3[\rho] + F_3(y). \tag{11}$$

Так как $\widehat{K}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ix\,t}K(t)dt = -\frac{1+\mu^2}{2\mu\,\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos t\,x}{\mathrm{ch}(t/2)}dt = -\frac{1+\mu^2}{\mu}\frac{1}{\mathrm{ch}(\pi\,x)}$ [5, с. 468], то индекс выражения $1 - \widetilde{K}(x) = 1 + (1+\mu^2)/(\mu\,\pi\,\mathrm{ch}(\pi\,x))$ равен нулю [6, с. 50]. Отсюда и из единственности решения задачи TF вытекает однозначная разрешимость (11) , а значит и всей задачи TF.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Франкль Ф. И.* Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямим скачком уплотнения // Прикладная математика и механика. 1996 Т. 20, № 2. С. 196–202.
2. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Высшая школа, 1985. 304 с.
3. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, 2005. 234 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
5. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
6. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. Н.* Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 269 с.

УДК 517.956.6

АНАЛОГ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

© А. М. Нагорный [*], Н. К. Мамадалиев [**]

[**] mamadaliev57@mail.ru

[*] *Ташкентский педагогический государственный университет, Ташкент, Узбекистан;*
[**] *Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан*

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu) = 0, \tag{1}$$

где

$$L = \frac{1+\operatorname{sgn} x}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{1-\operatorname{sgn} x}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (-x)^m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right], \quad -2 < m < 0.$$

Пусть D — конечная односвязная область, ограниченная отрезками OA, AD, BD прямых $y=0$, $x=1$, $y=1$ и характеристиками

$$OC : y - \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC : y + \frac{2}{m+2}(-x)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения

$$Lu = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (1) представимо в виде [1, 2]

$$u(x,y) = z(x,y) + \omega(x), \tag{3}$$

где $z(x,y)$ является регулярным решением уравнения (2) в области D_1, а в области D_2 — обобщенным решением уравнения (2) класса R_2 [3].

Введем обозначения

$$D_1 = D \cap \{x > 0\}, \quad D_2 = D \cap \{x < 0\},$$

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & \text{при } x > 0, \\ \omega_2(x), & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

причем функция $\omega(x)$, равная $\omega_1(x)$, в области D_1 обладает всеми производными, входящими в уравнение (1), а в области D_2 представление (3) и гладкость функции $\omega(x) = \omega_2(x)$ даются определением обобщенного решения класса R_{2y} [3] уравнения (1).

Задача. Требуется определить функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами:

1) $u(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) функция $u(x,y)$ — является регулярным решением уравнения (1) в области D_1, а в области D_2 — обобщенным решением уравнения (1) класса R_{2y};

3) на линии вырождения выполняется условие склеивания

$$-\lim_{x\to -0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{x\to +0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}; \tag{4}$$

4) u_x непрерывна вплоть до линии перехода как слева, так и справа;

5) удовлетворяет граничным условиям

$$\begin{array}{l} u|_{OA} = \tau_1(x), \quad u|_{AD} = \psi(y), \quad u|_{BD} = \psi_1(x), \\ (u - \omega(x))|_{OC} = \psi_2(x), \quad u|_{CB} = \psi_3(x) \end{array} \tag{5}$$

где $\tau_1, \psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ — заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\tau_1(0) = \psi_2(0), \quad \tau_1(1) = \psi(0), \quad \psi(1) = \psi_1(1), \quad \psi_1(0) = \psi_3(0),$$

$$\psi_2\left[-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right] = \psi_3\left[-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\frac{2}{m+2}}\right].$$

Отметим, что задача Дирихле в случае $m = 0$ исследована в работе [4], а при $-1 < m < 0$ в [5].

Без ограничения общности можно предполагать, что $\omega(0) = 0, \omega(1) = 0$. На основании (3) и (5) задача редуцируется к определению регулярного в области D_1, обобщенного в области D_2 решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям

$$\begin{array}{l} z|_{OA} = \tau_1(x) - \omega_1(x), \quad z|_{AD} = \psi(y), \quad z|_{BD} = \psi_1(x) - \omega_1(x), \\ z|_{OC} = \psi_2(x), \quad z|_{CB} = \psi_3(x) - \omega_2(x). \end{array}$$

При определенных ограничениях на заданные функции доказана однозначная разрешимость поставленной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салахитдинов М. С.* Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.
2. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
3. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 296 с.
4. *Мередов М., Базаров Д.* Задача Дирихле для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 6. С. 1016–1020.
5. *Салахитдинов М. С., Нагорный А. М., Мамадалиев Н. К.* Задача Дирихле для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа второго рода // Сб. “Дифференциальные уравнения математической физики и их приложения”. Ташкент: Фан, 1989. С. 3–11.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 238–239

УДК 517.927.4

ОБ АПРИОРНОЙ ОЦЕНКЕ И СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

© А. Н. Наимов

nan67@rambler.ru

Вологодский государственный технический университет, Вологда

Рассматривается вопрос об априорной оценке и существовании ω-периодических решений для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$z'' = \overline{(z' - B_1(z))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z' - B_r(z))^{m_r}} + f(t, z, z'), \tag{1}$$

где $\omega > 0$, $z = x + iy \in \mathrm{C}$, C — пространство комплексных чисел, верхняя черта означает комплексное сопряжение, $r, m_1, \ldots, m_r$ — натуральные числа, $m = m_1 + \ldots + m_r$, $(B_1, \ldots, B_r) \in M_r$, $f \in R_{\omega,m}$. Здесь M_r — множество всех r упорядоченных отображений $(A_1, \ldots, A_r)$, каждое из которых непрерывно действует из C в C, положительно однородное порядка 1: $A_j(\lambda z) \equiv \lambda A_j(z)\ \ \forall \lambda > 0$, $j = 1, \ldots, r$, а множество $R_{\omega,m}$ состоит из отображений $g(t, z_1, z_2)$, непрерывно действующих из $\mathrm{R} \times \mathrm{C} \times \mathrm{C}$ в C, ω-периодических по t и удовлетворяющих условию

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to\infty} (|z_1| + |z_2|)^{-m} \max_{0\le t\le\omega} |g(t, z_1, z_2)| = 0.$$

Априорная оценка и существование ω-периодических решений для систем вида (1) в случае $r = 1$ исследовано в работе [1], а в случае $r = 2$, $m_1 = m_2 = 1$ в работе [2]. В настоящей работе рассматривается общий случай.

Теорема 1. *Пусть $(B_1, \ldots, B_r) \in M_r$ и $f \in R_{\omega,m}$. Тогда существует число $C_1 = C_1(B_1, \ldots, B_r, f) > 0$ такое, что для любого ω-периодического решения $z(t)$ системы (1) справедливо неравенство*

$$|z'(t)| < C_1(1 + |z(t)|) \quad \forall t \in [0, \omega].$$

Теорема 2. *Пусть $(B_1, \ldots, B_r) \in M_r$, $f \in R_{\omega,m}$ и отображения $B_1, \ldots, B_r$ удовлетворяют условиям:*

1) при каждом $j = 1, \ldots, r$ система $w' = B_j(w)$ не имеет ненулевых ω-периодических решений;

2) $B_{j_1}(z) \neq B_{j_2}(z)\ \ \forall z \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$, $j_1 \neq j_2$;

3) при каждом фиксированном $z_0 \in \mathrm{C}$ система

$$w' = \overline{(w - B_1(z_0))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (w - B_r(z_0))^{m_r}}$$

не имеет нестационарных ограниченных траекторий.

Тогда для любого ω-периодического решения $z(t)$ системы (1) имеет место оценка

$$|z(t)| + |z'(t)| < C_2 \quad \forall t \in [0, \omega],$$

где $C_2 = C_2(B_1, \ldots, B_r, f) > 0$.

В работе [3] исследованы условия, когда система

$$w' = \overline{(w-c_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (w-c_r)^{m_r}}$$

при фиксированных $c_1, \ldots, c_r \in \mathrm{C}$ не имеет нестационарных ограниченных траекторий. В частности, условие 3) теоремы 2 будет выполнено, если при каждом фиксированном $z_0 \in \mathrm{C} \setminus \{0\}$ попарно различны значения $V_{m+1}(B_1(z_0)), \ldots, V_{m+1}(B_r(z_0))$, где $V_{m+1}(z) = Im \int_0^z (\zeta - B_1(z_0))^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\zeta - B_r(z_0))^{m_r} d\zeta$.

Наборы отображений $(B_{1,1}, \ldots, B_{1,r})$, $(B_{2,1}, \ldots, B_{2,r}) \in M_r$ назовем гомотопными, если существует семейство $(A_1(\cdot, \lambda), \ldots, A_r(\cdot, \lambda)) \in M_r$, $0 \le \lambda \le 1$, непрерывно зависящее от λ, удовлетворяющее условиям 1)–3) теоремы 2 при каждом $\lambda \in [0, 1]$, совпадающее с первым набором при $\lambda = 0$ и вторым набором при $\lambda = 1$.

Теорема 3. *Пусть наборы отображений* $(B_{1,1}, \ldots, B_{1,r})$, $(B_{2,1}, \ldots, B_{2,r}) \in M_r$ *гомотопны и пусть при* $B_1 = B_{1,1}, \ldots, B_r = B_{1,r}$ *и любых* $f \in R_{\omega,m}$ *система (1) имеет* ω*-периодическое решение. Тогда система (1) имеет* ω*-периодическое решение при* $B_1 = B_{2,1}, \ldots, B_r = B_{2,r}$ *и любых* $f \in R_{\omega,m}$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и* $m_1\gamma(B_1) + \ldots + m_r\gamma(B_r) \neq 0$, *где* $\gamma(B_j)$ *— вращение векторного поля* B_j *на единичной окружности* $S = \{z \in \mathrm{C} : |z| = 1\}$. *Тогда для системы (1) существует хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наимов А. Н., Хакимов Р. И.* О разрешимости одной нелинейной периодической задачи // Доклады АН РТ. 2001. Т. 44, № 3. С. 35–40.
2. *Наимов А. Н.* О периодических решениях одного класса систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости // Материалы Воронежской весенней математической школы, Воронеж. 2006. С. 119.
3. *Наимов А. Н.* Об ограниченных траекториях одного класса автономных систем на плоскости // Материалы Воронежской зимней математической школы, Воронеж. 2007. С. 158.

УДК 517.95

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ

© А. М. Нахушев

niipma@mail333.com

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

Доклад посвящен краевым и внутреннекраевым задачам со смещением для основных типов локальных и нелокальных уравнений в частных производных, которые лежат в основе математических моделей различных физико-биологических процессов.

Хорошо известно, что проблема поиска аналога задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной, привела к качественно новым краевым задачам, названным автором в 1968 г. краевыми задачами со смещением [1–4].

Пусть Ω — конечная односвязная область плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная одним простым контуром Ляпунова σ. К краевым задачам со смещением для голоморфных в области Ω функций $\Phi(z)=u+iv$ относится задача, сформулированная еще Риманом в следующих его предложениях:

"Разделим, например, границу на n частей и каждой точке на одной части сопоставим $n-1$ точек из других частей — по одной из каждой части, а затем свяжем значения u и v в этих n точках n уравнениями, изменяющимися непрерывно при изменении положения n выбранных точек. Эти условия, совокупность которых образует непрерывное множество и которые выражаются посредством уравнений, связывающих произвольные функции, являются, вообще говоря, необходимыми и достаточными для определения функции, всюду непрерывной в данной области, только при дальнейшем ограничении, именно, при добавлении равенств, связывающих входящие произвольные постоянные".

К классу краевых задач с нелокальным смещением относится обобщенная задача Римана – Гильберта – Пуанкаре, впервые сформулированная и исследованная И. Н. Векуа [4, с. 59; 5].

Метод Трикоми решения краевых задач для уравнений Чаплыгина и Лаврентьева – Бицадзе редуцирует их к эллиптическим (гиперболическим) краевым задачам с нелокальным смещением на части границы.

То же самое наблюдается при реализации функционально-аналитических методов решения локальных краевых задач линейного сопряжения уравнений в частных производных. В частности, задача Трикоми для уравнения $yu_{xx}+u_{yy}=0$ в стандартной смешанной области сводится к краевой задаче, когда на эллиптической части границы задается условие Дирихле, на участке $0<x<r$ звуковой линии $y=0$ – наклонная дробная производная от функции $u=u(x,y)$: $u_y(x,0)-\gamma D_{0x}^{2/3}u(t,0)=f(x)$, где $\gamma=\mathrm{const}>0$, $D_{0\xi}^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования порядка α с началом и концом в точках 0, $\xi>0$, $f(x)$ — заданная функция [6, с. 23]. Аналогично, краевая задача: $u(-r,y)=\varphi(y)$, $0\leqslant y\leqslant T$, $u(x,0)=\tau(x)$, $x\geq -r$ для уравнения теплопроводности

$$u_y=u_{xx} \tag{1}$$

с условием сопряжения $u_y(-0,y)=\lambda u_y(+0,y)$, $u(-0,y)=u(+0,y)$ и условием Тихонова: $\lim\limits_{x\to\infty}\max\limits_{[0,T]}|u|\exp(-\varepsilon x^2)=0$, $\varepsilon>0$, порождает для этого же уравнения в прямоугольной области $-r<x<0$, $0<t<T$ следующую нелокальную задачу: $u(x,0)=\tau(x)$, $-r\leqslant x\leqslant 0$, $u(-r,y)=\varphi(y)$, $0\leqslant y\leqslant T$, $u_x(-0,y)=G(y)D_{0y}^{1/2}u(-0,t)+g(y)$, $G(y)=-\lambda$, а $g(y)\equiv 0$, если $\tau(x)=0$ при $x\geq 0$.

Доклад состоит из следующих частей:

1) Задача Фурье и задачи первого и второго классов по терминологии В. А. Стеклова и их связь с усиленно регулярными задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с распределенными граничными условиями;

2) Задача с нелокальным смещением для уравнений с операторами Фурье и Аллера в главной части;

3) Задачи с локальным и нелокальным сдвигом для гиперболического и смешанного типов уравнений;

4) Задача Бицадзе – Самарского и ее связь с задачей Дирихле для нагруженных уравнений эллиптического типа;

5) Технология описания необходимых краевых условий с локальным и нелокальным смещениями.

Акцент делается на технологии редукции задачи Самарского к корректным локальным краевым задачам для уравнений параболического типа. Она весьма проста в случае уравнения (1) в области $\Omega = \{(x,y): 0 < x < r,\ \ 0 < y < T\}$ с начальным и граничными условиями

$$u(x,0) = \tau(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r; \tag{2}$$

$$u_x(0,y) = u_x(r,y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T; \tag{3}$$

$$u(0,y) = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{4}$$

Здесь предполагается, что функция $u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \sigma_{0y} \cup \sigma_{ry})$, $\sigma_{ay} = \{(a,y): 0 < y < T\}$, $u_x(0,y)$ и $u_x(r,y) \in L[0,T]$, начальная функция $\tau(x) \in C^1[0,r]$.

В основе технологии лежат следующие утверждения.

1. Любое регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (1) представимо в виде суммы $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ двух его решений: $v(x,y) = [u(x,y) + u(\theta,y)]/2$, $w(x,y) = [u(x,y) - u(\theta,y)]/2$, где $\theta = r - x$.

2. В силу (2)

$$v(x,0) = \tau_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r; \tag{5}$$

$$w(x,0) = \tau_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant r, \tag{6}$$

где $2\tau_1(x) = \tau(x) + \tau(r-x)$, $2\tau_2(x) = \tau(x) - \tau(r-x)$.

3. Согласно (3)

$$v_x(0,y) = 0, \quad v_x(r,y) = 0, \quad 0 < y < T. \tag{7}$$

4. В силу же (4)

$$w(0,y) = -v(0,y), \quad w(r,y) = v(r,y), \quad 0 \leqslant y \leqslant T. \tag{8}$$

Задача (1)–(4) свелась к первой: (5), (7) и второй: (6), (8) краевым задачам для уравнения (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* О некоторых новых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 1. С 44–59.
2. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // ДАН СССР. 1969. Т. 187, № 4. С 736–739.
3. *Нахушев А. М.* О нелокальных краевых задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Дифференц. уравнения. 1985. Т. 21, № 1. С 92–101.
4. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. 287 с. ISBN 5-02-034076-6.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
6. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. 272 с.

УДК 517.9

МОДЕЛИРОВАНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СО СЛАБООСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ПАРАМЕТРАМИ

© И. Д. Нуров

nid1@mail.ru

Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Математическое моделирование часто требует детального изучения динамических систем, содержащих параметры. Одними из наиболее интересных явлений при изучении таких систем представляются различные бифуркации, означающие качественную перестройку функционирования системы. Обнаружение бифуркации является одним из важных этапов исследования динамической системы.

В настоящем докладе основным объектом является дифференциальное уравнение вида

$$x' = A(\lambda)x + a(x, \lambda), \tag{1}$$

где $A(\lambda)$ — квадратная матрица, непрерывно зависящая от скалярного параметра λ, $a(x,\lambda)$ — нелинейная функция, причем $a(x,\lambda) = \circ(|x|), |x| \to 0$. К уравнению вида (1) сведены многие практические задачи, в частности, уравнение гармонического осциллятора или уравнение математического маятника $\varphi'' + \sin\varphi = 0$. Вопрос о существовании бифуркации малых ненулевых решений уравнений (1) исследован многими авторами [1–3]. При исследовании задач о точках бифуркации условно можно выделить два основных направления.

Первое связано с предположением, что рассматриваемые параметры системы являются фиксированными, т. е. не изменяются со временем.

Второе направление исследований связано с предположением о том, что параметры системы эволюционируют в окрестности точки бифуркации по какому либо закону.

Изучается случай, когда параметр λ в системы (1) меняется по закону $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon t$ или $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \sin \varepsilon t$. Предполагается, что выполнено условие отсутствия резонанса $T \neq \frac{2\pi k}{\omega_0}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ Уравнение (1) принимает вид

$$x' = A[\lambda_0 + \delta\varphi(t)]x + a[x, \lambda_0 + \delta\varphi(t)], \tag{2}$$

здесь $\varphi(t)$ — периодическая функция, $\delta > 0$. Бифуркация Андронова – Хопфа в системе возможна лишь тогда, когда матрица $A(\lambda_0)$ имеет собственные значения на мнимой оси.

U1. Матрица $A(\lambda_0)$ имеет пару простых собственных значений $\pm i\omega_0$, $\omega_0 > 0$, при этом остальные собственные значение матрицы $A(\lambda_0)$ имеют отрицательные вещественные части.

U2. $\gamma \neq 0$, где $\gamma = (A'e, e^*) + (A'g, g^*)$ и $A' = A'(\lambda_0)$, а (e, g, e^*, g^*) — векторы, соответствующие матрицам A и A^*. Положим

$$\varphi_0 = \int_0^T \varphi(\tau) d\tau.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $\gamma\varphi_0 < 0$, *тогда* $x = 0$ *является асимптотически устойчивым решением уравнения* (1) *при малых* $\delta > 0$. *Пусть* $\gamma\varphi_0 > 0$, *тогда* $x = 0$ *является неустойчивым решением уравнения* (2) *при малых* $\delta > 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* U1 *и* U2 *и* $\varphi_0 \neq 0$. *Тогда* $\delta = 0$ *является точкой бифуркации малых колебаний системы*(2).

В качестве примера рассмотрено классическое уравнение Ван дер Поля

$$x'' + (3x^2 - \lambda)x + x = 0. \tag{3}$$

Пусть параметр λ уравнения (3) слабо осциллирует по закону $\lambda = \delta\varphi(t)$, где $\varphi(t+P) \equiv \varphi(t)$, т. е. рассмотрим уравнение

$$x'' + (3x^2 - 0,1\varphi(t))x' + x = 0. \tag{4}$$

Проведено компьютерное моделирование уравнения (4) для различных функций $\varphi(t)$. Рассмотрена ситуация, когда условия теорем 1 и 2 не выполнены, т. е. исследован резонансный случай, при этом $\varphi_0 = 0$. В этом случае, как показывают вычисления, в окрестности нуля возникают устойчивые почти периодические колебания, однако, их формула далека от периодической.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гукенхеймер Дж., Холмс Ф.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
2. *Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И.* Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985. 280 с.
3. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.
4. *Нуров И. Д., Юмагулов М. Г.* // Автоматика и телемеханика. 2002. № 5. С. 34–40.
5. *Красносельский М. А., Юмагулов М. Г.* // Доклады РАН. 1999. Т. 365, № 2. С. 162–164.

УДК 517.956

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ И СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

© М. Отелбаев *, К. Н. Оспанов **

** ospanov_k@mail.ru

* *Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан;*
** *Академия государственного управления при Президенте РК, Астана, Казахстан*

Пусть Ω — область в комплексной плоскости. Рассмотрим уравнение

$$lu \equiv \partial_{\bar{z}}u + au + b\bar{u} = f \tag{1}$$

и соответствующее ему однородное уравнение

$$\partial_{\bar{z}}u + au + b\bar{u} = 0. \tag{2}$$

И. Н. Векуа доказал, что
а) решение уравнения (1) непрерывна в любой строго внутренней к Ω области;
б) решение однородного уравнения (2) представимо в виде

$$u(z) = \Phi(z)\exp[(T\varphi)(z)], \tag{3}$$

где

$$(T\varphi)(z) = \int\limits_{\Omega} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\Omega_\zeta,$$

а Φ — голоморфная функция;
в) оператор T вполне непрерывен из пространства $L_p(\Omega)$ в $L_p(\Omega)$ ($2 < p < \infty$).

Эти утверждения являются основными результатами теории обобщенных аналитических функций и все ее главные результаты являются следствиями а)–в).

В работе [1] введены т. н. пространства Векуа (V -пространства). По определению банахово функциональное пространство B называется V *-пространством*, если при f, a, $b \in V$ верны а)-в). Оказывается, можно найти самое широкое V -пространство, им оказалось пространство $P_1(\cdot)$, а среди всех симметрических пространств — пространство $L_{2,1}$ Лоренца. Вопрос: является ли выбранное пространство функций V -пространством или нет, сводится к простой проверке ограниченности вложения его в $P_1(\cdot)$, или в $L_{2,1}$.

В работах [2, 3] изучается уравнение (1) на всей комплексной плоскости, причем функция $\operatorname{Re} b - |a|$ считается отделенной от нуля, f — элементом пространства Лебега. Получены условия однозначной и коэрцитивной разрешимости, изучена структура спектра соответствующего дифференциального оператора.

Доклад посвящен дальнейшему развитию указанных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Отелбаев М.* К теории обобщенных аналитических функций Векуа // Прим. мет. функ. анал. к зад. мат. физ. и выч. мат. Материалы шк.-семин., 1978. Новосибирск, 1979. С. 80–98.
2. *Оспанов К. Н.* Коэрцитивная разрешимость обобщенной системы Коши – Римана в пространстве $L_p(E)$ // Укр. матем. журнал. 1996. № 11. С. 1564–1569.
3. *Оспанов К. Н.* О нелинейной обобщенной системе Коши - Римана на всей плоскости// Сиб. матем. журнал. 1997. № 2. С. 365–371.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 245–246

УДК 517.9

О КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Б. Б. Ошоров

oshorovbb@pochta.ru

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ

В докладе речь пойдет об эллиптических по Петровскому системах уравнений, которые не являются сильно эллиптическими. Автора в первую очередь заинтересовал тот факт, что системы уравнений в частных производных существенно отличаются от одного уравнения с точки зрения постановки корректных задач, чего нет в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, для одного эллиптического уравнения второго порядка корректной является задача Дирихле. В то же время хорошо известен пример А. В. Бицадзе системы уравнений второго порядка, для которой нарушается единственность решения задачи Дирихле. Этот интерес привел к поиску корректных постановок иных краевых задач для этой системы уравнений. При этом задачи названы краевыми потому, что никакая часть границы области, где они рассматриваются, не освобождается от задания каких-то условий, в отличие, скажем, от задачи Коши или смешанной задачи.

Пусть $D \subseteq R^2$ — произвольная ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ, $\bar{n} = (n_x, n_y)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. На функциях $u(z) = u_1(x,y) + iu_2(x,y)$, определенных в этой области, задаем дифференциальный оператор первого порядка $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Этот оператор называют оператором Коши – Римана. Тогда упомянутая выше система уравнений, которая называется системой Бицадзе, примет вид $\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} = 0$.

В области D рассматриваем системы уравнений

$$L_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + a(z)u + b(z)\bar{u} = f(z), \quad L_2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + Tu = f(z),$$

где T — некоторый дифференциальный оператор первого порядка, а чертой обозначено комплексное сопряжение. Эти системы уравнений будем называть обобщенными системами уравнений Коши – Римана и Бицадзе, соответственно.

Разобьем границу области на части следующим образом

$$\Gamma^+ = \{z \in \Gamma | n_1 > 0\}, \quad \Gamma^- = \{z \in \Gamma | n_1 < 0\}, \quad \Gamma^0 = \Gamma \backslash (\overline{\Gamma^+ \cup \Gamma^-}).$$

Предлагаются следующие задачи.

Задача 1. В области D найти решение обобщенной системы уравнений Коши – Римана, удовлетворяющее условиям $u_1|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = u_2|_{\Gamma^+} = 0$.

Задача 2. В области D найти решение обобщенной системы уравнений Бицадзе, удовлетворяющее условиям $u_1|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = u_2|_{\Gamma^+} = Re\, u_{\bar{z}}|_{\Gamma^- \cup \Gamma^0} = Im\, u_{\bar{z}}|_{\Gamma^+} = 0$.

Тогда справедливы

Теорема 1. *Если для функций $a(z)$, $b(z) \in C(\bar{D})$ существует достаточно малое число $\alpha > 0$, такое, что $|au + b\bar{u}| \leqslant \alpha|u|$, то для $\forall f(z) \in L_2(D)$ существует единственное слабое обобщенное решение задачи 1 $u(z) \in W_2^1(D)$.*

Теорема 2. *Если $Tu \equiv a(z)u_{\bar{z}} + b(z)\bar{u}_z$ и коэффициенты этого оператора удовлетворяют условиям теоремы 1, то для любой функции $f(z) \in L_2(D)$ задача 2 имеет единственное решение $u(z) \in \bar{W}_2^2(D)$.*

Поскольку любая эллиптическая система уравнений первого порядка относительно функций двух переменных с помощью неособого преобразования сводится к обобщенной системе уравнений Коши – Римана [1], то для них могут быть предложены постановки краевых задач, сводящихся к задаче 1. Если же эллиптический оператор второго порядка является второй степенью эллиптического оператора первого порядка, то для них могут быть поставлены краевые задачи, приводящиеся к задаче 2. Таким образом, для достаточно широкого класса эллиптических систем уравнений второго порядка оказываются корректными задачи типа задач Римана – Гильберта с разрывными краевыми условиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: ГИФМЛ, 1959.

УДК 517.9

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ СТЕПЕННОГО РОСТА

© В. Н. Павленко

pavlenko@csu.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Рассматривается первая краевая задача для уравнения параболического типа

$$Lu(x,t) = \varepsilon g(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_T} = 0, \tag{2}$$

в цилиндре $Q_T = \Omega \times (0,T)$, Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей класса C^2, $T > 0$, ε — параметр. Здесь

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x,t)\partial^2_{x_i x_j} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,t)\partial_{x_j} + a(x,t)$$

— равномерно параболический линейный дифференциальный оператор второго порядка в Q_T с коэффициентами из пространства $C^{0,\alpha}(Q_T)$ ($0 < \alpha < 1$), Γ_T — параболическая граница цилиндра Q_T, функция $g : Q_T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева $\pmod 0$ [1] и для почти всех $(x,t) \in Q_T$ сечение $g(x,t,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода и $g(x,t,u) \in [g_-(x,t,u), g_+(x,t,u)]$, $g_-(x,t,u) = \liminf\limits_{\eta\to u} g(x,t,\eta)$, $g_+(x,t,u) = \limsup\limits_{\eta\to u} g(x,t,\eta)$. Исследуется разрешимость задачи (1), (2) в пространстве $W^{2,1}_q(Q_T)$, $q > 1$, при малых значениях параметра ε.

Решением задачи (1), (2) называется функция $u \in W^{2,1}_q(Q_T)$, след которой на Γ_T равен нулю, удовлетворяющая для почти всех $(x,t) \in Q_T$ включению

$$Lu(x,t) \in [\varepsilon g_-(x,t,u), \varepsilon g_+(x,t,u)].$$

Теорема. *Предположим, что существуют постоянная $a > 0$ и функция $b \in L^q(Q_T)$ такие, что для почти всех $(x,t) \in Q_T$*

$$|g(x,t,u)| \le a|u|^\mu + b(x,t), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

где μ любое положительное число, если $q \ge \frac{n+2}{2}$, и $\mu < \frac{n+2}{n+2-2q}$, если $q < \frac{n+2}{2}$. Тогда найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого ε с $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ задача (1), (2) имеет решение в $W^{2,1}_q(Q_T)$.

Замечание. Ограничение на степень роста нелинейности в теореме обеспечивает компактность вложения $W^{2,1}_q(Q_T)$ в пространство $L^{\mu q}(Q_T)$. В частности, для $q = 2$ допустимая степень $\mu < \frac{n+2}{n-2}$ при $n > 2$.

По сравнению с [2] в теореме ослаблены ограничения на степень роста нелинейности.

Доказательство теоремы сводится к принципу неподвижной точки для многозначного компактного отображения Боненбласта – Карлина [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта р_урал_а № 07-01-96000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983. 272 с.
2. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. 1994. Т. 45, № 6. С. 729–736.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В.В* . Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005. 216 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 248–249

УДК 517.956.4

О ГЕЛЬДЕРОВСКОЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

© Н. Р. Пинигина

n-pinig@mail.ru

Институт математики и информатики ЯГУ, Якутск

В представленной работе устанавливается разрешимость для некоторых классов уравнений вида

$$\operatorname{sgn} u_t + L u_x x = f, \tag{1}$$

где L — эллиптический оператор 2-го порядка.

В работах [1–3] устанавливается разрешимость краевых задач в гёльдеровских пространствах для некоторых классов уравнений параболического типа с меняющимся направлением времени с границей раздела, имитирующей противоположные спутные потоки. В настоящей работе рассматривается общий случай границы раздела двух сред, в который, в частности, включаются также и ортогональные потоки, и косое соударение и т. д. Здесь замечено, что гладкость решения существенно зависит от условий согласования при $x = 0$. Как и в работе [2] решение поставленной задачи разыскивается в виде параболических потенциалов двойного слоя с неизвестными плотностями α, β.

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гельдера $H_{x\,t}^{p,p/2}(Q^{\pm})$, $p = 2l + \gamma$, $0 < \gamma < 1$ $Q^{=}\Omega \times (0,T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x),\ x < 0, \tag{2}$$

и условиями склеивания

$$u(-0,t) = u(+0,t), \quad z \cdot u_x(-0,t) = u_x(+0,t), \tag{3}$$

где $l \geq 1$ — целое число, $Q^{\pm} = \mathbb{R}^{\pm} \times (0,T)$, $z = r \cdot \exp(i\varphi)$ — комплексное число.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$, *и* $|r \sin\varphi| \leq 1$ *при* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $|r\sin\varphi| > 1$ *при* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. *Тогда при выполнении* $2l$ *условий*

$$L_s(\varphi_1, \varphi_2) = 0, \quad s = 0, \ldots, 2l, \tag{4}$$

существует хотя бы одно решение уравнения (1), *удовлетворяющее условиям* $(2),(3)$ *из пространства*

1) $H_{x\,t}^{p,p/2}$, *если* $0 < \gamma < \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$;

2) $H_{x\,t}^{q,q/2}$, $q = 2l + \min\{2\theta, 1-2\theta\}$, *если* $\min\{2\theta, 1-2\theta\} < \gamma < 1$;

3) $H_{x\,t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/2}$, *если* $\gamma = \min\{2\theta, 1-2\theta\}$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$ *и пусть при* $|r\sin\varphi| \leq 1$, $\varphi \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, *при* $|r\sin\varphi| > 1$, $\varphi \in \left(-\pi; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда при выполнении $2l+1$ *условий вида* (4) *существует хотя бы одно решение уравнения* (1) *из пространства* $H_{x\,t}^{p,p/2}$, *удовлетворяющее условиям* $(2),(3)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
2. *Попов С. В.* О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1991. Вып. 102. С. 100–113.
3. *Пинигина Н. Р., Попов С. В.* Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Мат. заметки ЯГУ. 2002. Т. 9, № 1. С. 71–82.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 250–251

УДК 517.955

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ТИПА ГУРСА – ДАРБУ

© Н. И. Погодаев

npogo@mail.ru

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Пусть $I_1 = [0,a]$, $I_2 = [0,b]$, $a,b > 0$, $\Omega = I_1 \times I_2$; X и Y — n-мерное и m-мерное евклидовы пространства.

Рассмотрим управляемую систему с граничными и распределенными управлениями:

$$z_{xy} = c_1(x,y,z)z_x + c_2(x,y,z)z_y + c_3(x,y,z) + c_4(x,y,z)u, \tag{1}$$

$$z(x,0) = \varphi(x) + \int_0^x u^1(s)\,ds,\ z(0,y) = \psi(y) + \int_0^y u^2(t)\,dt,\ \varphi(0) = \psi(0), \tag{2}$$

$$u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)). \tag{3}$$

Здесь $c_1, c_2 \colon \Omega \times X \to \mathscr{L}(X;X)$, $c_3 \colon \Omega \times X \to X$, $c_4 \colon \Omega \times X \to \mathscr{L}(Y;X)$ — однозначные отображения; $U \colon \Omega \times X \to Y$, $U_1 \colon I_1 \times X \to X$, $U_2 \colon I_2 \times X \to X$ — многозначные отображения с компактными значениями; $\mathscr{V}_1 \colon C(\Omega;X) \to C(I_1;X)$, $\mathscr{V}_2 \colon C(\Omega;X) \to C(I_2;X)$ — непрерывные операторы; φ, ψ — абсолютно непрерывные функции.

Наряду с ограничениями (3) будем также рассматривать ограничения

$$u(x,y) \in \operatorname{co} U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in \operatorname{co} U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in \operatorname{co} U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)) \tag{4}$$

и

$$u(x,y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U(x,y,z(x,y)),\ u^1(x) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)),\ u^2(y) \in \operatorname{ext}\operatorname{co} U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)), \tag{5}$$

где символ $\operatorname{co} E$ обозначает выпуклую оболочку множества E, а $\operatorname{ext}\operatorname{co} E$ — совокупность всех крайних точек множества $\operatorname{co} E$.

Пусть $W^p(\Omega;X)$ — пространство функций $f \colon \Omega \to X$, представимых в виде

$$f(x,y) = f(0,0) + \int_0^x g^1(s)\,ds + \int_0^y g^2(t)\,dt + \int_0^x \int_0^y g(s,t)\,ds\,dt, \tag{6}$$
$$g \in L^p(\Omega;X),\ g^1 \in L^p(I_1;X),\ g^2 \in L^p(I_2;X).$$

Известно, что функции $f \in W^p(\Omega;X)$ абсолютно непрерывны в смысле [1] и для них существуют обобщенные производные f_x, f_y, f_{xy} в смысле [2]:

$$f_x(x,y) = g^1(x) + \int_0^y g(x,t)\,dt, \quad f_y(x,y) = g^2(y) + \int_0^x g(s,y)\,ds, \quad f_{xy}(x,y) = g(x,y). \tag{7}$$

Исходя из (6) и (7), введем

Определение. Решением системы (1)–(3) называется четверка (z,u,u^1,u^2), $z \in W^p(\Omega;X)$, $u \in L^p(\Omega;Y)$, $u^1 \in L^p(\Omega;X)$, $u^2 \in L^p(\Omega;X)$, такая, что

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int_0^x u^1(s)\,ds + \int_0^y u^2(t)\,dt + \int_0^x \int_0^y v(s,t)\,ds\,dt,$$
$$\text{где} \quad v(x,y) = c_1(x,y,z)z_x + c_2(x,y,z)z_y + c_3(x,y,z) + c_4(x,y,z)u,$$

и почти всюду имеют место включения (3). Аналогично определяются решения систем (1), (2), (4) и (1), (2), (5). Множества решений системы (1) с ограничениями (3), (4), (5) обозначим соответственно $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\rm co}$, $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$. Элементы множества $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$ мы называем экстремальными решениями.

При достаточно стандартных предположениях о функциях c_i, $i = 1,\dots,4$, $\mathscr{V}_1$, $\mathscr{V}_2$, U, U_1, U_2 имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Множества $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_{\rm co}$, $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$ не пусты и $\mathscr{R}_{\rm co}$ является компактом в пространстве*

$$C(\Omega;X)\times w\text{-}L^p(\Omega;Y)\times w\text{-}L^p(I_1;X)\times w\text{-}L^p(I_2;X). \tag{8}$$

Здесь $w\text{-}L^p(\Omega;Y)$, $w\text{-}L^p(I_1;X)$ $w\text{-}L^p(I_2;X)$ — пространства $L^p(\Omega;Y)$, $L^p(I_1;X)$ $L^p(I_2;X)$, наделенные слабой топологией.

Изучение множества $\mathscr{R}_{\rm co}$ можно свести к изучению множества неподвижных точек $\mathrm{Fix}\,(\mathcal{F})$ определенным образом построенного многозначного отображения $\mathcal{F}\colon K\to K$, где K — выпуклое компактное подмножество пространства $w\text{-}L^p(\Omega;X)\times w\text{-}L^p(I_1;X)\times w\text{-}L^p(I_2;X)$. При этом существует непрерывное инъективное отображение

$$T\colon \mathrm{Fix}\,(\mathcal{F})\to \mathscr{R}_{\rm co}.$$

Теорема 2. *Для любой точки $w\in \mathrm{Fix}\,(\mathcal{F})$ существует непрерывный селектор f многозначного отображения $\mathcal{F}$, такой, что $w\in \mathrm{Fix}\,(f)$ и любая окрестность множества*

$$\mathscr{R}_f := T(\mathrm{Fix}\,(f))\subset \mathscr{R}_{\rm co}$$

содержит точки из $\mathscr{R}_{\rm ext\,co}$.

Отсюда следует, что в ряде частных случаев, например, когда $c_1\equiv 0$, $c_2(x,y,z)=c_2(x)$, $U_2(y,z)=U_2(y)$, справедлива теорема плотности:

$$\mathscr{R}_{\rm co} = \overline{\mathscr{R}} = \overline{\mathscr{R}_{\rm ext\,co}},$$

где черта означает замыкание в пространстве (8).

Автор выражает признательность А. А. Толстоногову за постановку задачи и внимание к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-01-00247).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Walczak S.* Absolutely Continuous Functions of Several Variables and Their Application to Differential Equations // Bulletin of Polish Academy of Sciences. Math. 1987. V. 35, N 11-12. P. 733–744.
2. *Kisynski J.* Solutions généralisées du problème de Cauchy-Darboux pour l'équation $\partial^2 z/\partial x\partial y = f(x,y,z,\partial z/\partial x,\partial z/\partial y)$ // Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska. 1960. V. XIV, N 6. P. 87–107.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 252–254

УДК 517.956.4

ГЁЛЬДЕРОВСКАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ $2n$-го ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

© С. В. Попов, С. В. Потапова

madu@sitc.ru, sargyp@mail.ru

Якутский государственный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

В краевых задачах для строго параболических уравнений гладкость начальных и граничных данных без дополнительных условий на данные задачи полностью определяет принадлежность решения гёльдеровским пространствам. В случае уравнений с меняющимся направлением эволюции гладкость начальных и граничных данных не обеспечивает принадлежность решения таким пространствам. Применение теории сингулярных уравнений дает возможность наряду с гладкостью данных задачи указать дополнительно необходимые и достаточные условия, обеспечивающие принадлежность решения пространствам $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ при $p \geq 2n$. Более того, применением единого подхода при общих условиях сопряжения (склеивания) для таких уравнений удается показать, что нецелый показатель $p-[p]$ пространства $H_{x\ t}^{p,p/2n}$ может существенно влиять как на количество условий разрешимости, так и на гладкость искомого решения уравнения:

$$\operatorname{sgn} x\, u_t = Lu, \tag{1}$$

где

$$Lu = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(k(x,t)\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) + c(x,t)u$$

$$k(x,t) \geq \delta > 0, \quad c(x,t) \leqslant 0.$$

Решение уравнения (1) ищется из пространства Гёльдера $H_{x\ t}^{p,p/2n}$, $p = 2nl + \gamma$, $0 < \gamma < 1$. удовлетворяющее следующим начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ x > 0, \quad u(x,T) = \varphi_2(x),\ x < 0, \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(-0,t) = \sigma_k \frac{\partial^k u}{\partial x^k}(+0,t), \quad k = 0,\ldots,2n-1, \tag{3}$$

где σ_k — действительные постоянные, $l \geq 1$ — целое число.

Большое число работ посвящено изучению таких уравнений при $n = 1$ (см. [1] и имеющуюся там библиографию).

Рассматриваются параболические уравнения $2n$–го порядка $(n \geq 2)$ с меняющимся направлением эволюции, связанные с применением теории сингулярных интегральных уравнений [1–4], а также систем этих уравнений [5].

Общие условия сопряжения для параболических уравнений четвертого порядка были исследованы в работах [6, 7] и для них были найдены зависимости показателей гельдеровских пространств от весовых функций склеивания. В частности, было замечено, что при $p-[p] \geq 1-4\theta(\sigma_k) > 0$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных начальных данных.

Центральным местом данной работы является явное представление условий $2nl$–разрешимости

$$L_s(\varphi_1,\varphi_2) = 0, \quad s = 1,\ldots,2nl, \tag{4}$$

для краевых задач (1)–(3), когда n — произвольное натуральное число. Для доказательства $2nl$-разрешимости при $n = 2$ и $n = 3$ необходимо рассмотрение общих условий склеивания, более того, находится зависимость показателей гельдеровских пространств от весовых функций склеивания, а при $n \geq 4$, оказалось, достаточно рассмотрения на линии раздела непрерывных условий склеивания, включая $(2n-1)$-ую производную (случай $\sigma_k = 1$).

Уравнения четвертого порядка. В области $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассмотрим краевую задачу (1)–(3) при $n = 2$. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Б. Пини, краевая задача приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа

$$K\vec{\beta} \equiv A\vec{\beta}(t) - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{B(t,\tau)\vec{\beta}(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \vec{Q}(t). \tag{5}$$

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 4l + \gamma)$, $\theta = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{a}{b}\right|$ $(a = \sigma_0\sigma_1 + \sigma_0\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_0\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3,\quad b = \sigma_0\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_2 + \sqrt{2}\sigma_1\sigma_2 - \sigma_0\sigma_1)$. *Тогда при выполнении* $4l$ *условий* (4) *существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *из пространства* $\left(\theta < \dfrac{1}{4}\right)$:

1) $H_{x\ t}^{p,p/4}$, *если* $0 < \gamma < 1 - 4\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/4}$, $q = 4l + 1 - 4\theta$, *если* $1 - 4\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/4}$, *если* $\gamma = 1 - 4\theta$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

Замечание 1. Если выполнены условия теоремы при $\theta \geq \dfrac{1}{4}$, то, как показано в [8], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x\ t}^{p,p/4}$ при выполнении $6l + 2$ условий вида (4).

Уравнения шестого порядка. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига краевая задача (1)–(3) при $n = 3$ приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа (5).

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 6l + \gamma)$, $\theta = \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left|\dfrac{a}{b}\right|$ $(a = a(\sigma_k), b = b(\sigma_k))$. *Тогда при выполнении* $6l$ *условий* (4) *существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *из пространства* $\left(\theta \in \left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{3}\right)\right)$:

1) $H_{x\ t}^{p,p/6}$, *если* $0 < \gamma < 2 - 6\theta$;

2) $H_{x\ t}^{q,q/6}$, $q = 6l + 2 - 6\theta$, *если* $2 - 6\theta < \gamma < 1$;

3) $H_{x\ \ t}^{q-\varepsilon,(q-\varepsilon)/6}$, *если* $\gamma = 2 - 6\theta$, *где* ε *— сколь угодно малая положительная постоянная.*

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы при $\theta \leqslant \dfrac{1}{6}$, то единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x\ t}^{p,p/6}$ при выполнении $6l$ условий (4). Если же выполнены условия теоремы при $\theta \geq \frac{1}{3}$, то, как показано в [8], единственное решение задачи (1)–(3) существует из искомого пространства $H_{x\ t}^{p,p/6}$ при выполнении $10l + 2$ условий вида (4).

Уравнения $2n$-го порядка при $n \geq 4$. Методом параболических потенциалов простого слоя, построенных при помощи фундаментального решения и элементарных решений Л. Каттабрига краевая задача (1)–(3) при непрерывных условиях склеивания ($\sigma_k = 1$) приводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений нормального типа вида (5).

Теорема 3. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$ $(p = 2nl + \gamma)$. *Тогда при выполнении* $2nl$ *условий* (4) *существует единственное решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (2), (3) *из пространства* $H_{x\ t}^{p,p/2n}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск: Наука, 1985. 105 с.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 512 с.
4. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. Новосибирск: Наука, 1977. 424 с.
5. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1968. 380 с.
6. *Попов С. В.* О гладкости решений параболических уравнений с меняющимся направлением эволюции // Докл. АН. 2005. Т. 400, № 1. С. 29–31.
7. *Попов С. В.* Гёльдеровские классы решений параболических уравнений четвертого порядка с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 1. С. 84–100.
8. *Попов С. В.* Параболические уравнения с меняющимся направлением эволюции // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 93–112.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 255–255

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

© Л. С. Пулькина

pulkina@ssu.samara.ru

Самарский государственный университет, Самара

В докладе излагаются некоторые результаты исследования разрешимости нелокальных задач для уравнения Лапласа. Особенностью рассматриваемых задач является присутствие нелокальных условий, заданных в виде интегралов вдоль прямых, пересекающих область, в которой ищется решение. Например, если область есть прямоугольник $D = \{(x,y): \ 0 < x < a, \ \ 0 < y < b\}$, то условия можно задавать следующим образом:

$$\int\limits_0^a K(x,y)u(x,y)dx = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$\int\limits_0^b H(x,y)u(x,y)dy = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Обсуждаются и другие варианты постановки задач с интегральными условиями, а также методы их исследования и полученные результаты.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 256–257

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ФИНАЛЬНЫМ И ЧАСТИЧНЫМ ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ

© С. Г. Пятков

pyatkov@uriit.ru

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск
Институт математики им. С. Л. Соболева, Новосибирск

Мы рассматриваем параболическое уравнение вида

$$Lv = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x)l_0u + l_1u = 0 \quad (x \in Q = G \times (0,T)), \tag{1}$$

где

$$l_0u = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x)u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)u_{x_i} + a_0(x)u,$$

$$l_1u = \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + b_0(x)u$$

и G — ограниченная область с границей Γ или $G = \mathbb{R}^n$. Заданы начальные условия

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{2}$$

Если $G \neq \mathbb{R}^n$, то к начальному условию (2) добавляем также условие Дирихле

$$u|_S = 0, \quad S = \Gamma \times (0,T). \tag{3}$$

Если $G = \mathbb{R}^n$, то условие (3) понимается так: $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Условие Дирихле может быть заменено на условие второй или третьей краевой задачи. Мы рассматриваем вопрос о определении вместе с решением и одного из коэффициентов уравнения, в частности, коэффициента $a(x)$ по некоторой дополнительной информации при $t = T$. Много интересных результатов в этом направлении получено в работах А. И. Прилепко и его учеников (см. [1]) Среди работ, где рассматривалась задача вида (1)–(3) с финальным переопределением решения на всей прямой $t = T$ (или на всем верхнем основании цилиндра в случае когда область цилиндрическая) отметим работу О. А. Колтуновского [2]. Можно также сослаться и на ряд результатов А. И. Кожанова, М. Иванчова, В. Исакова, М. Клибанова и ряда других авторов (см. [3–5]). Классические условия финального переопределения задаются в виде

$$u(T,x) = u_T(x), \quad x \in G, \tag{4}$$

Обратная задача о определении коэффициента $a(x)$ и решения u по данным (2)–(4) в случае $n = 1$ была исследована в [2]. Рассмотрим случай, когда коэффициент $a(x)$ известен в области $G \setminus G_0$ ($\overline{G_0} \subset G$) и неизвестен в области G_0. Подобные задачи возникают в математической экономике [6]. В этом случае, естественно записать условие (4) в виде

$$u(T,x) = u_T(x), \quad x \in G_0. \tag{5}$$

Однако, оказалось, что подобная задача о определении решения u и коэффициента $a(x)$ по данным (2), (3), (5) переопределена, если мы ищем коэффициент $a(x)$ хотя бы непрерывным. Если искать коэффициент $a(x)$ непрерывным или из класса Гельдера $C^{\alpha}(\overline{G})$ с $\alpha \in [0,1)$, то наиболее естественная постановка условий переопределения в этом случае имеет вид

$$L_1(a(x)l_0u_T) = L_1(a(x)l_0u(x,T)), \quad x \in G_0,$$

или

$$L_1(a(x)l_0u_T - l_1u_T) = L_1(al_0u(x,T) - l_1u(x,T)), \quad x \in G_0,$$

где L_1 — некоторый эллиптический оператор второго порядка. В этом случае задача корректна, в том смысле, что можно указывать естественные условия на данные задачи при выполнении которых решение существует и единственно (решение ищется в пространстве Соболева $W_p^{2,1}(Q)$ или Гельдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in Mathematical Physics. New-York: Marcel Dekker, Inc., 1999.
2. *Колтуновский О. А.* О разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с финальным условием переопределения // Мат. заметки ЯГУ. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 45–72.
3. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. *Ivanchov M.* Inverse problems for equation of parabolic type. Math. Studies. Monograph Series. V. 10. Lviv: WNTL Publishers, 2003.
5. *Isakov V.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
6. *Isakov V.* The inverse problem of option pricing // Recent Developments in Theory and Numerics. International Conference on Inverse problems. City Univercity of Hong Kong, 2002. P. 47–55.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 258–259

УДК 517.956.6

О ДВУХ ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ – САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С НЕГЛАДКОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

© А. Н. Рафиков

shaxtk@mail.ru

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

Пусть Ω конечная односвязная область плоскости $x0y$, ограниченная линией $\bar\sigma_0=\{(x,y):(x^{2q}/q^2)+(y^{2p}/p^2)=1,\,x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\}$ с концами в точках $(h_1,0)$, $(0,\ h_2)$, отрезком $\overline{I}=\{(x,y):\ x=0,\,0\leqslant y\leqslant h_2\}$ и при $y<0$ характеристиками $\frac{1}{q}\,x^q-\frac{1}{p}\,(-y)^p=0$, $\frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}\,(-y)^p=1$ уравнения

$$\operatorname{sign}\,y\,|y|^m\,u_{xx}+x^n\,u_{yy}=0,\quad m,\,n=\mathrm{const}>0,\tag{1}$$

где $2q=n+2$, $2p=m+2$, $h_1=q^{1/q}$, $h_2=p^{1/p}$, причем $m>n$. Введем обозначения: $2\alpha=n/(n+2)$, $2\beta=m/(m+2)$; $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$,

$$F_{0x}\left[\begin{array}{ll} a, & b\\ c, & x^{2q}\end{array}\right]f\,(x)=\left\{\begin{array}{ll}\frac{1}{\Gamma(c)}\int\limits_0^x f\,(t)\left(x^{2q}-t^{2q}\right)^{c-1}F\left(a,\,b,\,c;\,\frac{x^{2q}-t^{2q}}{x^{2q}}\right)dt^{2q}, & c>0,\\ \frac{d}{dx^{2q}}(x^{2q})^{-a}F_{0x}\left[\begin{array}{ll} a, & b+1\\ c+1, & x^{2q}\end{array}\right]f(x), & -1<c<0,\end{array}\right.$$

$\theta_0\,(x_0)$ точка пересечения характеристики l уравнения (1) с характеристикой $\frac{1}{q}x^q+\frac{1}{p}\,(-y)^p=\frac{1}{q}x_0^q$ $(0<x_0<h_1)$, т. е. точка с координатами $\left(\left(\frac{x_0^q}{2}\right)^q,\left(\frac{px_0^q}{2q}\right)^{1/p}\right)$, $F(a,\,b,\,c;\,z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера.

Задача БС$_1$. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,\ y)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\right)\cap C^2\left(\Omega^+\cup\Omega^-\right)$ и $u_y\,(x,0)$ при $x\to 0$, $x\to h_1$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $(1-2\beta)\ /\ (1-\ 2\alpha)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω^- и Ω^+;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u\,(x,\,y)-a\,(x,\,y)\,u\left(r_0^{1/q}x,\,r_0^{1/p}y\right)=g\,(x,\,y)\,,\quad (x,\,y)\in\bar\sigma_0;\tag{2}$$

$$u\,(0,\,y)=\tau_2\,(y)\,,\qquad 0\leqslant y\leqslant h_2;\tag{3}$$

$$\begin{aligned}F_{0x}\left[\begin{array}{ll}(\alpha+\beta-1)/2, & (\alpha+\beta-2)/2\\ \beta-1, & x^{2q}\end{array}\right](x^{2q})^{\alpha-1/2}\,u[\theta_0\,(x)]&\\ =e(x)u_y(x,\,0)+b(x),\quad 0<x<h_1,&\end{aligned}\tag{4}$$

где r_0 — заданное число, а $a\,(x,\,y)$, $g\,(x,\,y)$, $\tau_2\,(y)$, $e\,(x)$, $b\,(x)$ — заданные функции, причем $0<r_0<1$.

При $a(x,y)=0$ из задачи БС$_1$ следует задача С, рассмотренная в работе [1].

Теорема 1. *Если* $|a(x,\,y)|\leqslant 1$, $(x,\,y)\in\bar\sigma_0$; $e_1(x)>0$ *или* $e_1(x)\equiv 0$, $x\in[0,h_1]$ *и* $a(x,\,y)=y^{\varepsilon}a_0(x,\,y)$, $g\,(x,y)=y^{\varepsilon}g_0(x,y)$, $g_0(x,y)$, $a_0(x,\,y)\in C\,(\bar\sigma_0)$, $\varepsilon>1+m/2$; $\tau_2\,(y)=$

$y^{\varepsilon_1}\tau_0(y)$, $\varepsilon_1 > -\alpha+1/2$, $\tau_0(y) \in C[0,\, h_2]$; $b(x),\, e(x) \in C^{(2,\,\mu)}[0,\, h_1]$, $\mu > 0$, *тогда существует единственное решение задачи* БС$_1$.

Единственность решения задачи БС$_1$ доказывается методом принципа экстремума, а существование решения — эквивалентным сведением задачи к системы интегралных уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения.

Аналогично можно исследовать следующее.

Задача БС$_2$. Найти в области Ω функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,\, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ и $u_y(x,\, 0)$ при $x \to 0$, $x \to h_1$ может обращаться в бесконечность порядка ниже $(1-2\beta)\,/\,(1-2\alpha)$;

2) удовлетворяет уравнению (1) в областях Ω^- и Ω^+;

3) удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,\, y) - a(x,\, y)\, u\left(r_0^{1/q}x,\, r_0^{1/p}y\right) = g(x,\, y), \quad (x,\, y) \in \bar{\sigma}_0;$$

$$u_y(0,\, y) = \nu_2(y), \qquad 0 < y < h_2;$$

$$F_{0x}\left[\begin{array}{ll} (\alpha-\beta-1)/2, & (\alpha-\beta)/2 \\ -\beta & \qquad x^{2q} \end{array}\right] (x^{2q})^{\alpha+\beta-1}\, u[\theta_0(x)]$$
$$= f(x)u_y(x,\, 0) + q(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant h_1,$$

где r_0 — заданное число, а $a(x,\, y)$, $g(x,\, y)$, $\nu_2(y)$, $f(x)$, $q(x)$ — заданные функции, причем $0 < r_0 < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хасанов А.* Об одной смешанной задаче для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Известия АН РУз, серия физ.-мат. наук. 1982. С. 28–32.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 260–260

УДК 517.956

О МЕТОДЕ М. К. ГАВУРИНА ДЛЯ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

© Д. Г. Рахимов

mathinst@uzsci.net

Ташкентский финансовый институт, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим многопараметрическую задачу на собственные значения по Аткинсону

$$T_j\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right) x_j = 0,\ j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $T_j\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right) \in L\left(E_j, F_j\right)$ — аналитические в некоторой области $G \subset R^n$ оператор-функции, E_j, F_j — вещественные банаховы пространства. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in P\sigma_S$ — изолированная фредгольмовская точка, где $P\sigma_S$ — дискретный спектр задачи (1) [1], такая, что $N\left(T_j(\lambda)\right) = \{\varphi_j\}$, $N*\left(T_j(\lambda)\right) = \{\psi_j\}$, $\|\varphi_j\| = 1$, $\|\psi_j\| = 1$, $j = 1, \ldots, n$, и пусть $k_{ij} = \left(\psi_i, \frac{\partial T_i(\lambda)}{\partial t_j}\varphi_i\right) \neq 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Предполагается, что известны достаточно хорошие приближения $\left\|\varphi_j^0\right\| = 1, \left\|\psi_j^0\right\| = 1$, $j = 1, \ldots, n$, и $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$ к φ_j, ψ_j, $j = 1, \ldots, n$, и λ соответственно, $\left\|\varphi_j^0 - \varphi_j\right\| \leqslant \varepsilon$, $\left\|\psi_j^0 - \psi_j\right\| \leqslant \varepsilon$, $\|\lambda - \Lambda\| \leqslant \varepsilon$.

Вычислив невязки по формулам $\sigma_j^0 = T_j(\lambda^{(0)})\varphi_j^0$, $\tau_j^0 = T_j^*(\lambda^{(0)})\psi_j^0$, малые по норме операторы М. К. Гавурина D_{j0}, $j = 1, \ldots, n$, [2], обладающие свойствами $D_{j0}\varphi_j^0 = \sigma_j^0$, $D_{j0}^0\psi_j^0 = \tau_j^0$, $j = 1, \ldots, n$, построим следующим образом

$$D_{j0}x = \left(\gamma_j^0, x\right)\sigma_j^0 + \left(\tau_j^0, x\right) z_j^0,$$

где γ_j^0 и z_j^0 элементы биортогональные к φ_j^0 и ψ_j^0, $j = 1, \ldots, n$, соответственно. Тогда тензоры $\varphi^{(0)} = \varphi_1^0 \otimes \cdots \otimes \varphi_n^0$, $\psi^{(0)} = \psi_1^0 \otimes \cdots \otimes \psi_n^0$ и λ^0 окажутся точными собственными элементами и собственным значением соответственно многопараметрических задач

$$\left[T_j(t) - D_{j0}\right] x_j = 0, \quad \left[T_j(t) - D_{j0}\right] x_j = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Применняя обобщенную лемму Шмидта [3] к уравнению (1), строятся итерационные процессы, позволяющие найти собственное значение и соответствующие собственные элементы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Loginov B. V., Sidorov N. A., Rakhimov D. G.* Development of M.K.Gavurin‘s Pseudoper-turbation Method // American Math. Soc. Fiels Institute Communications. 2000. V. 25. C. 367–381.
2. *Гавурин М. К.* О методе ложных возмущений для разыскания собственных значений // Ж. вычисл. матем. и матем.физ. 1961. Т. 1, № 5. С. 757–770.
3. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 261–261

УДК 517.9

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© Л. Х. Рахманова

LouisaR@yandex.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_y - u_{xx} + b^2 u = 0, & y > 0, \\ (-y)^m u_{yy} - u_{xx} - b^2(-y)^m u = 0, & y < 0, \end{cases}$$

где $m > 0$, $b = \text{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1,\ -\alpha < y < \beta\}$, α и β — заданные положительные действительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_-) \cap C^{2,1}_{x,y}(D_+ \cup \{y = \beta\});$$

$$Lu(x,y) \equiv 0 \quad \text{при} \quad (x,y) \in D_- \cup D_+ \cup \{y = \beta\};$$

$$u(0,y) = u(1,y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta;$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta;$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где $\psi(x)$ — заданная достаточно гладкая функция, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$.

Теорема. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи, то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in N$*

$$\lambda_k^2 \gamma_{\frac{1}{2q}} J_{\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) - \gamma_{-\frac{1}{2q}} J_{-\frac{1}{2q}}(p_k \alpha^q) \neq 0,$$

где $\lambda_k^2 = b^2 + (2\pi k)^2$, $p_k^2 q^2 = b^2 + (2\pi k)^2$, $q = (m+2)/2$, $\gamma_{\frac{1}{2q}} = \left(\frac{p_k}{2}\right)^{-\frac{1}{2q}} \Gamma\left(\frac{1}{2q}\right)$, $\gamma_{-\frac{1}{2q}} = \left(\frac{p_k}{2}\right)^{\frac{1}{2q}} \Gamma\left(-\frac{1}{2q}\right)$, Γ — гамма-функция, $J_{\frac{1}{2q}}$ — функция Бесселя первого рода.

Доказательство данного утверждения проводится на основании работы [1].

Существование решения задачи выписывается в виде ряда Фурье и при некоторых ограничениях на функцию $\psi(x)$ показано, что сумма данного ряда удовлетворяет условиям постановки задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сабитов К. Б.* Критерий однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения - XVI". "Современные методы теории краевых задач". Воронеж. 2005. С. 139.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 262–263

УДК 517.95

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА В МОДЕЛИ ПОДЛЕДНОГО КОНВЕКТИВНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

© **А. А. Резванцева**

asuta22@yandex.ru

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

В данной работе рассматривается модель крупных вихрей (LES-модель) для описания подледного конвективного пограничного слоя глубокого озера. При построении LES модели использовалось расщепление исходной системы уравнений термогидродинамики водоема (модель Обербека – Буссинеска) (см. [1, 2]). Сила Кориолиса в уравнениях движения не учитывается из-за малых горизонтальных масштабов термиков (когерентных структур). Слой пресной воды, охваченный конвекцией составляет лишь несколько десятков метров, поэтому зависимость плотности от давления и минерализации не рассматривается; при этом вместо трехмерной задачи будем рассматривать двумерную. Рассматривается система уравнений:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} + \lambda\zeta + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial w}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -w\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial\overline{w\zeta}}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\nu\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial\overline{w\zeta}}{\partial z} + \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}, \tag{4}$$

где t — время, z — вертикальная координата, направленная вниз, значение $z = 0$ соответствует нижней кромке льда, $R(z,t)$ — количество коротковолновой солнечной радиации, поглощаемой подледным слоем воды, $\overline{(\ldots)} = L^{-1}\int_0^L(\ldots)\,dx$ — оператор осреднения вдоль горизонтальной оси Ox, L — размер области осреднения, μ,ν — положительные постоянные, (u,w) — компоненты вектора скорости, $\theta = \overline{T}$ — средняя темепература и соответственно, $\zeta = T - \overline{T}$ — флуктуация температуры, $\lambda = \alpha(\theta - \theta_m)$ (α, θ_m — некоторые постоянные), p — давление. Система рассматривается в параллепипеде $(0,L)\times(0,H)\times(0,T_0)$.

Краевые условия для системы (1)–(4) имеют вид:

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = \zeta|_{z=0} = \theta|_{z=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = w|_{z=H} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|_{z=H} = 0, \quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial z}\right|_{z=H} = \gamma_0 \tag{5}$$

(γ_0 — некоторая постоянная),

$$u|_{t=0} = u_0, \quad w|_{t=0} = w_0, \quad \zeta|_{t=0} = \zeta_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \tag{6}$$

По переменной x все искомые функции удовлетворяют условиям периодичности.

Мы показываем, что несмотря на наличие нелинейных слагаемых в системе уравнений, приведенная выше краевая задача разрешима в целом и решение единственно. Гладкость решения повышается при повышении гладкости даннных. Мы также приводим некоторые качественные свойства решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pushistov P. Yu., Ievlev K. V.* Application of the large eddy method for studying physical mechanisms of supporting diatoms in the photic lake zone covered by ice in the spring period // Bulliten of the Nov. Comput. Center. NCC Publisher, Novosibirsk, 2000. V. 6. P. 55–62.
2. *Пушистов П. Ю.* Математические модели экосистемы водоема для описания подледного весеннего цветения диатомовых водорослей // Труды международной конференции “Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования”. Ханты-Мансийск: ГП-Полиграфист, 2005. С. 185–193.

УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© О. А. Репин

matstat@mail.ru

Самарский государственный экономический университет, Самара

Рассматривается уравнение смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m > -1,\ m \neq 0, \tag{1}$$

которое является уравнением первого рода, если $m > 0$, и уравнением второго рода, если $-1 < m < 0$.

Пусть D — это область, ограниченная кривой Жордана Γ с концами в точках $A(0,0)$, $B(1,0)$, лежащей в полуплоскости $y > 0$ и характеристиками уравнения (1) при $y > 0$; D_1 и D_2 — части области D, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, J — единичный интервал $0 < x < 1$ прямой $y = 0$; $\Theta_0(x)$ — аффикс точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x,0) \in J$ с характеристикой, выходящей из точки $A(0,0)$; $(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x)$ — оператор обобщенного дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a,b;c;z)$, введенный в [1] (см. также [2, с. 326–327]) и имеющий при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1-\frac{t}{x}) f(t)dt, & (\alpha > 0), \\ (\frac{d}{dx})^n (I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f)(x), & (\alpha \leq 0, n = [-\alpha]+1). \end{cases}$$

Для уравнения (1) изучим следующую нелокальную задачу.

Задача. Найти в области D решение уравнения (1) $U(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(x,y)|_\Gamma = \varphi(x,y) \forall (x,y) \in \Gamma,$$

$$A_1 I_{0+}^{a,b,b+2\beta-1} u[\theta_0(x)] + A_2 I_{0+}^{a+\beta,b,b+\beta-1} u(x,0) = \psi(x) \forall x \in J,$$

где $\varphi(x,y)$ и $\psi(x)$ - заданные функции, такие, что $\varphi(x,y) \in C(\Gamma)$, $\psi(x) \in C(\overline{J}) \cap C^2(J)$; $\beta = \frac{m}{2m+4}$, если $m > 0$, $\beta = \frac{m}{2m-4}$, если $-1 < m < 0$; a, b, A_1 и A_2 — действительные числа, причем $|a| < \beta$, $1-2\beta < b < 2-2\beta$, A_1, $A_2 > 0$, если $m > 0 (0 < \beta < \frac{1}{2})$, $\beta - 1 < a < \beta$, $1-2\beta < b < 2-2\beta$, $A_1 < 0$, $A_1 \Gamma(1-\beta) + 2A_2 \cos \pi\beta \Gamma(1-2\beta) > 0$, если $-1 < m < 0 (-\frac{1}{2} < \beta < 0)$.

В работе доказана однозначная разрешимость исследуемой задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saigo M.* // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. V. 11, N 2. P. 135–143.
2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 265–266

УДК 517.956

О РАЗРЫВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ В СЛУЧАЕ КОНТУРОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

© А. В. Роговой

rog2005@list.ru

Южно-Казахстанский гуманитарный институт, Шымкент, Казахстан

В конечной области $\Omega \subset R^2$, ограниченной при $y<0$ характеристиками $AC: x+y=0$, $BC: x-y=1$, а при $y>0$ — кривой Ляпунова

$$\sigma_\delta = \left\{ (x,y):\ \ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + (y+\delta)^2 = \frac{1}{4} + \delta^2, \quad y>0 \right\},$$

рассмотрим однородную задачу Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе

$$\operatorname{sgn} y u_{xx} + u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\sigma_\delta \cup AC} = 0, \tag{2}$$

причем должны выполняться следующие условия "склеивания"решения на линии изменения типа уравнения $\{y=0\}$:

$$u(x,+0) = u(x,-0), \tag{3}$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0). \tag{4}$$

В работах [1, 2] для более общего уравнения Геллерстедта

$$\operatorname{sgn} y|y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0$$

было показано существование разрывного решения задачи Трикоми в случае, если $m>2$, а углы подхода кривой Ляпунова к линии изменения типа уравнения достаточно велики.

Оказалось, что этот результат можно значительно усилить, и, помимо тривиального $u \equiv 0$, имеет место разрывное решение однородной задачи Трикоми даже для случая уравнения (1) (при $m=0$) и малых углах подхода. Именно, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *В случае тех контуров σ_δ, для которых параметр δ может быть представлен в виде*

$$\delta = \frac{1}{2} ctg\left(\frac{4p-1}{4n}\cdot\pi\right), \ \ n=1,2,\ldots;\ \ p=1,2,\ldots,n, \tag{5}$$

существует ненулевое разрывное в точке $B(1,0)$ решение (разрыв порядка n), однородной задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева – Бицадзе (задачи (1)–(2)), которое представляется по формуле

$$u(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{\cos\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)+\sin\left(k\cdot arctg\frac{y}{1-x}\right)}{((1-x)^2+y^2)^{\frac{k}{2}}} = \\ \qquad = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k \frac{(1-x)^k + k(1-x)^{k-1}y - C_k^2(1-x)^{k-2}y^2 - C_k^3(1-x)^{k-3}y^3 + \ldots}{((1-x)^2+y^2)^{\frac{k}{2}}},\ y>0, \\ (-1)^n\left(\frac{x+y}{1-x-y}\right)^n,\ y<0. \end{cases} \tag{6}$$

Замечание. Нетрудно видеть, что, полагая $p = 1$ в соотношении (5), мы можем получит существование разрывного решения задачи (1)–(2) в случае контуров, угол подхода которых к линии изменения типа уравнения очень мал и даже близок к 0.

Пример. Теорему 1 можно проиллюстрировать, полагая $n = 1$ (в этом случае $p = 1$) и $n = 2$ ($p = 1$ и $p = 2$). При $n = 1$ контур σ_δ запишется в виде

$$\sigma = \left\{(x, y): \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, \quad y > 0\right\},$$

а решение

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 - \frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} = -\frac{\frac{1}{2}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{(1-x)^2+y^2}, & y > 0, \\ -\frac{x+y}{1-x-y} = 1 - \frac{1}{1-x-y}, & y < 0, \end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет уравнению (1), краевым условиям (2) и условиям согласования (3)–(4), что можно показать простой подстановкой.

При $n = 2$ решение

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 - 2\frac{1-x+y}{(1-x)^2+y^2} + \frac{(1-x)^2+2(1-x)y-y^2}{((1-x)^2+y^2)^2}, & y > 0, \\ 1 - 2\frac{1}{1-x-y} + \frac{1}{(1-x-y)^2}, & y < 0 \end{cases}$$

удовлетворяет однородной задаче Трикоми (1)–(4) сразу для двух контуров

$$\sigma_1 = \left\{(x, y): \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^2, \quad y > 0\right\}$$

и

$$\sigma_2 = \left\{(x, y): \ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right)^2, \quad y > 0\right\}$$

Полученный результат о существовании разрывного решения задачи Трикоми может быть использован при изучении свойств соответствующего дифференциального оператора, прежде всего его спектральных свойств.

В заключении автор хотел бы выразить благодарность научному руководителю академику НАН РК Т. Ш. Кальменову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Роговой А. В.* О гладкости решений задачи Трикоми для уравнения Геллерстедта // Вестник КазНУ им. Аль-Фараби. Серия математика, механика, информатика. 2002. № 5(33). С. 50–56.
2. *Роговой А. В.* Решение задачи Трикоми для уравнений смешанного типа методом преобразований Меллина. Автореферат диссертации ... кандидата физико-математических наук. Шымкент, 2004. 26 с.

УДК 517.95+532

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ

© А. А. Родионов

aarod@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматривается движение бинарной смеси, состоящей из нереагирующих компонентов. Наличие в смеси градиентов плотности означает, что потенциальная энергия гравитационных сил может превращаться в энергию движения под действием сил плавучести. Разности плотности могут вызываться нагревом смеси, разностью концентраций и изменением давления.

Уравнения модели конвекции для описания движения несжимаемой бинарной смеси имеют вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\,\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + R(\theta, p, c)\mathbf{g},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \chi\Delta\theta,$$

$$\frac{dc}{dt} = D(\Delta c + \alpha\Delta\theta),$$

где $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla$, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, p — давление, θ — температура среды, c — концентрация легких компонентов, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор массовых сил, ν — кинематическая вязкость, χ, D, α — коэффициенты температуропроводности, диффузии и Соре, $R(\theta, p, c)$ — функция, определяющая силу плавучести.

Решается задача групповой классификации уравнений модели по функции $R(\theta, p, c)$. Получено ядро основной алгебры Ли операторов при произвольном выборе функции R и спецификации функции, при которых ядро алгебры Ли расширяется.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 268–269

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПОЛУПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ И СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

© М. Х. Рузиев

mruziev@mail.ru

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$y^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y - \lambda^2 y^m u = 0, \tag{1}$$

где $m > 0$, $-\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, в полуполосе $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 1, \ y > 0\}$, $O(0,0)$, $B(1,0)$, $OO_\infty(x = 0, y > 0)$, $BB_\infty(x = 1, y > 0)$.

Обозначим $\overline{D} = D \cup OO_\infty \cup \overline{OB} \cup BB_\infty$.

Задача D. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:

1) $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$ и удовлетворяет уравнению (1) в D;

2) $\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0$ равномерно по $x \in [0,1]$; (2)

3)
$$u(0,y) = \varphi_1(y), \ \ 0 \leqslant y < \infty, \tag{3}$$

$$u(1,y) = \varphi_2(y), \ 0 \leqslant y < \infty, \tag{4}$$

$$u(x,0) = \tau(x), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\tau(x)$ — заданные функции, причем

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \tau(0) = \tau(1) = 0.$$

Следует отметить, что задача Дирихле для уравнения (1) при $m = 0$, $\lambda = 0$ исследована в работе [1]. Задача с нелокальным краевым условием на боковых сторонах полуполосы для уравнения (1) в случае $m = 0$ изучена в работе [2].

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i(y) \in C[0,\infty)$, $y^{\frac{3m+2\beta_0}{4}} \varphi_i(y) \in L(0,\infty)$, $|\varphi_i(y)| < \frac{M}{y^\delta}$, $M = \mathrm{const}$, $\delta > 0$, *при* $y \geq y_0$, $i = 1,2$, $\tau(x) \in C[0,1]$, $\tau'(x)$ *абсолютно интегрируема на отрезке* $[0,1]$. *Тогда решение задачи* D *существует и единственно.*

Доказательство. С помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений легко доказать единственность решения задачи D.

Согласно условиям теоремы 1, применив преобразования Ханкеля и метод Фурье, решение задачи D в области D представимо в явном виде

$$u(x,y) = k_2 y^{1-\beta_0} \int\limits_0^1 \tau(t) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{\beta-1} K_{1-\beta}(\lambda r) - r_1^{\beta-1} K_{1-\beta}(\lambda r_1) \right] dt$$

$$+ \frac{2}{m+2} y^{\frac{1-\beta_0}{2}} \left\{ \int\limits_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}} \varphi_1(t) dt \int\limits_0^\infty \frac{sh\left((1-x)\sqrt{\lambda^2+s^2}\right)}{sh\left(\sqrt{\lambda^2+s^2}\right)} \right.$$

$$\times s J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) ds$$

$$\left.+\int\limits_0^\infty t^{\frac{2m+1+\beta_0}{2}}\varphi_2(t)dt\int\limits_0^\infty \frac{sh\left(x\sqrt{\lambda^2+s^2}\right)}{sh\left(\sqrt{\lambda^2+s^2}\right)} s J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2sy^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) J_{\frac{1-2\beta}{2}}\left(\frac{2st^{\frac{m+2}{2}}}{m+2}\right) ds\right\},$$

где $J_\nu(z)$ — функция Бесселя первого рода [3], $K_\nu(z)$ — функция Макдональда [3],

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x \mp t - 2n)^2 + \frac{4y^{m+2}}{(m+2)^2}, \quad k_2 = \frac{(2\lambda)^{1-\beta}(m+2)^{2\beta-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\sqrt{\pi}}, \quad \beta = \frac{2\beta_0+m}{2(m+2)}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шимкович Е. В.* // Литовский математический сборник. 1990. С. 185–195.
2. *Лернер М. Е., Репин О. А.* // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1562–1564.
3. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М., 1974.

УДК 517.956

АНАЛОГ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА

© Ш. Н. Рузиев

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В работе приведены энергетические оценки специального вида, которые для уравнений чётного порядка получены в трудах многих авторов (О. А. Олейник, В. Кондратьев, Г. Иосифьян, А. Шишков и др).

В неограниченной области $G = \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset \{x : x_1 > 0\} \subset R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, рассмотрим уравнение

$$l[L(u)] + B(u) = f(x,t), \tag{1}$$

где $l[\vartheta] = l_0[\vartheta] + \alpha(x,t)\vartheta$, $l_0[\vartheta] = \alpha^k(x,t)\vartheta_{x_k}$;

$$L[u] = K(x,t)u_{tt} + a^{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + a^i(x,t)u_{x_i} + a(x,t)u_t + c(x,t)u;$$

$B(u)$ — дифференциальный оператор 2-го порядка. Предполагается, что повторяющимся индексам ведётся суммирование от 1 до n.

Пусть $K(x,t) \geq 0$ в $\overline{G}$, $a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq d \mid \xi \mid^2$ в $\overline{G}$, $d = \mathrm{const} > 0$.

Для простоты постановки задачи будем считать, что $K(x,t) = K(x,0) = 0$ и положим $\Gamma = \partial\Omega \times (0,T)$.

Рассмотрим уравнение (1) с краевыми условиями

$$u\mid_\Gamma = 0; \quad l_0 u\mid_\omega = 0, \ \omega \subset \Gamma; \tag{2}$$

$$u(x,T) = \lambda u(x,0), \ x \in \Omega, \ \lambda = \mathrm{const} \neq 0. \tag{3}$$

Случай когда G — произвольная область в R^n; $L[u]$ — равномерно эллиптический оператор общего вида; $u = 0$ на ∂G; $l_0 u = 0$ на $\chi \subset \partial G$, исследован в работе [1].

В случае ограниченной области G эта задача рассматривалась в [2].

Пусть $u(x,t)$ — обобщенное решение задачи (1)–(3) в G (см.[2]).

Положим $G(\tau) = G \cap \{x,t : 0 < x_1 < \tau\}$, $S(\tau) = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$.

Теорема. *Если $f(x,t) = 0$ в $G(\tau_2)$, то для любого τ_1, $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$, справедлива оценка*

$$\int\limits_{G(\tau_1)} E(u)\,dxdt \leqslant \Phi^{-1}(\tau_1,\tau_2) \int\limits_{G(\tau_2)} E(u)\,dxdt, \tag{4}$$

где $\int\limits_{\bullet} E(u)\,dxdt$ — интеграл энергии решения; $\Phi(x_1,\tau_2)$ является решением уравнения

$$\Phi'' = \mu(x_1)\Phi, \ \ \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2,$$

с условиями $\Phi(\tau_2,\tau_2) = 1$, $\Phi'(\tau_2,\tau_2) = 0$; $\mu(\tau)$ первое собственное значение однородной задачи Дирихле для некоторого эллиптического оператора на $S(\tau)$.

В некоторых случаях $\mu(\tau)$ можно найти в явном виде через геометрические характеристики области Ω (см.[1]). Оценка (4) получается подстановкой в интегральное тождество пробной функции $\vartheta = u(\psi - 1)\exp\{\frac{t}{T}\ln\lambda^{-2}\}$, где $\psi = (x_1 - \tau_1)\Phi'(\tau_1,\tau_2) + \Phi(\tau_1,\tau_2)$, если $0 \leq x_1 \leq \tau_1$; $\psi(x_1) = \Phi(x_1,\tau_2)$, если $\tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2$; $\psi(x_1) = 1$ если $\tau_2 \leq x_1$, и интегрированием по частям.

Замечание. При получении неравенства (4) мы сталкиваемся с проблемой оценки интегралов от функции вида $p(x,t)u_tu_{x_i}$ так, чтобы $E(u)$ было положительно. Это возможно, например, если $p(x,t)$ достаточно мало [3], либо $\alpha K > 0$ в $[T_+,T]$, $\quad T_+ = \mathrm{const} > 0$, [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хашимов А. Р.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа // УзМЖ. 2001. № 5, 6. С. 63–72.
2. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1990. 140 с.
3. *Кузьмин А. Г.* Неклассические уравнения смешанного типа и их приложения к газодинамике. Л., 1990. 204 с.
4. *Каратопраклиева М. Г.* Регулярное решение одной нелокальной краевой задачи для уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 5. С. 847–857.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 272–273

УДК 517.95

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

© К. Б. Сабитов, А. Х. Сулейманова

Sabitov_fmf@mail.ru, albina1210@mail.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv u_{xx} + yu_{yy} + au_y - b^2u = 0, \tag{1}$$

где a, $b = \mathrm{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные числа.

Как известно [1], что постановка краевых задач для уравнения (1) в области эллиптичности существенным образом зависит от коэффициента a. В связи с этим рассмотрены следующие задачи.

Задача 1. Пусть $0 < a < 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = f(x), \ \ 0 \leq x \leq 1; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = g(x), \ \ 0 \leq x \leq 1; \tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^a u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^a u_y(x,y), \ \ 0 \leq x \leq 1, \tag{7}$$

где f и g — заданные достаточно гладкие функции, причем $f(0) = f(1) = 0$, $g(0) = g(1) = 0$.

Задача 2. Пусть $a \geq 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям (3)–(5) и

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-). \tag{8}$$

Задача 3. Пусть $a > 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$ неограниченную при $y \to 0$, удовлетворяющую условиям (3), (4), (6), (7) и

$$u(x,y) \in C(\overline{D} \backslash \{y = 0\}). \tag{9}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{a-1} u(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^{a-1} u(x,y), \ \ 0 \leq x \leq 1. \tag{10}$$

Задача 4. Пусть $a = 1$. Найти в области D функцию $u(x,y)$ неограниченную при $y \to 0$, удовлетворяющую условиям (3), (4), (6), (9) и

$$\lim_{y\to 0+0} (\ln y)^{-1} u(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (\ln(-y))^{-1} u(x,y), \ \ 0 \leq x \leq 1. \tag{11}$$

$$\lim_{y\to 0+0} y^{\frac{1}{2}} u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^{\frac{1}{2}} u_y(x,y), \ \ 0 < x < 1. \tag{12}$$

В работе при $0 < a < 1$ установлены критерий единственности и существование решения задачи 1.

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (2)–(7), то оно единственно только тогда, когда $\Delta_k(\alpha,\beta) = J_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}}) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})I_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}}) \neq 0$ при всех $k \in N$, где $\overline{Y}_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sin\pi a}(J_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}}) + J_{-(1-a)}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}}))$, $p_k = 2\sqrt{b^2+(\pi k)^2}$, $I_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})$ и $K_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})$ — модифицированные функции Бесселя первого и третьего рода, $J_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})$ и $J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})$ функции Бесселя первого рода.*

Выражение $\Delta_k(\alpha,\beta)$ представим в следующем виде: $\Delta_k(\alpha,\beta) = I_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})\delta_k(\alpha,\beta)$, где $\delta_k(\alpha,\beta) = \frac{K_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})J_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}{I_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})} + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})$.

Лемма 1. *Существуют α и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при всех $\beta > 0$ и больших k справедлива оценка*

$$\inf_k |\sqrt{k}\delta_k(\alpha,\beta)| \geq C_0 > 0. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C^3[0,1]$, $g(x) \in C^{4+\gamma}[0,1]$, где $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ и выполняются условия $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$, $g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = 0$. Тогда задача (2)–(7) однозначно разрешима, если выполнены условия $\Delta_k(\alpha,\beta) \neq 0$ и (13). Это решение определяется рядом $u(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} u_k(y)\sin\pi kx$, где u_k определяются по формуле*

$$u_k(y) = \begin{cases} \dfrac{f_k(\alpha y)^{\frac{1-a}{2}}\Delta_k(\alpha,y) + g_k(\beta y)^{\frac{1-a}{2}}A_k(y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)(\alpha\beta)^{\frac{1-a}{2}}}, & y > 0, \\ \dfrac{\frac{\pi}{2}f_k(-\alpha y)^{\frac{1-a}{2}}B_k(\alpha,-y) + g_k(-\beta y)^{\frac{1-a}{2}}\Delta_k(-y,\beta)}{\Delta_k(\alpha,\beta)(\alpha\beta)^{\frac{1-a}{2}}}, & y < 0, \end{cases}$$

$$\Delta_k(\alpha,y) = J_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})I_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}),$$

$$A_k(y,\beta) = I_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}}) - I_{1-a}(p_k y^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$B_k(\alpha,-y) = \overline{Y}_{1-a}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})J_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}}) - \overline{Y}_{1-a}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})J_{1-a}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}}),$$

$$\Delta_k(-y,\beta) = J_{1-a}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})K_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}}) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{1-a}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})I_{1-a}(p_k\beta^{\frac{1}{2}}),$$

$$f_k = \int\limits_0^1 f(x)\sin\pi kx dx, \quad g_k = \int\limits_0^1 g(x)\sin\pi kx dx.$$

Доказательство проводится на основании работы [2].

В случае $a \geq 1$ решения $u(x,y)$ уравнения (1), вообще говоря, при $y \to 0$ обращается в бесконечность. Показано, что задача 1 в классах функций (8) и (9) переопределена, то есть для выделения единственного решения достаточно задать лишь одно граничное условие на верхнем (5) или нижнем (6) основании прямоугольника D. В связи с этим доказана корректность постановки задач 2–4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кельдыш М. В.* О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 2. С. 181–184.
2. *Сабитов К.Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Докл. АН. 2007. Т. 413, № 1.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 274–275

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© Ю. К. Сабитова

ori05@mail.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - b^2K(y)u = 0\,, \tag{1}$$

где $K(y) = \operatorname{sgn}\, y \cdot |y|^m, m = \text{const} > 0$, $b = \text{const} \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные числа.

Задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup \{x=0\} \cup \{x=1\}) \cap C^2(D_+ \cup D_-), \tag{2}$$

$$Lu(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_-, \tag{3}$$

$$u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad u(1,y) = 0, \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{4}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x), \quad u(x,-\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{5}$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, причем $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

В данной заметке, следуя [1, 2], установлены критерий единственности и существование решения задачи (2)—(5).

Теорема 1. *Если существует решение $u(x,y)$ задачи (2)–(5), то оно единственно только тогда, когда $\forall n \in N$:*

$$\Delta_n(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q) + \frac{\pi}{2}I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q) \neq 0, \tag{6}$$

где $\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q) = (J_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)+J_{-\frac{1}{2q}}(p_ny^q))/\sin\frac{\pi}{2q}, J_{\frac{1}{2q}}(x), J_{-\frac{1}{2q}}(x), I_{\frac{1}{2q}}(x), K_{\frac{1}{2q}}(x)$ — соответственно функции Бесселя I рода, модифицированные функции Бесселя I и III рода порядка $1/2q$, $p_n = \sqrt{b^2+(2\pi n)^2}/q, q = (m+2)/2$.

Пусть при некоторых α, β и $n = k \in N$: $\Delta_k(\alpha,\beta) = 0$. Тогда однородная задача (2)–(5) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения

$$u_k(x,y) = \begin{cases} \Delta_k(\alpha,y)\sqrt{y}(4\lambda_1(1-x)\cos(2\pi kx) + 2\lambda_2(1-x) + 4\lambda_3\sin(2\pi kx)), & y > 0, \\ \Delta_k(-y,\beta)\sqrt{-y}(4\lambda_1(1-x)\cos(2\pi kx) + 2\lambda_2(1-x) + 4\lambda_3\sin(2\pi kx)), & y < 0, \end{cases}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — вещественные постоянные.

Выражение $\Delta_n(\alpha,\beta)$ представим в следующем виде: $\Delta_n(\alpha,\beta) = I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)\delta_n(\alpha,\beta)$, где $\delta_n(\alpha,\beta) = J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)/I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q) + \frac{\pi}{2}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)$.

Лемма. *Существуют α и постоянная $C_0 > 0$ такие, что при всех $\beta > 0$ и больших n справедлива оценка*

$$\inf_n |\sqrt{n}\delta_n(\alpha,\beta)| \geq C_0 > 0. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x) \in C^{3+\alpha}[0,1], 0<\alpha<1,\ \varphi'(0)=\varphi'(1), \psi'(0)=\psi'(1),\ \varphi(1)=\psi(1)=0, \varphi''(0)=\varphi''(1), \psi''(0)=\psi''(1),$ *выполнены условия* (6) *и* (7), *то существует решение задачи* (2)–(5) *и оно представимо в виде суммы ряда*

$$u(x,y)=2(1-x)u_0(y)+4\sum_{n=1}^{\infty}u_n(y)(1-x)\cos(2\pi nx)+4\sum_{n=1}^{\infty}v_n(y)\sin(2\pi nx),$$

где функции $u_0(y), u_n(y), v_n(y)$ *определены соответственно по формулам*

$$u_0(y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_0\sqrt{\alpha y}\Delta_0(\alpha,y)+\psi_0\sqrt{\beta y}A_0(y,\beta)}{\Delta_0(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0,\\ \dfrac{\varphi_0\sqrt{-\alpha y}B_0(\alpha,-y)+\psi_0\sqrt{-\beta y}\Delta_0(-y,\beta)}{\Delta_0(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}\ , & y<0\end{cases}$$

$$u_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\alpha y}[\varphi_{1n}-w_n^+(\beta)]\Delta_n(\alpha,y)+\sqrt{\beta y}[\psi_{1n}-w_n^-(\alpha)]A_n(y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}+w_n^+(y),\\ \dfrac{\sqrt{-\beta y}[\varphi_{1n}-w_n^-(\alpha)]\Delta_n(-y,\beta)+\sqrt{-\alpha y}[\psi_{1n}-w_n^+(\beta)]B_n(\alpha,-y)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}+w_n^-(-y)\ ,\end{cases}$$

$$v_n(y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_n\sqrt{\alpha y}\Delta_n(\alpha,y)+\psi_n\sqrt{\beta y}A_n(y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}, & y>0,\\ \dfrac{\varphi_n\sqrt{-\alpha y}B_n(\alpha,-y)+\psi_n\sqrt{-\beta y}\Delta_n(-y,\beta)}{\Delta_n(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha\beta}}\ , & y<0\ ,\end{cases}$$

где

$$\varphi_n=\int_0^1\varphi(x)\cos(2\pi nx)dx, \psi_n=\int_0^1\psi(x)\cos(2\pi nx)dx, \varphi_{1n}=\int_0^1 x\varphi(x)\sin(2\pi nx)dx,$$

$$\psi_{1n}=\int_0^1 x\psi(x)\sin(2\pi nx)dx, \varphi_0=\int_0^1\varphi(x)dx, \psi_0=\int_0^1\psi(x)dx,$$

$$A_n(y,\beta)=I_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)-I_{\frac{1}{2q}}(p_ny^q)K_{\frac{1}{2q}}(p_n\beta^q),$$

$$B_n(\alpha,-y)=\frac{\pi}{2}(\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)-\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p_n\alpha^q)J_{\frac{1}{2q}}(p_n(-y)^q),$$

функции $w_n^+(y), w_n^-(-y)$ *выражаются через отмеченные выше функции Бесселя.*

Отметим, что построенное решение $u(x,y)$ задачи (2)–(5) принадлежит классу $C^2(\overline{D})$ и функция $u(x,y)$ всюду в D является решением уравнения (1). Линия изменения типа $y=0$ уравнения (1) как особая линия устраняется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев Е. И.* О решении спектральным методом одной нелокальной краевой задачи // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1094–1100.
2. *Сабитов К. Б.* Задача Дирихле для уравнения смешанного типа // Докл. АН. Т. 413. № 1.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 276–277

УДК 517.927.25

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© М. А. Садыбеков, А. М. Сарсемби

makhmud-s@mail.kz, abzhahan@ok.kz

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

Центральное место в спектральной теории дифференциальных операторов занимает вопрос о разложении функций в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов. Если система собственных функций самосопряженного оператора с точечным спектром всегда образует ортонормированный базис, то система собственных функций несамосопряженного оператора может оказаться даже неполной. Тогда приходится их дополнять так называемыми присоединенными функциями. При этом, если u_{k0} — собственная функция, а u_{ki} — соответствующая ей присоединенная функция порядка $i \geq 1$, то присоединенные функции можно выбирать равными $u_{ki} + c_k u_{k0}$.

Обычно, вектор $u_0 \neq 0$ называют собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ_0, если $(A - \lambda_0 E)u_0 = 0$, и вектор u_m называют присоединенным вектором порядка $m \geq 1$, соответствующим тому же λ_0, если $(A - \lambda_0 E)^{m+1} u_m = 0$, $(A - \lambda_0 E)^m u_m \neq 0$. Объединение всех собственных и присоединенных векторов принято называть корневыми векторами оператора А.

Согласно теории присоединенных функций, построенной М. В. Келдышем [1] для обыкновенного дифференциального оператора L порядка n, в случае когда коэффициенты оператора L не зависят от спектрального параметра λ, собственные и присоединенные функции можно определить следующим образом

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0, Lu_1 = \lambda_0 u_1 + u_0, \ldots, Lu_s = \lambda_0 u_s + u_{s-1}. \tag{1}$$

При рассмотрении ряда задач применение этих формул может быть малоэффективным. Так, между соответствующими представлениями операторов L, L^2 или L, L^{-1} отсутствуют простые соотношения.

Кроме того оказывается, что построенная этим способом система собственных и присоединенных функций, в случае когда общее число присоединенных функций бесконечно, может быть базисом при одном выборе присоединенных функций и перестает быть базисом при другом выборе таковых (присоединенные функции могут быть определены с точностью до слагаемого, содержащего предыдущие присоединенные функции) (см., например, [2, 3]). Это обстоятельство побудило В. А. Ильина [2] ввести понятие приведенной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности всякий раз, если только существует хотя бы один выбор присоединенных функций, обеспечивающий базисность всей системы корневых функций. В этой связи в математической литературе встречается термин "при специальном выборе присоединенных функций"[4, 5].

Эти факты говорят о том, что все еще не удается в достаточно широкой степени построить аналог жордановой канонической формы и теории элементарных делителей линейных операторов в конечномерном пространстве. Наличие такой проблемы отмечено также в [6, стр. 470].

В данной работе предлагаются новые формулы построения присоединенных функций дифференциального оператора L (с вполне непрерывным обратным оператором L^{-1}):

$$Lu_{k0} = \lambda_0 u_{k0}, \quad Lu_{ki} = \lambda_k (u_{ki} + \alpha_k u_{ki-1}). \tag{2}$$

При $\alpha_k = \frac{1}{\lambda_k}$ эти формулы совпадают с (1). Другие способы построения присоединенных функций обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков встречаются в работах И. С. Ломова [7], В. Д. Будаева [8] и др. Но в этих работах выбор коэффициента α_k тем или иным образом зависит от порядка оператора. Если в (2) положить $\alpha_k = 1$, то можно избежать зависимости от порядка дифференциального оператора. Поэтому будем считать, что присоединенные функции построены по формуле

$$Lu_{k0} = \lambda_0 u_{k0}, \quad Lu_{ki} = \lambda_k (u_{ki} + u_{ki-1}). \tag{3}$$

Для произвольной системы функций u_{k0}, u_{k1} из класса L^2, несвязанной, вообще говоря, с дифференциальным оператором, справедлива следующая

Теорема. *Пусть система u_{k0}, u_{k1} образует безусловный базис в L^2. Тогда для безусловной базисности в L^2 системы $u_{k0}, u_{k1} + u_{k0}$ необходимо и достаточно выполнение равномерной оценки*

$$\|u_{k0}\|_{L_2} \leq c_0 \|u_{k1}\|_{L_2}, \tag{4}$$

где c, c_0 — произвольные постоянные.

Оценки (4), названные В. А. Ильиным антиаприорными оценками, всегда будут выполнены для оператора

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x),$$

заданного на конечном интервале G, если присоединенные функции построены по формуле (3) и $q(x) \in L_1(G)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11–14.
2. *Ильин В. А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Труды МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148–155.
3. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
4. *Ильин В. А.* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 9. С. 1516–1529.
5. *Кангужин Б. Е.* Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Алматы, 2005. 46 с.
6. *Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. М., 1979. 587 с.
7. *Ломов И. С.* О локальной сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами с негладкими коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 3, С. 328–342.
8. *Будаев В. Д.* Безусловная базисность систем корневых функций обыкновенных дифференциальных операторов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. М., 1993. 242 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 278–279

УДК 517.946

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ И Н-ТЕОРЕМА БОЛЬЦМАНА ДЛЯ ОДНОМЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬЦМАНА ВО 2-М ПРИБЛИЖЕНИИ

© А. Сакабеков*, Е. Аужани

* a.sakabekov@kbtu.kz

Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан

В работе доказано выполнение аналогов закона сохранения массы и Н-теоремы Больцмана в случае одномерной нелинейной системы моментных уравнений Больцмана во 2-ом приближении.

Рассмотрим систему моментных уравнений Больцмана во 2-ом приближении [1]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\varphi_{00}-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_{10}+\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_{02}\Big)=0,\\
&\frac{\partial\varphi_{00}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial\varphi_{01}}{\partial x}=0,\\
&\frac{\partial\varphi_{02}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_{01}\Big)=I_{02}+\lambda_{02}\varphi_{02},\\
&\frac{\partial\varphi_{10}}{\partial t}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(-\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_{01}\Big)=0,\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R},
\end{aligned}\tag{1}$$

где α,λ_{02} — const, $I_{02}=\frac{\sigma_2-\sigma_0}{2}(\varphi_{00}\varphi_{02}-\frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{01}^2)$, σ_2,σ_0 — const.

С помощью ортогонального преобразования систему уравнений (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \sqrt{3}\Psi_3\\ -\sqrt{3}\Psi_4\end{pmatrix}=\frac{\sigma_2-\sigma_0}{6\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{10}(DT\Psi,T\Psi)\\ -2(DT\Psi,T\Psi)\\ -2(DT\Psi,T\Psi)\end{pmatrix},\qquad t>0,\ x\in\mathbb{R},\tag{2}$$

где

$$(DT\Psi,T\Psi)=\left[\sqrt{\frac{2}{5}}\Psi_1-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\Psi_2+\Psi_3+\Psi_4\right)\right]\left[\frac{\sqrt{5}}{3}\Psi_2-\frac{\sqrt{2}}{3}(\Psi_3+\Psi_4)\right]-\frac{(\Psi_4-\Psi_3)^2}{2\sqrt{3}}.$$

Для системы уравнений (2) зададим и начальные условия

$$\Psi_i(0,x)=\Psi_i^0(x),\qquad x\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,4}.\tag{3}$$

Нетрудно доказать, что если начальные функции $\Psi_i^0(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,4}$, то решение задачи (2)–(3) также положительны.

Теорема. *Для системы уравнений (2) имеет место следующий закон сохранения массы и Н-теорема Больцмана*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1+4\Psi_2+\sqrt{10}\Psi_3+\sqrt{10}\Psi_4)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\Big(2\sqrt{3}(\Psi_3-\Psi_4)\Big)=0,\tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Psi_1\ln\Psi_1+4\Psi_2\ln\Psi_2+\sqrt{10}\Psi_3\ln\Psi_3+\sqrt{10}\Psi_4\ln\Psi_4)+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{30}(\Psi_3\ln\Psi_3-\Psi_4\ln\Psi_4)\le 0.\tag{5}$$

Из (4) и (5) получим следующие оценки

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1 + 4\Psi_2 + \sqrt{10}\Psi_3 + \sqrt{10}\Psi_4)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1^0 + 4\Psi_2^0 + \sqrt{10}\Psi_3^0 + \sqrt{10}\Psi_4^0)dx, \qquad \forall t,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1 \ln\Psi_1 + 4\Psi_2 \ln\Psi_2 + \sqrt{10}\Psi_3 \ln\Psi_3 + \sqrt{10}\Psi_4 \ln\Psi_4)dx \le$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (\Psi_1^0 \ln\Psi_1^0 + 4\Psi_2^0 \ln\Psi_2^0 + \sqrt{10}\Psi_3^0 \ln\Psi_3^0 + \sqrt{10}\Psi_4^0 \ln\Psi_4^0)dx, \qquad \forall t.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сакабеков А.* Начально-краевые задачи для системы моментных уравнений Больцмана. Алматы: Ғылым, 2002. 276 с.

УДК 517.9

О ДВУХ МЕТОДАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОДНОЙ НЕКОРРЕКТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

© В. Ж. Сакбаев

fumi2003@mail.ru

Московский физико-технический институт, Долгопрудный

Цель проводимого исследования — сравнить результаты применения методов эллиптической регуляризации и методов минимизации функционалов невязки задачи Коши для уравнения Шредингера с вырожденным производящим оператором:

$$i\frac{d}{dt}u(t) = \mathbf{L}u(t),\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(+0) = u_0,\ u_0 \in H, \tag{2}$$

где H есть гильбертово пространство $L_2(R)$, а $\mathbf{L}$ есть линейный симметричный оператор в пространстве H, заданный дифференциальным выражением

$$\mathbf{L}u(x) = \frac{d}{dx}(g(x)\frac{d}{dx}u(x)) + \frac{i}{2}[a(x)\frac{d}{dx}u(x) + \frac{d}{dx}(a(x)u(x))] \tag{3}$$

на максимальной области определения $D(\mathbf{L})$ — линейном многообразии всех функций из H, для которых дифференциальное выражение (3) определено как элемент пространства H. Здесь рассматривается модельная задача с вырождением на полупрямой: пусть $g(x) = \theta(-x)$ и $a(x) = b\theta(x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда, а $b \in R$ — параметр задачи.

Корректность задачи Коши (1), (2) зависит от знака параметра b: если $b \leq 0$, то оператор $-i\mathbf{L}$ является генератором изометрической полугруппы $\mathbf{U_L}(t) = e^{-it\mathbf{L}},\ t > 0,$ в пространстве H, а задача (1), (2) имеет единственное обобщенное решение $u(t) = \mathbf{U_L}(t)u_0,\ t \in (0,T)$ при любом $u_0 \in H$, которое является сильным решением при $u_0 \in D(\mathbf{L})$. Если же $b > 0$, то оператор $-i\mathbf{L}^*$ генерирует в пространстве H сжимающую полугруппу $\mathbf{U_{L^*}}(t) = e^{-it\mathbf{L}^*} = (\mathbf{U_{-L}}(t))^*,\ t > 0.$ В этом случае пространство H разлагается в прямую сумму подпространств $H_0 = \overline{\mathrm{Im}(\mathbf{U_{-L}}(T))}$ и $H_1 = \mathrm{Ker}(\mathbf{U_{L^*}}(T))$, а задача (1), (2) имеет обобщенное решение тогда и только тогда, когда $u_0 \in H_0$, причем это решение есть $u(t) = \mathbf{U_{L^*}}(t)u_0$ (см. [1]).

Как для изучения устойчивости решения задачи Коши (1), (2), так и с целью определить обобщенное аппроксимативное ее решение в случае нарушения условий корректности, исследуется эллиптическая регуляризация указанной задачи — последовательность задач Коши с начальным условием (2) для уравнений вида (1) с производящим оператором $\mathbf{L}_n,\ n \in \mathbf{N}$. Здесь при каждом $n \in \mathbf{N}$ оператор $\mathbf{L}_n$ определен дифференциальным выражением (3), в котором роль функции $g(x)$ играет функция $g_n(x) = g(x) + \varepsilon_n$ (а $\{\varepsilon_n\}$ — некоторая бесконечно малая последовательность положительных чисел.) Тогда $\mathbf{L}_n$ — самосопряженный оператор, генерирующий унитарную группу $\mathbf{U}_n(t) = e^{-it\mathbf{L}_n},\ t \in R,$ а $\{u_n(t) = \mathbf{U}_n(t)u_0,\ t \in (0,T),\}$ — *последовательность решений регуляризованных задач.*

Теорема 1. *Последовательность решений регуляризованных задач сходится в пространстве $C((0,T),H)$ тогда и только тогда, когда задача (1), (2) имеет единственное решение. В противном случае указанная последовательность сходится в слабой топологии пространства H равномерно на промежутке $(0,T)$ к функции $u^*(t) = \mathbf{U_{L^*}}(t)u_0$.*

Для применения к задаче (1), (2) метода квазирешений (минимизации функционала невязки, см. [2]) представим задачу Коши как уравнение в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2((0,T),H)$ в дифференциальной (A) или в интегральной (B) форме.

Дифференциальная форма задачи Коши (1), (2):

$$\mathbf{A}u - \varphi = 0$$

где $\varphi(t) = i\mathbf{L}u_0,\ t \in (0,T)$, линейный оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $\mathcal{H}$ задан на плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии $D(\mathbf{A}) = \{u(t) \in C((0,T), D(\mathbf{L})) \bigcap C^1((0,T), H)) :\ u(+0) = 0\}$ формулой $\mathbf{A}u(t) = \frac{d}{dt}u(t) + i\mathbf{L}u(t)$. Область определения его сопряженного включает в себя плотное в $\mathcal{H}$ линейное многообразие $D(\mathbf{A}^*_C) = \{u(t) \in C^1((0,T), H) \bigcap C((0,T), D(\mathbf{L}^*)) :\ u(T) = 0\}$.

Интегральная форма задачи Коши (1), (2):

$$\mathbf{B}u - \psi = 0$$

где $\psi(t) = u_0,\ t \in (0,T)$, линейный оператор $\mathbf{B}$ в пространстве $\mathcal{H}$ задан на плотном в $\mathcal{H}$ линейном многообразии $D(B) = C((0,T), D(\mathbf{L}))$ формулой $\mathbf{B}u(t) = u(t) + i\int\limits_0^t \mathbf{L}u(s)ds$. Оператор $\mathbf{B}$ замыкаем, так как его сопряженный определен на плотном в $\mathcal{H}$ линеале $D(\mathbf{B}^*_C) = C((0,T), D(\mathbf{L}^*))$.

Замыкание операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначим через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Функционалы невязки задачи Коши (1), (2) определим как

$$J_A(u) = \|\mathbf{A}u - \varphi\|_{\mathcal{H}},\ u \in D(\mathbf{A}); \qquad J_B(u) = \|\mathbf{B}u - \psi\|_{\mathcal{H}},\ u \in D(\mathbf{B}).$$

Заметим, что семейство ортогональных проекторов $\mathbf{P}(t) = \mathbf{I} - \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(t)\mathbf{U}^*_{-\mathbf{L}}(t),\ t \in (0,T)$ образует ортогональное разложение единичного оператора в подпространстве $H_1(T)$.

Теорема 2. *Пусть $u_0 \in H_1(T)$. Тогда функционал J_A имеет точную нижнюю грань $\alpha = \|f\|_{\mathcal{H}}$, где $f(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)\int\limits_0^T \frac{1}{s}d\mathbf{P}(s)u_0.$ Функция $u_A(t) = \int\limits_t^T \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(s-t)f(s)ds$, к которомой сходится в пространстве $\mathcal{H}$ любая минимизирующая последовательность, является единственной точкой строгого минимума функционал J_A.*

Пусть $u_0 \in H_1(T)$. Тогда функционал J_B имеет точную нижнюю грань $\beta = \|F\|_{\mathcal{H}}$, где $F(t) = \mathbf{U}_{\mathbf{L}^*}(t)\int\limits_0^T \frac{1}{s}d\mathbf{P}(s)\int\limits_0^s \mathbf{U}_{-\mathbf{L}}(\tau)u_0d\tau$. Если функционал J_B достигает минимума на элементе u_B, то u_B есть точка строгого минимума и удовлетворяет уравнению $u_B(t) + i\int\limits_0^t \mathbf{L}u_B(s)ds = u_0 - F(t)$.

Замечание. Итак, задача Коши (1), (2) имеет единственное слабое аппроксимативное решение, не зависященн от выбора регуляризации задачи. Точки минимума функционалов невязки по норме задачи Коши (1), (2) в интегральной и в дифференциальной формах различны, причем значение экстремали функционала в каждой точке промежутка $(0,T)$ зависит от величины T. Аппроксимативное решение $u^*(t)$ доставляет минимум не функционалу невязки нормы, но семейству функционалов невязки полунорм топологии слабой сходимости в пространстве H:

$$j_v(u) = \int\limits_0^T |(v, u(t) - u_0)_H + (\mathbf{L}^*v, i\int\limits_0^t u(s)ds)_H|^2 dt,\ \ v \in D(\mathbf{L}^*),$$

где $D(j_v) = \mathcal{H}$ для любого $v \in D(\mathbf{L}^*)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сакбаев В. Ж.* О функционалах на решениях задачи Коши для уравнения Шредингера с вырождением на полупрямой // ЖВМ и МФ. 2004. Т. 44, № 9. С. 1654–1673.
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 282–283

УДК 517.95

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

© М. С. Салахитдинов

mathinst@uzsci.net

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

Известно, что в последнее время интенсивно исследуются спектральные задачи для уравнений смешанного типа. В большинстве работ, посвященных изучению этих вопросов, спектральный параметр участвует в рассматриваемом уравнении. Однако, как отмечено в [1], спектральные задачи, спектральный параметр которых участвует, как и в уравнении, так и в краевых условиях, также имеет немаловажный интерес. Такие задачи появляются при изучении вопросов прикладного характера, например, вопросов математической биологии и порождаются нелокальными краевыми условиями, которые охватывают различные локальные условия.

Исходя из этих соображений, ранее (например, в [2]) нами были предложены и исследованы некоторые спектральные нелокальные задачи для уравнения смешанного типа

$$\operatorname{sign} x\, u_{xx} + \operatorname{sign} y\, u_{yy} + \frac{2\beta}{|x|} u_x + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \lambda u = 0, \tag{1}$$

краевые условия, которые содержат спектральный параметр λ. В частности, при $0 < \beta < 1/2$ были найдены собственные числа и собственные функции следующей задачи для уравнения (1) в области $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1 \cup OB$, где

$$\Omega_0 = \{(x,y):\, x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\, y > 0\},\ \Omega_1 = \{(x,y): -y < x < y+1,\ x > 0,\, y < 0\},$$

$$OB = \{(x,y): x = 0,\, 0 < y < 1\}.$$

Задача $A_\lambda^1 (\beta < 1/2)$. Найти те значения параметра λ, при которых существует непрерывное в $\overline{\Omega}$ и регулярное в $\Omega_j\, (j = 0,1)$ решение $u(x,y) \neq 0$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

1) $x^{2\beta} u_x(x,y) \in C\left(\Omega_0 \cup OB\right)$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\beta} u_x(x,y) = 0,\ 0 < y < 1$

2) $u(x,y) \in C^1\left(\Omega_0 \cup \sigma_0\right)$; $a\, u(x,y) + b\frac{\partial}{\partial n} u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \sigma_0$;

3) $x^{1-2\beta} A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}} \left\{ x\, D_{0x;x^2}^{\beta} \left[x^{4\beta-2} u\left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)\right]\right\} + cu\,(x,0) = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$;

4) для каждого $x \in (0,1)$ выполняется условие склеивания

$$\lim_{y\to -0} (-y)^{-2\beta} u_y\,(x,y) = \lim_{y\to +0} y^{2\beta} u_y\,(x,y)\,,\ 0 < x < 1,$$

где $a,\, b,\, c$ — заданные действительные числа, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, n — внешняя нормаль к $\sigma_0 = \left\{\, (x,y): x^2 + y^2 = 1,\ x > 0,\ y > 0\,\right\}$,

$$A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}\left[f\,(x)\right] \equiv f\,(x) - \int\limits_0^x f\,(t)\,\frac{t}{x}\frac{\partial}{\partial t} J_0\left(\sqrt{\lambda x\,(x-t)}\right) dt,$$

$$D_{ox;q(x)}^{\delta}\left[f\,(x)\right] \equiv \frac{1}{\Gamma\,(1-\delta)} \cdot \frac{1}{q^{`}(x)}\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{f\,(t)\ q^{`}(t)dt}{\left[q\,(x) - q\,(t)\right]^{\delta}},\ 0 < \delta < 1,$$

$J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода, $\Gamma(\delta)$ — гамма-функция Эйлера.

В данном докладе речь будет идти о полноте системы собственных функций задачи $A_\lambda^1(\beta < 1/2$, т. е. доказана следующая

Теорема. *Пусть* $0 < \beta < 1/2$ *выполнено одно из условий* $a = 0$, $b = 0$, $\{a \cdot b \neq 0\}$, $\{(a/b) - 2\beta + \omega_1 \geq 0\}$. *Тогда задача* $A_\lambda^1(\beta < 1/2)$ *имеет счетное число собственных чисел и собственных функций. Собственные числа определяются как корни* λ_{nm} *уравнений*

$$(\alpha - 2\beta\, b)\; J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}_{nm} r\right) + b\sqrt{\lambda}\, J^{`}_{\omega_\eta}\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0, \quad n \in N,$$

а собственные функции в области Ω_0 *равенством*

$$u_{nm}(x,y) = c_{nm} r^{-2\beta} J_{\omega_n}\left(\sqrt{\lambda}_{nm} r\right)\{F(\beta + \omega_n/2,\ \beta - \omega_n/2,\ \beta + 1/2;\ \sin^2\varphi) +$$

$$\gamma\, k_n\,(\sin\varphi)^{1-2\beta}\, F\left[(1+\omega_n)/2,\ (1-\omega_n)/2,\ \ (3/2) - \beta;\ \sin^2\varphi\right], \quad n,\ m \in N$$

и в области Ω_1 *— как решения видоизмененной задачи Коши для уравнения (1) при* $\lambda = \lambda_{nm}$. *Если* $\beta \in (0, 1/4)$ *и* $c \in I$, *то система собственных функций задачи* $A_\lambda^1(\beta < 1/2$ *полна в* $L_2(\Omega_0)$, *а если* $\beta \in [1/4,\ 1/2)$ *и* $c \in I$, *то полна в* $L_2(\Omega_0)$ *с весом* r^ε $(\varepsilon - const > 2\beta - 1/2)$, *где* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}(y/x)$, $I = (-\infty, -c_2) \cup (-c_1, +\infty)$, $c_1 = \Gamma(2\beta)/\Gamma(\beta)$, $c_2 = c_1(1 + \sin\beta\pi + \cos\beta\pi)$, $\gamma = 1 + c/c_1$, $\zeta = (\gamma + \sin\beta\pi)/\cos\beta\pi$, $k_n = \Gamma(1 - \beta + \omega_n/2)\,\Gamma(\beta + 1/2)\,/\,[\Gamma(\beta + \omega_n/2)\,(-\beta + 1/2)]$,

$$\omega_n = \begin{cases} 2(n-1) + (2/\pi)\operatorname{arctg}\zeta & \text{при } \operatorname{arctg}\zeta > \beta\pi, \\ 2n + (2/\pi)\operatorname{arctg}\zeta & \text{при } \operatorname{arctg}\zeta \leqslant \beta\pi, \end{cases}$$

F *— гипергеометрическая функция Гаусса,* $c_{nm} \neq 0$ *— произвольные числа, причем в [2] в структуре* ω_n *вместо* $\operatorname{arctg}\zeta$ *ошибочно написан* $\operatorname{arcctg}\zeta$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
2. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* // Материалы III Международной конференции “Нелокальные краевые задачи — родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. Нальчик, 2006. С. 251–257.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ, ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ВНУТРИ ОБЛАСТИ

© М. С. Салахитдинов, А. Масутова

mathinst@uzsci.net, milayamaya83@mail.ru

Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$|y|^l u_{xx} - u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = 0, \tag{1}$$

где $l = m$ при $y > 0$, $m > 0$ и $l = n$ при $y < 0$, $-1 < n < 0$.

При $y > 0$ уравнение (1) является уравнением гиперболического типа I рода и $y = 0$ не является характеристикой этого уравнения. При $y < 0$ уравнение (1) является уравнением гиперболического типа II рода и $y = 0$ является огибающей семейства характеристик (1) и, следовательно, характеристикой этого уравнения.

Пусть D — область, ограниченная характеристиками:

$$AC: x - \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} = 0, \qquad AD: x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = 0,$$

$$BC: x + \frac{2}{m+2}y^{\frac{m+2}{2}} = 1, \qquad BD: x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = 1.$$

Введем обозначения: $D_1 = D \cap (y > 0)$, $D_2 = D \cap (y < 0)$, $J = (0,1)$.

Задача A. Найти в области D регулярное решение уравнения (1)

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ u^-(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\begin{aligned} &u^+(x,y)|_{BC} = \psi_+(x), \quad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \\ &u^-(x,y)|_{AD} = \psi_-(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

и условиям склеивания

$$\begin{aligned} &u^+(x,0) = u^-(x,0), \\ &u_y^+(x,0) = -u_y^-(x,0), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\psi_+(x)$, $\psi_-(x)$ — заданные функции.

Теорема 1. *Однородная задача A ($\psi_+(x) = \psi_-(x) = 0$) при выполнении условий*

1) $a(x,y) \leqslant 0$, $b(x,y) \geq 0$, $(x,y) \in D$,

2) $a_x(x,y) < 0$, $b_y(x,y) < 0$, $c(x,y) > 0$, $(x,y) \in D_1$,

3) $a_x(x,y) > 0$, $b_y(x,y) > 0$, $c(x,y) < 0$, $(x,y) \in D_2$

имеет только тривиальное решение.

Задача B. Найти в области D регулярное решение уравнения (1)

$$u(x,y) = \begin{cases} u^+(x,y), & (x,y) \in D_1, \\ u^-(x,y), & (x,y) \in D_2, \end{cases}$$

удовлетворяющее условиям

$$D_{0x}^{\beta_1} x^{2\beta_1 - 1} u\left[\theta_0(x)\right] + u^{+}(x,0) = a_1(x),$$

$$D_{0x}^{1-\beta_2} u\left[\theta_1(x)\right] + u_y^{-}(x,0) = a_2(x),$$

где $2\beta_1 = \dfrac{m}{m+2}$, $2\beta_2 = \dfrac{n}{n+2}$;

$$\theta_0(x_0) = \frac{x_0}{2} + i\left[\frac{m+2}{4}x_0\right]^{\frac{2}{m+2}}, \quad \theta_1(x_0) = \frac{x_0}{2} - i\left[\frac{n+2}{4}x_0\right]^{\frac{2}{n+2}}$$

— аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x_0, 0) \in J$, с характеристиками AC и AD, соответственно; $a_1(x)$, $a_2(x)$ — заданные функции.

Теорема 2. *Задача B при условии, что $a(x,y) = b(x,y) = c(x,y) = 0$ однозначно разрешима.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салахитдинов М. С., Мирсабуров М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами. Ташкент: Universitet, Yangiyo'l poligraf servis, 2005.
2. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа. Москва: Высшая школа, 1985.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 286–287

УДК 517.925

ПСЕВДОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© Ж. С. Сартабанов, З. Ж. Алеуова *

* zaleuova@mail.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(\tau, e\tau + \alpha), \tag{1}$$

где A — постоянная $n \times n$ матрица, собственные значения $\lambda = \lambda(A)$ которой удовлетворяет условию

$$\lambda(A) \neq 2\pi i \sum_{j=0}^{m} k_j \nu_j, \tag{2}$$

для всех $k_j \in Z$ — множество целых чисел, $\nu_j = \omega_j^{-1} > 0$ — частоты, рационально не соизмеримые между собой, $j = \overline{0, m}$, а свободный член $f(\tau, e\tau + \alpha)$ — n-вектор-функция, обладающая свойствами периодичности и непрерывности при $\tau \in R = (-\infty, +\infty), \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m) \in R \times ... \times R = R^m$ вида

$$f(\tau + \theta, t + k\omega) = f(\tau, t) \in C(R \times R^m), \forall k \in Z^m. \tag{3}$$

Здесь $\nu_s = \omega_s^{-1}, s = \overline{0, m}, e = (1, ..., 1) - m$ — вектор, $\theta = \omega_0, \omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ — периоды, $k\omega = (k_1\omega_1, ..., k_m\omega_m), k = (k_1, ..., k_m), Z^m$ — декартова степень множества целых чисел, C — класс непрерывных вектор-функций.

Заметим, что при выполнении условия (2) матрица A наряду с чисто мнимыми собственными значениями указанной формы, не имеет и нулевого собственного значения.

Функция $f(\tau, e\tau + \alpha)$ называется псевдопериодической по τ с периодом (θ, ω), которая при $\alpha = 0$ обращается в квазипериодическую функцию с частотным базисом $(\nu_0, \nu) = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_m)$.

Поставим задачу об исследовании вопроса о существовании псевдопериодических решений системы (1) при условиях (2), (3).

Покажем, что при условии (2) однородная система

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{4}$$

с матрицантом $X(\tau) = exp[A\tau]$ не имеет псевдопериодических решений, кроме тривиального.

Действительно, если система (4) имеет псевдопериодическое решение $x(\tau, \alpha) = \xi(\tau, e\tau + \alpha)$ с периодом (θ, ω), отличное от нулевого, то имеем ряд Фурье вида $\xi(\tau, e\tau + \alpha) \sim \sum\limits_s \xi_s(\alpha) exp\{[s_0\nu_0\tau + \sum\limits_{j=1}^{m} s_j\nu_j(\tau + \alpha_j)]2\pi i\}$, где $s = (s_0, s_1, ..., s_m) \in Z^{1+m}$. Это означает, что матрица A имеет собственные значения, представимые в виде $\lambda(A) = 2\pi i \sum\limits_{j=0}^{m} k_j\nu_j$, что противоречит условию (2).

В дальнейшем, под интегралом $\int\limits_{(\beta,b)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds$ функции $\varphi(\tau,t)$ от многих переменных (τ,t) по прямой $h=s, \lambda=es+\alpha$ с параметром $s\in R$ понимаем разность значений $\Phi(\delta,d)-\Phi(\beta,b)$ первообразной $\Phi(h,\lambda)$ по s, где $(\beta,b),(\delta,d)$ — произвольные точки пространства временных переменных (τ,t). При условии непрерывности $\varphi(\tau,t)$ в $R\times R^m$ легко показать, что ее интеграл обладает свойствами 1) Аддитивности : $\int\limits_{(\beta,b)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds = \int\limits_{(\beta,b)}^{(\sigma,c)} \varphi(h,\lambda)ds + \int\limits_{(\sigma,c)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds$; 2) сдвига переменных (h,λ) на (σ,c): $\int\limits_{(\beta,b)}^{(\delta,d)} \varphi(h,\lambda)ds = \int\limits_{(\beta-\sigma,b-c)}^{(\delta-\sigma,d-c)} \varphi(h+\sigma,\lambda+c)ds$; 3) D — дифференцирования по верхнему пределу $D\int\limits_{(\beta,b)}^{(\tau,t)} \varphi(h,\lambda)ds=\varphi(\tau,t)$, где (σ,c) — произвольная точка пространства переменных (τ,t).

Очевидно, что общее решение $x(\tau,\alpha)$ системы (1) при условии (3) можно представить в виде

$$x(\tau,e\tau+\alpha)=X(\tau)x^0+\int\limits_{(0,\alpha)}^{(\tau,e\tau+\alpha)} X(\tau)X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds, \tag{5}$$

где $x^0=x(0,\alpha,\alpha)$ — начальные данные. В силу соотношения (5) сдвигом переменных $(\tau,t)=(\tau,e\tau+\alpha)$ на периоды (θ,ω) получим опять же решение системы (1) в виде

$$x(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)=X(\tau+\theta)x^0+\int\limits_{(0,\alpha)}^{(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)} X(\tau+\theta)X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds, \tag{6}$$

Если при некотором значении x^0 имеем (θ,ω) — псевдопериодическое решение $x=x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)=x^*(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha,\alpha)$ системы (1), то исключив из системы (5), (6) параметр x^0, пользуясь свойством аддитивности интеграла и с учетом неособенности матриванта $X(\tau)$ получим

$$[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)]x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)=\int\limits_{(\tau,e\tau+\alpha)}^{(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)} X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds.$$

Отсюда учитывая, что в силу условия (2) матрица $X^{-1}(\tau+\theta)\neq X^{-1}(\tau)$ для всех $\tau\in R$, имеем интегральное представление псевдопериодического решения $x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)$ системы (1) в виде

$$x^*(\tau,e\tau+\alpha,\alpha)=[X^{-1}(\tau+\theta)-X^{-1}(\tau)]^{-1}\int\limits_{(\tau,e\tau+\alpha)}^{(\tau+\theta,e\tau+\omega+\alpha)} X^{-1}(h)f(h,\lambda)ds. \tag{7}$$

Единственность этого решения следует из условия (2).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема. *При условиях* (2) *и* (3) *линейная система дифференциальных уравнений* (1) *имеет единственное псевдопериодическое решение с периодом* (θ,ω), *представимое в виде* (7).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 288–289

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© Р. Р. Сафиуллова

Regina-SAF@yandex.ru

Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак

Постановка задач. Пусть $\Omega \subseteq R^n$, $\Gamma = \partial\Omega$, $Q = \{(x,t) : x \in \Omega, 0 < t \leq T\}$, $S = \Gamma \times (0,T)$. Пусть $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h_j(x,t)$, $j = 0,1,\ldots,m$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $u_i(x)$, $i = \overline{1,m}$, $K(t)$, $v_1(x)$ – заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq T$.

$$H_0 = \{v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), v_t(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^1(\Omega)), v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\},$$

$$V_0 = \{v(x,t) : v(x,t) \in H_0, v_t(x,t) \in H_0\}.$$

Задача 1. Найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$,..., $q_m(x)$, удовлетворяющие в Q уравнению

$$u_{tt} - \Delta u + b(x,t)u_t + a(x,t)u = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t)q_k(x) + h_0(x,t) \tag{1}$$

при выполнении для функции $u(x,t)$ условий:

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u(x,t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x,t_k) = u_k(x), \qquad k = 1,\ldots,m, \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{3}$$

Задача 2. Найти функции $u(x,t)$, $q_1(x)$, удовлетворяющие в Q уравнению (1) при $m = 1$, такие, что справедливы условия (2), а также интегральное условие

$$\int_0^T K(t)u(x,t)dt = v_1(x), \qquad x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

Разрешимость задач. Рассмотрим линейную алгебраическую относительно функций $a_1(x)$, ..., $a_m(x)$ систему

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(x)h_i(x,t_k) = v_{tt}(x,t_k) + b(x,t_k)v_t(x,t_k) + a(x,t_k)u_k(x) - \Delta u_k(x) - h_0(x,t_k), \quad k = \overline{1,m}.$$

Предполагая, что определитель системы $d_0(x) \neq 0$ на $\overline{\Omega}$, найдем функции $a_k(x)$:

$$a_k(x) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}(x)v_{tt}(x,t_i) + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ki}(x)v_t(x,t_i) + \mu_k(x), \quad k = 1,\ldots,m,$$

функции $\beta_{ki}(x)$, $\gamma_{ki}(x)$, $\mu_k(x)$ вполне конкретно вычисляются через функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $h_0(x,t)$, $h_k(x,t)$, $u_k(x)$, $k = 1,\ldots,m.$ Положим также

$$s_i(x,t) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t)\beta_{ki}(x), \quad p_i(x,t) = \sum_{k=1}^{m} h_k(x,t)\gamma_{ki}(x),$$

$$g(x,t)=\sum_{k=1}^{m}h_{kt}(x,t)\mu_k(x)+h_{0t}(x,t),\quad \alpha(x,t)=\frac{h_1(x,t)}{\int\limits_0^T K(t)h_1(x,t)dt}.$$

Теорема 1. *Пусть*

1) $a(x,t),b(x,t)\in C^2(\overline{Q})$, $h_k(x,t)\in W^1_\infty(Q)\cap W^2_2(Q)$, $h_{kt}(x,t)\in W^1_\infty(Q)$, $h_{ktt}(x,t)\in L_2(Q)$, $h_k(x,t_i)\in W^1_\infty(\Omega)$, $k=0,1,\ldots,m$, $i=1,\ldots,m$, $\varphi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\psi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $u_k(x)\in W^3_2(\Omega)\cap W^2_\infty(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $g(x,t)\in L_2(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, $k=1,\ldots,m$,

2) $d_0(x)\geq \overline{d_0}>0$, $a(x,t)\geq 0$, $b(x,t)\geq b_0>0$, $b_t(x,t)+a(x,t)>0$, $(x,t)\in\overline{Q}$;

3) $\exists\delta_0>0,\delta_1>0$ *такие, что выполняются следующие условия*

$$\overline{b_0}=b_0-(m+1)\delta_1^2-\frac{\delta_0^2}{2}-\frac{1}{2}\max_{\overline{Q}}\left[(b_t(x,t)+a(x,t))_t\right]-\frac{T^2}{2\delta_0^2}\max_{\overline{Q}}a_t^2(x,t)>0;$$

$$\frac{1}{2}-\frac{m(2m+1)}{2}vrai\max_{\overline{\Omega}}\left[s_i^2(x,0)\right]-\frac{Tm(m+1)}{2\delta_1^2}vrai\max_{\overline{Q}}\left[s_{it}^2(x,t)\right]>0;$$

$$\frac{1}{2}\min_{\overline{Q}}\left[b_t(x,t)+a(x,t)\right]-\frac{m(2m+1)}{2}vrai\max_{\overline{\Omega}}\left[p_i^2(x,0)\right]-\frac{Tm^2}{2\delta_1^2}vrai\max_{\overline{Q}}\left[p_{it}^2(x,t)\right]>0.$$

Тогда обратная задача (1)–(3) имеет решение $\{u(x,t),q_1(x),\ldots,q_m(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V_0$, $q_k(x)\in W^1_2(\Omega)$, $k=1,\ldots,m.$

Теорема 2. *Пусть*

1) $a(x,t),b(x,t)\in C^1(\overline{Q})$, $K(t)\in C^1[0,T]$, $h_1(x,t)\in L_\infty(Q)$, $h_{1t}(x,t)\in L_\infty(Q)$, $h_0(x,t)\in L_2(Q)$, $h_{0t}(x,t)\in L_2(Q)$, $v_1(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\varphi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$, $\psi(x)\in W^2_2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$.

2) $a(x,t)\geq 0, b(x,t)\geq b_0>0, a_t(x,t)\leq 0, (x,t)\in\overline{Q}$;

3) $\exists\delta_0>0,\delta_1>0,\delta_2>0,\delta_3>0$ *такие, что* $1-\delta_1^2K^2(T)>0$;

$$b_0>\frac{\delta_0^2}{2}+\left[\frac{1}{2\delta_1^2}+\frac{1}{2\delta_2^2}+\frac{1}{2\delta_3^2}\right]\max_{\overline{Q}}\alpha^2(x,t)+\frac{\delta_2^2}{2}\max_{\overline{Q}}(bK-K_t)^2+\delta_3^2T^2\max_{\overline{Q}}(aK)^2.$$

4) $\left|\int\limits_0^T K(t)h_1(x,t)dt\right|\geq k_0>0,\quad x\in\overline{\Omega}.$

Тогда обратная задача (1), (2), (4) *имеет решение* $\{u(x,t),q_1(x)\}$ *такое, что* $u(x,t)\in V_0$, $q_1(x)\in L_2(\Omega)$.

Идея доказательств обеих теорем состоит в следующем. Рассматриваемые обратные задачи сводятся к прямым нелокальным краевым задачам для “нагруженных” уравнений составного типа [1, 2]. При решении полученных задач используются методы продолжения по параметру, регуляризации и метод априорных оценок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. VSP, Utrecht, 1999.
2. *Сафиуллова Р. Р.* Нелокальные задачи для одного класса уравнений составного типа // Мат. заметки ЯГУ. 2004. Т. 11, № 2. С. 57–72.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 290–291

УДК 517.9

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОРОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА – ХОПФА

© М. С. Сгибнев

sgibnev@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работах [1, 2] исследовалось однородное уравнение Винера – Хопфа

$$S(x)=\int\limits_0^\infty k(x-y)S(y)\,dy, \qquad x>0, \tag{1}$$

где $S(x)$ — неизвестная функция, а $k(x)$ — плотность некоторого симметричного распределения вероятностей F.

Функция $S(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), называется P^**-решением* уравнения (1), если она не убывает, непрерывна справа, не обращается всюду в нуль и $S(x)=0$ при $x<0$.

В работе [1] доказано существование единственного P^*-решения $S(x)$ уравнения (1) с нормировкой $S(0+)=1$. Элементарные асимптотические свойства решения установлены в [1, 2].

Перепишем уравнение (1) в виде

$$S(x)=\int\limits_{-\infty}^x S(x-y)k(y)\,dy, \qquad x>0.$$

Мы будем рассматривать уравнение более общего вида

$$S(x)=\int\limits_{-\infty}^x S(x-y)\,F(dy), \qquad x\geqslant 0, \tag{2}$$

где F — распределение вероятностей в $\mathbb{R}$. Назовём уравнение (2) *однородным обобщённым уравнением Винера – Хопфа*, чтобы отличить его от классического однородного уравнения Винера – Хопфа (1).

Опишем класс распределений вероятностей F, для которых будет установлено существование P^*-решения однородного обобщённого уравнения Винера – Хопфа.

Пусть X_k, $k\geqslant 1$ — независимые случайные величины с одним и тем же распределением F, не сосредоточенным в нуле. Эти величины порождают случайное блуждание $S_0=0$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$, $n\geqslant 1$. Существуют только два типа случайных блужданий: 1) осциллирующий тип (S_n колеблется с вероятностью единица между $-\infty$ и $+\infty$); 2) уходящий тип (S_n стремится либо к $-\infty$, либо к $+\infty$ с вероятностью единица). Если существует математическое ожидание $\mathsf{E}X_1:=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,F(dx)$, то при $\mathsf{E}X_1=0$ случайное блуждание $\{S_n\}$ будет осциллирующим, а при $\mathsf{E}X_1>0$ ($\mathsf{E}X_1<0$) случайное блуждание уходит в $+\infty$ (в $-\infty$).

Мы исследуем уравнение (2) с произвольным распределением F, порождающим случайное блуждание осциллирующего типа. Симметричные плотности вероятностей, рассматривавшиеся в работах [1, 2], приводят к случайным блужданиям осциллирующего типа.

Положим $\mathcal{T}_+ := \min\{n \geqslant 1\colon S_n > 0\}$ и $\mathcal{H}_+ := S_{\mathcal{T}_+}$. Обозначим через F_+ распределение случайной величины $\mathcal{H}_+$. Пусть U_+ — мера восстановления, порождённая распределением F_+, т. е. $U_+ := \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{n*}$, где F_+^{n*} — n-кратная свёртка распределения F_+ и F_+^{0*} — атомическая мера единичной массы, сосредоточенная в нуле. Функция восстановления, порождённая распределением F_+, определяется как $U_+(x) := U_+((-\infty, x])$.

Теорема. *Предположим, что F — распределение вероятностей осциллирующего типа. Тогда функция восстановления $U_+(x)$, порождённая распределением F_+ первой лестничной высоты $\mathcal{H}_+$, является P^*-решением однородного обобщённого уравнения Винера – Хопфа* (2), *обладающим нормировкой $U_+(0+) = 1$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Spitzer F.* The Wiener – Hopf equation whose kernel is a probability density // Duke Math. J. 1957. V. 24. P. 327–343.
2. *Spitzer F.* The Wiener – Hopf equation whose kernel is a probability density. II // Duke Math. J. 1960. V. 27. P. 363–372.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 292–293

УДК 517.984.54

ОБ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ВОЗМУЩЕННОЙ СТЕПЕНИ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА НА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДЕ

© А. И. Седов*, Г. А. Закирова

* sedov@masu.ru

Магнитогорский государственный университет, Магнитогорск

Пусть $\Pi = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\ :\ 0 \leqslant x_j \leqslant a_j,\ j = 1, \ldots, n\},\ a_j > 0$. В пространстве $L_2(\Pi)$ рассмотрим оператор Лапласа T_0, порожденный краевой задачей Дирихле:

$$-\Delta v = \lambda v, \quad v|_{\partial\Pi} = 0, \quad \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Введем оператор $T = \int\limits_0^\infty \lambda^\beta dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — спектральное разложение единицы, $\beta \geq \dfrac{n}{2}$, $\lambda^\beta > 0$ при $\lambda > 0$. Упорядоченные по возрастанию собственные числа $\lambda_m = \lambda_{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}$ оператора T будем нумеровать одним нижним натуральным индексом и одним верхним, при этом верхний индекс будет отвечать за кратность ν_t собственного числа λ_t, т. е. $\lambda_t = \lambda_t^k = \lambda_t^j$, $k = \overline{1, \nu_t}$.

Введем также следующие обозначения: $r_t = \dfrac{1}{2}\min\{\lambda_{t+1} - \lambda_t; \lambda_t - \lambda_{t-1}\},\ t > 1$; $r_1 = \dfrac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1)$; $r_0 = \inf\limits_t r_t$; $s_1^2 = \sum\limits_{t=1}^{\infty} r_t^2 \max\limits_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^4,\ s_2^2 = \sum\limits_{t=1}^{\infty} \dfrac{r_t^2}{(r_t - r)^4}$, $s_\infty = \sum\limits_{t=1}^{\infty} r_t \max\limits_{\lambda \in \gamma_t} \|R_0(\lambda)\|_2^2,\ \gamma_t = \{\lambda : |\lambda_t - \lambda| = r_0\},\ V = \prod\limits_{j=1}^{n} a_j$.

Введем в рассмотрение следующую систему функций:

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2^n}{V}} \prod_{j=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi m_j x_j}{a_j}\right),$$

где $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $m_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Пусть* $\beta > \dfrac{3n}{4}$, $r < \min\{r_0, \dfrac{1}{s_1\sqrt{2^n}}\}$, $\omega = 2^n s_1 r$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_t^k\}$ *выполняется неравенство:*

$$\sqrt{2^n V} \left(\sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \frac{r}{2}(1 - \omega),$$

то существует функция $p \in L_2(\Pi)$, *такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\nu_t} \xi_t^k = \sum_{k=1}^{\nu_t} \mu_t^k, \tag{1}$$

где $\sigma(T+P) = \{\mu_t^k\}$, P — оператор умножения на функцию $p \in L_2(\Pi)$, причем

$$p(a_1 - x_1, x_2, \ldots, x_n) = p(x_1, a_2 - x_2, \ldots, x_n) = \ldots = p(x_1, x_2, \ldots, a_n - x_n) = p(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (2)$$

для почти всех $x \in \Pi$,

$$(p, \varphi_m)_{L_2(\Pi)} = 0, \quad \text{при } \prod_{j=1}^{n} m_j = 0, \; m_j = 0, 1, \ldots, \quad (3)$$

$$\|p\|_{L_2(\Pi)} \leqslant \frac{r}{2}.$$

Теорема 2. *Пусть* $\beta > n$, $r < \min\{r_0, \dfrac{1}{s_\infty 2^n}\}$, $\omega = 2^n s_\infty r$. *Если для комплексной последовательности* $\{\xi_t^k\}$ *выполняется неравенство:*

$$2^n \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\nu_t} |\xi_t^k - \lambda_t| < \frac{r}{2}(1-\omega),$$

то существует потенциал $p \in L_\infty(\Pi)$, *такой, что для любого* $t \in \mathbb{N}$ *выполняется* (1), *причем имеют место свойства* (2), (3) *и*

$$\|p\|_{L_\infty} \leqslant \frac{r}{2}.$$

Теорема 3. *Пусть* a_j^2/a_k^2 *— иррациональное число,* $k \neq j$ *и* P *– оператор, найденный в теореме 2. Если* $r < \dfrac{\sqrt{V}}{2^{n+2} s_2}$, *то этот оператор единственный.*

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 294–294

УДК 517.43

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА

© В. И. Семенов

semvi@kuzstu.ru

Кузбасский государственный технический университет, Кемерово

Интенсивное изучение уравнений Навье – Стокса велось в течение последнего столетия многими авторами (см., например, [1] и имеющуюся там библиографию). В задаче Коши

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i u_{k,i} = \nu \Delta u_k + P_{,k}, \quad \mathrm{div} u = 0, \quad u(0,x) = \phi(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где отображение ϕ принадлежит классу $C^\infty(R^n)$ и удовлетворяет условию роста $|D^\alpha \phi(x)| \geq C(\alpha, m)(1 + |x|)^{-m}$ при любом натуральном значении m, мы изучаем некоторые свойства ее гладких решений. Определяя соленоидальные векторные поля S^m формулами: $S^0(x) = \phi(x)$, $S_k^1 = -\sum_{i=1}^n \phi_i \phi_{k,i} + \nu \Delta \phi_k - P^1_{,k}$, $k = 1, 2, \ldots, n,$

$$S_k^{m+1} = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} C_m^p S_i^p S_{k,i}^{m-p} + \nu \Delta \S_k^m - P^m_{,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

доказываем следующее их свойство.

Теорема 1. *Для любых натуральных чисел k и m скалярные произведения элементов S^k, S^m в пространстве $L_2(R^n)$ удовлетворяют равенствам:* $(S^k, S^{m+1}) + (S^m, S^{k+1}) = 2\nu(\Delta S^m, S^k)$.

Опираясь на данную теорему, выводим аналогичное равенство для произвольного гладкого решения рассматриваемой задачи Коши, если это решение вместе со своими производными является элементом соболевского пространства $W_2^l(R^n)$. В качестве следствия имеем обобщение результата Дж. Серрина оценок норм производных гладких решений на произвольную размерность, которые им доказаны в случае $n = 2$.

Еще один аспект связан с оценкой отклонения гладкого решения от своего многочлена Тейлора.

Теорема 2. *Если гладкое решение задачи Коши в каждый фиксированный момент времени t принадлежит соболевскому классу $W_2^{l+1}(R^n)$, то имеет место асимптотическое равенство: $\|u - v^l\|_{W_2^l(R^n)} = O(t^{l+0,5})$ при $t \to 0$, где v^l — многочлен Тейлора гладкого решения u относительно t в точке $t_0 = 0$.*

Замечание. В классе квазиконформных деформаций имеет место единственность решения задачи Коши. Условие квазиконформности означает ограниченность тензора напряжений соленоидальных деформаций, что является естественным с физической точки зрения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Издание второе. М: Наука, 1970.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 295–296

УДК 539.374

ЭВОЛЮЦИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© С. И. Сенашов, О. В. Гомонова

sen@sibsau.ru, gomonova@mail.ru

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

Многие процессы, проходящие в сплошных средах, описываются системами дифференциальных уравнений гиперболического типа. Теория пластичности не является исключением. Часть систем уравнений для плоских задач теории пластичности (а также некоторых других) имеет гиперболический тип. Более того, ряд авторов считает [1], и это подтверждено экспериментально, что гиперболичность уравнений теории пластичности — это неотъемлемое свойство систем, описывающих реальные пластические процессы.

В теории пластичности, как, собственно, и в любой области, где приходится решать и исследовать нелинейные дифференциальные уравнения, всегда слишком мало точных решений, годных для описания реальных процессов. Численные результаты, конечно, важны, но они всегда применимы только для конкретной задачи, часто вызывают сомнение в их истинности и не дают той общности взгляда на проблему, как точные решения.

Ниже предложен способ увеличения количества точных решений для систем гиперболических уравнений.

Многие двумерные системы уравнений гиперболического типа [2] допускают оператор вида:

$$X = \xi(u,v)\partial_x + \eta(u,v)\partial_y$$

в смысле Ли. Здесь u, v - зависимые переменные, x, y - независимые переменные, (ξ, η) – произвольное решение некоторой линейной системы уравнений. А это, в свою очередь, означает, что исходная система допускает преобразование вида:

$$x' = x + a\xi(u,v), \quad y' = y + a\eta(u,v), \tag{1}$$

где a — групповой параметр. Преобразование (1) переводит систему уравнений в себя, а, следовательно, каждое решение системы преобразуется снова в решение этой же системы для каждого значения параметра a .Тем самым, из одного точного решения мы получаем целый класс точных решений. Построенному семейству решений присущ один недостаток (он раньше останавливал исследователей): все решения этого класса являются неявными и часто имеющими сложную структуру. Поэтому авторы доклада предлагают определять и строить не сами решения, а характеристики. Характеристики не только полностью определяют решение, но и являются важным параметром описываемого решением механического процесса. Эта методика позволяет наблюдать за эволюцией характеристики под действием групповых преобразований. Она была использована для ряда систем уравнений теории пластичности и позволила описать некоторые важные механические процессы, которые до сих пор не имели аналитического описания. К ним, в частности, относится описание сжатия пластического слоя жесткими плитами без ограничения толщины слоя.

Рассмотрим в качесве примера систему уравнений идеальной пластичности:

$$\begin{cases} \sigma_x - 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) = 0, \\ \sigma_y - 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где σ — гидростатическое давление, θ — угол между осью Ox и первым главным направлением тензора напряжений, k – постоянная пластичности. Индекс внизу означает дифференцирование по соответствующей переменной. Эта система допускает оператор вида:

$$X = \xi(\sigma,\theta)\partial_x + \eta(\sigma,\theta)\partial_y,$$

где (ξ,η) — произвольное решение системы

$$\begin{cases} \xi_\theta - 2k(\xi_\sigma\cos 2\theta + \eta_\sigma \sin 2\theta) = 0, \\ \eta_\theta - 2k(\xi_\sigma\sin 2\theta - \eta_\sigma \cos 2\theta) = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Известно, что характеристики системы (2) имеют следующий вид:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\theta, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg}\theta.$$

На решении Прандтля для системы (2)

$$\sigma = -kx + k\sqrt{1-y^2}, \quad \theta = \frac{1}{2}\arccos(y)$$

эти характеристики записываются следующим образом:

$$x = \pm 2\theta + \sin 2\theta, \quad y = \cos 2\theta.$$

Учитывая сказанное выше, последние уравнения могут быть преобразованы к виду:

$$x = \pm 2\theta + \sin 2\theta + a\xi, \quad y = \cos 2\theta + a\eta.$$

В работе, согласно предложенной методике, авторами построены характеристики решения Прандтля, соответствующие различным значениям параметра a и различным (ξ,η) — решениям системы уравнений (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. М.: Физматлит, 2001. С. 10–11.
2. *Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: изд-во СО РАН, 2001. С. 117–118.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 297–298

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ

© С. Я. Серовайский

serovajskys@mail.ru

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

При решении задач оптимального управления и обратных задач математической физики для получения необходимых условий экстремума или вычисления градиента функционала возникает необходимость в дифференцировании решения рассматриваемой системы по параметру, играющему роль управления или идентифицируемой величины. Пусть, к примеру, в открытой ограниченной области Ω n-мерного евклидова пространства рассматривается однородная задача Дирихле для уравнения

$$-\triangle u+|u|^p u=f.$$

Из теории монотонных операторов следует, что рассматриваемая краевая задача имеет единственное решение $u=u(f)$ из пространства $Y=H_0^1(\Omega)\cap L_{p+2}(\Omega)$ для любого f из пространства X, сопряженного к Y. Для доказательства дифференцируемости зависимости $u=u(f)$ в некоторой точке f_0 можно воспользоваться теоремой об обратной функции. Так, если однородная задача Дирихле для линеаризованного уравнения

$$-\triangle u+(p+1)|u_0|^p u=f$$

для любого $f\in X$ имеет единственное решение $u\in Y$, где $u_0=u(f_0)$, то зависимость $u=u(f)$ непрерывно дифференцируема в точке f_0. Для этой задачи легко устанавливается априорная оценка решения в пространстве $Y_*=H_0^1(\Omega)$. Это позволяет доказать, что для всех f из пространства X_*, сопряженного с Y_*, линеаризованное уравнение однозначно разрешимо в пространстве Y_*. Тем самым, если размерность области n и показатель нелинейности p столь малы, что имеет место вложение $H_0^1(\Omega)\subset L_{p+2}(\Omega)$, желаемое свойство линеаризованного уравнения действительно имеет место, а значит, исследуемая зависимость оказывается дифференцируемой.

В отсутствии указанного вложения мы не имеем возможности получить априорную оценку решения линеаризованного уравнения в пространстве $L_{p+2}(\Omega)$. Самое большее, на что можно рассчитывать, так это на оценку его решения в пространстве $Y_0=\{u\in H_0^1(\Omega)|\,|u_0|^{p/2}u\in L_2(\Omega)\}$. Тогда для любого f из пространства X_0, сопряженного с Y_0, это уравнение однозначно разрешимо в пространстве Y_0. Однако этого явно не достаточно для справедливости условий теоремы об обратной функции.

Предположим, однако, что и в отсутствии указанного вложения $H_0^1(\Omega)\subset L_{p+2}(\Omega)$ отображение $u(\cdot):X\to Y$ дифференцируемо хотя бы в смысле Гато в произвольной точке $f_0\in X$. Тогда существует такой линейный непрерывный оператор $D:X\to Y$, что при $\sigma\to 0$ имеет место сходимость $[u(f_0+\sigma h)-u(f_0)]/\sigma\to Dh$ в Y для любого $h\in X$. Переходя к пределу после деления на σ в равенстве

$$-\triangle[u(f_0+\sigma h)-u(f_0)]+[|u(f_0+\sigma h)|^p u(f_0+\sigma h)-|u(f_0)|^p u(f_0)]=\sigma h,$$

приходим к соотношению

$$-\triangle Dh+(p+1)|u_0|^p Dh=h.$$

Таким образом, для любого $f\in X$ линеаризованное уравнение имеет решение $u=Dh$ из множества Y. Предположим теперь, что функция f_0 является столь гладкой, что соответствующее ей решение u_0 исходного уравнения непрерывно. Тогда для любой функции $u\in Y$

левая часть линеаризованного уравнения принадлежит X_*, являющемуся в отсутствии указанного вложения собственным подмножеством X. Тем самым при $f \in X \setminus X_*$ линеаризованное уравнение не может иметь решения из множества Y, что противоречит установленному ранее результату, опирающемуся на гипотезу о дифференцируемости зависимости $u = u(f)$.

Итак, при достаточно малых значениях параметров n и p решение задачи дифференцируемо по свободному члену, а при больших значениях — не дифференцируемо. В частности, можно зафиксировать размерность области и плавно увеличивать показатель нелинейности. При переходе через некоторое критическое значение $p_* = p_*(n)$ справедливое ранее вложение $H_0^1(\Omega) \subset L_{p+2}(\Omega)$ перестает выполняться. Создается впечатление, что при малом изменении параметра p свойства зависимости $u = u(f)$ изменились скачком: дифференцируемость была и исчезла.

Возникает вопрос: не свидетельствует ли полученный результат о том, что дифференцируемость в смысле Гато оказывается слишком грубым инструментом для исследования дифференциальных свойств указанной зависимости? Действительно, ранее было установлено, что линеаризованное уравнения однозначно разрешимо в более слабом смысле и для более узкого класса свободных членов, чем это нужно для применения теоремы об обратной функции, гарантирующей дифференцируемость выше указанной зависимости в классическом смысле. Отметим также, что соответствующие пространства зависят от точки, в которой вычисляется производная. Можно предположить, что справедливость ослабленного варианта условий теоремы об обратной функции гарантирует справедливость некоторой более слабой формы дифференцируемости решения рассматриваемого уравнения по свободному члену. В результате приходим к следующему определению.

Определение. Оператор A, действующий из банахова пространства X в банахово пространство Y, называется *расширенно дифференцируемым* в точке $f_0 \in X$, если существуют такие банаховы пространства X_*, X_0, Y_*, Y_0, удовлетворяющие непрерывным вложениям $X_* \subset X_0 \subset X$, $Y \subset Y_0 \subset Y_*$, и такой линейный непрерывный оператор $D : X_0 \to Y_0$, что имеет место сходимость $[A(f_0 + \sigma h) - Af_0]/\sigma \to Dh$ в Y_* для всех $h \in X_*$.

Отметим, что область определения расширенной производной уже, а область значений — шире по сравнению с производной Гато, причем соответствующая сходимость выполняется в еще более слабой топологии и для еще более узкого класса направлений h. Естественно, при $X_* = X$, $Y_* = Y$ мы получаем обычную производную Гато. Справедливо следующее утверждение:

Теорема. *Зависимость $u = u(f)$ для рассматриваемого уравнения произвольной точке $f_0 \in X$ имеет расширенную производную, определяемую равенством*

$$\int_\Omega gDhdx = \int_\Omega z(g)hdx \; \forall h \in X_0, g \in Y_0',$$

где все пространства определены выше, а функция $z = z(g)$ есть решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\triangle z + (p+1)|u_0|^p z = g.$$

Итак, зависимость решения рассматриваемого уравнения от свободного члена является расширенно дифференцируемой при всех значениях параметров задачи. Отметим, что чем выше значения размерности области и скорости роста нелинейности, тем сильнее пространства, входящие в определение расширенной производной, отличаются от исходных пространств. Таким образом, по мере роста указанных параметров дифференциальные свойства исследуемой зависимости меняются плавно, а не резко.

Полученными результатами можно воспользоваться для решения оптимизационных и обратных задач, связанных с рассматриваемым уравнением. Кроме того, можно доказать теорему о расширенной дифференцируемости обратного оператора, проявлением которой для исследуемого уравнения оказывается указанный выше результат.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 299–300

УДК 517.9

ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФРЕДГОЛЬМОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ

© Н. А. Сидоров

sidorov@math.isu.runnet.ru

Иркутский государственный университет, Иркутск

В некоторых механических, электротехнических и других системах возникают дифференциальные уравнения (обыкновенные и в частных производных) с фредгольмовым оператором в главной части. В теории и приложениях таких задач важно знать условия существования решений, определенных и ограниченных на всей оси (см. [1], [2, гл. 5, 6] и [3]). В данной заметке при условии существования главной оператор-функции Грина (в смысле [5, стр. 119]) у линейного уравнения (3) и отсутствия у фредгольмова оператора B A-присоединенных элементов доказана общая теорема существования и единственности решения уравнения (1), определенного и ограниченного на всей оси.

Рассмотрим уравнение
$$B\dot{x} = Ax + f(t) + \epsilon F(x,t), \tag{1}$$
Здесь замкнутый оператор $B : D \subset E_1 \to E_2$ — фредгольмов, $\bar{D} = E_1$, $A \in L(E_1 \to E_2)$, E_1, E_2 — банаховы пространства, $\{\phi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$, — базисы соответственно в $N(B)$ и $N^*(B)$, $\det < A\phi_i, \psi_k >\neq 0$, f, F — непрерывные по t и по x, а по x оператор F и непрерывно дифференцируем. Введем матрицу $\Xi = [< A\phi_i, \psi_k >]$, непрерывно обратимый оператор $\hat{B} = B + \sum\limits_1^n < A\dot{,}\psi_i > A\phi_i$ и условие:

I. оператор $A - i\mu\hat{B}$ при $\mu \in R^1$ непрерывно обратим.

Лемма. *Если выполнено условие I и* $\sup ||f(t)|| < \infty$, *то при* $\epsilon = 0$ *соответствующее (1) линейное уравнение имеет ровно одно ограниченное на всей оси решение*
$$\bar{x}(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{B}^{-1}G(t-s)f(s)ds - (\Xi^{-1} < f, \psi >, \phi), \tag{2}$$
где $G(t)$ *— главная оператор-функция Грина уравнения*
$$\dot{y} = A\hat{B}^{-1}y. \tag{3}$$

Доказательство. Используя замену $x = \hat{B}^{-1}y + (\xi, \phi)$ с условием
$$< y, \psi >= 0, \tag{4}$$
получим относительно y регулярное уравнение. Последнее в силу экспоненциальной дихотомичности, вытекающей из условия I, имеет на основании теоремы 4.1 из [5, стр. 119] единственное ограниченное решение, определенное на всей оси. Далее условие (4) позволяет однозначно найти вектор-функцию ξ и построить искомое решение (2).

Замечание. Лемма допускает обобщение, если B имеет полный A-жорданов набор.

Теорема. *Пусть выполнены условия леммы,* $sup||F_x^{(i)}|| < \infty, \ \ i = 0, 1, t \in R^1, ||x - \bar{x}|| \leq R.$ *Тогда уравнение (1) имеет единственное ограниченное решение* $x(t, \epsilon) \to \bar{x}(t),$ *при* $\epsilon \to 0, t \in R^1.$

Доказательство следует из леммы и принципа сжимающих отображений.

Замечание. Лемма и теорема позволяют, используя регуляризаторы из [4], строить ограниченные периодические решения уравнения (1) методом последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сидоров Н. А.* Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 1984. Т. 35, № 4. С. 569–578.
2. *Sidorov N. A. et al.* Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis. Kluwer Ac. Publ., 2002.
3. *Чистякова Е. В., Чистяков В. Ф.* К вопросу о существовании периодических решений // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 3. С. 148–158.
4. *Сидоров Н. А., Сидоров Д. Н.* О регуляризации интегро-дифференциальных уравнений // Международная конференция "Тихонов и современная математика". Москва, 2006. С. 256–257.
5. *Далецкин Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. М.: Наука, 1970.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 301–302

УДК 517.95

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ РЕЗОНАНСЕ У ГАМИЛЬТОНОВЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ, ИМЕЮЩИМ НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР

© В. В. Сказка

skazka@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Рассмотрим следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A^2 u + \varepsilon B(\omega t)u \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H. Здесь A — линейный самосопряженный оператор, $B(t)$ — 2π-периодическая оператор-функция. Стандартным способом уравнение (1) может быть представлено в виде гамильтонового уравнения

$$\mathcal{J}\frac{\partial w}{\partial t} = \mathcal{H}(t)w,$$

где $\mathcal{J}$ — обратимый антисимметричный оператор, а $\mathcal{H}$ (гамильтониан) — эрмитов. Уравнение (1) рассматривалось многими авторами. Нас будет интересовать явление так называемого параметрического резонанса, т. е. ситуация, когда при $\varepsilon = 0$ решения уравнения (1) устойчивы, а при любых достаточно малых положительных ε — нет. В том случае, если (1) — система обыкновенных дифференциальных уравнений была построена достаточно полная теория параметрического резонанса [1, 2]. Вопросами устойчивости (1) в различных пространствах и с различными операторами $A, B(t)$ посвящено большое количество работ. Подробную библиографию см., например, [3, 4, 6]. При этом при определенных ω у уравнения (1) при любых ε, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, появляются экспоненциально растущие решения. Но во всех этих работах предполагалось, что у оператора A спектр точечный. В тоже время возникают задачи, когда спектр оператора A является непрерывным [5, 6].

В данной работе строится пример уравнения типа (1), у которого оператор A имеет непрерывный спектр и у которого экспоненциально растущие решения могут появляться только при ε больших, чем некоторое пороговое значение.

В пространстве $L_2(1,2)$ рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + x^2 u - \varepsilon\cos(\omega t)(x-1)(x-2)\int_1^2 (\xi-1)(\xi-2)u(t,\xi)d\xi = 0 \\ &u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = u_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Задача (2), как это следует из общей теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, разрешима для любых u_0 и u_1, причем имеет место оценка $\|u\|_{L_2(1,2)} \leqslant C\left(\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)}\right)e^{\Lambda t}$ с некоторым $\Lambda > 0$.

Наша цель доказать следующее утверждение.

Утверждение. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для задачи (2) при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для любого ω справедлива оценка*

$$\|u(\cdot,t)\|_{L_2(1,2)} \leqslant C(t+1)\left(\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)}\right).$$

Тем самым мы покажем, что для достаточно малых ε у уравнения (2) нет экспоненциально растущих решений и они могут возникать только при ε больших, чем некоторое пороговое значение.

Доказательство. Сведем решение задачи (2) к решению интегрального уравнения. Для этого обозначим

$$v(t) = \int_1^2 (\xi-1)(\xi-2)u(t,\xi)d\xi.$$

Для нахождения $v(t)$ получается интегральное уравнение:

$$v(t) = F(t) + \varepsilon \int_0^t K(t,\tau)v(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_1^2 \left(u_0(x)\cos(xt) + u_1(x)\frac{\sin(xt)}{x} \right)(x-1)(x-2)dx, \\ K(t,\tau) &= \cos(\omega\tau)\int_1^2 (x-1)^2(x-2)^2 \frac{\sin(x(t-\tau))}{x}dx. \end{aligned}$$

Решение уравнения (3) можно выписать в виде ряда по степеняи ε, причем он будет мажорируеться рядом $\left(\|u_0\|_{L_2(0,1)} + \|u_1\|_{L_2(0,1)}\right)(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(8\varepsilon)^n)$, откуда нетрудно получить необходимую оценку.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 06-08-00386), Президиума РАН (программа № 14, проект № 115), Сибирского отделения РАН (проект 1.6, 42).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1964.
2. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987.
3. *Фомин В. Н.* Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
5. *Dorovsky V. N., Belonosov V. S., Belonosov A. S.* Numerical investigation of parametric resonance in water-oil structures conaining gas //Math. Comput. Mod. 2002. V. 36. P. 203–209.
6. *Белоносов В. С., Доровский В. Н., Белоносов А. С., Доровский С. В.* Гидродинамика газосодержащих слоистых систем // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 2. С. 37–70.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 303–304

УДК 519.6:517.589

ДВОЙНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЗАДАЧИ ОРРА – ЗОММЕРФЕЛЬДА ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

© С. Л. Скороходов

skor@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Изучается задача Орра – Зоммерфельда для функции $\varphi(y)$

$$\frac{1}{i\alpha R}\Big(\varphi^{(IV)}(y)-2\alpha^2\,\varphi''(y)+\alpha^4\,\varphi(y)\Big)\;-\;\Big(U(y)-\lambda\Big)\Big(\varphi''(y)-\alpha^2\,\varphi(y)\Big)+U''(y)\,\varphi(y)=0\,,$$

с однородными краевыми условиями $\varphi(\pm 1)=\varphi'(\pm 1)=0$. Здесь аргумент $y\in[-1,\,1]$, параметр $R>0$ — число Рейнольдса, $\alpha>0$ — заданное волновое число, $U(y)$ — функция скорости основного потока жидкости, λ и $\varphi(y)$ — искомые собственные значения (СЗ) и собственные функции.

Для профиля скорости $U(y)$ рассматривают три случая: 1) течение Куэтта $U(y)=y$, 2) течение Пуазейля $U(y)=1-y^2$, 3) общее течение Куэтта – Пуазейля $U(y)=ay^2+by+c$.

Для высокоточного решения задачи разработан аналитико-численный метод, использующий представление решения $\varphi(y)$ в виде комбинации четырех степенных разложений в окрестности граничных точек $y=-1$ и $y=1$:

$$\varphi_{(1,\,2)}(y)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(1,\,2)}(y+1)^{k+2}\,,\qquad \varphi_{(3,\,4)}(y)=\sum_{k=0}^{\infty} e_k^{(3,\,4)}(1-y)^{k+2}\,,\tag{1}$$

где для коэффицентов $d_k=d_k(R,\alpha,\lambda)$ и $e_k=e_k(R,\alpha,\lambda)$ получены однородные рекуррентные уравнения шестого порядка. С помощью теории Пуанкаре – Биркгофа исследована асимптотика решений d_k и e_k при $k\to\infty$. Показано, что в случае течения Куэтта – Пуазейля асимптотика коэффициентов d_k и e_k имеет вид $d_k/d_{k-1}\sim k^{-1/2}$ при $k\to\infty$, а в случае течения Куэтта — $d_k/d_{k-1}\sim k^{-2/3}$ при $k\to\infty$. Таким образом, ряды (1) задают целые функции.

Преставляя решение $\varphi(y)$ в виде комбинации разложений (1) и осуществляя сшивку решений в некоторой выбранной точке $y_*\in(-1,1)$, получаем уравнение для вронскиана Wr:

$$\mathrm{Wr}(\lambda)\;=\;\mathrm{Wr}(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\varphi_4;\;\lambda;\;y_*)\;=\;0\,;\tag{2}$$

это уравнение является основным для вычисления искомого спектра λ.

Для случая течения Куэтта детально исследованы траектории СЗ $\lambda_n(R)$ при изменении числа $R\in(0,\,10^6)$. Численно показано, что функции $\lambda_n(R)$ имеют в окрестности узловой точки $\lambda_*=-i/\sqrt{3}$ счетное множество точек ветвления R_k второго порядка, в окрестности которых пара СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ имеет поведение

$$\lambda_{n,\,m}(R)\;=\;\pm\sqrt{R-R_k}\;\Psi(R)\;+\;\Phi(R)\,,$$

где $\Psi(R)$ и $\Phi(R)$ — регулярные функции в окрестности точки $R=R_k$. При непрерывном увеличении числа $R>0$ пары СЗ $\lambda_n(R)$ и $\lambda_m(R)$ сначала образуют при $R=R_k$ двойные СЗ на мнимой оси, которые затем распадаются на пары простых СЗ, симметричных относительно мнимой оси. При дальнейшем увеличении числа R эти простые СЗ приближаются к своему предельному графу — двум симметричным отрезкам $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, соединяющим точки $\lambda=-1,\ \lambda_*=-i/\sqrt{3}$ и $\lambda=1,\ \lambda_*=-i/\sqrt{3}$.

Процесс образования и распада двойных СЗ соответствует переходу СЗ с нижней ветви спектра, расположенной на мнимой отрицательной оси, на четыре других ветви, окаймляющих отрезки $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Картина распределения СЗ в совокупности составляет портрет "спектрального галстука".

Для вычисления точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$ был разработан специальный итерационный метод. Необходимость его была вызвана тем, что классический метод Ньютона решения уравнения (2) вблизи точек ветвления R_k перестает сходиться, поскольку производная $\mathrm{Wr}'(\lambda) \to 0$ при $R \to R_k$.

Разработанный метод позволил вычислять простые СЗ, точки ветвления и двойные СЗ с точностью до 100 десятичных значащих цифр вплоть до чисел Рейнольдса $R = 10^6$. Было перевычислено большое число имеющихся в литературе результатов для течений Куэтта и Пуазейля. При этом было отмечено, что представленные СЗ λ_n с большими номерами n часто приводятся со значительной погрешностью; работ по точкам ветвления и двойным СЗ найти не удалось.

Приведем значения первых четырех точек ветвления R_k и двойных СЗ $\lambda_{n,m}(R_k)$ для течения Куэтта с волновым числом $\alpha = 1$:

$$R_1 = 61.9177587,\ \lambda_{3,4} = -0.799834981i; \qquad R_2 = 65.5202291,\ \lambda_{1,2} = -0.388160962i;$$

$$R_3 = 205.7777806,\ \lambda_{6,7} = -0.665270089i; \qquad R_4 = 214.4033834,\ \lambda_{6,7} = -0.647397672i.$$

Аналогичная картина образования и распада двойных СЗ для течения Куэтта имела место при изменении волнового числа $\alpha > 0$.

Проведенный численный анализ позволяет предположить, что верна

Гипотеза. *Собственные значения $\lambda_n(R)$ задачи Орра – Зоммерфельда для течения Куэтта, рассматриваемые как функции числа Рейнольдса R при фиксированном $\alpha > 0$, имеют счетное множество точек ветвления второго порядка $R_k > 0$, в которых двойные СЗ $\lambda_n(R_k)$ чисто мнимые отрицательные и справедливо*

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_n(R_k) \to -\frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 07-01-00295, 07-01-00503) и Программы № 3 ОМН РАН.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 305–306

УДК 517.946

ПОСТРОЕНИЕ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫХ И КОНЕЧНЫХ РЕШЕНИЙ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Ж. Н. Тасмамбетов

tasmam@rambler.ru

Актюбинский государственный университет им. К. Жубанова, Актобе, Казахстан

Методом Фробениуса – Латышевой изучен ряд частных случаев специальной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка:

$$\begin{aligned}&\left(a_{00}^{(0)}+a_{10}^{(0)}\cdot x\right)\cdot Z_{xx}+p_1(x)\cdot g_4(y)\cdot Z_{xy}+p_2(x)\cdot Z_x+g_5(y)\cdot Z_y+p_3(x)\cdot Z=0,\\&\left(b_{00}^{(0)}+b_{01}^{(0)}\cdot y\right)\cdot Z_{yy}+g_1(y)\cdot p_4(x)\cdot Z_{xy}+p_5(y)\cdot Z_x+g_2(y)\cdot Z_y+g_3(y)\cdot Z=0,\end{aligned}\tag{1}$$

где коэффициенты

$$p_i(x)=a_{00}^{(i)}+a_{10}^{(i)}\cdot x,\qquad g_i(y)=b_{00}^{(i)}+b_{01}^{(i)}\cdot y,\qquad i=\overline{1,5}\tag{2}$$

$(a_{00}^{(j)},a_{10}^{(j)},b_{00}^{(j)}$ и $b_{01}^{(j)}(j=\overline{0,5})$ — некоторые постоянные), а $Z=Z(x,y)$ — общая неизвестная.

Особые кривые системы (1) определяются приравниванием к нулю коэффициентов при старших производных Z_{xx} и Z_{yy}: $\left(-\frac{a_{00}^{(0)}}{a_{10}^{(0)}};-\frac{b_{00}^{(0)}}{b_{01}^{(0)}}\right)$, $\left(-\frac{a_{00}^{(0)}}{a_{10}^{(0)}};\infty\right)$, $\left(\infty;-\frac{b_{00}^{(0)}}{b_{01}^{(0)}}\right)$ и $(\infty;\infty)$.

Важно определить регулярность и иррегулярность этих особенностей. Метод Фробениуса – Латышевой в зависимости от этих особенностей позволяет построить решения заданной системы, используя понятия ранга $p=1+k$ (k — подранг) и антиранга $m=-1-\chi$ ($\chi-$ антиподранг) системы. Пусть ранг $p>0$, а антиранг $m\le 0$. Тогда для таких систем справедлива:

Теорема. *Система, для которой $p>0,m\le 0$, имеет решение вида*

$$Z=\exp(Q(x,y))\cdot x^{\rho}\cdot y^{\sigma}\cdot\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty}A_{\mu,\nu}\cdot x^{\mu}\cdot y^{\nu},\quad A_{0,0}\neq 0,\tag{3}$$

$$Q(x,y)=\frac{\alpha_{k+1,0}}{k+1}\cdot x^{k+1}+\frac{\alpha_{0,k+1}}{k+1}\cdot y^{k+1}+\ldots+\alpha_{1,1}\cdot xy+\alpha_{1,0}\cdot x+\alpha_{0,1}\cdot y,$$

где $\rho,\sigma,A_{\mu,\nu}$ $(\mu,\nu=0,1,2,\ldots)$ — неизвестные постоянные; $\alpha_{k+1,0},\alpha_{0,k+1},\ldots,\alpha_{1,1},\alpha_{1,0},\alpha_{0,1}$ — неопределенные параметры и причем ряд в правой части (3) сходится вблизи особенности $(0,0)$.

Решение вида (3) называется нормально-регулярным.

В работе изучены несколько важных частных случаев системы (1), (2), решениями которой являются вырожденные гипергеометрические функции двух переменных и ортогональные многочлены Лагерра, Эрмита и других.

Так, при $a_{0,0}^{(0)}=0,b_{0,0}^{(0)}=0$ из (1), (2) выводятся вырожденные гипергеометрические системы Горна $\Phi_2,\Phi_3,\Psi_2,\Gamma_2,H_4,H_5$. Показано, что они имеют нормально-регулярные решения вида

$$Z = \exp(\alpha \cdot x + \beta \cdot y) \cdot x^{\rho} \cdot y^{\sigma} \cdot \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} C_{\mu,\nu} \cdot x^{\mu} \cdot y^{\nu}, \quad C_{0,0} \neq 0, \tag{4}$$

где $\rho, \sigma, C_{\mu,\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$, α, β — некоторые постоянные, которые следует определить.

Решения вида (4) получены в вырожденных гипергеометрических функциях двух переменных.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 307–308

УДК 517.925.5:519.216

О СТОХАСТИЧЕСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

© М. И. Тлеубергенов

marat207@math.kz

Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан

Методом квазиобращения в сочетании с правилом Ито стохастического дифференцирования сложной функции приводится решение одного из вариантов задачи восстановления дифференциальной системы в классе стохастических дифференциальных уравнений по заданным свойствам движения, которые зависят от части переменных. Определяется множество управлений, обеспечивающих необходимые и достаточные условия существования заданного интегрального многообразия.

В работе Еругина [1] строится множество обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которые имеют заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ [2, 3]. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ предложен в [3]. В [4–6] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений.

Пусть задана система дифференциальных уравнений типа Ито

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t), \\ \dot{y} = R(x, y, t) + D(x, y, t)U + \sigma(x, y, t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{1}$$

Требуется определить множество управлений U и множество матриц диффузий σ так, чтобы множество (2)

$$\Lambda(t): \quad \begin{cases} \lambda_1(x, t) = 0, \\ \lambda_2(x, y, t) = 0, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \lambda_1 \in C^{22}_{xt}, \ \lambda_2 \in C^{121}_{xyt}, \tag{2}$$

было интегральным многообразием системы уравнений (1).

Здесь $x \in R^n, y \in R^p, U \in R^r, \xi \in R^k, \lambda_1 \in R^{m_1}, \lambda_2 \in R^{m_2}, m_1 + m_2 = m$, $\{\xi_1(t, \omega), \ldots, \ldots, \xi_k(t, \omega)\}$ — система независимых винеровских процессов [7], заданная на некотором вероятностном пространстве (Ω, U, P).

Предполагается, что вектор-функции $f(x, y, t), R(x, y, t), D(x, y, t)$ непрерывны по t и липшицевы по x, y в области

$$U_H(\Lambda) = \{\gamma = (x^T, y^T)^T : \ \rho(\gamma, \Lambda(t)) < H, \quad H > 0\}, \tag{3}$$

что обеспечивает в (3) существование и единственность до стохастической эквивалентности решения $(x(t)^T, y(t)^T)^T$ уравнения (1) с начальным условием $(x(t_0)^T, y(t_0)^T)^T = = (x_0^T, y_0^T, z_0^T)^T$, являющегося непрерывным с вероятностью 1 строго марковским процессом [7].

Указанная задача в случае отсутствия случайных возмущений $\sigma \equiv 0$ достаточно полно исследована в [3, с. 27], а стохастический случай задачи восстановления с исходным уравнением Ито второго порядка $\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) + D(x, \dot{x}, t)u + \sigma(x, \dot{x}, t)\dot{\xi}$ и заданным множеством вида $\Lambda(t) : \lambda(x, \dot{x}, t) = 0, \ \lambda \in R^m$ (см. в [6]).

Предположим дополнительно, что $f \in C^{121}_{xyt}$.

Для решения задачи в силу стохастического дифференцирования Ито [7] составляются уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 = G_1 + \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(DU_1 + \sigma\dot{\xi}), \\ \dot{\lambda}_2 = G_2 + \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y}(DU_2 + \sigma\dot{\xi}). \end{cases} \tag{4}$$

где $G_1 = \dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t^2} + 2\dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial t \partial x} + \dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial x} f + f^T \dfrac{\partial^2 \lambda_1}{\partial x \partial x} f + \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} R + \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x} S_1, \;\; S_1 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} : \sigma\sigma^T\right],$
$G_2 = \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial t} + \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial x} f + \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y} R + S_2, \;\; S_2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial^2 \lambda_2}{\partial y \partial y} : \sigma\sigma^T\right].$

Далее, следуя методу Еругина [1] вводятся произвольные функции: соответственно m_1- и m_2-мерные вектор-функции A_1, A_2 и соответственно $(m_1 \times k)$ и $(m_2 \times k)$ матрицы B_1, B_2, обладающие свойством $A_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$, $A_2(0,x,y,t) \equiv 0$, $B_1(0,0,x,y,t) \equiv 0$, $B_2(0,x,y,t) \equiv 0$, такие, что имеют место равенства

$$\begin{cases} \ddot{\lambda}_1 = A_1(\lambda_1, \dot{\lambda}_1, x, y, t) + B_1(\lambda_1, \dot{\lambda}_1, x, y, t)\dot{\xi}, \\ \dot{\lambda}_2 = A_2(\lambda_2, x, y, t) + B_2(\lambda_2, x, y, t)\dot{\xi}. \end{cases} \tag{5}$$

На основе уравнений (4) и (5) приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} DU_1 = A_1 - G_1, \\ \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y} DU_2 = A_2 - G_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda_1}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y} \sigma_1 = B_1, \\ \dfrac{\partial \lambda_2}{\partial y} \sigma_2 = B_2, \end{cases}$$

из которых методом квазиобращения [3] с использованием обозначений из [3] определим управляющие параметры $\{U_1\}, \{U_2\}$ и коэффициенты диффузии $\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}$ в виде

$$\begin{cases} U_1 = s_1[H_1 C_1] + (H_1)^+(A_1 - G_1), \\ U_2 = s_2[H_2 C_2] + (H_2)^+(A_2 - G_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_{1i} = s_3[H_3 C_1] + (H_3)^+ B_{1i}, \\ \sigma_{2i} = s_4[H_4 C_4] + (H_4)^+ B_{2i}, \end{cases} \tag{6}$$

где $H_1 = \lambda_{1x} f_y D$, $H_2 = \lambda_{2y} D$, $H_3 = \lambda_{1x} f_y$, $H_4 = \lambda_{2y}$, а σ_{1i}, σ_{2i}, B_{1i}, B_{1i} — i-е столбцы соответственно матриц σ_1, σ_2, B_1, B_2.

Следовательно, справедлива

Теорема. *Для того чтобы система уравнений* (1) *имела заданное интегральное многообразие* (2) *необходимо и достаточно, чтобы множество управлений* $\{U\}$ *и множество коэффициентов диффузии* $\{\sigma\}$ *имели вид* $\{U\} = \{U_1\} \bigcap \{U_2\}, \{\sigma\} = \{\sigma_1\} \bigcap \{\sigma_2\}$, *где* U_1, U_2, σ_1, σ_2 *определяются формулой* (6).

Полученный результат распространяет на класс стохастических дифференциальных уравнений Ито известное в классе обыкновенных дифференциальных уравнений утверждение, доказанное в [3, стр. 27–29].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. 1952. Т. 10, вып. 16. С. 659–670.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. М., 1986. 224 с.
3. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. М., 1986. 88 с.
4. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче динамики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия "Прикладная математика и информатика". М. 1999. № 1. С. 48–51.
5. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Докл. МН-АН РК. Алматы. 1999. № 1. С. 53–60.
6. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37. № 5. С. 714–716.
7. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М., 1990. 632 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 309–310

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧАХ ДИРИХЛЕ И КОШИ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА

© Н. Е. Товмасян, А. О. Бабаян *

* armenak@web.am

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

Рассмотрим эллиптическое уравнение второго порядка с действительными постоянными коэффициентами в полупространстве $\mathbf{R}^3_+ = \{(x,y,t) | t > 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$. Как известно, при помощи линейного невырожденного преобразования неизвестных такое уравнение приводится к уравнению

$$u_{tt} + u_{xx} + u_{yy} - 2au_t - 2bu_x + cu = 0, \quad (x,y,t) \in \mathbf{R}^3_+, \tag{1}$$

где a, b, c — действительные постоянные. В дальнейшем обозначаем $\overline{\mathbf{R}^3_+} = \{(x,y,t) | t \geq 0, (x,y) \in \mathbf{R}^2\}$ и предполагаем, что бесконечно удаленная точка не принадлежит $\overline{\mathbf{R}^3_+}$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3_+$.

Пусть $\alpha \geq 0$ — фиксированное число.

Определение 1. Класс $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ состоит из функций $u \in C(\overline{\mathbf{R}^3_+}) \bigcap C^2(\mathbf{R}^3_+)$, удовлетворяющих на бесконечности оценке

$$|u(x,y,t)| \leq K(1 + x^2 + y^2)^{0{,}5\alpha}(1+t)^\beta, \quad (x,y,t) \in \overline{\mathbf{R}^3_+}, \tag{2}$$

где K и β некоторые положительные постоянные, вообще говоря, зависящие от u. Аналогично определяется класс функций $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ с той лишь разницей, что неравенство (2) заменяется неравенством

$$|u(x,y,t)| \leq K(1 + x^2 + y^2 + t^2)^{0{,}5\alpha}, \quad (x,y,t) \in \overline{\mathbf{R}^3_+}.$$

Очевидно, что $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+}) \subset Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

Определение 2. Класс $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$ состоит из функций f, принадлежащих множеству $C(\mathbf{R}^2)$ и удовлетворяющих на бесконечности оценке

$$|f(x,y)| \leq K_1(1 + x^2 + y^2)^{0{,}5\alpha}, \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2,$$

где K_1 — положительная постоянная.

В работе рассматривается следующая задача Дирихле для уравнения (1).

Определить решение u уравнения (1) из класса $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, удовлетворяющее граничному условию

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2, \tag{3}$$

где f — заданная функция из класса $Q_\alpha(\mathbf{R}^2)$.

Задачу (1), (3) при $f \equiv 0$ будем называть однородной.

В монографии [1] доказано, что в ограниченной области задача Дирихле для уравнения (1) (с аналитическими коэффициентами) фредгольмова и получено условие однозначной разрешимости этой задачи. Эти утверждения И. Н. Векуа получил в двумерном случае, однако они верны и для произвольной размерности и доказываются аналогично. В [2] доказано, что если $c \leq 0$, то задача Дирихле для уравнения (1) в полупространстве корректна в классе обобщенных функций H. В классе $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ задача (1), (3) исследована в [3] и доказано, что при $c \leq 0$

эта задача нетерова. В случае $a = b = c = 0$ в [4] доказано, что задача (1), (3) всегда имеет решение, а соответствующая однородная задача имеет $0,5(n+1)(n+2)$ линейно независимых решений. Здесь и в дальнейшем $n = [\alpha]$.

В представленной работе задача (1), (3) при $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ исследуется в классе $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Если задача (1), (3) нетерова в классе* $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$, *то* $c \leq 0$.

Теорема 2. *Если* $c < 0$ *или* $c = 0$ *и* $a > 0$, *то однородная задача (1), (3) имеет только нулевое решение. При* $c = 0$ *и* $a \leq 0$ *однородная задача (1), (3) имеет* $0,5(n+1)(n+2)$ *линейно независимых решений.*

Теорема 3. *При* $c < 0$ *или* $c = 0$ *и* $a \neq 0$ *неоднородная задача (1), (3) имеет решение в классе* $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ *для* $\alpha \geq 0$. *В случае* $c = a = 0$, $b \neq 0$ *и* $0 \leq \alpha < 0,5$ *неоднородная задача (1), (3) также имеет решение.*

Замечание 1. Мы думаем, что теорема 3 верна и при $c = a = 0$, $b \neq 0$ и $\alpha \geq 0,5$, однако это требует дополнительного исследования.

Замечание 2. Сравнение полученных теорем с результатами работы [3] показывает, что класс $Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$ является более естественным для задачи (1), (3), чем класс $M_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

В работе рассматривается также задача Коши для уравнения (1) при $c = 0$, $a \leq 0$ с полиномиальными данными Коши и доказывается существование и единственность решения этой задачи в классе $Q(\overline{\mathbf{R}^3_+}) = \bigcup\limits_{\alpha \geq 0} Q_\alpha(\overline{\mathbf{R}^3_+})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.: Гостехиздат, 1948. 364 с.
2. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 328 с.
3. *Товмасян Н. Е.* Задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в полупространстве в классе функций полиномиального роста // Дифференциальные уравнения. 1989. Т. 25, № 6. С. 1015–1024.
4. *Товмасян Н. Е.* О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классах функций, имеющих особенности на границе области // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2, № 2. С. 290–312.
5. *Tovmasyan N. E.* Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications in Electrodynamics. World Scientific, Singapore, 1994. 232 p.
6. *Дикополов Г. В.* О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве // Матем. сборник. 1962. Т. 59, № 2. С. 215–228.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 311–312

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© Ж. А. Токибетов

dauyl@kazsu.kz

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

В ряде задач представляет интерес системы, зависящие от некоторого параметра

$$-\Delta u + \lambda \frac{\partial}{\partial x}(u_x + v_y) = 0, \qquad -\Delta v + \lambda \frac{\partial}{\partial y}(u_x + v_y) = 0, \tag{1}$$

где λ — вещественный параметр. Эта система сильно эллиптична при $\lambda < 1$, при $\lambda = 1$ вырождается, а при $\lambda > 1$ она эллиптична, но не является сильноэллиптической, однако при $\lambda = 2$ система (1) сильно связана, а при $\lambda > 1$ и $\lambda \neq 2$ слабо связана [1].

Будем искать решение системы (1) в круге $D \equiv (|z| \leqslant 1)$, когда на его границе S удовлетворяет краевым условиям

$$u = f_1(t), \quad v = f_2(t), \qquad t \in S \tag{2}$$

в вырождающем случае, т. е. при $\lambda = 1$.

Вводя комплексные переменные $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, обозначение $\omega = u + iv$ и производные

$$\frac{\partial \omega}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\},$$

нашу систему (1) перепишем в виде

$$\lambda \frac{\partial^2 \omega}{\partial \overline{z}^2} + (\lambda - 2)\frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial z \partial \overline{z}} = 0. \tag{3}$$

Интегрируя систему (2) относительно $\omega(z)$ в случае $\lambda = 1$ получим

$$\omega(z) = \left(|z|^2 - 1\right)\frac{\Phi'(z)}{z} + \overline{\Phi(z)} + \psi(z), \tag{4}$$

где $\Phi(z)$, $\psi(z)$ — произвольные аналитические функции в круге $\overline{D}$.

Так как на S заданы значения $\omega(z)$ (2), то мы имеем линейную краевую задачу для двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\psi(z)$.

Здесь мы применяем один прямой способ [2] нахождения решения задачи (3), (2), не привлекая на оператора Шварца [3], ни системы сингулярных интегральных уравнений.

Умножим уравнение (4) на

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$$

и проинтегрируем по S:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\omega(t)dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\left(|t|^2 - 1\right)\Phi'(t)}{t\,(t-z)}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\Phi(t)}dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\psi(t)dt}{t-z}.$$

Так как первые два слагаемые в правой части равны нулю, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\omega(t)dt}{t-z} = \psi(z). \tag{5}$$

Теперь вычтя (5) из (4) получим следующее соотношение

$$\omega(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\omega(t)dt}{t-z} = \left(|z|^2 - 1\right)\frac{\Phi'(z)}{z} + \overline{\Phi(z)}. \tag{6}$$

Если точку z стремим к некоторой граничной точке $t_0 \in S$, то оставаясь внутри круга D и используем формулы Сохоцкого – Племеля для предельных значений интеграла типа Коши, а также соотношение $t\overline{t} = 1$ на границе S, получаем на S

$$\frac{\overline{\omega(t_0)}}{2} + \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\omega(t)}\,\overline{dt}}{\overline{t} - \overline{t_0}} = \Phi(t_0). \tag{7}$$

Здесь правой части стоит граничные значение функции, аналитической внутри единичного круга, а в левой части находятся граничные значение изнутри интеграла

$$-\frac{z}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\omega(t)}\,\overline{dt}}{1 - z\overline{t}},$$

а этот интеграл также является функцией, аналитической внутри D. Следовательно, продолжая (7) внутрь единичного круга D, получим равенство

$$-\frac{z}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{\omega(t)}\,\overline{dt}}{1 - z\overline{t}} = \Phi(z). \tag{8}$$

Теперь подставив (8) в (6), получим решение задачи (3), (2):

$$\begin{aligned}\omega(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{f(t)dt}{t-z} + \frac{\overline{z}}{2\pi i}\int_S \frac{f(t)\,dt}{1-\overline{z}t} - \frac{|z|^2-1}{2\pi i\, z}\int_S \frac{\overline{f(t)}\,\overline{dt}}{1 - z\overline{t}} \\ &- \frac{|z|^2-1}{2\pi i}\int_S \frac{\overline{t}\,\overline{f(t)}\,\overline{dt}}{\left(1 - z\overline{t}\right)^2},\end{aligned}$$

где $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Виноградов В. С.* Об одном методе решения краевой задачи для линеаризованной системы уравнений Навье – Стокса в случае плоскости // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 6.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 313–314

УДК 517.956

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ЛОКАЛЬНЫМ СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© А. А. Токова

tokova-aa@yandex.ru

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В области $\Omega = \{(x,y):\ 0 < x < r,\ 0 < y < T\}$ рассмотрим нагруженное [1] уравнение

$$\Big(L_1 + L_2\delta\Big)u = f(x,y), \tag{1}$$

где

$$L_1 \equiv a(y)\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b(y)\frac{\partial}{\partial x} + c(y), \qquad L_2 \equiv A(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + B(y)\frac{\partial}{\partial y} + C(y),$$

$\big(\delta u\big)(y)$ — среднее значение функции $u(x,y)$ по переменной x на сегменте $[0,r]$:

$$\big(\delta u\big)(y) = \frac{1}{r}\int\limits_0^r u(x,y)dx,$$

$a(y) > 0,\ 0 \leqslant y \leqslant T$, $f(x,y)$, $b(y)$, $c(y)$, $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$ — заданные непрерывные функции, $A(y) \neq 0\ \forall\ y \in [0,T]$. Через $\bar{\Omega}$ обозначим замыкание области Ω.

Уравнение (1) в области Ω является уравнением параболического типа с характеристической формой $\Theta(x,y;\xi) = a(y)\xi^2$.

Регулярным решением уравнения (1) в области Ω будем называть решение $u = u(x,y)$, такое, что $u \in C(\bar{\Omega})$, $u_{xx} \in C(\Omega)$, $\big(\delta u\big)(y) \in C^2(0,T)$.

Обозначим $D = b^2(y) - 4a(y)c(y)$; $2\lambda = b(y)/a(y)$; $2p = \sqrt{D}/a(y)$;

$$u_1(x,y) = 2e^{-\lambda x}\mathrm{ch}(px); \quad u_2(x,y) = \frac{1}{p}e^{-\lambda x}\mathrm{sh}(px);$$

$$w(x,y) = \frac{p - e^{-\lambda x}\left[\lambda\,\mathrm{sh}(px) + p\,\mathrm{ch}(px)\right]}{a(y)p(p^2-\lambda^2)};$$

$$F(x,y) = \frac{1}{a(y)p}\int\limits_0^x \mathrm{sh}[p(x-\xi)]e^{\lambda(\xi-x)}f(\xi,y)d\xi.$$

Справедлива следующая лемма об общем представлении решения уравнения (1).

Лемма. *Пусть* $f \in C(\bar{\Omega})$, f_y, $f_{yy} \in C(\Omega)$, $a(y), b(y), c(y) \in C[0,T]\cap C^2(0,T)$, $A(y), B(y)$, $C(y) \in C[0,T]$. *Тогда любое регулярное в области* Ω *решение* $u(x,y)$ *уравнения* (1) *представимо в виде*

$$u(x,y) = Q(x,y) + w(x,y)L_2\big(\delta u\big)(y) + F(x,y),$$

где $\big(\delta u\big)(y)$ *является решением уравнения*

$$\big(\delta u\big)(y)-\big(\delta w\big)(y)L_2\big(\delta u\big)(y)=\big(\delta Q\big)(y)+\big(\delta F\big)(y),$$

функция $Q(x,y)$ *является решением однородного уравнения* $L_1u=0$. *Функции* $\big(\delta u\big)(y)$, $\big(\delta Q\big)(y)$, $\big(\delta w\big)(y)$, $\big(\delta F\big)(y)$ *означают интегральные средние значения по переменной* $x\in[0,r]$ *функций* $u(x,y)$, $Q(x,y)$, $w(x,y)$, $F(x,y)$ *соответственно.*

Справедливо и обратное утверждение.

Рассмотрим следующую краевую задачу с локальным смещением [2].

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u(x,y)$ уравнения (1), такое, что $\big(\delta u\big)(y)\in C^1[0,T)$, u_x непрерывна вплоть до точек $(0,y)$ и (r,y), $0<y<T$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u_x(r,y)=\alpha_1u(0,y)+\alpha_2u(r,y),\quad 0<y<T, \tag{2}$$

$$u_x(0,y)=\beta_1u(0,y)+\beta_2u(r,y),\quad 0<y<T, \tag{3}$$

$$\big(\delta u\big)(0)=\delta_0,\quad \big(\delta u\big)'(0)=\delta_1, \tag{4}$$

где α_i β_i, $(i=1,2)$, δ_0, δ_1 — заданные числа, причем $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$, $\beta_1^2+\beta_2^2\neq 0$.

Условия (2) и (3) были названы В. А. Стекловым [3] условиями первого класса.

Используя метод общих решений и теорию краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка доказана

Теорема. *Пусть соблюдены условия леммы, и выполняются условия*

$$\triangle(y)=\Big(u_{1x}(r,y)-\alpha_1u_1(0,y)-\alpha_2u_1(r,y)\Big)\Big(u_{2x}(0,y)-\beta_1u_2(0,y)-\beta_2u_2(r,y)\Big)$$

$$-\Big(u_{1x}(0,y)-\beta_1u_1(0,y)-\beta_2u_1(r,y)\Big)\Big(u_{2x}(r,y)-\alpha_1u_2(0,y)-\alpha_2u_2(r,y)\Big)\neq 0,$$

и

$$w_x(r,y)\Big[\big(\delta u_1\big)(y)\Big(\beta_1u_2(0,y)+\beta_2u_2(r,y)-u_{2x}(0,y)\Big)$$

$$+\big(\delta u_2\big)(y)\Big(u_{1x}(0,y)-\beta_1u_1(0,y)-\beta_2u_1(r,y)\Big)\Big]$$

$$+w(r,y)\Big[\big(\delta u_1\big)(y)\Big(\alpha_2\big[u_{2x}(0,y)-\beta_1u_2(0,y)\big]+\beta_2\big[\alpha_1u_2(0,y)-u_{2x}(r,y)\big]\Big)$$

$$+\big(\delta u_2\big)(y)\Big(\alpha_2\big[\beta_1u_1(0,y)-u_{1x}(0,y)\big]+\beta_2\big[u_{1x}(r,y)-\alpha_1u_1(0,y)\big]\Big)\Big]\neq-\triangle(y)\big(\delta w\big)(y).$$

Тогда существует единственное решение задачи 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 103–108.
2. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. М., 1995. 301 с.
3. *Стеклов В. А.* Основные задачи математической физики. М., 1983. 432 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 315–315

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА – ДАРБУ

© А. Б. Тунгатаров, А. Ш. Тулегенова

Tun-Mat@list.ru, asemgul-t@rambler.ru

Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Пусть $0 < \varphi_1 \leq 2\pi$ и $G = \left\{ z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty,\ 0 \leq \varphi \leq \varphi_1 \right\}$. Рассмотрим в G уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{m}{2(m+2)} \cdot \frac{1}{z - \bar{z}} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{b(\varphi)\bar{V}}{4r^2}, \tag{1}$$

где $b(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$, $m > 0$ — действительное число.

Многие задачи, возникающие в математической физике, решаются сведением их к уравнению Эйлера – Дарбу (1) при $b(\varphi) = 0$ [1], элементарное решение которого было найдено еще Дарбу [2].

Нами получено одно многообразие непрерывных решений из класса С. Л. Соболева [3]

$$W_p^2(G),\ 1 < p < 2, \tag{2}$$

в виде

$$V(r, \varphi) = r^\nu \left[\bar{c}_1 P_{m,1}(\varphi) + \bar{c}_2 Q_{m,1}(\varphi) + c_1 P_{m,2}(\varphi) + c_2 Q_{m,2}(\varphi) \right], \tag{3}$$

где $\nu = \frac{m}{m+2}$, c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные.

Функции $P_{m,1}(\varphi)$, $P_{m,2}(\varphi)$, $Q_{m,1}(\varphi)$, $Q_{m,2}(\varphi)$ задаются в виде сходящихся рядов, зависящих от $b(\varphi)$, m.

С помощью формулы (3) решена:

Задача D_1. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее условиям:

$$|V(r, \varphi)| = O(r^\nu), \quad r \to \infty, \quad \nu = \tfrac{m}{m+2}$$
$$V(r, 0) = b_0 r^\nu, \quad V(r, \varphi_1) = b_1 r^\nu,$$

где b_0, b_1 — заданные комплексные числа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. *Darboux G.* Partial Differential Equations. New York – London, 1962.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

УДК 517.915

О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

© Б. Х. Турметов*, **Г. О. Дуйсеева**

* turmetovbh@mail.ru

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан

В настоящей работе построена система собственных функций одной вырождающейся краевой задачи для оператора Лапласа и доказана её полнота в пространстве L_2.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}, \partial\Omega = \{x : |x| = 1\}$, $x = (\widetilde{x}, x_n), \widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, $Q = \{|\widetilde{x}| < 1\}, \Gamma = \{|\widetilde{x}| = 1\}$ Рассмотрим в Ω следующую краевую задачу:

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^m u(x)}{\partial x_n^m} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

$$u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \cdots = \frac{\partial^{m-1} u(x)}{\partial x_n^{m-1}}, \quad x \in \Gamma, \tag{3}$$

где $1 \leq m$ — целое число.

Решением задачи (1)–(3) назовем функцию из класса $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ при $m = 1$ и $u(x) \in C^m(\overline{\Omega})$ при $m \geq 1$, удовлетворяющий условиям (1)–(3) в классическом смысле. Задача (1)–(3) представляет собой задачу с наклонной производной в n-мерной области в случае выхода направлении дифференцирования в касательную плоскость. Исследования таких задач было начато в работах А. В. Бицадзе [1] и в дальнейшем проводились в работах различных авторов (см., например, [2, 3]). В работе [4] изучена вырождающаяся краевая задача с оператором высокого порядка. Спектральным вопросам задачи с наклонной производной посвящены работы [5–7] .

Пусть $\{f_k(x)\}$ — система собственных функций задачи Дирихле

$$\Delta f(x) + \lambda f(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$f(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{5}$$

Аналогично, $\{g_i(\widetilde{x})\}$ — система собственных функций следующей задачи Дирихле

$$\Delta g(\widetilde{x}) + \mu g(\widetilde{x}) = 0, \quad \widetilde{x} \in Q, \tag{6}$$

$$g(\widetilde{x}) = 0, \quad \widetilde{x} \in \Gamma. \tag{7}$$

Известно,что задачи (4), (5) и (6), (7) имеют полную в L_2 систему собственных функций $\{f_k(x)\}$ и $\{g_i(\widetilde{x})\}$, соответствующих собственным значениям λ_k и μ_i. В дальнейшем будем предполагать, что

$$\lambda_k \cap \mu_i = \oslash. \tag{8}$$

Пусть $m \geq 2$ и обозначим $t^{m,!} = \frac{t^m}{m!}$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* f_i *и* λ_i *соответственно собственные функции и собственные значения задачи* (4), (5), *а* $W_{k,i}(x)$ *— решения следующих задач:*

$$\widetilde{\Delta} W_{k,m}(\widetilde{x}) + \lambda_k W_{k,m}(\widetilde{x}) = \frac{\partial v(\widetilde{x},0)}{\partial x_n}, \quad \widetilde{x} \in Q, \quad W_{k,m}(\widetilde{x})|_\Gamma = 0, \tag{9}$$

$$\widetilde{\Delta} W_{k,m-1}(\widetilde{x}) + \lambda_k W_{k,m-1}(\widetilde{x}) = -v(\widetilde{x},0), \quad \widetilde{x} \in Q, W_{k,m-1}(\widetilde{x})|_\Gamma = 0, \tag{10}$$

$$\widetilde{\Delta} W_{k,m-i}(\widetilde{x}) + \lambda_k W_{k,m-i}(\widetilde{x}) = -W_{k,m-i+2}, \quad \widetilde{x} \in Q, \quad W_{k,m-i}(\widetilde{x})|_\Gamma = 0, i = 2,3,\ldots,m-1. \tag{11}$$

Тогда функция

$$u_k(x) = \int\limits_0^{x_n} (x_n - t)^{m-1,!} f_k(\widetilde{x},t)dt + \sum_{i=1}^{m} x_n^{i-1,!} W_{k,i}(\widetilde{x})$$

является собственной функцией задачи (1)–(3) *отвечающей собственному значению* λ_k .

Теорема 2. *Любая собственная функция* $g_k(\widetilde{x})$ *задачи* (6), (7) *является собственной функцией задачи* (1)–(3), *отвечающей собственному значению* μ_k .

Доказательства теорем 1 и 2 проверяются непосредственно.

Теорема 3.*Система собственных функций задачи* (1)–(3), *состоящая из двух серий:*

а) *функций* $u_k(x)$, *соответствующих* λ_k *;*

б) *функций* $g_k(\widetilde{x})$, *соответствующих* μ_k *;*

является полной в $L_2(\Omega)$.

Замечание. Отметим,что аналогичные утверждения при $m = 1$ доказаны в работе [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А. В.* Об однородной задаче с наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148, № 4. С. 749–752.
2. *Егоров Ю. В, Кондратьев В. А.* О задаче с косой производной // Математический сборник. 1969. Т. 78, № 1. С. 148–178.
3. *Алимов Ш. А.* О гладкости решения вырождающиеся задачи с косой производной // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 10–22.
4. *Арзикулов А. У.* О гладкости решений вырождающейся краевой задачи для эллиптического уравнение // Узбекский математический журнал. 1991. № 4. С. 18–21.
5. *Базык К. Н.* О собственных функциях задачи с наклонной производной // Вестник МГУ. 1984. Сер. 15, № 3. С. 63–65.
6. *Арзикулов А. У.* О собственных функциях задачи с наклонной производной // Вопросы мат. анализа и его приложения. Самарканд, 1989. С. 4.
7. *Турметов Б. Х.* О собственных функциях одной вырождающейся краевой задачи для эллиптического уравнение четвертого порядка // Узбекский математический журнал. 2003. № 3, 4. С. 117–121.

УДК 517.915

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ГРАНИЧНЫМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© Б. Х. Турметов*, М. Т. Ильясова

* turmetovbh@mail.ru

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Туркестан, Казахстан

В настоящей работе для полигармонического уравнения изучается некоторое обобщение задачи Дирихле и Неймана. В качестве граничного оператора рассматривается оператор дробного дифференцирования по направлению нормали к границе области.

Рассмотрим в области $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ следующую краевую задачу:

$$\Delta^m u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$D^{k+\alpha} u(x) = f_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где m — натуральное число, $0 < \alpha < 1$, а $D^{k+\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана – Лиувилля [1], действующий по направлению вектора нормали $r = |x|$.

Решением задачи (1)–(3) назовем полигармоническую функцию $u(x)$ из класса $C^{2m}(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ такую, что функции $r^{k+\alpha}D^{k+\alpha}u(x)$ принадлежат классу $C(\overline{\Omega})$ и удовлетворяют условиям (2).

Задача (1), (2) представляет собой обобщению известных задач Дирихле и Неймана для полигармонического уравнения [2]. Отметим, что краевые задачи для полигармонического уравнения с граничными операторами высокого порядка были рассмотрены в работах [2, 3]. Кроме того, аналогичные задачи с граничными оператора дробного порядка для уравнения Лапласа изучены в работах [4, 5].

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $0 < \lambda < 1$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda + \alpha$ — *нецелое и* $f_k(x) \in C^{m-1+k+\lambda}(\partial\Omega)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Тогда решение задачи (1), (2) *существует, единственно и принадлежит классу* $C^{m-1+\lambda+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Пусть $u(x)$ полигармоническая функция. По теореме Альманси [6], существуют гармонические функции $v_k(x)$, $k = 0, 1, ..., m-1$, такие, что

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} |x|^{2k} v_k(x).$$

Разлагая гармонические функции $v_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, в ряд по сферическим гармоникам, имеем

$$v_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=1}^{h_k} V_{i,k}^l Y_{i,k}^l(\theta),$$

где $V_{i,k}$ — коэффициенты разложения, а $Y_{i,k}^l(\theta)$ — сферические гармоники порядка k.

Следовательно, для решение задачи (1), (2) имеет место представление

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{l=1}^{h_k} V_{1,k}^l Y_{1,k}^l(\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} r^{k+2} \sum_{l=1}^{h_k} V_{2,k}^l Y_{2,k}^l(\theta) \ldots$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+2(m-1)} \sum_{l=1}^{h_k} V^l_{m-1,k} Y^l_{m-1,k}(\theta).$$

Из этого представления функции $u(x)$ и равенства $D^\alpha r^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} r^{k-\alpha}$, $k = 0, 1, \dots$, легко следует,что функция $v(x) = r^\alpha D^\alpha u(x)$ является полигармонической в области Ω.

Тогда, в силу граничных условий (2), функция $v(x)$ является решением следующей задачи

$$\Delta^m v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$v(x) = f_0(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{4}$$

$$\frac{d^k v(x)}{dr^k} - \sum_{i=0}^{k-1} c_{\alpha,i} \frac{d^i v(x)}{dr^i} = f_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{5}$$

где $k = 1, \dots, m-1$, $c_{\alpha,i}$ — некоторые постоянные зависящие от α. Задача (3)–(5) в свою очередь эквивалентна следующей задаче Дирихле

$$\Delta^m v(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

$$\frac{d^k v(x)}{dr^k} = g_k(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad k = 0, \dots, m-1,$$

где $g_0(x) = f_0(x), g_1(x) = f_1(x) + \alpha f_0(x), g_k(x) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{\alpha,i} f_i(x)$. Очевидно, что функции $g_k(x) \in C^{m-1+k+\lambda}(\partial\Omega)$, $k = 0, 1, \dots, m-1$. Известно (см.[7]), что решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения существует, единственно и принадлежит классу $C^{m-1+\lambda}(\overline{\Omega})$.

Здесь следует отметит, что функции $r^{k+\alpha} D^{k+\alpha} u(x)$ в этом случае принадлежат классам $C^{m-k-1+\lambda}(\overline{\Omega})$, $k = 0, 1, \dots, m-1$.

Далее, из равенства $v(x) = r^\alpha D^\alpha u(x)$ функцию $u(x)$ можно однозначно восстановить по формуле

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{\alpha-1} v(sx)\,ds.$$

Тогда, аналогично как в теореме 1 работы [4], легко показать, что если $v(x) \in C^{\ell+\lambda}(\overline{\Omega})$, то $u(x) \in C^{\ell+\lambda+\alpha}(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что порядок гладкости решения задачи (1), (2) полученный в теореме нельзя улучшить.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применения. Нальчик. 2000. 298 с.
2. *Бицадзе А. В.* О полигармонических функциях. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.
3. *Карачик В. В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32. № 5. С. 51–58.
4. *Турметов Б. Х.* Об одной краевой задаче с граничным оператором дробного порядка // Труды института математики и компьютерной технологии. Ашгабат, 1995. Вып. 4. С. 78–81.
5. *Турметов Б. Х.* О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Труды математики. Новосибирск. 2004. Т. 7, № 1. С. 189–199.
6. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 203 с.
7. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных. М.: ИЛ, 1962. 205 с.

УДК 517.946

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

© Ф. Р. Турсунов

faridun22@rambler.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

В работе предлагается явная формула регуляризованние решения задача Коши для некоторых систем эллиптического типа первого порядка с постоянными коэффициентами в неограниченной области. Строится матрица Карлемана на основе которых строится регуляризованное решение данной задачи, а также доказывается существование решения задачи Коши.

Пусть $x = (x_1, x_2, \dots x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \dots y_m)$ точки m-мерной Евклидового пространства R^m, $m \geq 3$ и $x^T = (x_1, x_2, \dots x_m)^T$ транспонированный вектор x.

Введем следующее обозначения:

$$y' = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1}),\ x' = (x_1, x_2, \dots x_{m-1}),$$

$$r = |y - x|, \alpha = |y' - x'|, \alpha^2 = s,$$

$$w = i\sqrt{u^2 + \alpha^2} + y_m, u \geq 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T,$$

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots u_n(x))^T,\ u^0 = (1, 1, \dots, 1) \in R^n,$$

$E(x)$ — диагональная матрица, ω_m — площадь поверхности единичной сферы R^m.

Через $A_{l\times n}(x)$ обозначим класс матриц $D(x^T)$, элементами состоящими из линейной формы с постоянными коэффициентами из C, который удовлетворяет условию:

$$D^*(x^T)D(x^T) = E(|x|^2 u^0),$$

где $D^*(x^T)$ — сопряженная эрмитова матрица $D(x^T)$.

Пусть граница области G_ρ состоит из гиперплоскости $y_m = 0$ и гладкой некомпактной поверхности S, лежащей в слое $0 < y_m \leqslant h$, $h = \frac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$. Предположим, что S задано уравнением

$$y_m = f(y'),\ y' \in R^{m-1},$$

где $f(y')$ удовлетворяет условиям

$$0 < f(y') \leqslant h,\ \left|\frac{\partial f}{\partial y_i}\right| \leqslant M < \infty,\ y' \in R^{m-1},\ I = \bar{(}i, m-1).$$

В области G_ρ рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида:

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x) = 0, \tag{1}$$

где $D(x^T) \in A_{l\times n}(x)$.

Обозначим через $H(G_\rho)$ класс вектор-функций $u(x)$ из класса $C^1(G_\rho)$, удовлетворяющие системе (1) и непрерывные в $\bar{G}_\rho = G_\rho \cap \partial G_\rho$ (непрерывность требуется в любом компакте $\bar{G}_\rho$, а также имеющие рост:

$$|u(x)| \leqslant exp[o(exp|x^1|)], \ \ x \to \infty, \ \ x \in G_\rho.$$

Обозначим

$$N_\sigma(y,x) = \left(E(\Phi_\sigma(y,x)u^0) D^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \right) D(t)^T.$$

Постановка задачи. Пусть $u(x)$ из класса $H(G_\rho)$ и $u_\delta(x)$ непрерывные приближения $u(x)$ на S, т. е.

$$\sup |u(x) - u_\delta(x)| < \delta, \ \ 0 < \delta < 1. \tag{2}$$

Требуется восстановить вектор-функцию $u(x)$ в области G_ρ.

Доказана следующая

Теорема. *Пусть вектор-функция* $u(x) \in H(G_\rho)$ *является решением системы* (1) *и удовлетворяет условию* $|u(y)| \leqslant 1$ *на* $y \in T = \partial G/S$, *если*

$$u_\sigma(x) = \int_S N_\sigma(y,x) u(y) dS_y, \, x \in G,$$

то верна следующая оценка:

$$|u(x) - u_\sigma(x)| \leqslant C(x)\bar{C}(\sigma) exp(-\sigma x_m), \tag{3}$$

где $C(x)$ *— некоторая функция от* x,

$$C(x) = C_\rho \int_{y_m=0} \frac{ds}{r^{m-1}};$$

$$C(\sigma) = \begin{cases} \sigma^m, & \textit{если} \quad m = 2k-1, \quad k \geq 1, \\ \sigma^{m-1}, & \textit{если} \quad m = 2k, \quad k \geq 2. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарханов Н. Н.* Об интегральном представленном решении систем линейных дифференциальной уравнений первого порядка в частных производных и некоторые приложениях // Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа. Красноярск, 1980. С. 147–160.
2. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математического физики. Новосибирск: Изд. СО АН СССР, 1962.
3. *Ярмухамедов Ш.* Интегральных представления гармонических функций многих переменных // Докл. АН СССР. 1972. Т. 204, № 4. С. 799–802.

УДК 517.9

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

© А. В. Уразаева

urazaeva_anna@mail.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Обратные задачи для дифференциальных уравнений возникают во многих областях науки при попытке описать внутренние характеристики среды, в которой протекают физико-химические процессы, по результатам наблюдений над этими процессами в доступной для измерений области. Исследованию различных обратных задач для традиционных классов уравнений математической физики посвящены работы, в том числе монографии, многих авторов (см. [1, 2] и приведенную в них литературу). В последнее время активно развивается теория обратных задач для различных неклассических уравнений математической физики [3, 4].

Рассмотрим начально-краевую задачу для линеаризованной системы уравнений Осколкова

$$v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{2}$$

$$(\lambda - \Delta)v_t(x,t) = \nu\Delta v(x,t) - r(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{3}$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{4}$$

которая в линейном приближении моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой жидкости Кельвина – Фойгта порядка 1 [5]. Здесь параметры $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\nu > 0$ характеризуют свойства жидкости, $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $v = v(x,t)$ — скорость жидкости, $r = r(x,t) = \nabla p$ — градиент давления.

Обозначим $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^s$, $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^s : \nabla \cdot v = 0\}$. Замыкание линеала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространства $\mathbb{L}_2$. Тогда $\mathbb{L}_2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор. Обозначим $\mathbb{H}_0^2 = (H_0^2(\Omega))^s$, где $H_0^2(\Omega) = \{z \in H^2(\Omega) : z(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}$. Сужение проектора Π на пространство $\mathbb{H}_0^2$ является непрерывным оператором $\Pi_2 : \mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{H}_0^2$, поэтому $\mathbb{H}_0^2 = \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$, где $\mathbb{H}_\sigma^2 = \ker \Pi_2$, а $\mathbb{H}_\pi^2 = \mathrm{im}\Pi_2$. Имеют место плотное вложение $\mathcal{L} \subset \mathbb{H}_\sigma^2$ и непрерывные плотные вложения $\mathbb{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\sigma$ и $\mathbb{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\pi$.

Положим $\mathcal{U} = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_r$, $\mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_r^2$, где $\mathbb{H}_r = \mathbb{H}_\pi$, $\mathbb{H}_r^2 = \mathbb{H}_\pi^2$. Следуя подходу С. Л. Соболева [6], используем обобщенную постановку задачи, заменив уравнение несжимаемости (4) на эквивалентное уравнение

$$\Pi_2 v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{5}$$

Действительно, для функций из класса $\mathbb{H}_0^2$ равенство нулю дивергенции равносильно принадлежности подпространству $\mathbb{H}_\sigma^2$.

Лемма 1. *Формулой* $A = \mathrm{diag}\{\Delta, \ldots, \Delta\}$ *задается линейный непрерывный оператор* $A : \mathbb{H}_0^2 \to \mathbb{L}_2$ *с дискретным конечнократным спектром* $\sigma(A)$, *сгущающимся лишь на* $-\infty$.

Обозначим $A_\sigma = A\Big|_{\mathbb{H}_\sigma^2}$, $A_\pi = A\Big|_{\mathbb{H}_\pi^2}$.

Лемма 2. *Имеет место действие операторов* $A_\sigma : \mathbb{H}_\sigma^2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $A_\pi : \mathbb{H}_\pi^2 \to \mathbb{H}_\pi$, *причем спектр* $\sigma(A_\sigma)$ *дискретен, конечнократен и сгущается к* $-\infty$.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — семейство ортонормированных в смысле $\mathbb{H}_\sigma$ собственных функций оператора A_σ, занумерованных по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k\}$ с учетом их кратности.

Из наших построений следует, что векторы $v \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}$ имеют вид $v = (v_\sigma, v_\pi, v_r)$, $f = (f_\sigma, f_\pi, f_r)$, операторы

$$L = \begin{pmatrix} \lambda I - A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \lambda I - A_\pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \nu A_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & \nu A_\pi & -I \\ 0 & -I & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

Предположим, что $\lambda \notin \sigma(A)$, тогда $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_r$, $\mathrm{im} L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$.

Теорема 1. *Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M является $(L,1)$-ограниченным,* $\sigma^L(M) = \left\{ \frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k} : k \in \mathbb{N} \right\}$.

Замечание. Схожая редукция прямой начально-краевая задачи для нелинейной системы уравнений Осколкова использовалась а работах Г. А.Свиридюка (см. [7]).

В [8] была исследованна корректность абстрактной обратной задаче для уравнения соболевского типа. К такой задаче редуцируем обратную задачу

$$v(x,0) = v_0(x) \in \mathbb{H}^2_\sigma, \tag{6}$$

$$v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \tag{7}$$

$$(\lambda - \Delta) v_t(x,t) = \nu \Delta v(x,t) - r(x,t) + q(x) f(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{8}$$

$$\Pi_2 v(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{9}$$

$$\int\limits_0^T v(x,t) d\mu(t) = v_T(x) \in \mathbb{H}^2_\sigma, \quad \int\limits_0^T r(x,t) d\mu(t) = r_T(x) \in \mathbb{H}_r, \tag{10}$$

в которой искомыми являются функции v, r, q. При этом учтено, что $\mathrm{dom} M_1 = \mathcal{U}^1 = \mathbb{H}^2_\sigma$.

Корректность обратной задачи (6)–(10) означает существование решения $q \in \mathbb{L}_2$ при любых $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $v_T \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $r_T \in \mathbb{H}_r$, удовлетворяющего оценке $\|q\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant C(\|v_0\|_{\mathbb{H}^2} + \|v_T\|_{\mathbb{H}^2} + \|r_T\|_{\mathbb{L}_2})$.

Теорема 2. *Пусть $\lambda \notin \sigma(A)$, функция $f \in C^2([0,T], \mathbb{R})$, функция $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную вариацию. Тогда задача* (6)–(10) *корректна в том и только в том случае, когда для всех $k \in \mathbb{N}$ выполняется* $\chi\left(\frac{\nu\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}\right)$, $\int\limits_0^T f(t) d\mu(t) \neq 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
2. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. New York; Basel: Marcel Dekker Inc., 2000.
3. *Kozhanov A. I.* Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. *Al Horani M., Favini A.* An identification problem for first-order degenerate differential equations // J. of Optimization Theory and Applications. 2006. V. 130, N 1. P. 41–60.
5. *Осколков А. П.* Начально краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина – Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С.126–164.
6. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
7. *Свиридюк Г. А.* Об одной задаче динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 11. С. 1992–1998.
8. *Fedorov V. E., Urazaeva A. V.* An inverse problem for linear Sobolev type equation // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 2004. V. 12, N 4. P. 387–395.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 324–325

УДК 517.946

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ЦЕПОЧКИ ТОДЫ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ, СООТВЕТСТВУЮЩИМ ДВИЖУЩИМСЯ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ

© Г. У. Уразбоев

gayrat71@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается цепочка Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \dfrac{da_n}{dt} = a_n(b_n - b_{n+1}) + a_n\sum\limits_{i=1}^{N}\left(f_{n+1}^i g_{n+1}^i - f_n^i g_n^i\right), \\ \dfrac{db_n}{dt} = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + a_n\sum\limits_{i=1}^{N}\left(f_n^i g_{n+1}^i + f_{n+1}^i g_n^i\right) - a_{n-1}\sum\limits_{i=1}^{N}\left(f_n^i g_{n-1}^i + f_{n-1}^i g_n^i\right), \\ a_{n-1}f_{n-1}^k + b_n f_n^k + a_n f_{n+1}^k = \lambda_k f_n^k, \\ a_{n-1}g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \;\; k = 1, 2, .., N, \;\; n \in Z, \end{cases} \tag{1}$$

при начальном условии

$$a_n(0) = a_n^0, \;\; b_n(0) = b_n^0, \quad n \in Z. \tag{2}$$

Начальные данные $\{a_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$ обладают следующими свойствами

1. $a_n^0 > 0$, $\Im b_n^0 = 0$, $n \in Z$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\, n\,| \left(\left| a_n^0 - \dfrac{1}{2} \right| + \left| b_n^0 \right| \right) < \infty$,

2. Дискретное уравнение Штурма – Лиувилля $a_{n-1}^0 y_{n-1} + b_n^0 y_n + a_n^0 y_{n+1} = \lambda y_n$, $n \in Z$, имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \ldots, \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, N$ — неизвестные функции, причём $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ суть собственные векторы оператора

$$L(t)y \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

соответствующие собственным значениям $\lambda_k = \dfrac{z_k + z_k^{-1}}{2}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, а $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ — линейно независимые с $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ решения уравнения

$$a_{n-1}g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k, \;\; k = 1, 2, .., N, \;\; n \in Z.$$

Предполагается, что

$$W\left\{f_n^k,\, g_n^k\right\} \equiv a_n\left(f_n^k g_{n+1}^k - f_{n+1}^k g_n^k\right) = \omega_k(t), \;\; k = 1, 2, \ldots, N, \tag{3}$$

где $\omega_k(t)$ — изначально заданные непрерывные функции от t, удовлетворяющие условию

$$\left| \frac{\lambda_k(0)}{2} + \int\limits_0^t \omega_k(t)dt \right| > \frac{1}{2}, \;\; k = 1, 2, \ldots, N, \tag{4}$$

при всех неотрицательных значениях t.

Решение задачи (1)–(4) ищется в классе функций, удовлетворяющих условиям

$$a_n(t) > 0,\ \Im b_n = 0,\ \ n \in Z, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, n\,| \left(\left| a_n(t) - \frac{1}{2} \right| + |\, b_n\,(t)| \right) < \infty\,. \tag{5}$$

В данной работе получены представления для решений $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{g_n^k(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, задачи (1)–(5) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

В работах [1, 2] было показано, что цепочка Тоды без источника может быть проинтегрировано методом обратной задачи рассеяния для разностного оператора Штурма – Лиувилля $L(t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ. 1974. Т. 67, № 2(8). С. 543–555.
2. *Flaschka H.* Progr. on the Toda Lattice. II // Theor. Phys. 1974. V. 51, № 3. P. 703–716.
3. *Mel'nikov V. K.* Creation and annihilation of solution in the system described by the KdV equation with self-consistent source // Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 809–823.
4. *Уразбоев Г. У., Хасанов А. Б.* Интегрирование уравнения Кортевега-де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа "ступеньки" // ТМФ. 2001. Т. 129, № 1. С. 38–54.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 326–327

УДК 517.956.6

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© А. К. Уринов, К. Т. Каримов

urinovak@mail.ru, shaxtk@mail.ru

Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} x\, u_{xx} + \operatorname{sign} y\, u_{yy} + \frac{2\beta}{|x|}u_x + \frac{2\beta}{|y|}u_y + c(x,y)u = 0 \tag{1}$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной линией Жордана σ с концами в точках $(1,0)$, $(0,1)$, которая расположена в полуплоскости $x>0$, $y>0$, и характеристиками $x-y=1$, $x-y=-1$ уравнения (1), а также отрезками $\{(x,y): -1<x<0,\ y=0\}$, $\{(x,y): x=0,\ -1<y<0\}$, где $c(x,y)$ — известная непрерывная функция, $\beta = const \in R$, причем $0<\beta<1/2$.

Пусть $\Omega_0 = \Omega \cap \{x>0,\ y>0\}$, $\Omega_1 = \Omega\cap\{x>0,\ y<0,\ x+y>0\}$, $\Omega_2 = \Omega\cap\{x<0,\ y>0,\ x+y>0\}$, а Ω_1^*, Ω_2^* — области, симметричные к областям Ω_1, Ω_2 соответственно относительно линии $x+y=0$.

Задача Ф. Требуется определить непрерывную в $\overline{\Omega}$ функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1) является регулярным решением уравнения (1) в области Ω_0 и обобщенным решением класса $\tilde{R}_1$ [1] в областях Ω_i, Ω_i^* $(i=1,2)$;

2) удовлетворяет условиям

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y)\in\overline{\sigma}; \tag{2}$$

$$u(x,0) = u(-x,0) + f_1(x), \quad 0\leqslant x\leqslant 1; \tag{3}$$

$$\lim_{y\to -0} y^{2\beta}u_y(x,y) = f_2(x), \quad -1<x<0; \tag{4}$$

$$u(0,y) = u(0,-y) + g_1(y), \quad 0\leqslant y\leqslant 1; \tag{5}$$

$$\lim_{x\to -0} x^{2\beta}u_x(x,y) = g_2(y), \quad -1<y<0, \tag{6}$$

где $\varphi(x,y)$, $f_i(x)$ и $g_i(y)$ $(i=1,2)$ — заданные функции, причем $f_1(0)=g_1(0)=0$; $\varphi(x,y)\in C(\overline{\sigma})$; $f_1(t)$, $g_1(t)\in C^{(0,\varepsilon_1)}[0,1]$; $f_2(t)$, $g_2(t)\in C^{(0,\varepsilon_2)}(-1,0)$; $\varepsilon_1>1-\beta$, $\varepsilon_2>\beta$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия*

$$c(x,y)=c(y,x), \quad c(x,y) = -c(-y,-x), \quad (x,y)\in\Omega_i, \quad i=1,2; \tag{7}$$

$$0\leqslant c(x,y) < 2\beta|xy|^{-2}|x^2-y^2|, \quad (x,y)\in\Omega_i, \quad i=1,2; \tag{8}$$

$$c(x,y)\leqslant 0, \quad (x,y)\in\Omega_0, \tag{9}$$

то задача Ф не может иметь более одного решения.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия (7), (8), (9) и*

$$c(x,y) = |x^2-y^2|\tilde{c}_i(x,y), \quad (x,y)\in\Omega_i; \quad \tilde{c}_i(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}_i), \quad i=1,2; \tag{10}$$

$$c(x,y)=(xy)^{\gamma}\tilde{c}_0(x,y),\quad (x,y)\in\overline{\Omega}_0;\quad \tilde{c}_0(x,y)\in C^1(\overline{\Omega}_0),\quad \gamma>0, \tag{11}$$
$$\varphi(x,y)=(xy)^{\delta}\tilde{\varphi}(x,y),\quad \tilde{\varphi}(x,y)\in C(\bar{\sigma}_0),\quad \delta>1.$$

Тогда существует решение задачи Ф.

Задача Ф эквивалентно сводится к задаче об определении регулярного в области Ω_0 решение уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2) и

$$u(x^{1/2},0)-u(0,x^{1/2})=\int\limits_0^x \rho_1(t)M(x,t)dt+g_0(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{12}$$

$$\rho_1(x)+\rho_2(x)=-[f_0(x)+g_0(x)]-\int\limits_0^x [f_0(t)+g_0(t)]R(x,t)dt,\quad 0<x<1, \tag{13}$$

где $g_0(x)=g_1(x^{1/2})+\int\limits_0^x \rho_1^*(t)M(x,t)dt$, $f_0(x)=f_1(x^{1/2})+\int\limits_0^x \rho_2^*(t)M(x,t)dt$, $\rho_i(x)=t^{\beta-\frac{1}{2}}\nu_i(x^{1/2})$, $i=1,2$; $\rho_1^*(t)=t^{\beta-1/2}g_2(-t^{1/2})$, $\rho_2^*(t)=t^{\beta-1/2}f_2(-t^{1/2})$, $\nu_1(x)=\lim\limits_{y\to 0}|y|^{2\beta}u_y(x,y)$, $0<x<1$; $\nu_2(y)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^{2\beta}u_x(x,y)$, $0<y<1$; $M(x,t)=(x-t)^{-2\beta}M_1(x,t)$, $M_1(x,t)$ — известная функция, зависящая от $c(x,y)$, $R(x,t)$ — резольвента ядра $M(x,y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Уринов А. К.* Краевые задачи типа задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Изв. АН УзССР, серия физ.-мат. наук. 1982. № 6. С. 18–23.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 328–329

УДК 517.983.51

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© М. В. Фалалеев

mihail@ic.isu.ru

Иркутский государственный университет, Иркутск

Известно, что линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором в главной части разрешимы в классе непрерывных функций при определенных соотношениях между начальными данными и правыми частями. Поэтому естественным образом возникает задача построения обобщенных решений, для которых нет проблемы такого согласования. Автоматическими следствиями построения обобщенных решений являются проблемы: построение собственно самого обобщенного решения, выделение классов обобщенных функций, в которых такое решение будет единственным, получение условий совпадения обобщенных решений с непрерывными, если таковые существуют. В полном объеме эту триаду задач удается решить с помощью конструкции фундаментальной оператор-функции, введенной автором. В цикле работ [1, 2] были построены фундаментальные оператор-функции для ряда дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов преимущественно зависящих от одной переменной. Но в последнее время удалось конструкцию фундаментальной оператор-функции перенести и на некоторые дифференциальные уравнения в частных производных. В представляемом докладе сделан обзор результатов как из [1, 2], так и новых. Приведем здесь один из новых результатов, при этом будем придерживаться обозначения и терминологии работ [1, 2].

Введем условие

A) $\overline{R(B)} = R(B)$, оператор B фредгольмов, т.е. $\dim N(B) = \dim(B^*) = n$ и имеет полный A — жорданов набор, элементы $\{\varphi_i^{(j)},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p_i}\}$ составляют этот набор, а функционалы $\{\psi_i^{(j)},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,p_i}\}$ образуют соответствующий полный A^* — жорданов набор оператора B^*, $\langle\varphi_i^{(1)},\gamma_k\rangle=\delta_{ik}$, $\langle z_i,\psi_k^{(1)}\rangle=\delta_{ik}$, $i,k=1,\ldots,n$.

При выполнении условия A) оператор $\Gamma=\big(B+\sum_{i=1}^n\langle\cdot,\gamma_i\rangle z_i\big)^{-1}$ является ограниченным, а оператор $Q=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}$, проектором.

Теорема 1. *Если оператор A непрерывно обратим, выполнены условие A) и оценка $\max\left(\|\ e^{-\alpha(A\Gamma)^{-1}}\ \|,\|\ e^{-\alpha(\Gamma^*A^*)^{-1}}\ \|\right)\leq Ke^{-\alpha C}$, $K>0$, $C\geq 0$ $\forall\alpha\geq 0$, то вырожденный оператор теплопроводности на классе $K'(R^1_+\otimes R^{2N};E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию*

$$\mathcal{E}_{2N}(t,\bar{x})=\Gamma\delta(t,\bar{x})*\frac{1}{(4\pi t)^N}\Big((A\Gamma)^{-1}\Big)^N\exp\left(-\frac{(A\Gamma)^{-1}|\bar{x}|^2}{4t}\right)\Big[I-Q\Big]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^n\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(V_{2N}(\bar{x})*\Big)^{k+1}\cdot\delta^{(k)}(t)\right],$$

где $V_2(\bar{x})=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\bar{x}|}$ и $V_N(\bar{x})=\frac{1}{(N-2)\cdot\sigma_N\cdot|\bar{x}|^{N-2}}$, при $N\geq 3$, σ_N — площадь поверхности единичной сферы в R^N.

Если оператор $A\Gamma$ позитивен [3], то существуют ограниченные операторы $\sqrt{A\Gamma}^{-1}$ и $(A\Gamma)^{-1} = (\sqrt{A\Gamma}^{-1})^2$ и результат теоремы 1 распространяется на операторы теплопроводности с нечетным количеством пространственных переменных.

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1 и оператор $A\Gamma$ позитивен, то оператор-функция*

$$\mathcal{E}_{2N+1}(t,\bar{x}) = \Gamma\delta(t,\bar{x}) * \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^{2N+1}}\left(\sqrt{A\Gamma}^{-1}\right)^{2N+1} \cdot \exp\left(-\frac{(A\Gamma)^{-1}|\bar{x}|^2}{4t}\right)\Big[I-Q\Big]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\Big(V_{2N+1}(\bar{x})*\Big)^{k+1}\cdot\delta^{(k)}(t)\right],$$

является фундаментальной для вырожденного оператора теплопроводности с $(2N+1)$ пространственными переменными.

В предположении выполнения условий теоремы 1 (или 2) рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$B\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t} - A\Delta u(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x}),\ u(t,\bar{x})|_{t=0} = u_0(\bar{x})\ t>0,\ \bar{x}\in R^m.$$

В обобщенных функциях эта задача переписывается следующим образом

$$(B\delta'(t)\cdot\delta(\bar{x}) - A\delta(t)\cdot\Delta\delta(\bar{x})) * v(t,\bar{x}) = f(t,\bar{x})\theta(t) + Bu_0(\bar{x})\delta(t),$$

соответственно обобщенное решение задачи Коши имеет вид

$$v(t,\bar{x}) = \mathcal{E}_m(t,\bar{x}) * (f(t,\bar{x})\theta(t) + Bu_0(\bar{x})\delta(t)).$$

В случае, когда все $p_i = 1, i = 1,\ldots,n$ обобщенное решение содержит только регулярную составляющую и совпадает с классическим (непрерывным) решением, если начальное условие $u_0(\bar{x})$ и правая часть уравнения $f(t,\bar{x})$ связаны соотношениями

$$\Big\langle Au_0(\bar{x}),\psi_i^{(1)}\Big\rangle + \int\limits_{R^m} V_m(\bar{x}-\bar{y})\Big\langle f(0,\bar{y}),\psi_i^{(1)}\Big\rangle d\bar{y} \equiv 0, \quad i=1,\ldots,n.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., and Falaleev M.* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.
2. *Фалалеев М. В., Гражданцева Е.Ю* . Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях спектральной ограниченности // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С 769–774.
3. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустырник Е. И, Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука. 1966. 500 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 330–331

УДК 517.957

КОРРЕКТНОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЗАХАРОВА – КУЗНЕЦОВА

© А. В. Фаминский

andrei_faminskii@mail.ru

Российский университет дружбы народов, Москва

Уравнение Захарова – Кузнецова

$$u_t + u_{xxx} + u_{xyy} + uu_x = 0 \tag{1}$$

является одним из вариантов многомерного обобщения уравнения Кортевега – де Фриза и описывает распространение нелинейных волн в диспергирующей среде. Волны движутся в направлении оси $0x$ и испытывают деформации в поперечном направлении.

Для уравнения (1) рассматриваются начально–краевые задачи в трех различных областях: 1) $\Pi_T^+ = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x > 0, y \in \mathbb{R}\}$, 2) $\Pi_T^- = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x < 0, y \in \mathbb{R}\}$, 3) $Q_T = \{(t,x,y) : 0 < t < T, x \in (0,1), y \in \mathbb{R}\}$. Во всех трех случаях ставится начальное условие

$$u\big|_{t=0} = u_0(x,y) \tag{2}$$

и краевые условия следующего вида:
1) для задачи в Π_T^+ одно условие

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \tag{3}$$

2) для задачи в Π_T^- два условия

$$u\big|_{x=0} = u_2(t,y), \qquad u_x\big|_{x=0} = u_3(t,y), \tag{4}$$

3) для задачи в Q_T три условия

$$u\big|_{x=0} = u_1(t,y), \qquad u\big|_{x=1} = u_2(t,y), \qquad u_x\big|_{x=1} = u_3(t,y). \tag{5}$$

Решения $u(t,x,y)$ рассматриваемых задач строятся в следующих функциональных пространствах $Z_k((0,T)\times I\times\mathbb{R})$ для натуральных k, где $I = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}_-$ или $I = (0,1)$ соответственно:

$$\begin{gathered}
1) D_t^m u \in C([0,T]; H^{k-3m}(I\times\mathbb{R})), \qquad m \le k/3; \\
2) D_x^l u \in C_b(\overline{I}; H_{t,y}^{(k-l+1)/3,k-l+1}((0,T)\times\mathbb{R})), \qquad l \le k+1; \\
3) D_t^m D_x^l D_y^j u \in L_2(I; C_b([0,T]\times\mathbb{R})), \qquad 3m+l+j \le k-1; \\
4) D_t^m D_x^l D_y^j u \in L_2(0,T; C_b(\overline{I}\times\mathbb{R})), \qquad 3m+l+j \le k
\end{gathered}$$

(здесь везде m, l, j — целые неотрицательные числа).

Изучается вопрос о локальной и глобальной корректности поставленных задач. Под корректностью понимается существование, единственность и непрерывная зависимость решений от граничных данных в рассматриваемых функциональных пространствах. В случае локальной корректности значение параметра T зависит от граничных данных, в случае глобальной — является любым положительным числом.

Чтобы сформулировать полученные результаты введем вспомогательные функции, связанные с условиями согласования граничных данных: положим $\Phi_0(x,y) \equiv u_0(x,y)$, а для натуральных m

$$\Phi_m(x,y) \equiv -(D_x^3 + D_x D_y^2)\Phi_{m-1}(x,y) - \sum_{l=0}^{m-1} C_{m-1}^l \Phi_l(x,y) D_x \Phi_{m-l-1}(x,y).$$

Теорема 1. *Пусть* $u_0 \in H^k$, $u_1 \in H_{t,y}^{(k+1)/3,k+1}$ *для некоторого натурального* k, $D_t^m u_1(0,y) \equiv \Phi_m(0,y)$ *для* $0 \le m < k/3$. *Тогда задача (1),(2),(3) глобально корректна в* $Z_k(\Pi_T^+)$.

Теорема 2. *Пусть* $u_0 \in H^k$, $u_2 \in H_{t,y}^{(k+1)/3,k+1}$, $u_3 \in H_{t,y}^{k/3,k}$ *для некоторого натурального* k, $D_t^m u_2(0,y) \equiv \Phi_m(0,y)$ *для* $0 \le m < k/3$, $D_t^m u_3(0,y) \equiv \Phi_{m\,x}(0,y)$ *для* $0 \le m < (k-1)/3$. *Тогда задача (1),(2),(4) локально корректна в* $Z_k(\Pi_T^-)$.

Теорема 3. *Пусть* $u_0 \in H^k$, $u_1, u_2 \in H_{t,y}^{(k+1)/3,k+1}$, $u_3 \in H_{t,y}^{k/3,k}$ *для некоторого натурального* k, $D_t^m u_1(0,y) \equiv \Phi_m(0,y)$, $D_t^m u_2(0,y) \equiv \Phi_m(1,y)$ *для* $0 \le m < k/3$, $D_t^m u_3(0,y) \equiv \Phi_{m\,x}(1,y)$ *для* $0 \le m < (k-1)/3$. *Тогда задача (1),(2),(5) глобально корректна в* $Z_k(Q_T)$ *при* $k \ge 3$ *и локально корректна при* $k \le 2$.

Условия на граничные функции являются естественными, так как они индуцированы свойствами оператора $D_t + D_x^3 + D_x D_y^2$, а именно, если рассмотреть линейную задачу Коши

$$v_t + v_{xxx} + v_{xyy} = 0, \qquad v\big|_{t=0} = v_0(x,y) \in H^k,$$

то для решения этой задачи $v \in C_b(\mathbb{R}_t; H^k)$ справедливо следующее свойство: равномерно по $x \in R$

$$\big\|D_t^{1/3} v\big\|^2_{H_{t,y}^{k/3,k}} + \big\|D_x v\big\|^2_{H_{t,y}^{k/3,k}} + \big\|D_y v\big\|^2_{H_{t,y}^{k/3,k}} \sim \|v_0\|^2_{H^k}.$$

Аналогичные результаты о глобальной корректности задачи Коши для уравнения (1) были получены в работе [1]. Глобальная корректность задачи (1)–(3) в пространстве $Z_1(\Pi_T^+)$ ранее установлена в работе [2].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-00253)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фаминский А. В.* Задача Коши для уравнения Захарова – Кузнецова // Дифф. уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1070–1081.
2. *Фаминский А. В.* О нелокальной корректности смешанной задачи для уравнения Захарова – Кузнецова // Совр. математика и ее приложения. 2006. Т. 38. С. 135–148.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 332–333

УДК 517.9

ВОЗМУЩЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ФАЗОВОГО ПОЛЯ

© В. Е. Федоров, О. А. Рузакова

kar@csu.ru, amber@csu.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^s$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $K_m \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $m = 1, 2$, $a_i, b_j \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = \overline{0, s}$. Рассмотрим задачу

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, t) + \lambda u(x, t) = \frac{\partial v}{\partial n}(x, t) + \lambda v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{2}$$

$$u_t(x, t) = \Delta u(x, t) - \Delta v(x, t) + \int\limits_\Omega K_1(x, y)u(y, t)dy + \int\limits_\Omega K_2(x, y)v(y, t)dy +$$

$$+a_0(x)u + \sum_{i=1}^s a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b_0(x)v + \sum_{j=1}^s b_j(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}, \quad (x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3}$$

$$\Delta v(x, t) + \beta v(x, t) + \alpha u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4}$$

Искомыми в задаче являются функции $u(x, t)$, $v(x, t)$.

Замечание. Система (1)–(4) при $K_m \equiv 0$, $m = 1, 2$, $a_i \equiv b_j \equiv 0$, $i, j = \overline{0, s}$, является, с точностью до линейной замены, линеаризацией в нуле начальной задачи для системы уравнений фазового поля, описывающей в рамках мезоскопической теории фазовые переходы первого рода [1, 2].

Редуцируем задачу (1)–(4) к задаче

$$Pu(0) = Pu_0 \tag{5}$$

для уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + Nu(t), \quad t \in \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{6}$$

с сильно (L, p)-радиальным [3, 4] оператором. Здесь $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M, N : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, P — единица полугруппы уравнения $L\dot{u}(t) = Mu(t)$, существующей при заданных условиях на операторы L, M.

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \alpha & \beta + \Delta \end{pmatrix},$$

$$H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega) = \left\{w \in H^2(\Omega) : \left(\tfrac{\partial}{\partial n} + \lambda\right)w(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\right\},\ \mathrm{dom}M = \left(H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)\right)^2,$$

$$N_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_\Omega K_1(x, y)u(y)dy + \int\limits_\Omega K_2(x, y)v(y)dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}),$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} a_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{s} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i} & b_0(x) + \sum\limits_{j=1}^{s} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$N = N_1 + N_2$, $\mathrm{dom}N = \mathrm{dom}N_2 = (H^1(\Omega))^2$. Тем самым определены операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ (т. е. линейный и непрерывный), $M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$ (т. е. линейный, замкнутый с плотной областью определения), $N_2, N \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U})$. Причем, $\ker L = \{0\} \times L_2(\Omega)$.

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\mathrm{dom}A = H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

Следующий результат получен в [5].

Теорема 1. *Пусть* $-\beta \notin \sigma(A)$. *Тогда оператор* M *сильно* $(L,0)$*-радиален.*

При доказательстве следующей теоремы использованы редукция задачи (5), (6) к двум задачам (сингулярной и регулярной) на взаимно дополнительных подпространствах, как это делается в [3, 4], и результаты классической теории возмущений полугрупп операторов [6] при исследовании получившейся регулярной задачи.

Теорема 2. *Пусть* $-\beta \notin \sigma(A)$, $u_0 \in H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение* $(u,v) \in (C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)))^2$ *задачи* (1)–(4).

Рассмотрим теперь систему

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - \Delta v(x,t) + \int\limits_{\Omega} K_1(x,y)u(y,t)dy + a_0(x)u + \sum_{i=1}^{s} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$(x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+, \quad (7)$$

$$\Delta v(x,t) + \beta v(x,t) + \alpha u(x,t) + \int\limits_{\Omega} K_2(x,y)u(y,t)dy + b_0(x)u + \sum_{j=1}^{s} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0,$$

$$(x,t) \in \Omega \times \overline{\mathbb{R}}_+. \quad (8)$$

Здесь, как и прежде, $K_m \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $m = 1, 2$, $a_i, b_j \in L_\infty(\Omega)$, $i, j = \overline{0, s}$.

Аналогичным образом получен следующий результат

Теорема 3. *Пусть* $-\beta \notin \sigma(A)$, $u_0 \in H^2_{\frac{\partial}{\partial n}+\lambda}(\Omega)$. *Тогда существует единственное решение* $(u,v) \in (C^1(\overline{\mathbb{R}}_+; L_2(\Omega)))^2$ *задачи* (1), (2), (7), (8).

Работа поддержана грантом РФФИ (код проекта 07-01-96030-р_урал_а) и грантом Президента России для молодых российских ученых – докторов наук (код проекта МД-4312.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.
2. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.
3. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, Boston: VSP, 2003.
4. *Федоров В. Е.* Обобщение теоремы Хилле – Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т.46, № 2. С.426-448.
5. *Федоров В. Е., Уразаева А. В.* Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений // Тр. Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 161–172.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Едиториал УРСС, 2004.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 334–334

УДК 517.95

О ЕДИНСТВЕННОСТИ И ПОВЫШЕНИИ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

© М. В. Фокин

fokin@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается задача Дирихле для уравнения колебания струны в выпуклой области Ω с аналитической границей Γ в плоскости переменных x, y:

$$D_{xy}^2 u = f, \qquad u|_\Gamma = 0.$$

Изучаются вопросы единственности сильных и слабых решений и повышения их гладкости в Соболевской шкале гильбертовых пространств $W_2^k(\Omega)$, а также в специальных пространствах с весовыми нормами. Ответы на указанные вопросы существенным образов зависят от геометрических свойств области. Основной характеристикой этих свойств является наличие или отсутствие замкнутых ломаных линий, вписанных в область и состоящих из отрезков характеристик уравнения, а также значение числа вращения соответствующего диффеоморфизма границы, сохраняющего ее ориентацию. В типичной ситуации, когда число вписанных ломаных конечно, задача Дирихле является нормально разрешимой, а гладкость сильных решений возрастает с ростом гладкости правой части f. Однако ядро сопряженной задачи в этом случае является бесконечномерным. Основное внимание в докладе уделяется случаю, когда имеется единственность как сильных, так и слабых решений рассматриваемой задачи. Для этого случая удается сформулировать необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять заданная область: она должна быть образом при гиперболическом отображении $x = H(u)$, $y = G(v)$ некоторого эллипса из специального семейства эллипсов на плоскости u, v. При этом для области не существует вписанных замкнутых ломаных, составленных из характеристик, а число вращения α диффеоморфизма границы иррационально. Скорость сходимости рациональных приближений к α определяет зависимость гладкости решений задачи Дирихле от гладкости правой части. Для слабых решений задачи Дирихле получены оценки их норм в шкале гильбертовых пространств, включающей пространства с отрицательными индексами (норма в которых более слабая, чем в $L_2(\Omega)$).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 335–335

УДК 517.946

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© А. Х. Хайдаров

akrambegmatov@mail.ru

Самаркандский государственный университет им. А. Навои, Самарканд, Узбекистан

В работе [1] проведено исследование задачи об определении источника волн типа распределения простого слоя, где отыскивается пара неизвестных функций.

В настоящей работе рассматривается задача определения тройки (u, hl, h), где l — C^1-функция в R со значениями в R^3, причем $l_3(t) = H(l)$, $H(l)$ положительное число, удовлетворяющее следующим условиям:

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha u_t - cu = hf(\ldots; L) \quad \text{на} \quad \{x_3 > 0\} \times (-\infty, T), \tag{1}$$

$$u_{x_3} = 0 \quad \text{на} \quad \{x_3 = 0\} \times (-\infty, T), \tag{2}$$

$$u \in C^1(\{x_3 > 0\} \times (-\infty, T)), \quad |u(x,t)| \leqslant C(|x - l(t)|^{-1} + 1),$$

$$|l_t| < 1 - \epsilon, \quad h > 0, \quad h \in C^1(R),$$

$$f(\ldots, \phi; L) = \int\limits_L \phi(\tau, y) dL.$$

Здесь моделируется точечный источник $l(t)$ в R^3, перемещающийся на высоте $H(l)$ и испускающий акустические волны интенсивности $h(t)$.

Кривую $\{l(t), t\}$ в R^4 обозначим через L, а область $\{(x,t) : t - T < |x_3|,\ t + t > |x_3|\}$ через $K(t)$.

Теорема. *Если* $u(\ldots, j)$, $\quad l(\ldots, j)$, $\quad h(\ldots, j)$ *— решения задачи* (1)–(2), *то из равенства*

$$u(\ldots, 1) = u(\ldots, 2) \quad \textit{на} \quad K(T) \cup \{x_3 = 0\} \tag{3}$$

вытекает, что

$$L(\ldots; 1) \cup K(T) = L(\ldots; 2) \cup K(T),$$

$$h(t; 1) = h(t; 2) \quad \textit{на} \quad L(\ldots; 1) \cup K(T).$$

Другими словами, по данным (3) единственным образом восстанавливается через часть L, лежащую в $K(T)$ с плотностью излучения h на этом участке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хайдаров А.* О восстановлении источника волн типа распределения простого слоя // Вопросы корректности и методы исследования обратных задач. Новосибирск. С. 34–40.

УДК 517.946

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© Х. О. Хайдаров, И. Исломов

h_haydar84@mail.ru, iqboln@mail.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Многие задачи геофизики (гравиметрия, электрометрия, магнитометрия) приводятся к нахождению решения задачи Коши для уравнения Гельмгольца, т. е. к нахождению решения уравнения Гельмгольца в точках области D по ее значениям и значениям ее нормальной производной на части границы области D

Рассмотрим уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0, \tag{1}$$

где Δ — оператор Лапласа, λ — комплексное число.

Пусть $y = (y_1, y_2)$ и $x = (x_1, x_2)$ — точки плоскости R^2. D — полукруг

$$D : \{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leqslant R^2, \quad -R \leqslant y_1 \leqslant R, \quad y_2 > 0\},$$

$S : \{y_1^2 + y_2^2 = R^2, \quad y_2 \geq 0\}$ — полуокружность. В работе приводится алгоритм решения уравнения (1) в точках $(x_1, x_2) \in D$, удовлетворяющего условиям

$$u(y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y_1} = f_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial y_2} = f_2(y), \quad y \in S,$$

где $g(y)$, $f_1(y)$ и $f_2(y)$ — заданные непрерывные функции. Для решения этой задачи воспользуемся формулами

$$u_\sigma(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S \left\{ g(y)\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial n} - \Phi_\sigma \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds_y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_1(y)\cos\alpha + f_2(y)\sin\alpha,$$

где $\vec{n}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ — единичный вектор нормали к S,

$$\Phi_\sigma(y, x) = \frac{e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)}}{2\pi} \int\limits_0^\infty e^{\sigma(y_2^2 - x_2^2)} \frac{(y_2 - x_2)\sin(2\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2}y^2) - \sqrt{u^2+\alpha^2}\cos(2\sigma\sqrt{u^2+\alpha^2}y^2)}{u^2 + r^2}$$

$$\times \frac{I_0(\lambda u)u}{\sqrt{u^2 + r^2}}\, du,$$

$$\alpha = |y_1 - x_1|, \quad \sigma \geq |\lambda| + \sigma_0, \quad \sigma_0 > 0, \quad I_0(t) = J_0(i\,t),$$

$J_0(t)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. М.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Изд. АН СССР. Сер. Мат. 1956. С. 819–842.
2. *Ярмухамедов Ш.* О продолжении решения уравнения Гельмгольце // ДАН. 1997. Т. 357, № 3. С. 320–323.
3. *Исломов И.* Решение задачи Коши для уравнения Гельмгольце // International conference on some topics of mathematics, Samarkand, Uzbekistan. 1996. С. 82.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 337–338

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА

© Ш. Б. Халилов

shavkat58@mail.ru

Институт математики АН РТ, Душанбе, Таджикистан

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in R^n$. Рассмотрим в полупространстве $R^4_+ = \{(t, x) \in R^4 : x \in R^3, 0 < t < \infty\}$ относительно вектор-функции $U = (u, v, w)$ систему дифференциальных уравнений

$$-U_{tt} - \triangle U + \lambda\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div} U + \mu \frac{\partial}{\partial t}(U_t + \mathrm{rot}\, U) = 0, \tag{1}$$

которая зависит от вещественных параметров λ и μ. Эта система при $(\lambda-1)(\mu-1) > 0$ является эллиптической по Петровскому. При $\lambda < 1$ и $\mu < 1$ она является сильно эллиптической, при $\lambda > 1$ и $\mu > 1$ не является сильно эллиптической, а при $\lambda = \mu = 2$ превращается в систему В. И. Шевченко [1], представляющей собой пример эллиптической системы трех уравнений в четырехмерном пространстве, для которой нарушается нетеровость задачи Дирихле. Когда $(\lambda - 1)(\mu - 1) \le 0$ система (1) перестанет быть эллиптической. В этом случае было доказано в [2], что задача Дирихле для этой системы в полупространстве R^4_+ при любых значениях $\lambda > 1$ и $\mu > 1$ не является нетеровой, т. е. система (1) является сильно связанной [3].

При $\lambda = \mu = 1$ характеристический определитель системы (1) обращается в нуль, т. е. тип системы вырождается, и в этом случае нами было доказано, что задача Дирихле является переопределенной и для корректности поставленной задачи на границе полупространства R^4_+ достаточно задавать значение одной из компонент искомой вектор-функции $U(t, x)$.

Настоящая работа посвящена определению корректно поставленной задачи в случаях $(\lambda - 1)(\mu - 1) \le 0$, когда хотя бы один из параметров λ или μ не равен 1.

Пусть $\mu \ne 1$ и $\lambda = 1$. Тогда $(\lambda-1)(\mu-1) = 0$ и характеристический определитель системы имеет вид:

$$\sigma(\tau, \xi) = (\mu - 1)\tau^2[\tau^2 + |\xi|^2][(\mu - 1)^2\tau^2 + |\xi|^2], \tag{2}$$

где $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$. Здесь при $\tau = 0$ $\sigma(\tau, \xi) = 0$ и система (1) при $t = 0$ вырождается в систему

$$-\triangle U + \mathrm{grad}\,\mathrm{div} U = 0,$$

характеристический определитель которой тождественно равен нулю. Она эквивалентна двум системам уравнений первого порядка

$$U_t + \mathrm{rot}\, U = \Phi, \quad (\mu - 1)\Phi_t + \mathrm{rot}\,\Phi = 0,$$

где $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $\mu \ne 1$ и $\lambda = 1$, то регулярные решения системы (1) в R^4_+ всегда существуют. Если*

$$v(0, x) = f_1(x), \qquad w(0, x) = f_2(x),$$

$$v_t(0, x) = g_1(x), \qquad w_t(0, x) = g_2(x),$$

где $f_1, f_2, g_1, g_2 \in C^3(R^3)$ и на бесконечности $f_i(x) = O(|x|^{-2})$, $g_i(x) = O(|x|^{-1})$, $i = 1, 2$, то это решение единственно.

При $\mu = 1$ и $\lambda \ne 1$ характеристический определитель системы принимает вид

$$\sigma(\tau, \xi) = (\lambda - 1)|\xi|^4(\tau^2 + |\xi|^2).$$

В этом случае система является системой составного типа и для нее справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Если* $\mu = 1$ *и* $\lambda \neq 1$, *то при* $\lambda \neq 0$ *регулярные решения системы* (1) *не существуют, а если* $\lambda = 0$ *необходимо на границе полупространства* R^4_+ *задавать одну из компонент искомой вектор-функций* $U(t, x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевченко В. И.* // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 6. С. 1300–1302
2. *Янушаускас А. И.* Аналитическая теория эллиптических уравнений. Новосибирск: Наука, 1979. 192 с.
3. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
4. *Халилов Ш. Б.* // Докл. АН РТ. 2006. Т. 49, № 4. С. 311–315.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 339–340

УДК 517.956

ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО НЕКЛАССИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ 6-го ПОРЯДКА

© В. Н. Ханхасаев

hanhvladnick@mail.ru

Восточно-Сибирский государственный технологический университет, Улан-Удэ

В ограниченной односвязной области $D \subset R^n$ с кусочно-гладкой границей Γ рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных 6-го порядка:

$$Lu \equiv \sum_{i=0}^{n} L_i^* A_i\left(x, D_\beta u, L_j u\right) + \sum_{|\alpha|\le 2} D_\alpha^* B_\alpha\left(x, D_\beta u, L_j u\right) = h(x), \qquad (1)$$

$$|\beta| \le 2, \quad j=\overline{0,n}, \quad L_0 = K, \quad L_i = \frac{\partial}{\partial x_i}K, \quad i=\overline{1,n}, \quad D_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$u|_\Gamma = f_1(x), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}|_\Gamma = f_2(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2}|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = f_3(x), \qquad (2)$$

где K — произвольный линейный дифференциальный оператор в частных производных 2 порядка с достаточно гладкими коэффициентами, удовлетворяющий неравенству

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \ge \alpha_1 \|u\|_{W_r^2(D)}, \quad m,r \ge 2, \qquad (3)$$

для любых функций $u(x) \in C_K$ — классу трижды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль на границе Γ вместе с первой производной по нормали; $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — вектор внутренней нормали к Γ; Γ_0 — часть границы Γ, совпадающая с характеристической поверхностью оператора K.

Определим банаховы пространства H_+ и $H_\bigoplus$ с нормами

$$\|u\|_+ = \|Ku\|_{W_m^1(D)}, \quad \|u\|_\bigoplus = \|Ku\|_{W_m^1(D)} + \|u\|_{W_e^2(D)}, \quad e \ge 2,$$

полученные замыканием по этим нормам множества функций

$$C_L = \left\{ u \in C_K : \frac{\partial u^2}{\partial \nu^2}|_{\Gamma\setminus\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Из (3) следует, что $\|\cdot\|_+$ — действительно норма, и пространства H_+ и $H_\bigoplus$, очевидно, сепарабельны. Можно показать также, что они рефлексивны и для них имеет место следующая лемма.

Лемма. *Для любой функции $u(x) \in C_K$ и любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует α_2 такое, что выполнено неравенство*

$$\|Ku\|_{W_m^1(D)} \ge \alpha_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} \right\|_{L_2(\Gamma_\varepsilon)}, \Gamma_\varepsilon = \{x \in \Gamma\setminus\Gamma_0 : \rho(x, \Gamma_0) > \varepsilon\}. \qquad (4)$$

Из теорем вложения пространств Соболева и неравенства (3) непосредственно следует, что краевые условия класса функций C_K выполняются и для функций из пространств H_+ и $H_\bigoplus$.

После введения непрерывного оператора следа для второй производной по нормали на $\Gamma\backslash\Gamma_0$ и продолжения его по непрерывности на пространство H_+ получаем, что по неравенству (4) дополнительное краевое условие класса функций C_L наследуется и для пространства H_+, т. е. для функций из H_+ выполнены однородные краевые условия (2).

Предположим, что функции $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ из (2) допускают продолжение f(x) внутрь области D из пространства $W^3_m(D)\bigcap W^2_k(D)$, где $k = \max(r, e)$. Тогда совокупность функций вида $u(x) = z(x) + f(x)$, где $z(x) \in H_+(H_\bigoplus)$, образует пространство $H_+(f)(H_\bigoplus(f))$.

Вводя обычные определения слабого и сильного обобщенных решений первой краевой задачи (1), (2), где $H_-(H_\Theta)$ — негативные пространства к $H_+(H_\bigoplus)$, построенные относительно гильбертова пространства $L_2(D)$, и накладывая ряд предположений $(1^0 - 5^0)$ для различных уравнений вида (1), означающих условия на поведение нелинейных функций $A_i,\ B_\alpha(x, \xi_\beta, \eta_j)$, $i, j = \overline{0, n}$, $|\alpha|, |\beta| \le 2$, доказываем следующую теорему.

Теорема. *Если выполнены предположения* $(1^0 - 3^0)$, *то первая краевая задача (1), (2) для любой функции* $h(x) \in H_-(H_\Theta)$ *имеет по крайней мере одно слабое обобщенное решение из пространства* $H_+(f)(H_\bigoplus(f))$. *Если выполнены предположения* $(1^0, 2^0, 4^0)$, *то это решение единственно, а при выполнении* $(1^0, 2^0, 5^0)$ *слабое решение совпадает с сильным, т. е. отображение*

$$L : H_+(f) \to H_- \quad (L : H_\bigoplus(f) \to H_\Theta)$$

есть гомеоморфизм.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 341–342

УДК 517.946

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОЙ ПЛОТНОСТИ

© **А. Б. Хасанов, А. А. Рейимберганов**

ahasanov2002@mail.ru, anwar2006@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается система уравнений

$$\begin{cases} iu_t + 2u\,|u|^2 + u_{xx} = i\sum\limits_{k=1}^{2N}\left(\phi_{k1}^2 - \phi_{k2}^{*2}\right), \\ L\phi_k = \xi_k\phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, 2N, \quad x \in R^1, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^1, \tag{2}$$

где $\phi_k = (\phi_{k1}, \phi_{k2})^T$ — собственные вектор-функции оператора

$$L(t) = i\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -u(x,t) \\ -u^*(x,t) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix},$$

соответствующие собственным значениям ξ_k $(\Im\xi_k > 0)$, такие, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\phi_{k1}\phi_{k2}dx = A_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, 2N$.Здесь $A_k(t)$ — заданные непрерывные, ненулевые функции, которые удовлетворяют условиям $A_k(t) = A_n^*(t)$ при $\xi_k = \xi_n^*$.

В рассматриваемой задаче начальная функция $u_0(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ обладает следующими свойствами:

1) $$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)\,\left|u_0(x) - \rho e^{i\theta}\right|dx < \infty, \ \ \rho, \theta \in R_+^1, \tag{3}$$

2) Оператор $L(0)$ не имеет спектральных особенностей и в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\xi_1(0), \xi_2(0), \dots, \xi_N(0)$.

Предполагаем, что функция $u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left((1+|x|)\left|u(x,t) - \rho e^{i\theta + 2i\rho^2 t}\right| + \sum_{k=1}^{2}\left|\frac{\partial^k u\,(x,t)}{\partial x^k}\right|\right)dx < \infty. \tag{4}$$

Основная цель работы — получить представления для решений $u(x,t)$, $\phi_k(x,t)$, $k = 1, 2, \dots, 2N$ задачи (1)–(4) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

При выполнении условия (4) существуют решения Йоста системы уравнений $L(t)Y = \xi Y$ со следующими асимптотиками

$$\psi(x,\xi,p) \sim \begin{pmatrix} \frac{i}{\rho}(\xi - p)e^{i\theta + 2i\rho^2 t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx}, \quad \hat{\psi}(x,\xi,p) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{\rho}(\xi - p)e^{-i\theta - 2i\rho^2 t} \end{pmatrix} e^{-ipx} \ \text{ при } \ x \to \infty,$$

$$\varphi(x,\xi,p) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{\rho}(\xi-p)e^{-i\theta-2i\rho^2 t} \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad \hat{\varphi}(x,\xi,p) \sim \begin{pmatrix} \frac{i}{\rho}(\xi-p)e^{i\theta+2i\rho^2 t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} \text{ при } x \to -\infty,$$

где $p=\sqrt{\xi^2+\rho^2}$. При действительных ξ пары вектор-функций $\{\varphi,\hat{\varphi}\}$ и $\{\psi,\hat{\psi}\}$ являются парами линейно независимых решений для системы уравнений $LY=\xi Y$, поэтому $\varphi = a(\xi,p)\bar{\psi}+b(\xi,p)\psi$.

Функция $a(\xi,p)$ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость и имеет там конечное число нулей $\xi_1(t),\xi_2(t),\ldots,\xi_N(t)$. Невещественные нули $\{\xi_j\}_{j=1}^N$ функции $a(\xi,p)$ соответствуют собственным значениям оператора $L(t)$ в верхней полуплоскости $\Im\xi>0$. Предполагаем, что все собственные значения оператора L простые.

Для функции ψ справедливо следующее интегральное представление

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{i}{\rho}(\xi-p)e^{i\theta+2i\rho^2 t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ipx} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_{11}(x,s,t) & K_{12}(x,s,t) \\ K_{21}(x,s,t) & K_{22}(x,s,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i}{\rho}(\xi-p)e^{i\theta+2i\rho^2 t} \\ 1 \end{pmatrix} e^{ips} ds. \quad (5)$$

В представлении (5) ядро не зависит от ξ и имеет место равенство

$$u(x,t)-\rho^{i\theta+2i\rho^2 t} = 2K_{12}(x,x,t).$$

Компоненты ядра при $y>x$ являются решениями системы интегральных уравнений

$$-\frac{2i}{\rho}e^{-i\theta} \begin{pmatrix} K_{12}(x,y,t) \\ K_{11}^*(x,y,t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(x+y,t) \\ F_2(x+y,t) \end{pmatrix} + \int_x^\infty \begin{pmatrix} K_{11}(x,s,t) & K_{12}(x,s,t) \\ -K_{12}^*(x,s,t) & K_{11}^*(x,s,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1(s+y,t) \\ F_2(s+y,t) \end{pmatrix} ds = 0,$$

где

$$F_1 = \frac{i}{\rho}e^{i\theta} \left(\sum_{n=1}^N \mu_n(\xi_n-p_n)e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \mu_n^*(\xi_n^*+p_n^*)e^{-ip_n^* z} \right) - $$
$$ - \frac{i}{\rho}e^{i\theta} \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[r(\xi,p)-r(-\xi,p)\right] e^{ipz} dp - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left[r(\xi,p)-r(-\xi,p)\right] e^{ipz} d\xi \right),$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^N \mu_n e^{ip_n z} + \sum_{n=1}^N \mu_n^* e^{-ip_n^* z} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{r(\xi,p)-r(-\xi,p)}{p} e^{ipz} d\xi, r(\xi,p) \equiv \frac{b(\xi,p)}{a(\xi,p)},$$

$$\mu_n = \frac{i}{p_n}\frac{C_n}{a'(\xi_n,p_n)}.$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Если функции $u(x,t)$, ϕ_k, $k=1,2,\ldots,2N$ являются решением задачи (1)–(4), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом*

$$\frac{d\xi_n}{dt}=0, \quad \frac{dC_n}{dt} = (4i\xi_n p_n - 2i\rho^2 + A_n(t))C_n, \quad k=1,2,\ldots,N, \quad \frac{dr}{dt} = (4i\xi p - 2i\rho^2)r, \quad (\Im\xi=0).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Захаров В. Е., Шабат А. Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
2. *Yan-Chow Ma.* The perturbed plane-wave solutions of the Cubic Schrodinger Equation //Studies in Applied Mathematics. 1979. № 60. P. 43–58.
3. *Mel'nikov V. K.* Integration of the nonlinear Schrodinger equation with a source // Inverse Probl. 1992. V. 8. P. 133–147.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 343–345

УДК 517.946

О КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ КдФ С ИСТОЧНИКОМ

© А. Б. Хасанов, У. А. Хоитметов

ahasanov2002@mail.ru, x_umid@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается система нелинейных уравнений

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=0}^{m_j-1} C^l_{m_j-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi^l_j\varphi^{m_j-1-l}_j\right), \tag{1}$$

$$L\varphi^l_j = k^2_j\varphi^l_j + l\varphi^{l-1}_j, \quad (Im\, k_j > 0),\ \ j=\overline{1,N},\ \ l=0,1,\ldots,m_j-1, \tag{2}$$

где $C^l_n = \dfrac{n!}{(n-l)!l!}$, $L(t) = -\dfrac{d^2}{dx^2} + u(x,t)$, функции $\varphi^l_j(x,t)$ при любом неотрицательном t принадлежат пространству квадратично суммируемых функций $L_2(-\infty,\infty)$, а $\varphi^0_j(x,t)$ — собственные функции оператора $L(t)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_j(t) = k^2_j(t)$ $(Im\, k_j > 0)$ кратности $m_j(t)$, $j=1,2,\ldots,N$, $l=0,1,\ldots,m_j-1$.

Система нелинейных уравнений (1)–(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{3}$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|\, e^{\varepsilon|x|}dx < \infty, \tag{4}$$

2) оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0),\lambda_2(0),\ldots,\lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0),m_2(0),\ldots,m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

Предполагается, что

$$\frac{1}{(m_j-1-l)!}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\varphi^{m_j-1}_j(x,t)\varphi^{m_j-1-l}_j(x,t)\right)dx = A^j_{m_j-1-l}(t),$$

где $A^j_{m_j-1-l}(t)$ — изначально заданные непрерывные функции от t, $j=1,2,\ldots,N$, $l=0,1,\ldots,m_j-1$.

Пусть функция $u(x,t) = \Re u(x,t) + i\Im u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x\to\pm\infty$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| e^{\varepsilon|x|}\right)dx < \infty, \quad j=0,1,2,3.$$

Основная цель данной работы — получить представления для решений $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j=1,2,\ldots,N$, $l=0,1,\ldots,m_j-1$, задачи (1)–(3) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

Метод обратной задачи рассеяния ведёт начало с работы [1]. Возможность применения этого метода к эволюционным уравнениям с самосогласованными источниками показана в работах [2–3].

Отметим, что в нашей задаче оператор $L(t)$ является несамосопряженным, так как потенциал $u(x,t)$ является комплекснозначным. Хорошо известно, что несамосопряженный оператор $L(t)$ может иметь спектральные особенности, которые лежат на непрерывном спектре. Мы предполагаем, что оператор $L(t)$ не имеет спектральных особенностей. Кроме того, при выполнении вышеуказанных условий оператор $L(t)$ имеет конечное число собственных значений.

Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля

$$-y''+u(x)y=\lambda y, \quad \lambda=k^2, \quad x\in(-\infty,\infty), \tag{5}$$

где $u(x)$ — комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (4). При выполнении условия (4) существуют решения Йоста уравнении (5) со следующими асимптотиками на бесконечности при $\Im k>-\dfrac{\varepsilon}{2}$

$$e_+(x,k)\sim e^{ikx}, \ \ x\to+\infty\,; \quad e_-(x,k)\sim e^{-ikx}, \ \ x\to-\infty.$$

Пары функций $\{e_+(x,k),e_+(x,-k)\}$ и $\{e_-(x,k),e_-(x,-k)\}$ образуют в полосе $|\Im k|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ фундаментальные системы решений, поэтому

$$e_-(x,k)=\frac{v(k)}{2ik}e_+(x,k)+\frac{\omega(k)}{2ik}e_+(x,-k),$$

где $\omega(k)=W\{e_-(x,k),e_+(x,k)\}$, $v(k)=W\{e_+(x,-k),e_-(x,k)\}$. Пусть $k_1,k_2,\ldots,k_N$ — невещественные нули $\omega(k)$, тогда $\lambda_j=k_j^2$, $j=1,2,\ldots,N,$ суть собственные значения оператора L. Кратность корня k_j уравнении $\omega(k)=0$ обозначим через m_j $(j=\overline{1,N})$.

Существуют так называемая нормировочная цепочка чисел $\{\theta_0^j,\theta_1^j,\ldots,\theta_{m_j-1}^j\}$, $j=\overline{1,N}$ таких, что имеют место соотношения

$$\frac{1}{s\,!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^s e_-(x,\sqrt{\lambda})\right)\Big|_{\lambda=k_j^2}=\sum_{\nu=0}^{s}\theta_{s-\nu}^j\frac{1}{\nu!}\left(\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^v e_+(x,\sqrt{\lambda})\right)\Big|_{\lambda=k_j^2},\ j=\overline{1,N},\ \ s=\overline{0,m_j-1}.$$

Набор $\{S(k),\lambda_j,\theta_0^j,\theta_1^j,\ldots,\theta_{m_j-1}^j,\ j=\overline{1,N}\}$ называется данными рассеяния для уравнения (5). В работах [4–5] показано, что по данным рассеяния потенциал $u(x)$ восстанавливается однозначно.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Если функции $u(x,t)$, $\varphi_j^l(x,t)$, $j=1,2,\ldots,N$, $l=0,1,\ldots,m_j-1$, являются решением задачи (1) – (6), то данные рассеяния оператора $L(t)$ с потенциалом $u(x,t)$ меняются по t следующим образом*

$$\frac{dS}{dt}=8i\lambda^{3/2}S, \quad \left(|Imk|<\frac{\varepsilon}{2}\right), \qquad \frac{d\lambda_n}{dt}=0,$$

$$\frac{d\theta_0^n}{dt}=(8i\lambda_n^{3/2}+A_0^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_1^n}{dt}=(8i\lambda_n^{3/2}+A_0^n(t))\theta_1^n+(12i\lambda_n^{1/2}+A_1^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_2^n}{dt} = (8i\lambda_n^{3/2} + A_0^n(t))\theta_2^n + (12i\lambda_n^{1/2} + A_1^n(t))\theta_1^n + (3i\lambda_n^{-1/2} + A_2^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_3^n}{dt} = (8i\lambda_n^{3/2} + A_0^n(t))\theta_3^n + (12i\lambda_n^{1/2} + A_1^n(t))\theta_2^n + (3i\lambda_n^{-1/2} + A_2^n(t))\theta_1^n + +(-\frac{i}{2}\lambda_n^{-3/2} + A_3^n(t))\theta_0^n,$$

$$\frac{d\theta_p^n}{dt} = \left(8i\lambda_n^{3/2} + A_0^n(t)\right)\theta_p^n + \left(12i\lambda_n^{1/2} + A_1^n(t)\right)\theta_{p-1}^n + \left(3i\lambda_n^{-1/2} + A_2^n(t)\right)\theta_{p-2}^n +$$

$$\left(-\frac{i}{2}\lambda_n^{-3/2} + A_3^n(t)\right)\theta_{p-3}^n + \sum_{r=4}^{p}\left(\frac{24i(-1)^r}{2^{r+1}}\frac{(2r-5)!}{r!(r-3)!}\lambda_n^{-(2r-3)/2} + A_r^n(t)\right)\theta_{p-r}^n,$$

$$n = 1, 2, \ldots, N, \;\; p = 4, 5, \ldots, m_n - 1.$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния, что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для решения задачи (1)–(3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gardner G. S., Green I. M., Kruskal M. D., Miura R. M.* Method for solving the Korteweg-de Vries equation // Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095–1097.
2. *Leon J., Latifi A.* Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. V. 23. P. 1385–1403.
3. *Мельников В. К.* Метод интегрирования уравнения Кортевега – де Вриса с самосогласованным источником. Препринт. Дубна, 1988.
4. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I // Дифф. ур. 1968. Т. 4, № 8. С. 1519–1533.
5. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. II //Дифф. ур. 1968. Т. IV, № 10. С. 1915–1924.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 346–347

УДК 517.946.22

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА

© А. Х. Хасанов *, С. С. Исамухамедов **

* anvarhasanov@yahoo.com

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан;
*** Ташкентский государственный экономический университет, Ташкент, Узбекистан*

Рассмотрим уравнение

$$A(u) = y^m u_{xx} + u_{yy} + y^m u_{zz} = 0, \tag{A}$$

в области $y > 0$. Решение уравнение (A) будем искать в виде

$$u = P\omega(\xi), \quad P = (r^2)^{-\beta-\frac{1}{2}}, \quad \xi = \frac{r^2 - r_1^2}{r^2}, \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{matrix} r^2 \\ r_1^2 \end{matrix}\right\} = (x - x_0)^2 + \left(\frac{2}{m+2} y^{\frac{m+2}{2}} \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \frac{2}{m+2} y_0^{\frac{m+2}{2}}\right)^2 + (z - z_0)^2. \tag{2}$$

Подставляя (1) в уравнение (A), получаем гипергеометрическое уравнение Гауссаłinebreak ([1, стр. 85, (1)])

$$\xi(1-\xi)\omega_{\xi\xi} + [2\beta - (\beta + \frac{1}{2} + \beta + 1)\xi]\omega_\xi - \beta(\beta + \frac{1}{2})\omega = 0, \tag{3}$$

которое имеет две линейно-независимых решения

$$\omega_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = F\left(\frac{1}{2} + \beta, \beta; 2\beta; \xi\right), \tag{4}$$

$$\omega_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \xi^{1-2\beta} F\left(\frac{3}{2} - \beta, 1 - \beta; 2 - 2\beta; \xi\right). \tag{5}$$

Подставляя (4)–(5) в (1), находим следующие частные решения уравнения (A)

$$q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_1 (r^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2} + \beta, \beta; 2\beta; \xi\right), \tag{6}$$

$$q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_2 (r^2)^{-\beta-\frac{1}{2}} \xi^{1-2\beta} F\left(\frac{3}{2} - \beta, 1 - \beta; 2 - 2\beta; \xi\right), \tag{7}$$

где

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}(\frac{2}{m+2})^{2\beta}, \quad k_2 = \frac{1}{4\pi}(\frac{2}{m+2})^{2-2\beta} \tag{8}$$

Частные решения (6)–(7) при $r \to 0$ имеют особенности порядка $\frac{1}{r}$. В самом деле, в силу формулы автотрансформации функции Гаусса, частное решение $q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = k_1 (r^2)^{-\frac{1}{2}} (r_1^2)^{-2\beta} F\left(\beta - \frac{1}{2}, \beta; 2\beta; \frac{r_1^2 - r^2}{r_1^2}\right). \tag{9}$$

Из равенства (9) при $r \to 0$ следует следующая оценка

$$|q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)| \le \frac{c}{r}. \tag{10}$$

Следовательно, из выражения (10) получаем что, частное решение $q_1(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ является фундаментальным решением уравнения (A). Аналогичным образом можно показать что, частное решение $q_2(x, y, z; x_0, y_0, z_0)$ также является фундаментальным решением уравнения (A) .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М.: Наука, 1973.

УДК 517.956

АНАЛОГ ПРИНЦИПА СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СОСТАВНОГО ТИПА В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

© А. Р. Хашимов

mathinst@uzsci.net

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

В работе [1] исследованы некоторые аспекты теории уравнений третьего порядка как в ограниченных, так и неограниченных областях. Целью нашей работы является установление энергетических оценок для уравнений

$$lAu + Bu = f(x), \tag{1}$$

где $lu = l_0u+\alpha(x)u$, $l_0u = \alpha^k(x)u_{x_k}$, Au — равномерно эллиптический оператор 2-го порядка, $B(u)$ — дифференциальный оператор 2-го порядка, удовлетворяющий краевым условиям

$$u\,|_\Gamma = 0, \quad l_0u\,|_{\sigma_1} = 0, \tag{2}$$

в области $\Omega \subset {R_+}^n = \{x : x_1 > 0\}$, где $\partial\Omega = \Gamma$, $\sigma_1 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x)\nu_k(x) = 0\}$.

Теорема. *Если $u(x)$ является обобщенным решением задачи (1), (2) в области Ω_{τ_1}, причём $f = 0$ в Ω_{τ_1}, то для любого $\tau_2 > \tau_1$ справедливы оценки*

$$\int\limits_{\Omega_{\tau_2}} E\,(u)\,dx \leqslant \Phi^{-1}\,(\tau_2, \tau_1) \int\limits_{\Omega_{\tau_2}} E\,(u)\,dx,$$

$$\int\limits_{\Omega_{\tau_2}} \Lambda\,(x_1)\,u^2dx \leqslant \Phi^{-1}\,(\tau_2, \tau_1) \int\limits_{\Omega_{\tau_1}} E\,(u)\,dx,$$

где $E\,(u)$ — интеграл энергии задачи (1), (2), $\Omega_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 > \tau\}$, $\Phi(x_1, \tau_1)$ — решение задачи

$$\Phi_{x_1x_1} = \mu(x_1)\Phi, \quad \Phi(\tau_1, \tau_2) = 1, \quad \Phi_{x_1}(\tau_1, \tau_2) = 0;$$

$\Lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$ — любые непрерывные функции такие, что

$$0 < \mu\,(\tau) \leqslant \inf_N \left\{ \int\limits_{S_\tau} E\,(v)\,dx' \left| \int\limits_{S_\tau} P\,(v)\,dx' \right|^{-1} \right\},$$

$$0 < \Lambda\,(\tau) \leqslant \inf_N \left\{ \int\limits_{S_\tau} E\,(v)\,dx' \left| \int\limits_{S_\tau} v^2dx' \right|^{-1} \right\},$$

где $x' = (x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $P(v) = \alpha^1 a^{i1} v_{x_i} v + \frac{1}{2}\left(C^{11} + \left(\alpha^1 a^1\right)_{x_1} - \left(\alpha^1 a^{1j}\right)_{x_j}\right) v^2$, N — множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности $\overline{S}_\tau$, которые равны нулю на $\overline{S}_\tau \cap \Gamma_\tau$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кожанов А.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1990. 140 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 349–350

УДК 517.9

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ КдФ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА В КЛАССЕ БЫСТРОУБЫВАЮЩИХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

© У. А. Хоитметов

x_umid@mail.ru

Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

В данной работе рассматривается система нелинейных уравнений

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 2\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\phi(x,\eta)\phi(x,-\eta))\, d\eta, \tag{1}$$

$$L\phi = \eta^2\varphi, \tag{2}$$

где $u = u(x,t)$, $L(t) = \dfrac{d}{dx} + u(x,t)$.

Система нелинейных уравнений (1)–(2) рассматривается при начальном условии

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R, \tag{3}$$

где начальная функция $u_0(x)$ является комплекснозначной и обладает следующими свойствами:

1) для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|e^{\varepsilon|x|}dx < \infty, \tag{4}$$

2) оператор $L(0)$ в верхней полуплоскости комплексной плоскости имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$ с кратностями $m_1(0), m_2(0), \dots, m_N(0)$ и не имеет спектральных особенностей.

В рассматриваемой задаче функция $\phi(x,\eta,t)$ — решение уравнения (2), определяемое асимптотикой

$$\phi \to h(\eta,t)e^{-i\eta x} \quad \text{при} \quad x \to \infty \tag{5}$$

где $h(\eta,t)$ — изначально заданная непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$h(-\eta,t) = \overline{h(\eta,t)}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(|h(\eta,t)|^2 + \left|\frac{\partial h(\eta,t)}{\partial x}\right|^2\right) d\eta < \infty \tag{6}$$

при всех неотрицательных значениях t.

Пусть функция $u(x,t) = Re\, u(x,t) + i\, Im\, u(x,t)$ обладает достаточной гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \to \pm\infty$, т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\left|\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial x^j}\right| e^{\varepsilon|x|}\right) dx < \infty, \quad j = 0,1,2,3. \tag{7}$$

В данной работе получены представления для решений $u(x,t)$, $\phi(x,\eta,t)$ задачи (1)–(7) в рамках метода обратной задачи рассеяния для оператора $L(t)$.

В работах [1, 2] показано, что уравнение КдФ с самосогласованным источником, может быть решено с помощью метода обратной задачи рассеяния для самосопряженного оператора Штурма – Лиувилля. Отметим, что в нашей задаче оператор $L(t)$ является несамосопряженным, так как потенциал оператора $L(t)$ — комплекснозначная функция. Хорошо известно, что несамосопряженный оператор $L(t)$ может иметь спектральные особенности (см. [3, 4]), которые лежат на непрерывном спектре. Мы предполагаем, что оператор $L(t)$ не имеет спектральных особенностей. Кроме того, при выполнении вышеуказанных условий оператор $L(t)$ имеет конечное число (в общем случае кратных) комплексных собственных значений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Leon J., Latifi A.* Solution of an initial-boundary value problem for coupled nonlinear waves // J. Phys. A: Math. Gen. 1990. N 23. P. 1385–1403.
2. *Melnikov V. K.* Integration of the KdV equation with a source // Inv. Probl. 1999. N 5. P. 233–246.
3. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. I // Дифферен. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1519–1533.
4. *Блащак В. А.* Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора. II // Дифферен. уравнения. 1968. Т. 4, № 10. С. 1915–1924.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 351–352

УДК 517.955

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПРОГОНКИ

© В. А. Чадаев

askhabov@yandex.ru

Чеченский государственный университет, Грозный

Рассмотрим дифференциальное уравнение дробного порядка

$$Ly \equiv D_{0x}^{\alpha+1}y(t) + p(x)D_{0x}^{\beta}y(t) + q(x)y(x) = f(x)\,, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$y(0) = y(r) = 0\,, \tag{2}$$

где D_{0x}^{τ} — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) дифференцирования порядка $0 < \tau \le 2$ с началом в точке 0 и с концом в точке $x \in [0,r]$ [1], $0 < \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$; $y(x) \in C^4[0,r]$ и $y(0) = 0$; $p(x), q(x) \in C[0,r]$.

Используя известное представление дробной производной [2]

$$D_{0x}^{\alpha}y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)}x^{k-\alpha} + D_{0x}^{-(m-\alpha)}y^{(m)}(t)$$

и учитывая условие (2), имеем

$$D_{0x}^{\alpha+1}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(y'(0)x^{-\alpha} + \int_0^x y''(t)(x-t)^{-\alpha}dt\right)\,, \tag{3}$$

$$D_{0x}^{\beta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^x y'(t)(x-t)^{-\beta}dt = \partial_{0x}^{\beta}y(t)\,, \tag{4}$$

где ∂_{0x}^{β} — регуляризованный оператор дробного порядка β [1].

Пусть $h = x/n$, тогда $x_i = i\,h$, где $i = \overline{0,n}$, $x_0 = 0$. Положим $y_i = y(x_i)$.

Пусть $S_k^{\alpha} = k^{1-\alpha}$ — степенная сеточная функция.

Перейдя к разностным аналогам [3] для (3) и (4) имеем

$$D_{0x_i}^{\alpha+1}y(t) \approx \Delta_{0x_i}^{\alpha+1}y(t) + R_{\alpha}(h,i)\,, \tag{5}$$

$$D_{0x_i}^{\beta}y(t) \approx \Delta_{0x_i}^{\beta}y(t) + R_{\beta}(h,i)\,, \tag{6}$$

где

$$\Delta_{0x_i}^{\alpha+1}y(t) = \frac{y'(0)x_i^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{h^{-1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{k=1}^{i}\Delta^2 y_{k-1}\Delta S_{i-k}^{\alpha},$$

$$\Delta_{0x_i}^{\beta}y(t) = \frac{h^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}\sum_{k=1}^{i}\Delta y_{k-1}\Delta S_{i-k}^{\beta},$$

$$R_\alpha(h,i) \le \frac{h^2}{12\,\Gamma(2-\alpha)} \max_{[0,x_i]} |y^{IV}(t)| x_i^{1-\alpha}\,, \quad R_\beta(h,i) \le \frac{h}{2\,\Gamma(2-\beta)} \max_{[0,x_i]} |y''(t)| x_i^{1-\beta}\,.$$

Отбросив последние слагаемые в правых частях (5) и (6), подставив полученные выражения в (1) имеем

$$L^h y \equiv \Delta_{0x_i}^{\alpha+1} y(t) + p(x_i)\Delta_{0x_i}^{\beta} y(t) + q(x_i)y(x_i) = f(x_i)\,.$$

Приведя подобные члены, получим систему n уравнений с n неизвестными. В матричной форме система уравнений имеет вид:

$$DY = F\,, \tag{7}$$

где матрица D является нижней почти треугольной или матрицей Хессенберга [4]. Алгоритм решения системы уравнений (7) назовем модифицированным методом “прогонки”.

Пусть L_m, K_m — коэффициенты “прогонки”. Тогда

$$y_m = L_m - K_m y_{m+1}\,, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Теорема. *Вычислительный процесс для нахождения L_m и K_m устойчив, если существует такое число $\varepsilon > 1+\alpha$, что для всех диагональных миноров D_m определителя D выполняется*

$$\frac{|D_{m-1}|}{|D_m|} = O(h^\varepsilon).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. *Нахушев А. М.* К теории дробного исчисления // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24, № 2. С. 313–324.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
4. *Parlett B. N.* Global convergence of the basice QR-algorithm on Hessenberge matrices // Math. Comp. 1968. V. 22. P. 803–817.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 353–353

УДК 533; 517.958

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ТРЕХМЕРНЫМИ ПОДАЛГЕБРАМИ СИММЕТРИИ

© А. А. Черевко

cherevko@mail.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Исследуются точные теоретико-групповые решения системы уравнений газовой динамики (УГД), описывающей пространственные движения газа как двухпараметрической сплошной среды в отсутствии диссипации и внешних сил. Все зависимые переменные считаются функциями времени t и координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Известно [1], что в случае газа с политропным уравнением состояния $p = f(S)\rho^{\gamma}$ система УГД допускает 13-мерную алгебру Ли симметрий L_{13}.

Особый интерес представляют трехмерные подалгебры симметрии УГД. Большинство инвариантных решений УГД, описывающихся системами обыкновенных дифференциальных уравнений, порождены именно трехмерными подалгебрами. В этих случаях можно получить детальную информацию о свойствах решений и соответствующих движениях газа.

В [2] для L_{13} построена оптимальная система подалгебр ΘL_{13}, т. е. система всех подалгебр, не переводящихся друг в друга внутренними автоморфизмами L_{13}. Среди прочих она содержит 207 подалгебр размерности 3. Представители этой системы порождают точные инвариантные и частично инвариантные решения исходных УГД, не переводящиеся друг в друга преобразованиями из L_{13}.

Кроме инвариантных решений некоторые трехмерные подалгебры порождают частично инвариантные решения. Они обладают большим произволом, чем инвариантные, но более сложны в изучении, поскольку требуют исследования совместности переопределенных систем дифференциальных уравнений.

В работе построена оснащенная оптимальная система трехмерных подалгебр из ΘL_{13}: для каждого из 207 представителей вычислена полная система функционально независимых инвариантов и определены возможные типы теоретико-групповых решений. Основным результатом является следующее утверждение:

Теорема. *Трехмерные подалгебры из оптимальной системы ΘL_{13} порождают точные решения уравнений газовой динамики следующих типов:*

146 инвариантных решений, из них 62 содержат оператор вращения,

61 частично инвариантное решение, из них 14 содержат оператор вращения,

12 разновидностей барохронных решений.

Подалгебры, содержащие оператор вращения, порождают трехмерные физически содержательные решения УГД, описывающие пространственные вихревые структуры. Для некоторых из них проведено более глубокое исследование и дана физическая трактовка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ — грант № 05-01-00080, и СО РАН — грант № 2.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
2. *Головин С. В.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Препринт ИГиЛ, 1986. № 5.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 354–355

УДК 532.591+517.948

СИММЕТРИИ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

© А. А. Чесноков

chesnokov@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются нелинейные уравнения, описывающие распространение длинных волн на пространственном сдвиговом потоке тяжелой идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей над ровным дном

$$u_t + uu_x + vu_y + wu_z - fv + gh_x = 0, \quad v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu + gh_y = 0,$$

$$h_t + \left(\int_0^h u\,dz\right)_x + \left(\int_0^h v\,dz\right)_y = 0, \quad w = -\int_0^z (u_x + v_y)\,dz'. \tag{1}$$

Здесь переменные t, x, y, z, u, v, w, h соответствуют времени, декартовым координатам, компонентам вектора скорости и глубине слоя жидкости; постоянные g, f — ускорение свободного падения и параметр Кориолиса. Давление в жидкости распределено гидростатично по глубине и восстанавливается по формуле $p = \rho g(h - z) + p_0$, где постоянные ρ, p_0 — плотность жидкости и давление на свободной границе.

Уравнения (1) для движений без сдвига скорости по вертикали, когда компоненты вектора скорости u и v не зависят от переменной z, при $f = 0$ принимают вид широко известной модели мелкой воды Сен-Венана [1, 2], а при $f \neq 0$ — квазигеострофической модели приближения «f– плоскости» средних широт [3, 4]. Модели, учитывающий сдвиговой характер движения, изучены в меньшей степени. Нелинейные уравнения (1) для сдвиговых течений при отсутствии кориолисова ускорения исследованы в работах [5, 6]. В них установлено существование простых волн, непрерывно примыкающих к стационарному сдвиговому потоку, сформулированы условия обобщенной гиперболичности стационарных уравнений. Вместе с тем результатов по точным решениям нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (1) известно крайне мало, поэтому представляет интерес их построение, анализ и физическая интерпретация.

В представленной работе система уравнений (1) впервые подвергнута систематическому исследованию методами группового анализа дифференциальных уравнений [7, 8]. Найдены 9-и мерные группы допускаемых преобразований G_9, как в случае $f = 0$, так и для $f \neq 0$. Установлено, что при $f = 0$ допускаются переносы по времени и горизонтальным пространственным переменным, галилеевы переносы по x и y, два растяжения, вращение вокруг оси z и нетривиальное проективное преобразование. При этом структура соответствующей алгебры Ли L_9 аналогична структуре алгебры Ли допускаемых операторов для уравнений двухмерных движений газа с показателем политропы $\gamma = 2$, для которой построена оптимальная система подалгебр [9]. В случае $f \neq 0$ система инвариантна относительно переносов по t, x, y, вращения вокруг оси z, одного растяжения и еще 4 достаточно сложных преобразований. Отметим, что алгебра Ли L_9 допускаемых операторов для квазигеострофической модели содержит подалгебру, имеющую структуру SO_3 (такую же как у трех операторов вращения). Для найденной группы преобразований построена оптимальная система подалгебр. «Оптимальность» состоит в том, что решения, получаемые с помощью ее представителей, исчерпывают все возможные инвариантные и частично инвариантные решения соответствующие подгруппам группы преобразований G_9 с точностью до замены переменных. Дальнейшее построение

решений сводится к нахождению инвариантов соответствующих подалгебр и интегрированию получаемых фактор-систем.

Исследован ряд инвариантных и частично инвариантных подмоделей, дана физическая интерпретация построенным точным решениям. Для моделей с учетом и без учета кориолисова ускорения подробно изучен класс стационарных вращательно симметричных течений. Показано, что при определенных распределениях скорости по глубине возникают области возвратного течения и дан алгоритм построения решения в этих областях. Приведен пример решения с критическим слоем, который выражается в элементарных функциях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 2.15 и гранта для поддержки Ведущих научных школ НШ-5245.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стокер Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М.: ИЛ, 1959.
2. *Овсянников Л. В.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. *Majda A.* Introduction to PDEs and Waves for the Atmosphere and Ocean. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2003.
4. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. М.: Мир, 1986.
5. *Тешуков В. М.* Пространственные простые волны на сдвиговом течении // 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.
6. *Тешуков В. М.* Пространственные стационарные длинные волны на сдвиговом потоке // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 2. С. 28–39.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
8. *Овсянников Л. В.* Об оптимальных системах подалгебр // ДАН РАН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
9. *Павленко А. С.* Симметрии и решения уравнений двумерных движений политропного газа // Сиб. электр. матем. изв. 2005. Т. 2. С. 291–307.

УДК 517.95

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ НЕОГРАНИЧЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

© **Е. А. Чиж**

ekaterina@csu.ru

Челябинский государственный университет, Челябинск

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2,\mu}, 0 < \mu < 1$. Рассматривается задача

$$Au(x) - \lambda_1 u(x) + g(x, u(x)) = h(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1}$$

где λ_1 — наименьшее собственное значение равномерно эллиптического оператора A второго порядка с граничным условием (2), $h \in L^q(\Omega)$, $q > m$, а функция g удовлетворяет следующим ограничениям:

(g1) $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева функция и существуют константа $C_1 > 0$ и функция $C_2 \in L^q(\Omega)$ $(q > m)$ такие, что $|g(x,\xi)| \leqslant C_1|\xi| + C_2(x)$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$;

(g2) функция $g(x,\cdot)$ при $\forall x \in \Omega$ может иметь разрывы только первого рода и $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$, где

$$g_-(x,\xi) = \liminf_{\eta\to\xi} g(x,\eta), \quad g_+(x,\xi) = \limsup_{\eta\to\xi} g(x,\eta).$$

Определение. *Обобщенным решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющую для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Обозначим $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$, а $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1)$, где r_1 — некоторое положительное число, а $d(x,\partial\Omega)$ — расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема. *Предположим, что*

1) функция $g(x,\xi)$ удовлетворяет условиям (g1), (g2);

2) $\lim_{\xi\to\pm\infty}\inf \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq 0$ почти всюду на Ω;

3) существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \geq 0$ такие, что

$$\int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi<0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi<-r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \leqslant \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ — положительная собственная функция оператора A с граничным условием (2), соответствующая λ_1.

Тогда задача (1), (2) имеет обобщенное решение.

Заметим, что теорема обобщает соответствующий результат из [1].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта р-урал-а № 07-01-96000.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Iannacci R., Nkashama M. N., Ward J. R.* Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Trans. Am. Math. Soc. 1989. V. 311, N 2. P. 711–726.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 357–358

УДК 517.95

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

© Н. А. Чуешева

chuesheva@ngs.ru

Кемеровский государственный университет, Кемерово

Вопросами разрешимости краевых задач для уравнений высокого порядков занимались многие авторы. Например, А. А. Дезин, В. П. Михайлов, Ю. А. Дубинский, С. Г. Пятков, А. И. Кожанов, В. В. Врагов, И. Е. Егоров и другие авторы.

Пусть в области $D=\{(x,y,t):0<x<\pi,0<y<\pi,0<t<a\}$ задано уравнение

$$-u_{ttt}+u_{xxxx}+u_{yyyy}+u_{xx}+u_{yy}+u_{tt}-u_t=f(x,y,t) \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=u_t|_{t=a}=u|_{x=0,x=\pi}=u|_{y=0,y=\pi}=0;$$

$$u_{xx}|_{x=0,x=\pi}=u_{yy}|_{y=0,y=\pi}=0. \qquad (2)$$

Теорема. *Пусть правая часть уравнения (1) функция $f(x,y)\in L_2(D)$, число $a>0$ мало. Тогда существует и притом единственное решение краевой задачи (2) для уравнения (1), принадлежащее пространству $H(D)$.*

Здесь пространство $H(D)$ является замыканием класса функций пространства $C^\infty(\overline{D})$, удовлетворяющих краевым условиям (2). Норма в этом пространстве задаётся равенством

$$\|u\|^2_{H(D)}=\int\limits_D(u^2_{xx}+u^2_{yy}+u^2_{tt}(a-t)+u^2_t+u^2)dD.$$

Для доказательства этой теоремы использовалась комбинация методов, например, как в [1–3].

Интересен вопрос, будет ли корректна эта краевая задача для этого уравнения. Оказывается, что можно в этом случае построить пример неединственности решения такой задачи для уравнения

$$-u_{ttt}+u_{xxxx}+u_{yyyy}+u_{xx}+u_{yy}+u_{tt}-u_t=0$$

в области $D=\{(x,y,t):0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<t<\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\}$ с краевыми условиями

$$u|_{t=0}=u_t|_{t=0}=u_t|_{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}}=0$$

$$u|_{x=0,x=\pi}=u|_{y=0,y=\pi}=u_{xx}|_{x=0,x=\pi}=u_{yy}|_{y=0,y=\pi}=0.$$

Ненулевым решением такой задачи будет

$$u=\left(\sqrt{3}+e^{\frac{t}{2}}\Big(\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-\sqrt{3}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big)\right)\cdot\sin x\cdot\sin y.$$

Аналогично [4] можно построить пример неустойчивости решения уравнения

$$-u^n_{ttt}+u^n_{xxxx}+au^n_{yyyy}+bu^n_{xx}+cu^n_{yy}+du^n_{tt}-hu^n_t=0 \qquad (3)$$

в области $D = \{x, y, t : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0\}$ с начально-краевыми условиями

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin n^m x \sin n^p y}{n^q}, \quad u^n_t|_{t=0} = \frac{n^k\ \sin n^m x \sin n^p y}{n^q},$$

$$u^n_{tt}|_{t=0} = \frac{n^{2k} \sin n^m x \sin n^p y}{n^q}, \quad u^n|_{x=0,x=\pi} = u^n|_{y=0,y=\pi} = 0, \tag{4}$$

$$u^n_{xx}|_{x=0,x=/pi} = u^n_{yy}|_{y=0,y=\pi} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$u^n(x, y, t) = \frac{e^{n^k t} \cdot \sin n^m x \cdot \sin n^p y}{n^q}.$$

Приведём три примера условий на коэффициенты a, b, c, d, h уравнения и натуральные числа k, m, p, q в начальных условиях (4), при которых нулевое решение поставленной задачи будет неустойчиво.

Пример 1. $a = c = 1$, $b = d = h = 0$, $k = 8$, $m = 3$, $p = 6$, $q = 24$.

Пример 2. $c = d = 1$, $a = b = h = 0$, $k = 4$, $m = 3$, $p = 4$, $q = 12$.

Пример 3. $a = h = 1$, $b = c = d = 0$, $k = 4$, $m = 3$, $p = 1$, $q = 12$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Врагов В. Н.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: Изд-во Носиб. ун-та, 1983. 84 с.
2. *Егоров И. Е., Пятков С. Г., Попов С. В.* Неклассические дифференциально-операторные уравнения. Новосибирск: Изд-во Наука, 2000. 336 с.
3. *Кожанов А. И.* Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики нечетного порядка. Новосибирск: Изд-во Носиб. ун-та, 1990. 132 с.
4. *Чуешева Н. А.* Краевые задачи для некоторых уравнений третьего порядка // Вестник Кемеровского ун-та. 2001. № 3(7). С. 193–199.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 359–359

УДК 517.94

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© А. Ш. Шалданбаев

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. В работе [1] исследована с точки зрения устойчивости обратная задача теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(x,0) = f(x), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.$$

Нами исследована разновидность этой задачи с точки зрения сильной разрешимости. Точная постановка задачи такова:

Задача ОЗТ. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=1}, \tag{2}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$, $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Определение 1. Под регулярным решением задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнение (1) и краевые условия (2).

Определение 2. Функцию $u \in L^2(\Omega)$ назовем сильным решением, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $n = 1, 2, \ldots$, и удовлетворяющих краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f при $n \to \infty$.

2. Полученный результат.

Теорема. *Краевая задача*

$$u_t(x,t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t),$$
$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega), \Omega = [0,1] \times [0,1]$, *имеет единственное сильное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(Sf, u_{n0})|^2}{\lambda_{n0}^2} < +\infty,$$

где $Sf(x,t) = f(x, 1-t)$, $(\cdot,\cdot)$ *— скалярное произведение в* $L^2(\Omega)$, $|\lambda_{n0}| \le \sqrt{6}(n\pi)^2 exp(-n^2\pi^2)$ *— наименьшее собственное значение при фиксированном* n, $u_{n0}(x,t)$ *— собственная функция спектральной задачи*

$$u_t(x,t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x, 1-t),$$
$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

соответствующая собственному значению λ_{n0}.

Следствие. *Норма обратного оператора краевой задачи* (1), (2) *неограничена.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов В. К., Васин В. В, Танана В. П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука, 1978. 205 с.
2. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 360–361

УДК 517.929

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. В пространстве $L^2(0,1)$ изучить спектральные свойства оператора

$$Lu = u'(1-x) + au(1-x), \tag{1}$$

$$D(L) = \left\{ u \in C^1[0,1], \quad u(0)\left(1 + \frac{ka}{\operatorname{sh} a}\right) - u(1)\frac{ka}{\operatorname{sh} a} \cdot e^a = 0 \right\}, \tag{2}$$

где a, k — константы.

В настоящее время спектральные свойства оператора (1), (2) изучены достаточно полно, поэтому приведем лишь основные результаты.

2. Основные результаты.

Если $a \neq 0$, то среди операторов (1), (2) нет вольтерровых. Если $a = 0$, то обратный оператор к оператору (1), (2) имеет вид

$$L^{-1}f(x) = \frac{1}{2}\left[\int_0^x f(1-t)\,dt - \int_0^1 f(1-t)\,dt\right] + \left(k + \frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(t)\,dt.$$

Среди этого семейства операторов встречаются вольтерровые операторы.

Теорема 1. *Оператор*

$$L^{-1}f(x) = \frac{1}{2}\left[\int_0^x f(1-t)\,dt - \int_0^1 f(1-t)\,dt\right] + \left(k + \frac{1}{2}\right)\int_0^1 f(t)\,dt$$

вольтерров тогда и только тогда, когда $k = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{i}{2}$.

Теорема 2. *Если* $a \neq 0$ *, то система корневых векторов оператора*

$$Lu = u'(1-x) + au(1-x),$$

$$D(L) = \left\{ u \in C^1[0,1], \quad u(0)\left(1 + \frac{ka}{\operatorname{sh} a}\right) - u(1)\frac{ka}{\operatorname{sh} a} \cdot e^a = 0 \right\},$$

полна в пространстве $L^2(0,1)$ *при любом* $k \in C$.

Теорема 3. *Если*

$$1) \quad k \neq \frac{\operatorname{sh} a}{(1 \pm ie^a)a}$$

и

$$2) \quad k \neq \frac{-\operatorname{sh} a}{1 \mp e^a},$$

то корневые векторы оператора

$$Lu = u'(1-x) + au(1-x),$$

$$D(L) = \left\{ u \in C^1[0,1], \quad u(0)\left(1 + \frac{ka}{\operatorname{sh} a}\right) - u(1)\frac{ka}{\operatorname{sh} a} \cdot e^a = 0 \right\},$$

образуют базис Рисса пространства $L^2(0,1)$.

Получено разложение в базисе Рисса и в базисе Шмидта и проведен их сравнительный анализ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марченко В. А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова Думка, 1977. 329 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 362–362

УДК 517.929

О ГЕОМЕТРИИ СПЕКТРА ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

© А. Ш. Шалданбаев, Г. О. Агабекова

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. При доказательстве теорем о полноте системы корневых векторов операторов определенную роль играет геометрия спектра, т. е. его расположение (или распределение) на комплексной плоскости. Широко распространенный метод оценки резольвенты также зависит от геометрии спектра. Важно, чтобы существовали круги, свободные от точек спектра или угол, свободный от точек спектра. В связи с этими обстоятельствами возникает вопрос: "А не является ли правильное распределение спектра необходимым признаком полноты корневых операторов?" Нижеследующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос.

2. Полученный результат.

Теорема. *Если* α *— любое вещественное число, то спектральная задача*

$$iy'(x) = \lambda y(x+\alpha), \tag{1}$$

$$y(0) = y(2\pi) \tag{2}$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_n = n \cdot e^{-in\alpha}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{3}$$

и соответствующих им собственных функций

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inx}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{4}$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(0, 2\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965. 445 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 363–364

УДК 517.929

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА КОШИ-НЕЙМАНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев, С. Т. Ахметова

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB: 0 \le t \le T,\, x = 0; \quad BC: 0 \le x \le l,\, t = T; \quad CD: 0 \le t \le T,\, x = l; \quad DA: 0 \le x \le l,\, t = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Определение. Оператор

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$D(L) = \{u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0\}$$

назовем оператором Коши – Неймана.

Задача. Изучить природу спектра оператора Коши – Неймана.

2. Полученный результат.

Теорема. *Если* $\dfrac{T\pi}{2l^2}$ *— иррациональное число, то спектр оператора*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$D(L) = \{u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0\}$$

совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. *Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений, отличных от нуля, и из предельных точек собственных значений. Оператор* $\overline{L}$ *самосопряжен и обратим, но* $(\overline{L})^{-1}$ *неограничен.*

Если $\dfrac{T\pi}{2l^2}$ *— рациональное число и* $\dfrac{1}{4} \notin \overline{\left(m^2 \dfrac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 1, 2, \ldots$, *то оператор* $\overline{L}$ *самосопряжен и ограниченно обратим. Спектр оператора* $\overline{L}$ *состоит из бесконечного множества значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельных точек, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений* λ_{mn}, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$. *Оператор* $(\overline{L})^{-1}$ *ограничен, но некомпактен.*

Если $\dfrac{T\pi}{2l^2}$ *— рациональное число и* $\dfrac{1}{4} \in \overline{\left(m^2 \dfrac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 1, 2, \ldots$, *то обратный оператор* $(\overline{L})^{-1}$ *не существует,* $\lambda = 0$ *является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от* $-\infty$ *до* $+\infty$. *Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений* λ_{mn}, $m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Ноль может оказаться бесконечнократным собственным значением.
(x) *означает дробную часть числа* x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

УДК 517.956.32

ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© А. Ш. Шалданбаев, Г. Бесбаев

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть Ω — квадрат на плоскости (x,y) со сторонами:

$$AB: y=0,\, 0\le x\le 1;\quad BC: x=1,\, 0\le y\le 1;\quad CD: y=1,\, 0\le x\le 1;\quad DA: x=0,\, 0\le y\le 1.$$

Задача. Получить интегральное представление решения краевой задачи:

$$Lu = u_{xy}(x,y) = f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = g(x,y), \tag{2}$$

где $f(x,y)\in C(\Omega)$, $g(x,y)\in C(\partial\Omega)$, $\partial\Omega$ — граница области Ω.

2. Полученный результат.

Теорема. *Если* $u(x,y)\in C_2(\overline{\Omega})$ *является решением краевой задачи* (1), (2), *то имеет место формула*

$$u(x,y) = -\frac{u(0,0)+u(1,0)+u(1,1)+u(0,1)}{4} + \frac{u(0,y)+u(x,0)+u(x,1)+u(1,y)}{2}$$

$$+\frac{1}{4}\left[\int_0^x\int_0^y f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \int_x^1\int_0^y f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta + \int_x^1\int_y^1 f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta - \int_0^x\int_y^1 f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta\right].$$

Замечание. Из этой формулы видно, что задавать значения $u(x,y)$ в каждой точке границы $\partial\Omega$ совсем необязательно. Достаточно знать $u(0,y)+u(1,y)$ и $u(x,0)+u(x,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 366–366

УДК 517.929

О БАЗИСНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ И ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев, М. Калхабай

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — четырехугольник со сторонами:

$$AB: 0 \leq x \leq 1,\ y = 0; BC: 0 \leq y \leq 1,\ x = 1; CD: 0 \leq x \leq 1,\ y = 1; DA: 0 \leq y \leq 1,\ x = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых в области Ω. Пусть α — произвольное комплексное число, лежащее на единичной окружности, т. е. $|\alpha| = 1$ и λ — комплексный спектральный параметр.

Спектральная задача. Найти решение уравнения

$$u_x(x,y) + u_y(x,1-y) = \lambda u(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_{y=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = \alpha \cdot u|_{x=1}. \tag{3}$$

2. Полученный результат.

Теорема. *Спектральная задача* (1)–(3) *имеет бесконечное множество собственных значений*

$$\lambda_{mn} = \mu_m + \gamma_n = i(arg\alpha + 2m\pi) + (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

и соответствующих им собственных функций

$$u_{mn}(x,y) = \sqrt{2}\ \exp\left[i(arg\alpha + 2m\pi)x\right] \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi y, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

УДК 517.956.32

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГОСЯ АРГУМЕНТА

© А. Ш. Шалданбаев, А. А. Копжасарова

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1.Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB: 0 \le t \le T,\, x=0; \quad BC: 0 \le x \le l,\, t=T; \quad CD: 0 \le t \le T,\, x=l; \quad DA: 0 \le x \le l, t=0.$$

Через $C^2(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Задача. Решить смешанную задачу

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$, методом отклоняющегося аргумента.

2. Полученный результат

Теорема. *Краевая задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение для любой правой части $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и это решение имеет вид*

$$u(x,t) = \sum_{m,\ n=1}^{\infty} \frac{(f, u_{mn})}{\lambda_{mn}} \cdot u_{mn}(x,t),$$

где λ_{mn} и $u_{mn}(x,t)$ собственные значения и ортонормированные собственные функции спектральной задачи:

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \lambda u(x, T-t),$$

$$u|_{t=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0,$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

УДК 517.929

ОБ ОДНОМ ПРИЗНАКЕ ВОЛЬТЕРРОВОСТИ СУЖЕНИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

© А. Ш. Шалданбаев, К. Кудайбергенова

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. В пространстве $L^2(\Omega)$ рассмотрим корректное сужение оператора дифференцирования

$$Ay(x) = y'(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

с областью определения

$$D(A) = \left\{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int\limits_0^1 y'(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx, \quad g(x) \in L^2(0,1) \right\}. \tag{2}$$

Этот оператор изучался многими авторами [1], но тем не менее многие вопросы пока остаются открытыми. Представляет интерес выяснения природы спектра оператора (1), (2). По замечанию А. Дезина [2], этот вопрос оказался неожиданно сложным. В частности, все еще отсутствует критерий вольтерровости оператора (1), (2). Нами получен один необходимый признак.

2. Полученный результат.

Теорема. *Если оператор*

$$A = \frac{d}{dx}, \quad D(A = \left\{ y(x) \in W_2^1(0,1) : y(0) = \int\limits_0^1 y'(x) \cdot \overline{g(x)}\, dx, \quad g(x) \in L^2(0,1) \right\}$$

вольтерров, т. е. не имеет спектра на конечной части λ плоскости, то

$$2\int\limits_0^1 t\, \overline{g(t)}\, dt + \left(\int\limits_0^1 \overline{g(t)} dt \right)^2 = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кангужин Б. Е., Садыбеков М. А.* Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент: Гылым, 1996. 268 с.
2. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980. 207 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 369–369

УДК 517.929

О ВЛИЯНИИ ОТКЛОНЕНИЯ АРГУМЕНТА НА СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА

© А. Ш. Шалданбаев, Г. С. Кулажанов

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. В пространстве $H = L^2(0,1)$ рассмотрим операторы A и S, где A — произвольный линейный оператор с плотной областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$, S — унитарный оператор. Спрашивается, насколько отличаются свойства операторов A и SA? Нижеследующие теоремы показывают, что спектральные свойства этих операторов могут отличаться существенным образом.

2. Полученные результаты.

Теорема 1. *Если $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ и $Su(x) = u(1-x)$, то оператор*

$$Az(x) = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} I - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} S \right) z'(x),$$

$$D(A) = \left\{ z \in W_2^1(0,1),\ \alpha z(0) + \beta z(1) = 0 \right\},$$

вольтерровый, т. е. обратный оператор A^{-1} существует, компактен и не имеет собственных значений.

Теорема 2. *Если $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$ и $Su(x) = u(1-x)$, то оператор*

$$Bz(x) = \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} S - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2} I \right) z'(x),$$

$$D(A) = \left\{ z \in W_2^1(0,1),\ \alpha z(0) + \beta z(1) = 0 \right\},$$

ограниченно обратим, т. е. обратный оператор B^{-1} вполне непрерывен и имеет полную в $L^2(0,1)$ систему собственных векторов, которые образуют базис Рисса пространства $L^2(0,1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 370–371

УДК 517.956.32

О ВОЛЬТЕРРОВОСТИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ СО СМЕЩЕНИЕМ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

© А. Ш. Шалданбаев, Г. Омирбекова

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1.Постановка задачи. Пусть Ω — квадрат на плоскости (x, y) со сторонами:

$AB : y = 0,\ 0 \le x \le 1;\quad BC : x = 1,\ 0 \le y \le 1;\quad CD : y = 1,\ 0 \le x \le 1;\quad DA : x = 0,\ 0 \le y \le 1.$

Задача. Изучить в пространстве $L^2(\Omega)$ спектральные свойства нелокальной краевой задачи со смещением:

$$Lu = u_{xy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{1}$$

$$\alpha u(0, y) + \beta u(1, 1 - y) = 0, \tag{2}$$

$$\alpha u(x, 0) + \beta u(1 - x, 1) = 0, \tag{3}$$

где α, β — произвольные комплексные числа, $f(x, y) \in L^2(\Omega)$.

2. Полученные результаты.

Теорема 1. *Если $\alpha^2 - \beta^2 \ne 0$, то нелокальная краевая задача (1)–(3) сильно разрешима и оператор $(\overline{L})^{-1}$, обратный к сильному оператору задачи (1)–(3), вполне непрерывен и вольтерров.*

В связи с этой теоремой возникает вопрос: "Все ли вольтерровые задачи для оператора L описывает данная теорема?", т. е. существуют ли другие вольтерровые задачи для оператора L в области (Ω).

Теорема 2. *Краевая задача*

$$u_{xy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{4}$$

$$u|_{y=0} = u|_{x=1} = 0, \tag{5}$$

сильно разрешима в пространстве $L^2(\Omega)$ и оператор $(\overline{L})^{-1}$, обратный к сильному оператору задачи (4), (5), вполне непрерывен и вольтерров.

Теорема 3. *Краевая задача*

$$u_{xy}(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{6}$$

$$u|_{y=1} = u|_{x=0} = 0, \tag{7}$$

сильно разрешима в пространстве $L^2(\Omega)$ и оператор $(\overline{L})^{-1}$, обратный к сильному оператору задачи (6), (7), вполне непрерывен и вольтерров.

Теорема 4. *Если $\alpha^2 - \beta^2 \ne 0$, то нелокальная краевая задача:*

$$Lu = u_{xy}(x, y) = f(x, y), \tag{8}$$

$$\alpha u(0, y) + \beta u(y, 0) = 0, \tag{9}$$

$$\alpha u(x, 1) + \beta u(1, x) = 0, \tag{10}$$

где α, β — произвольные комплексные числа, $f(x, y) \in L^2(\Omega)$, сильно разрешима в пространстве $L^2(\Omega)$ и оператор $(\overline{L})^{-1}$, обратный к сильному оператору задачи (8)–(10), вполне непрерывен и вольтерров.

Замечание. Если $\alpha = 0,\ \beta \neq 0$, то из (8)–(10) имеем

$$Lu = u_{xy}(x, y) = f(x, y),$$

$$u(y, 0) = 0, \quad u(1, x) = 0.$$

Это есть задача Гурса. При $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ получим сопряженную задачу Гурса. Отметим, что задачи со смещением рассматривались впервые А. М. Нахушевыым, более полные сведения можно найти в [1] .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

УДК 517.956

ОБ УРАВНЕНИЯХ СМЕШАННОГО ТИПА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев, И. О. Оразов

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками: $AB: x=0,\ 0 \le t \le T$; $BC: t=T,\ 0 \le x \le l$; $CD: x=1,\ 0 \le t \le T$; $DE: x-t=1,\ \dfrac{1}{2} \le x \le l$; $EA: x+t=0,\ 0 \le x \le \dfrac{l}{2}$. Через $C^2(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по обеим переменным в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup BC \cup CD \cup DE \cup EA$.

Задача Дирихле. Найти решение уравнения

$$u_x(x,t) + \sqrt{\operatorname{sgn}\ t}\ u_t(x, T-t) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющего граничному условию

$$u|_\Gamma = g(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \Gamma, \tag{2}$$

где $u \in C^2(\square ABCD \cup \triangle ADE) \cap C(\overline{\Omega})$, $f(x,t) \in C^1(\Omega)$, $g \in C(\Gamma)$, методом отклоняющегося аргумента.

2. Полученный результат.

Теорема. *Если* $f(x,t) \in C^1(\Omega)$ *и* $g \in C(\Gamma)$, *то краевая задача* (1), (2) *может иметь не более одного решения решения из класса* $C^2(\square ABCD \cup \triangle ADE) \cap C(\overline{\Omega})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Оразов И. О., Шалданбаев А. Ш.* Задача Дирихле для уравнения с отклоняющимся аргументом // Материалы международного российско-казахского симпозиума. Нальчик. 2004. С. 136–137.

УДК 517.929

ОБ ОДНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев, К. Рустемова

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Обозначим через $\widetilde{W}_2^n[0,2\pi]$ подпространство пространства $W_2^n[0,2\pi]$, состоящее из функций $f(x) \in W_2^n[0,2\pi]$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям $f^{(k)}(0) = f^{(k)}(2\pi)$, $k = 0,1,2,\ldots,n-1$. Заметим, что $W_2^0[0,2\pi] = \widetilde{W}_2^0[0,2\pi] = L^2(0,2\pi)$. Пусть α — произвольное вещественное число.

Задача. Изучить спектральные свойства периодической задачи для уравнения с отклоняющимся аргументом.

$$Ly = y'(x) = \lambda y(\alpha - x),$$

$$D(L) = \left\{ y \in \widetilde{W}_2^1 : y(0) = y(2\pi) \right\}.$$

2. Полученный результат.

Теорема. *Спектральная задача*

$$iy'(x) = \lambda y(x - \alpha),$$

$$y(0) = y(2\pi)$$

имеет бесконечное (счетное) множество вещественных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *и соответствующих им ортогональных собственных функций, которые, после нормировки, образуют ортонормированный базис пространства* $L^2(0,2\pi)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.
2. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.

УДК 517.929

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев [*] **, Г. М. Спабекова** [**]

mtshomanbaeva@mail.ru

[*] *Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан;*
[**] *Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. А. Ясави, Шымкент, Казахстан*

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB: 0 \le t \le T,\, x = 0; \quad BC: 0 \le x \le l,\, t = T; \quad CD: 0 \le t \le T,\, x = l; \quad DA: 0 \le x \le l,\, t = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Задача S. Изучить спектральные свойства оператора:

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t), \tag{1}$$

$$u \in D(L) = \left\{ u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0 \right\}. \tag{2}$$

2. Полученный результат.

Теорема 2.1 *Если* $\dfrac{2\pi T}{l^2}$ *— иррациональное число, то спектр оператора*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$u \in D(L) = \left\{ u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u|_{x=0} - u|_{x=l} = u_x|_{x=0} - u_x|_{x=l} = 0 \right\},$$

совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. *Спектр состоит из бесконечного числа собственных значений, отличных от нуля, и из предельных точек собственных значений. Оператор* $\overline{L}$ *самосопряжен и обратим, но* $(\overline{L})^{-1}$ *неограничен.*

Если $\dfrac{2\pi T}{l^2}$ *— рациональное число и* $\dfrac{1}{4} \notin \overline{\left(m^2 \dfrac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, *то оператор* $\overline{L}$ *самосопряжен и ограниченно обратим. Спектр оператора* $\overline{L}$ *состоит из бесконечного множества значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельных точек, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений* λ_{mn}, $m, n = 0, 1, 2, \dots$. *Оператор* $(\overline{L})^{-1}$ *ограничен, но не компактен.*

Если $\dfrac{2\pi T}{l^2}$ *— рациональное число и* $\dfrac{1}{4} \in \overline{\left(m^2 \dfrac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, *то обратный оператор* $(\overline{L})^{-1}$ *не существует,* $\lambda = 0$ *является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от* $-\infty$ *до* $+\infty$. *Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений* λ_{mn}, $m, n = 0, 1, 2, \dots$.
Ноль может оказаться бесконечнократным собственным значением.

Примечание. (x) означает дробную часть числа x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966. 543 с.
2. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 375–376

УДК 517.929

О СИЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ-ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© А. Ш. Шалданбаев, М. Т. Шоманбаева *

* `mtshomanbaeva@mail.ru`

Южно-Казахстанский государственный университет, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками:

$$AB: 0 \le t \le T,\, x = 0; \quad BC: 0 \le x \le l,\, t = T; \quad CD: 0 \le t \le T,\, x = l; \quad DA: 0 \le x \le l,\, t = 0.$$

Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Задача Коши – Дирихле. Найти решение уравнения

$$Lu = u_t\,(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = f(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющая граничным условиям

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, \tag{2}$$

где $f(x,t) \in L^2(\Omega)$.

Определение 1. Под регулярным решением задачи $(1),(2)$ будем понимать функцию $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, обращающую в тождество уравнения (1) и краевые условия (2) [1].

Определение 2. Функцию $u(x,t) \in L^2(\Omega)$ назовем сильным решением задачи, если существует последовательность функций $\{u_n\} \in C^{2,1}(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right), n = 1,2,\ldots$ и удовлетворяющих краевым условиям задачи такая, что $\{u_n\}$ и $\{Lu_n\}, n = 1,2,\ldots$ сходятся в $L^2(\Omega)$ соответственно к u и f при $n \to \infty$ [1].

Определение 3. Краевая задача $(1),(2)$ называется сильно разрешимой, если сильное решение задачи существует для любой правой части $f(x,t) \in L^2(\Omega)$ и единственно [1].

2. Полученные результаты.

Теорема 1. *Спектральная задача*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t) = \lambda u(x,t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

имеет бесконечное множество собственных значений:

$$\lambda_{mn} = (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{T} - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2, \quad m = 1,2\ldots;\, n = 0,1,2,\ldots$$

и соответствующих им собственных функций:

$$u_{mn}(x,t) = \frac{2}{\sqrt{Tl}} \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi t}{T}, \quad m = 1,2,\ldots;\, n = 0,1,2,\ldots,$$

которые образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\Omega)$, $\Omega = [0,l] \times [0,T]$.

Теорема 2. *Задача Коши – Дирихле*

$$Lu = u_t(x, T - t) + u_{xx}(x, t) = f(x, t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

сильно разрешима в пространстве $L^2(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда число* $\dfrac{1}{4}$ *не является предельной точкой числовой последовательности*

$$\left(\frac{m^2 \pi T}{2l^2}\right), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где (x) *— дробная часть числа* x *.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кальменов Т. Ш.* Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. Шымкент: Гылым, 1993. 327 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 377–377

УДК 517.958

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА

© Ю. В. Шанько

shy70@mail.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Рассматриваются уравнения Эйлера движения идеальной жидкости

$$D\vec{u} + \nabla p = 0, \ \operatorname{div} \vec{u} = 0.$$

Вектор скорости $\vec{u} = (u, v, w)$ и давление p зависят от времени t и пространственных координат x, y, z, оператор $D = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial z}$.

В работе [1] построены точные стационарные решения этой системы уравнений с давлением вида

$$p = \varphi(z).$$

В работе [2] исследованы решения с квадратичным давлением

$$p = k(t)(x^2 + y^2 + z^2)/2.$$

В настоящем сообщении изучаются нестационарные решения с давлением вида

$$p = k(t)(x^2 + y^2)/2 + \psi(t, z).$$

В частности, получено точное решение

$$p = p_0 + \frac{1}{2}t^{-4}(x^2 + y^2) - 3t^{-2}z^2,$$

$$w = -2t^{-1}z,$$

u и v определены неявно, посредством соотношений

$$t^{-1}y\cos(1/t) + (tv - y)\sin(1/t) = f(\alpha, \beta, \gamma),$$

$$t^{-1}y\sin(1/t) - (tv - y)\cos(1/t) = g(\alpha, \beta, \gamma),$$

где

$$\alpha = t^{-1}x\cos(1/t) + (tu - x)\sin(1/t),$$

$$\beta = t^{-1}x\sin(1/t) - (tu - x)\cos(1/t),$$

$$\gamma = zt^2,$$

а функции f и g удовлетворяют системе Коши – Римана

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} - \frac{\partial g}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шанько Ю. В.* О некоторых точных решениях трехмерных уравнений идеальной несжимаемой жидкости // Вычислительные технологии. 2004. Т. 9. Вестник КазНУ им. аль-Фараби. Сер. Математика, механика, информатика. № 3 (42). (Совм. выпуск. Ч. 4). С. 290–296.
2. *Чупахин А. П.* Гидродинамика с квадратичным давлением. 1. Общие результаты // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 27–35.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 378–378

УДК 517.956.4

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С РАЗРЫВНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

© Е. Ф. Шарин

eugene_sharin@mail.ru

Институт математики и информатики ЯГУ, Якутск

Работа посвящена исследованию гладкости решений краевых задач для параболических уравнений с негладкими коэффициентами в классах Гёльдера. Такие краевые задачи стали предметом изучения с начала XX века. Одним из первых работ в этом направлении были работы М. Жевре, позже были опубликованы труды М. А. Лаврентьева, А. В. Бицадзе, С. А. Терсенова, И. М. Петрушко, В. Н. Монахова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова и многих других авторов.

Актуальность изучения таких задач обоснована их физическим применением в моделировании таких процессов как распространение тепла в неоднородных средах, взаимодействия фильтрационных и каналовых потоков и другие.

Настоящая работа состоит из двух частей, в которых рассматриваются следующие задачи.

I. В полосе $\Pi = \{(x,t) : -\infty < x < +\infty,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) будем искать в полуполосах $\Pi^+ = \{\Pi : x > 0\}$, $\Pi^- = \{\Pi : x < 0\}$ как решение двух начально-краевых задач при выполнении условий склеивания

$$\begin{cases} u(-0,t) = u(+0,t), \\ u'_x(-0,t) = u'_x(+0,t), \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x > 0, \\ \varphi_2(x), & x < 0, \end{cases}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — заданные функции.

Методом потенциалов простого слоя доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи из пространства Гельдера $H_{x\ t}^{2+\gamma_1,\ 1+\frac{\gamma_1}{2}}(\Pi^{\pm})$.

II. Рассмотрим в полосе $\Pi = \{(x,t) : -\infty < x < \infty,\ 0 < t < T\}$ следующую задачу:

$$u_t - sgn(x) u_{xx} = f(x,t) \tag{3}$$

при граничных условиях

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x > 0, \tag{4}$$

$$u(x,T) = u_T(x), \quad x < 0. \tag{5}$$

В данной работе будем исследовать классические решения. Относительно правой части в (2) будем предполагать, что $f \in L_2(\Pi)$. Кроме того, потребуем чтобы функции u_0 и u_T в (3) и (4) удовлетворяли условию Гельдера с некоторым положительным показателем α, т. е.

$$\begin{cases} u_0(x) \in H^{\alpha}(0,\infty), \\ u_T(x) \in H^{\alpha}(-\infty,0). \end{cases}$$

Также рассмотрены вопросы, связанные с дифференциальными свойствами решений $u(x,t)$ в обоих рассмотренных случаях.

УДК 517.9

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА

© **А. С. Шипилов**

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение. Система уравнений Осколкова [1]

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu\nabla^2 v - (v\cdot\nabla)v - \nabla p, \qquad \nabla\cdot v = 0 \tag{1}$$

моделирует динамику вязкоупругой несжимаемой среды Кельвина-Фойгта. В [2] в специально подобранных функциональных пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ система (1) редуцирована к полулинейному операторному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{2}$$

причем показано, что оператор $M\,(L,1)$-ограничен, оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, а фазовым пространством уравнения (2) служит простое банахово C^∞-многообразие. В [3] показано, что в случае плоскопараллельной динамики, когда уравнения (1) можно редуцировать к уравнению Осколкова, это уравнение обладает бесконечномерным устойчивым и конечномерным неустойчивым инвариантным многообразием. В докладе представлено доказательство, что данный факт имеет место и в общей ситуации. Обозначим через A_σ сужение оператора $\mathrm{diag}\,\{-\nabla^2, -\nabla^2, \ldots, \nabla^2\}$ на пространство соленоидальных функций $\mathbb{H}^2_\sigma \cap \overset{\circ}{\mathbb{H}}{}^2_\sigma$. Справедлива следующая

Теорема. *При любых* $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\sigma(A_\sigma)$, $\nu \in \mathbb{R}_+$ *система уравнений* (1) *имеет конечномерное неустойчивое и бесконечномерное устойчивое инвариантные многообразия.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Осколков А. П.* Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 198. С. 31–48.
2. *Свиридюк Г. А.* Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. ВУЗов. Матем. 1994. № 1. С. 62–70.
3. *Китаева О. Г., Свиридюк Г. А.* Устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия уравнения Осколкова // Некласс. уравн. матем. физики. Новосибирск: ИМ, 2005. С. 160–166.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 380–380

УДК 517.953

О ВЫХОДЕ НА ПОЛИНОМ ПРИ $|x| \to \infty$ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© Г. А. Шмырев

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения с частными производными с постоянными коэффициентами следующего вида

$$L(D)u = \sum_{e \subseteq e_n,\, e \neq \emptyset} a_{\mathsf{r}^e} D^{\mathsf{r}^e} u = f(x). \tag{1}$$

Относительно оператора $L(D)$ будем предполагать, что он содержит смешанную производную $D^{\mathsf{r}} = D_1^{r_1} \cdots D_n^{r_n}$, доминирующую над производными меньшего порядка, и все производные D^{r^e}, $e \subset e_n$, получающиеся проектированием вектора r^e на координатные подпространства размерностей от $n-1$ до 1. Многочлен $L(\xi) = \sum\limits_{\mathsf{r}^e \subseteq N(L)} a_{\mathsf{r}^e} \xi^{\mathsf{r}^e}$, где $N(L)$ — многогранник Ньютона, удовлетворяет условию

$$L(\xi) > 0, \qquad \xi \in R^n \setminus 0.$$

Операторы такого типа были введены С. М. Никольским (см., например, [1–3]). В частности, он доказал негипоэллиптичность рассматриваемых операторов, показав, что для них нарушено условие Л. Хёрмандера

$$\left| \frac{1}{L(\xi)} \frac{\partial L(\xi)}{\partial \xi_j} \right| \to 0, \qquad |\xi| \to \infty.$$

При некоторых условиях на правую часть в настоящей работе устанавливается сходимость решений уравнения (1) к некоторому полиному при $|x| \to \infty$, при этом указывается скорость сходимости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 07-01-00289).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никольский С. М.* Функции с доминирующей смешанной производной. Краевые задачи для уравнений гипоэллиптического и более общего вида // Материалы к Советско-американскому симпозиуму по дифференциальным уравнениям с частными производными. Новосибирск, 1963.
2. *Никольский С. М.* Вариационные задачи // Мат. сб. 1963. Т. 62, № 1. С. 53–75.
3. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1965. Т. 77. С. 143–167.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 381–381

УДК 517.929

О ПРИРОДЕ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА КОШИ – ДИРИХЛЕ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

© М. Т. Шоманбаева

mtshomanbaeva@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — прямоугольник, ограниченный отрезками: $AB: 0 \le t \le T, x = 0$; $BC: 0 \le x \le l, t = T$; $CD: 0 \le t \le T, x = l$; $DA: 0 \le x \le l, t = 0$. Через $C^{2,1}(\Omega)$ обозначим множество функций $u(x,t)$ дважды непрерывно дифференцируемых по x и единожды непрерывно дифференцируемых по t в области Ω. Под границей области Ω понимаем совокупность отрезков $\Gamma = AB \cup AD \cup CD$.

Определение 1.1. *Оператором Коши – Дирихле* назовем следующий оператор

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$D(L) = \{u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0\}.$$

Задача S. Изучить природу спектра оператора Коши – Дирихле.

2. Полученный результат.

Теорема. *(а) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — иррациональное число, то спектр оператора $\overline{L}$*

$$Lu = u_t(x, T-t) + u_{xx}(x,t),$$

$$u|_{t=0} = u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0,$$

совпадает с числовой осью $(-\infty, +\infty)$. Спектр состоит из бесконечного (счетного) множества собственных значений и из предельных точек собственных значений. Оператор $\overline{L}$ обратим, но $(\overline{L})^{-1}$ неограничен.

(б) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \notin \overline{\left(m^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 1, 2, \dots$, то оператор $\overline{L}$ — ограниченно обратим, где $\overline{L}$ — замыкание оператора L, (x) — дробная часть числа x, верхняя черта последовательности означает операцию замыкания. Спектр оператора $\overline{L}$ состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и не имеют предельных точек, точнее, на каждом ограниченном сегменте содержится лишь конечное число предельных точек множества собственных значений λ_{mn}, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$

(в) Если $\frac{T\pi}{2l^2}$ — рациональное число и $\frac{1}{4} \in \overline{\left(m^2\frac{T\pi}{2l^2}\right)}$, $m = 1, 2, \dots$, то обратный оператор $(\overline{L})^{-1}$ не существует, $\lambda = 0$ является собственным значением. Спектр состоит из бесконечного множества собственных значений и их предельных точек, которые также бесконечны и разбросаны от $-\infty$ до $+\infty$. Каждый ограниченный замкнутый сегмент содержит лишь конечное число предельных точек собственных значений λ_{mn}, $m = 1, 2, \dots$, $n = 0, 1, 2, \dots$
Ноль может быть бесконечнократным собственным значением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.
2. *Вейль Г.* Избранные труды. М.: Наука, 1984.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 382–383

УДК 517.9

ОБ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ОПЕРАТОРОМ М. САЙГО В КРАЕВОМ УСЛОВИИ

© Т. В. Шувалова

matstat@mail.ru

Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара

Рассмотрим уравнение

$$xu_{xx} + yu_{yy} + \alpha(u_x + u_y) = 0,$$

в области D, ограниченной при $x > 0$, $y > 0$ кривой Жордана σ с концами в точках $A(1;0)$ и $B(0;1)$ и отрезком $OB(x = 0, 0 \le y \le 1)$; при $x > 0$, $y < 0$ характеристиками уравнения являются: $OC : x + y = 0$, $AC : \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$.

Обозначим через $D_0 = D \cap \{x > 0, y > 0\}$ эллиптическую часть области D и через $D_1 = D \cap \{x > 0, y < 0\}$ гиперболическую часть области D.

Пусть $\theta_0(x) = \frac{x}{4} - i\frac{x}{4}$ — точка пересечения характеристики уравнения, выходящей из точки $(x;0)$, $0 < x < 1$ с характеристикой OC.

Для уравнения поставим и исследуем нелокальную краевую задачу, характерной особенностью которой является наличие оператора дробного дифференцирования в краевом условии.

Следуя работе японского математика [1], введем обобщенный оператор дробного интегро-дифференцирования следующим образом

$$(I_{0+}^{\alpha,\beta,\eta}\varphi)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} F(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}) dt, \\ (0 < x < 1, \alpha > 0, \beta, \eta \in C); \\ \frac{d^n}{dx^n} I_{0+}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n}\varphi(x), \\ (0 < x < 1, \alpha < 0, \beta, \eta \in C, n = [-\alpha] + 1). \end{cases}$$

Задача I. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $u(x,y)$ является решением уравнения в области D;
2) $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_0 \cup D_1)$;
3) $u(x,y)$ удовлетворяет краевым условиям

$$u(x,y)|_\sigma = \varphi(s), 0 \le s \le l;$$

$$u(0;y) = \varphi_1(y), 0 \le y \le 1;$$

$$I_{0+}^{\frac{1}{2}-\alpha,\frac{1}{2},\alpha-\frac{1}{2}} x^{\alpha-1} u[\theta_0(x)] = Ax^{\alpha-\frac{3}{2}} a(x) u(x,0) + B(x);$$

4) $u(x,y)$ удовлетворяет условию сопряжения

$$\lim_{y\to 0+0} y^\alpha u_y(x,y) = \lim_{y\to 0-0} (-y)^\alpha u_y(x,y), (0 < x < 1);$$

где l — длина кривой σ, $\varphi(s)$ и $\varphi_1(y)$ — заданные непрерывные функции; A — отрицательная действительная константа; $a(x) \in C[0,1]$, $a(x)$ — положительная, неубывающая на отрезке $[0,1]$ функция; $b(x) \in H^\lambda[0;1]$.

Доказательство единственности решения задачи I следует из принципа экстремума, а именно из двух лемм о знаке функции $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0\pm 0} (\pm y)^\alpha u_y(x,y)$, $0 < x < 1$ в области

эллиптичности D_0 и в области гиперболичности D_1 и условия сопряжения. Отличительной особенностью этого доказательства является то, что при получении соотношения между функциями $\tau(x) = u(x,0)$ и $\nu(x)$ в области гиперболичности использовалась формула композиции обобщенных операторов дробного интегродифференцирования с отрицательным первым параметром, которая наряду с другими была впервые получена в работе [2].

Доказано существование регулярного решения исследуемой задачи в случае, когда "нормальная кривая" $x+y=1$ содержится в эллиптической области. Это доказательство основано на следующем. С помощью преобразования Мелина вопрос разрешимости задачи I сводится к вопросу разрешимости интегрального уравнения относительно неизвестной функции $\nu(x)$. Окончательно вопрос однозначной разрешимости задачи I эквивалентно сводится к вопросу разрешимости уравнения Фредгольма II рода с регулярным ядром и непрерывной правой частью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Saigo M.* // Math. Japan. 1978. Vol. 11, №2. P. 135-143.
2. *Шувалова Т. В.* Некоторые композиционные свойства обобщенных операторов дробного дифференцирования // Вестник Самарск. госуд. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. 2006. Вып. 42. С. 45-48.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 384–385

УДК 519.633

ЛОКАЛЬНО-ОДНОМЕРНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

© М. Х. Шхануков-Лафишев *, **М. М. Лафишева** **

* math@math.kbsu.ru

* *Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик;*
** *Институт информатики и проблем регионального управления КБНЦ РАН, Нальчик*

Работа посвящена рассмотрению локально-одномерных схем А. А. Самарского (см. [1]) для дифференциальных уравнений диффузии дробного порядка в многомерной области.

В цилиндре $Q_{t_0} = G \times (0, t_0]$, основание которого является p-мерный паралеллепипед $G = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_p) : \ 0 < x_k < \ell_k, \ k = \overline{1,p}\}$, рассмотрим следующую задачу для уравнения диффузии дробного порядка:

$$D_{0t}^{\alpha} u = Lu + f(x,t), \quad L = \sum_{k=1}^{p} L_k, \quad (x,t) \in Q_{t_0},$$

$$u|_{\Gamma} = \mu(x,t), \quad t \geq 0, \quad \bar{G} = G + \Gamma, \tag{1}$$
$$u(x,0) = u_0(t), \quad x \in \bar{G},$$

где $D_{0t}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\overset{\bullet}{u}(x,\eta)d\eta}{(t-\eta)^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$ — регуляризованная дробная производная Римана – Лиувилля, $\overset{\bullet}{u} = \partial u \backslash \partial t$.

На отрезке $[0, t_0]$ введем сетку

$$\bar{\omega}'_{\tau} = \left\{0, t_{j+\frac{k}{p}} = \left(j + \frac{k}{p}\right)\tau, \ j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1; \ k = 1, 2, \ldots, p\right\},$$

содержащую наряду с узлами $t_j = j\tau$, фиктивные узлы $t_{j+\frac{k}{p}}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$.

По аналогии с [1] уравнению (1) поставим в соответствие цепочку одномерных уравнений

$$\frac{1}{p} D_{0t}^{\alpha} v = L_k v + f_k, \quad t_{j+\frac{k-1}{p}} < t \leqslant t_{j+\frac{k}{p}}, \quad k = \overline{1,p}; \quad \sum_{k=1}^{p} f_k = f.$$

На каждом полуинтервале $\triangle_k = \left(t_{j+\frac{k-1}{p}}, t_{j+\frac{k}{p}}\right]$, $k = \overline{1,p}$, будем последовательно решать уравнения

$$P_k v_{(k)} = \frac{1}{p} D_{0t}^{\alpha} v - L_k v - f_k = 0, \quad x \in G, \quad t \in \triangle_k, \quad k = \overline{1,p}, \tag{2}$$

полагая $v_{(1)}(x,0) = u_0(x)$, $v_{(1)}(x,t_j) = v_{(p)}(x,t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1$; $v_{(k)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right) = v_{(k-1)}\left(x, t_{j+\frac{k-1}{p}}\right)$, $k = 2, 3, \ldots, p$; $j = 0, 1, \ldots, j_0 - 1$, $v_{(k)} = \mu(x,t)$, $x \in \Gamma_k$, Γ_k — множество граничных узлов по x_k.

Каждое из уравнений (2) заменим разностной схемой

$$\frac{1}{p} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{s=1}^{pj+k} \left(t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s+1}{p}} - t^{1-\alpha}_{j+\frac{k-s}{p}}\right) y_{\bar{t}}^{\frac{s}{p}} = \Lambda_k \left(\sigma_k y^{j+\frac{k}{p}} + (1-\sigma_k) y^{j+\frac{k-1}{p}}\right) + \varphi_k^{j+\frac{k}{p}}, \tag{3}$$

$$y^{j+\frac{k}{p}}|_{\gamma_{h,k}} = \mu^{j+\frac{k}{p}}, \quad j = 0, 1, \dots, j_0 - 1; \quad k = 1, 2, \dots, p,$$
$$y(x, 0) = u_0(x), \quad \Lambda_k y = y_{\bar{x}_k x_k},$$

$\gamma_{h,k}$ — множество граничных по направлению x_k узлов.

Нетрудно показать, что ЛОС (3) обладает суммарной аппроксимацией. Для решения задачи (3) справедлива оценка

$$\left\|y^{j+1}\right\|_C \leqslant \left\|y^0\right\|_C + \max_{0<t'\leqslant(j+1)\tau} \left\|\mu(x,t')\right\|_{C_j} + p^{1-\alpha}\Gamma(2-\alpha) \sum_{j'=0}^{j} \tau^\alpha \sum_{k=1}^{p} \max_{0<s\leqslant k} \left\|\varphi^{j'+\frac{s}{p}}\right\|_C . \qquad (4)$$

Из неравенства (4) выводится оценка для погрешности

$$\|z^{j+1}\|_C \leqslant M\left(\frac{h^2}{\tau^{1-\alpha}} + \tau^{2\alpha-1}\right), \quad z = y - u.$$

Итак, справедлива

Теорема. *Пусть задача (1) имеет единственное непрерывное в* $\overline{Q}_{t_0}$ *решение и существуют непрерывные производные в* $\overline{Q}_{t_0}$: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x_k^2 \partial x_\nu^2}$, $\frac{\partial^{2+\alpha} u}{\partial x_k^2 \partial t^\alpha}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$, $1 \leqslant k, v \leqslant p$, *и* $1/2 < \alpha < 1$, $h^2 = o(\tau^{1-\alpha})$. *Тогда решение разностной задачи (3) равномерно сходится к решению дифференциальной задачи (1) со скоростью* $O\left(h^2/\tau^{1-\alpha} + \tau^{2\alpha-1}\right)$, $h = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} h_k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1983.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 386–386

УДК 517

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА

© Д. Б. Эшмаматова

24dil@mail.ru

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан

Статья посвящена трансверсальности квадратичных стохастических операторов вольтерровского типа, действующих в конечномерном симплексе S^{m-1}.

Одним из важнейших понятий в теории динамических систем является понятие трансверсальности отображений. Первоначально в серии совместных работ А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] было введено понятие грубости для дифференциальных уравнений. Из введенного понятия "грубые системы" впоследствии в трудах Р. Тома, Зимана, Уитни, возникло более общее понятие трансверсальности отображений.

Пусть оператор вольтерровского типа имеет вид:

$$x_k' = x_k(1 + \sum_{i=1}^{m} a_{ki}x_i), \quad \overline{k = 1, m}, \quad a_{ki} = -a_{ik}, \quad \|a_{ki}\| \leq 1,$$

где $A = (a_{ki})$ — кососимметричная матрица.

Определение 1. Кососимметрическая матрица A называется *трансверсальной*, если любой главный минор четного порядка положителен.

Определение 2. Вольтерровский оператор V также называется *трансверсальным*, если его матрица A является трансверсальной.

Пусть $H = \{x = (x_1, \ldots, x_m) : \sum_{i=1}^{m} x_i) = 1\}$ гиперплоскость в R^m. Ясно, что H гладкое $m-1$-мерное многообразие. Из условия $a_{ki} = -a_{ik}$ легко следует, что оператор вольтерровского типа $V : H \longrightarrow H$ и является дифференцируемым отображением.

Одной из традиционных задач теории динамических систем является установление массивности множества всех трансверсальных отображений. Однако в работах [2–5] в общем случае трансверсальные отображения не образуют массивного подмножества.

Определение 3. Открытое и всюду плотное подмножество топологического пространства называется *массивным подмножеством.*

Теорема 1. *Множество всех трансверсальных операторов вольтерровского типа образуют открытое и всюду плотное подмножество, т. е. является массивным подмножеством, множества всех операторов вольтерровского типа.*

Связная компонента — максимальное связное открытое подмножество.

Теорема 2. *Число связных компонент множества трансверсальных операторов конечно.*

Доказательство этой теоремы следует из конечности числа миноров четного порядка кососимметрической матрицы .

Теорема 3. *Множество неподвижных точек*

$$X = \{x \in S^{m-1} : Vx = x\}$$

трансверсального оператора всегда конечно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Понтрягин Л. С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. Т. 145, № 5. С. 247–250.
2. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Нитецки З.* Введение в дифференциальную динамику. Пер. с англ. М.: Мир, 1975.
4. *Sarymsakov T. A., Ganikhodjaev N. N.* On some probabilistic problems in the theory of quadratic operators // Springier Proceeding in Phisics. 1992. V. 67. P. 143–149.
5. *Thom R.* Un Lemma sur les applications differentiables // Bol.Soc. Mat. Mexicana. 1956. V. 2. P. 59–71.

УДК 517.95

SOME INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC AND HYPERBOLIC EQUATIONS WITH A PARAMETER

© N. L. Abasheeva

anl@math.nsc.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We consider the following inverse problems with a parameter $p \in (p_1, p_2)$, $0 < p_1 < p_2 < \infty$.

Problem 1. To find functions $u(x,t,p)$ and $f(x,t)$ such as

$$u_t - p\Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \; p \in (p_1, p_2),$$

$$u(x,0,p) = u_0(x,p), \quad u(x,T,p) = u_1(x,p), \quad u|_\Gamma = \varphi(s,t,p).$$

Problem 2. To find functions $u(x,t,p)$ and $f(x,t)$ such as

$$u_{tt} - p\Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \; p \in (p_1, p_2),$$

$$u(x,0,p) = u_0(x,p), \quad u_t(x,0,p) = u_1(x,p), \quad u(x,T,p) = u_2(x,p), \qquad u|_\Gamma = \varphi(s,t,p).$$

Here $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain, $\Gamma = \partial\Omega \times (0,T)$, $0 < T < \infty$, u_0, u_1, u_2, φ are given functions.

First, we proved that solutions to these problems are unique in the class $u \in L_2((p_1,p_2) \times (0,T); W_2^2(\Omega))$, $u_t \in L_2((p_1,p_2) \times Q)$ ($u_{tt} \in L_2((p_1,p_2) \times Q)$ for Problem 2), $f \in L_2(Q)$. Then under some additional conditions on the data u_0, u_1, u_2, φ the solvability of these problems was proved.

The work was supported by RFBR grant 06-01-00439, Leading Scientific Schools grant 7157.2006.1, and SB RAS grants 48 and 2.2.

УДК 517.956.2

ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE ANISOTROPIC NONLINEARITIES

© S. Antontsev *, S. Shmarev **

* antontsevsn@mail.ru, ** shmarev@orion.ciencias.uniovi.es

* *Universidade da Beira Interior, Covilha, Portugal and Universidad Complutense de Madrid, Madrid, Spain;*
** *Universidad de Oviedo, Spain*

We study the Dirichlet problem with zero boundary conditions for the elliptic equations with variable anisotropic nonlinearities

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_i(x,u) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_i(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_i(x,u) \right] = f(x,u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \,, \tag{1}$$

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_i(x,u) \right] = f(x,u) \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \,, \tag{2}$$

in a bounded domain $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ with Lipschitz-continuous boundary $\Gamma = \partial\Omega$. It is assumed that $p_i(x) \in (1,\infty)$, $\alpha_i(x) \in (-1,\infty)$ are given functions such that $p_i(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ with the logarithmic module of continuity. Equations of these types emerge from the mathematical modelling of various physical phenomena, e. g., processes of image restoration, flows of electro-rheological fluids, thermistor problem, filtration through inhomogeneous media. We prove that under suitable restrictions on the coefficients and the nonlinearity exponents the Dirichet problem for equations (1) and (2) admit a. e. bounded weak solutions which belong to the anisotropic analogs of the generalized Sobolev – Orlicz spaces and establish the classes of uniqueness of bounded solutions. Localization properties of weak solutions are discussed for dissipative function $f(x,u)$, i. e., $-f(x,r)r \ge C|u|^{\sigma}$, where C, σ are some positive constants. Using a modification of the method of local energy estimates [1] we show that solutions of equations (1), (2) may identically vanish on a set of nonzero measure either due to a suitable diffusion-absorption balance, or because of strong anisotropy of the diffusion operator. The presentation follows papers [2–4].

REFERENCES

1. *Antontsev S. N., Díaz J. I., Shmarev S. I.* Energy Methods for Free Boundary Problems: Applications to Nonlinear PDEs and Fluid Mechanics. Bikhäuser, Boston, 2002. Series: Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. V. 48. 329 pp.
2. *Antontsev S. N, Shmarev S. I.* On localization of solutions of elliptic equations with nonhomogeneous anisotropic degeneracy // Siberian Mathematical Journal. 2005. V. 46. P. 765–782.
3. *Antontsev S. N., Shmarev S. I.* Elliptic equations and systems with nonstandard growth conditions: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Journal Nonlinear Analysis. 2006. V. 65. P. 722–755.
4. *Antontsev S. N., Shmarev S. I.* Elliptic equations with anisotropic nonlinearty and nonstandard growth conditions // Handbook of Differential Equations. Stationary PDEs. V. 3, Chapter 1. Elsevier, 2006. P. 1–100.

УДК 517.968

NONLINEAR EQUATIONS WITH INTEGRALS OF FRACTIONAL ORDER IN WEIGHTED LEBESGUE SPACES

© S. N. Askhabov

askhabov@yandex.ru

Chechen State University, Grozny, Russia

By Browder – Minty method of monotone operators, existence and uniqueness theorems are proved for three different classes of nonlinear equations involving integrals fractional order in weighted Lebesgue spaces and also norm estimates of solutions are obtained.

Let $\varrho(x)$ be a nonnegative measurable function on the whole real axis $\mathbf{R}$, which is almost everywhere (a. e.) finite and different from zero there. Then $L_p(\varrho)$, $p>1$, is the Banach space of all real-valued measurable functions $u(x)$ on $\mathbf{R}$ with finite norm $\|u\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho(x)\,|u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. We write $u(x)\in L_p^+(\varrho)$ if additionally $u(x)$ is a nonnegative function. For $\varrho(x)=1$ we simple write L_p and $\|\cdot\|_p$, respectively. The dual space to $L_p(\varrho)$ is the space $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ with $p'=p/(p-1)$, the conjugate exponent p, and norm $\|\cdot\|_*$.

Now suppose that function $F(x,t)\,:\,\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ satisfies Caratheodory conditions (i.e., $F(\cdot,t)$ is measurable for all $t\in\mathbf{R}$ and $F(x,\cdot)$ is continuous for almost all $x\in\mathbf{R}$) and let $(Fu)(x)=F[x,u(x)]$ be the corresponding Nemytski operator. Let us write out the sake of reference convenience all the conditions used below on the function $F(x,t)$ determining nonlinearity of the investigated equations. Namely, depending on the class of the investigated equations suppose that $F(x,t)$ satisfies either the conditions (i)–(iii) or (iv)–(vi) ($d_1,\ldots,d_4$ — positive constants):

(i) $|F(x,t)|\le c(x)+d_1\varrho(x)\,|t|^{p-1}$ for a. e. $x\in\mathbf{R}$ and all $t\in\mathbf{R}$ $\left(c(x)\in L_{p'}^+(\varrho^{1-p'})\right)$.

(ii) $(F(x,t_1)-F(x,t_2))\,(t_1-t_2)\ge 0$ for a. e. $x\in\mathbf{R}$ and all $t_1,t_2\in\mathbf{R}$.

(iii) $F(x,t)\cdot t\ge d_2\varrho(x)\,|t|^p-D(x)$ for a. e. $x\in\mathbf{R}$ and all $t\in\mathbf{R}$ $\left(D(x)\in L_1^+\right)$.

(iv) $|F(x,t)|\le g(x)+d_3\left(\varrho^{-1}(x)\,|t|\right)^{1/(p-1)}$ for a. e. $x\in\mathbf{R}$ and all $t\in\mathbf{R}$ $\left(g(x)\in L_p^+(\varrho)\right)$.

(v) $(F(x,t_1)-F(x,t_2))\,(t_1-t_2)>0$ for a. e. $x\in\mathbf{R}$ and all $t_1,t_2\in\mathbf{R}$ such that $t_1\ne t_2$.

(vi) $F(x,t)\cdot t\ge d_4\left(\varrho^{-1}(x)\,|t|\right)^{1/(p-1)}|t|-D(x)$ for a. e. $x\in\mathbf{R}$ and all $t\in\mathbf{R}$ $\left(D(x)\in L_1^+\right)$.

Let use notice that if the conditions (i)–(iii) are fulfilled, then the Nemytski operator $\mathbf{F}$, associated with the function $F(x,t)$, is a bounded and continuous, monotone, coercive mapping from the whole space $L_p(\varrho)$ into $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ and if the conditions (iv)–(vi) are fulfilled, then the operator $\mathbf{F}$ is a bounded and continuous, strictly monotone, coercive mapping from the whole space $L_{p'}(\varrho^{1-p'})$ into $L_p(\varrho)$ (see e. g. [1–3]). The simplest example of a function $F(x,t)$ satisfying the conditions (i)–(iii), (v) is $F(x,t)=\varrho(x)\,t^{p-1}$, where p is an even number.

Let us first consider equation which are simpler for investigation.

Theorem 1. *Let be $p\ge 2$, $0<\alpha<1$ and $\varrho(x)$ satisfy the condition:*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\varrho(x)]^{2/[2-p(1+\alpha)]}dx<\infty\,. \tag{1}$$

If the function $F(x,t)$ satisfies the conditions (i)–(iii), *then the equation*

$$F[x,u(x)]+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=f(x)$$

has a unique solution $u^*(x) \in L_p(\varrho)$ *for any* $f(x) \in L_{p'}(\varrho^{1-p'})$. *Moreover, if additionally* $D(x) = 0$, *then the inequality* $\|u^*\| \le \left(d_2^{-1}\|f\|_*\right)^{1/(p-1)}$ *holds.*

We note that, under the assumptions of Theorem 1, we have $L_p(\varrho) \subset L_{2/(1+\alpha)}$ and $L_{2/(1-\alpha)} \subset L_{p'}(\varrho^{1-p'})$.

We now consider the nonlinear Abel integral equation of second kind.

Theorem 2. *Let be* $1 < p \le 2$, $0 < \alpha < 1$ *and* $\varrho(x)$ *satisfy the condition:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varrho(x)]^{2/[2-p(1-\alpha)]} dx < \infty .$$

If the function $F(x,t)$ *satisfies the conditions* (i), (iii) *and* (v), *then the equation*

$$u(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{F[t,u(t)]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x)$$

has a unique solution $u^*(x) \in L_p(\varrho)$ *for any* $f(x) \in L_p(\varrho)$. *Moreover, if additionally* $c(x) = 0$ *and* $D(x) = 0$, *then the inequality* $\|u^*\| \le d_1\, d_2^{-1}\, \|f\|$ *holds.*

We note that, under the assumptions of Theorem 2, we have $L_{p'}(\varrho^{1-p'}) \subset L_{2/(1+\alpha)}$ and $L_{2/(1-\alpha)} \subset L_p(\varrho)$.

Let us consider corresponding case that a operator of fractional integration enter the equation nonlinearly.

Theorem 3. *Let be* $p \ge 2$, $0 < \alpha < 1$ *and* $\varrho(x)$ *satisfy the condition (1). If the function* $F(x,t)$ *satisfies the conditions* (iv)–(vi), *then the equation*

$$u(x) + F\left[x, \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right] = f(x)$$

has a unique solution $u^*(x) \in L_p(\varrho)$ *for any* $f(x) \in L_p(\varrho)$. *Moreover, if additionally* $g(x) = 0$ *and* $D(x) = 0$, *then the inequality* $\|u^* - f\| \le d_3\, d_4^{-1}\, \|f\|$ *holds.*

Finally, we point out that similar results like in Theorems 1–3 also hold for corresponding systems of nonlinear equations involving classical Riemann – Liouville operators of fractional integration

$$\left(I_+^{\alpha}u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} \frac{u(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}, \quad \left(I_-^{\alpha}u\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{\infty} \frac{u(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1 .$$

REFERENCES

1. *Askhabov S. N.* Singular Integral Equations and Convolution Type Equations with Monotonic Nonlinearity. Maikop: MSTU, 2004. 387 p. (in Russian).
2. *Brezis H., Browder F. E.* Some new results about Hammerstein equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80, N 3. P. 567–572.
3. *Zabrejko P., Rogosin S.* Nonlinear Abel equation with monotone operators // J. Electrotechn. Math. 1997. N 1. P. 53–65.

УДК 517.9

COMPLEX ANALYSIS AND INVERSE PROBLEMS

© A. L. Bukhgeim

boukhgueim@math.wichita.edu

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
Wichita State University, Wichita, USA

In the introduction we show that the inverse gravimetry problem on the plane, vector and tensor tomography problems can be investigated on the same language of elliptic differential operators with operator coefficients. Then we develop elements of the boundary value problems for such operators. Using this approach we obtain some new inversion formulae, algorithms and stability estimates for aforementioned inverse problems.

The author was partly supported by NSF (grant DMS-0505470).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 392–392

УДК 517.95

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE STRING EQUATION, SOME NEW LINKS WITH GEOMETRY, ANALYSIS AND ALGEBRA PROBLEMS

© V. P. Burskii [*], A. S. Zhedanov [**]

[*] v30@dn.farlep.net, [**] zhedanov@yahoo.com

[*] *Institute of Applied Mathematics and Mechanics NASU, Donetsk, Ukraine;*
[**] *Donetsk Institute for Physics and Technology, Donetsk, Ukraine*

The communication is devoted to a connection between ill-posed boundary value problems in a bounded semialgebraic domain for partial differential equations and the Poncelet problem, recently revealed by authors. The Poncelet problem is one of famous problems of projective geometry and it by itself has numerous links with a set of different problems of analysis and physics. Investigations of ill-posed boundary value problems in bounded domains for partial differential equations go back to J. Hadamard. The solution uniqueness of the Dirichlet problem for the string equation $u_{xy} = 0$ in Ω, $u|_C = \phi$ on $C = \partial\Omega$ in a bounded domain Ω is connected with properties of John automorphism $T : \partial\Omega \to \partial\Omega$. In particular, there is the following *sufficient condition of uniqueness:* The homogeneous Dirichlet problem has only trivial solution in the space $C^2(\overline{\Omega})$ if the set of periodic points of T on C is finite or denumerable. We consider this problem in a bounded semialgebraic domain, the boundary of which is given by some bi-quadratic algebraic curve $F(x, y) := \sum_{i,k=0}^{2} a_{ik}x^i y^k = 0$. We show the John mapping in this case is the same as Ponselet mapping in some rational parametrizations of conics. From it we obtain

Theorem. *For generic bi-quadratic curve the Dirichlet problem has non-unique solution if and only if corresponding Poncelet problem has periodic trajectory.*

From Poncelet theorem we obtain if there exists some periodical point then each point of C is periodical with the same period. On the other hand a Baxter parametrization allows write the Poncelet mapping by means of elliptic Jacoby functions and obtain a criterion of existence of periodical points and a criterion of uniqueness breakdown for above the Dirichlet problem.

In turn the solution uniqueness of the Dirichlet problem is equivalent to solution uniqueness of some class of boundary value problems for the same equation on C and is equivalent to an indeterminacy of some moment problem on C: $\exists\alpha(s) \neq 0, \forall k = 0, 1, \ldots \int_C [x(s)]^k \alpha(s)\, ds = \int_C [y(s)]^k \alpha(s)\, ds = 0$, where (x, y) are Cartesian coordinates of point on C parametrized by s.

Except for that a Cayley determinant criterion of periodicity of Poncelet problem for case of even period can be understood as a criterion of solvable for algebraic Pell – Abel equation $P^2 - RQ^2 = 1$, where for given polinomial R of the order 4 it is required to find polinomials P, Q. The last problem has connections with a lot of different problems of analysis also.

УДК 517.9

UNLOCAL STABLE INVARIANT MANIFOLDS FOR THE GINZBURG – LANDAU EQUATION

© A. V. Fursikov

fursikov@mtu-net.ru

Moscow State University, Moscow, Russia

One of possible approaches to solve (local) stabilization problem for nonlinear evolution PDE in a neighborhood of its steady-state solution $\widehat{v}$ is based on using stable invariant manifold defined in this neighborhood of $\widehat{v}$ [1]. In order to extend stabilization theory on the case when initial condition of stabilized equation is far from $\widehat{v}$ one has to be able to construct stable invariant manifold „in whole“, i.e. outside small neighborhood of $\widehat{v}$.

In a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ the Ginzburg – Landau equation is considered:

$$\partial_t v(t,x) - \nu\Delta v - v + v^3 = 0, \quad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{1}$$

with zero Dirichlet condition on $\partial\Omega$, where parameter $\nu > 0$ is small enough. Then (1) has several steady-state solutions. Let $\widehat{v}$ be one of them. Let $\{e_j, \lambda_j\}, \lambda_1 \leqslant \ldots \lambda_N < 0 < \lambda_{N+1} \leqslant \ldots \lambda_k \to \infty$ as $k \to \infty$ be eigenfunctions and eigenvalues of linearization on $\widehat{v}$ of space part of (1). We decompose the phase space $V = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ of (1) on $V_+ \oplus V_-$ where $V_+ = [e_1, \ldots e_N], V_- = [e_{N+1}, \ldots]$. The set $M_- \subset V$ contained $\widehat{v}$ is called stable invariant manifold if for each $v_0 \in M_-$ the solution $v(t,\cdot,v_0)$ of (1) with initial condition v_0 belongs to M_- for every $t > 0$, and $\|v(t,\cdot,v_0) - \widehat{v}\|_V \leqslant \exp(-rt)$ as $t \to \infty$ for certain $r > 0$. Moreover

$$M_- = \{\widehat{v} + v_- + F(v_-), v_- \in \mathcal{O}(V_-)\} \tag{2}$$

where $\mathcal{O}(V_-)$ is a neighborhood of the origin in V_-, and $F : \mathcal{O}(V_-) \to V_+$ is a map satisfying $\|F(v_-)\|/\|v_-\| \to 0$ as $\|v_-\| \to 0$.

Existence theorem for invariant manifold M_- is well know when the neighborhood $\mathcal{O}(V_-)$ from definition (2) belongs to a ball $B(V_-, r) = \{v_- \in V_- : \|v_-\|_{V_-} \leqslant r\}$ of small enough radius r. We prove existence of M_- with neighborhood $\mathcal{O}(V_-)$ from (2) which is not contained to the ball $B(V_-, r)$ with arbitrary big r

Introduce the following subspace V_-^k of $V_- : V_-^k = [e_k, e_{k+1}, \ldots]$ with $k > N$, and in the space V_- define the following „cruciform“ set: $CR_{r,\rho}(k) = B(V_-, r) \cup B(V_-^k, \rho)$.

Theorem. *For a certain $r > 0$ and for arbitrary $\rho > 0$ one can find $k > N$ such that there exists a neighborhood $\mathcal{O}(V_-)$ satisfying conditions: i) $CR_{r,\rho}(k) \subset \mathcal{O}(V_-)$, ii) There exists a stable invariant manifold (2) with this $\mathcal{O}(V_-)$.*

The proof is based on the theory of analytical stable invariant manifolds. See its local version in [2]

There are examples of ODE when a stable invariant manifold is defined only locally. In the case of parabolic PDE and Navier – Stokes system stable invariant manifolds are always infinite dimensional. That is the reason why they can be extended up to unbounded set.

REFERENCES

1. *Fursikov A. V.* Stabilizability of two-dimensional Navier – Stokes equations with help of boundary feedback control // J. of Math. Fluid Mech. 2001. V. 3. P. 259–301.
2. *Fursikov A. V.* Analyticity of stable invariant manifolds of 1D-semilinear parabolic equations // Proc. of Summer Research Conf. “Control methods of PDE-dynamical systems”, AMS Contemporary Math. series. Providence, 2007 (to appear).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 394–394

УДК 517.95

SIMULTANEOUS EXACT CONTROL FOR MAXWELL'S EQUATIONS AND A HYPERBOLIC SYSTEM WITH A PRESSURE TERM

© B. V. Kapitonov

borisvk@lncc.br

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We consider two different hyperbolic problems: the system of Maxwell's equations and a vector wave equation with a pressure term, which is a simplify model of dynamical elasticity for incompressible materials. Our main result says that we can obtain simultaneous exact boundary control for both models. Simultaneous exact control for different evolution systems was proposed by J.L. Lions and as far as we know such problems were only treated for one system with two different boundary conditions.

We consider the simultaneous boundary observability for problems with zero boundary conditions. The strategy here is to use some modified multipliers for both systems and obtain convenient estimates with geometrical assumptions on the domain to obtain the boundary observability inequality. The simultaneous exact controllability is studied by means of the Hilbert Uniqueness Method, introduced by J. L. Lions.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 395–395

УДК 517.927.21, 517.518.14

SOME ASPECTS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

© A. A. Kilbas

anatolykilbas@gmail.com

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Our report is devoted to some aspects of the so-called differential equations of fractional order in which an unknown function is contained under the operation of fractional differentiation. A survey of classical and modern results in the theory of ordinary and partial differential equations with fractional derivatives is given.

The existence and uniqueness theorems to Cauchy-type and Cauchy problems for ordinary nonlinear differential equations with Riemann – Liouille, Hadamard and Caputo fractional derivatives are proved by using the method based on the reduction of the considered problems to the equivalent one-dimensional Volterra integral equations.

The operational and compositional methods to solve in closed form some classes of fractional differential equations are presented. Methods of the one-dimensional Laplace, Fourier and Mellin integral transforms are applied to the explicit solutions of some classes of linear ordinary differential equations with Liouville and Caputo fractional derivatives and of the corresponding Cauchy-type and Cauchy problems.

Method of integral transforms is established to construct solutions of Cauchy-type and Cauchy problems for two- and multi-dimensional differential equations with partial Riemann – Liouvile and Caputo fractional derivatives with respect to the time generalizing classical diffusion and wave equations, and for fractional evolution equations involving the Liouville partial fractional derivative with respect to the space together with the Riemann – Liouville or Caputo fractional derivative with respect to the time.

Explicit solutions of the considered equations and problems are expressed in terms of the Mittag – Leffler functions and some of their generalizations and modifications, of the Wright generalized hypergeometric functions and of the H-function; for example, see [1, Chapter 1] and [2, Chapters 1 and 2].

Some applications are given. In particular, a new fractional model for the super-diffusion processes involving the partial fractional derivative of a function with respect to another function is presented.

Most of the results were presented in the book [1].

Problems and new trends of research are discussed.

This investigation was supported by Belarusian Fundamental Reseacrh Fund under Project F06R-106.

REFERENCES

1. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies. Vol. 204. Elsevier, Amsterdam, 2006. xv+523 pp.
2. *Kilbas A. A., Saigo M.* H-transforms. Theory and Applications. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004. xii+389 pp.

УДК 577.95

LOCAL STRUCTURE OF THE MORSE SYSTEM OF TWO NON-AUTONOMUS ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

© Alexander N. Kusyumov

postbox7@mail.ru

A.N. Tupolev State Technical University of Kazan, Kazan, Russia

We consider a smooth system of ordinary differential equations

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x). \tag{1}$$

Here $t \in T \subset R$ is time coordinate, vector x belongs to two-dimensional space of phase coordinates $M \subset R^2$, $f(t,x)$ is a certain smooth vector-function.

Definition 1. We shall say that the point $t_0 = 0, x_0 = 0 \in T \times M$ is the critical point of the system(1) at an instant t_0 if $f(t_0,x_0) = 0$ for $i = 1,\ldots,2$.

We can consider the vector-function $x(t)$ as a result of Cartesian product of maps $x^i : T \longrightarrow X^i$, where $X^i \subset R$, $i = 1,\ldots,2$.

Note that we can consider also the instant $t = t_0$ as the critical point for each of maps $x^i : T \longrightarrow X^i$.

Definition 2[1]. The critical point t_0 is the regular point for the function $x^i(t)$ if

$$\frac{d^2x^i}{dt^2}|_{t_0} \neq 0.$$

Definition 3. We shall say that the system (1) is the Morse system in a neighbourhood of the critical point t_0, x_0 if $x^i(t) = \alpha_i t^2$ for each solution $x^i(t)$ of the set (1) ($\alpha_i = \mathrm{const} \neq 0$).

Let the functions $x^i(t)$ in a neighbourhood of the critical point $t_0 = 0, x_0 = 0$ have the form

$$x^i(t) = \alpha_i t^{k_i+1} + O(t^{k_i+2}), \quad (i = 1,2)$$

where $\alpha_i = \mathrm{const}$, $i = 1,2$, $k_1 = k$, $k_2 = m$ ($k,m \geq 1$). Then for the given integral manifold we have

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t,x(t)) \approx \alpha_i(k_i+1)t^{k_i}. \tag{2}$$

We determine a class of equivalence of smooth functions $f^i(t,x)$, which satisfy to the condition (2).

Theorem. *For Morse equations system (1) ($k_1 = k_2 = 1$) the functions $f^i(t,x)$ in a neighbourhood of the critical point t_0, x_0 have the form*

$$f^i(t,x) = t(2\alpha_i + t\psi^i_{00}(t,x)) + \sum_j x^j \psi^i_j(t,x), \quad (j = 1,2)$$

where $\psi^i_{00}(t,x), \psi^i_j(t,x)$ are smooth functions.

For example let the considered system contains one equation

$$\frac{dx}{dt} = \beta(x + \beta t).$$

This equation has the solution $x(t) = \exp(\beta t) - 1 - \beta t$ under the condition $x(0) = 0$. In a neighbourhood of the critical point ($0,0$) this solution has the form $x(t) = (\beta t)^2/2 + O(t^3)$.

REFERENCES

1. *Poston T., Stewart I. N.* Catastrophe Theory and Its Applications. London: Pitman, 1978.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 397–398

УДК 517.9

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO HYPERBOLIC SYSTEMS WITH TIME DELAY IN THE BOUNDARY CONDITIONS

© N. A. Lyulko

lulko@online.sinor.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Hyperbolic systems with time delay arise during mathematical modeling of countercurrent chemical reactors with recycle, when some substances return partly to the entrance of the reactor after exiting with some time delay that need for transportation of this substancies (via tubes, mechanically, etc.). It is known that pipe reactors of ideal displacement with the recycle can have several stationary solutions. Therefore the question of their stability arises.

We consider the boundary value problem in the half-strip $\Pi = \{(x,t): \ 0 < x < 1, \ \ t > 0\}$:

$$U_t - L_{\mathcal{A}}U = F(x,t,U), \quad (x,t) \in \Pi, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{m}(A_kU(0,t-\tau_k) + B_kU(1,t-\tau_k)) + \sum_{r=0,1}\sum_{k=1}^{m}(\int\limits_0^{\tau_k}\Phi_k^r(\xi)U(r,t-\xi)\,d\xi) = 0, \tag{2}$$

$$U(x,t)|_{\Gamma} = \bar{U}(x,t). \tag{3}$$

Here $U(x,t)$ is an n-dimensional vector of the unknown functions, $F(x,t,U)$ is an n-dimensional vector of smooth functions; $L_{\mathcal{A}}U = -K(x)U_x + A(x)U$, where $K(x)$ is the diagonal matrix with the entries $k_i(x) \neq k_j(x) \neq 0$, $(i \neq j)$, $A(x)$, A_k, B_k, $\Phi_k^r(\xi)$ are $n \times n$ matrices; $n \geq 2$, $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_m$ are fixed reales (the delay times), $m \geq 0$.

In [1] was considered well-posedness of linear problem (1)–(3). In the case when $F(x,t,U) \equiv 0$ and the eigenvalues of the spectral problem corresponding to the system (1), (2) lie on the left half-plane $Re\lambda < -\gamma$ ($\gamma > 0$) the estimate

$$\|U(x,t)\|_{C^1[0,1]} \leqslant Ke^{-(\gamma-\varepsilon)t}\|\bar{U}(x,t)\|_{C^1(\Gamma)}, \quad \gamma - \varepsilon > 0,$$

for $t > 0$ was proved. This estimate makes possible to justify the linearization prinziple for analysis of stability of stationary solutions to the nonlinear problem (1)–(3) if the right part F independent of t evidently.

Let's note that the linear hyperbolic systems with time delay in the boundary conditions, as a systems with decomposable boundary conditions without delay [2], have a property of increase of smoothness of solutions by executing some algebraic ratioes between entries of the matrieces $K(x)$, $A(x)$, A_k, B_k, $k = 0,\dots,m$.

Definition. Let's speak that the problem (1)–(3) has *the property of increase of smoothness of solutions up to order* k, if there exists such number $T(k) > 0$, that any solution $U(x,t)$ of the problem will be k times continuously differentiated for $t > T(k)$. In the case of linear problem $F(x,t,U) \equiv 0$ the solution satisfies for $t > T(k)$ the estimate

$$\|D_{x,t}^{\alpha,\beta}U(x,t)\|_{C[0,1]} \leqslant K(t)\|\bar{U}(x,t)\|_{L_2(\Gamma)},$$

where $\alpha + \beta \leqslant k$, the constant $K(t)$ independent of function $\bar{U}(x,t)$ but depend on the coeffitients of the problem.

For the linear system (1), (2) is isolated the class of named P-regular boundary conditions. The following theorem is proved:

Theorem. *Let* $F(x,t,U) \equiv 0$, $A(x)$, $K(x) \in C^{\mathbf{k}+2}[0,1]$, $0=\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_m$ *— fixed reales. P-regularity of the boundary conditions (2) is a sufficient condition, that the problem (1)–(3) has the property of increase of smoothness of solutions up to order* k, *if* $\bar{U}(x,t) \in C^1(\Gamma)$ *and* $\Phi_l^r(\xi) \in C^1[0,\tau_l]$, *(*$l=1,\ldots,m$*);* $k \geq 0$.

REFERENCES

1. *Lyulko N. A.* The mixed problem for a hyperbolic system on the plane with delay in the boundary conditions // Sib. Mat. J. 2005. V. 45, N 5. P. 1100–1125.
2. *Eltysheva N. A.* On qualitative properties of solutions to some hyperbolic systems on the plane // Mat. Sb. 1988. V. 135, N 2. P. 186–209.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 399–400

УДК 517.994

NEW CLASS OF INVARIANT AND PARTIALLY INVARIANT SOLUTIONS TO THE ONE-DIMENSIONAL GAS DYNAMICS EQUATIONS

© S. V. Meleshko

sergey@math.sut.ac.th

Suranaree University of Technology, Nakhon Ratchasima, Thailand

The presentation is devoted to discussing a new class of solutions of the one-dimensional gas dynamics equations

$$\begin{array}{l} u_t + uu_x + \tau p_x = 0, \\ \tau_t + u\tau_x - \tau u_x = 0, \\ p_t + up_x + A(\tau, p)u_x = 0. \end{array} \tag{1}$$

Here ρ is the density, u is the velocity, p is the pressure, and c is the sound speed ($c^2 = \tau A$). For a polytropic gas $A = \gamma p$, $\gamma > 1$. The new class of solutions is obtained by applying sequentially the method differential of constraints and group analysis.

The idea of the method of differential constraints was proposed by N. N. Yanenko [1] as a generalization of solutions with degenerated hodograph. This class of solutions is characterized by finite relations between dependent functions. Well-known classes of such solutions are simple and double waves. A survey of the method can be found in [2,3]. Applications of the method of differential constraints to the one-dimensional gas dynamics equations written in Lagrangian coordinates are given in [4, 5], and in the Eulerian coordinates in [6].

Another approach for generalizing the set of solutions with a degenerated hodograph is given by L. V. Ovsiannikov [7, 8]. He extended a set of invariant solutions by introducing the notion of a partially invariant solution. Invariant and partially invariant solutions of the gas dynamics equations were studied in program PODMODELI [9]. Review of the results of this program can be found in [10].

The problem of relations between partially invariant solutions and solutions obtained by the method of differential constraints was repeatedly set up by L. V. Ovsiannikov and N. N. Yanenko. In the presentation it is given answer to this problem for a particular class of solutions of the gas dynamics equations.

Let us consider solutions of (1) which are defined by the differential constraints

$$\tau_x = \varphi^\tau(\tau, p), \quad p_x = \varphi^p(\tau, p), \quad u_x = \varphi^u(\tau, p). \tag{2}$$

The functions $\varphi^\tau(\tau, p)$, $\varphi^p(\tau, p)$, $\varphi^u(\tau, p)$ have to satisfy the equations

$$\begin{array}{c} \varphi^u(\frac{\gamma p}{\tau}\varphi^\tau_p - \varphi^\tau_\tau) + \varphi^u_p\varphi^p + \varphi^u_\tau\varphi^\tau = 0, \\ \tau\varphi^u(\varphi^u_p\frac{\gamma p}{\tau} - \varphi^u_\tau) - \tau(\varphi^p\varphi^p_p + \varphi^\tau\varphi^p_\tau) = \varphi^{u\ 2} + \varphi^p\varphi^\tau, \\ \tau\varphi^u(\varphi^p_p\frac{\gamma p}{\tau} - \varphi^p_\tau) - \gamma p(\varphi^p\varphi^u_p + \varphi^\tau\varphi^u_\tau) = (\gamma+1)\varphi^p\varphi^u. \end{array} \tag{3}$$

Notice that if $\Delta = \tau_x p_t - \tau_t p_x = -\tau\varphi^u(\varphi^p + \frac{\gamma p}{\tau}\varphi^\tau) \neq 0$, then from the relations $\tau = \tau(t,x)$ and $p = p(t,x)$ one can find $t = t\,(\tau, p)$, $x = x(\tau, p)$. Substituting them into the values for the derivatives $\tau_x(t,x)$, $p_x(t,x)$, $u_x(t,x)$, one finds that all solutions of the gas dynamics equations with $\Delta \neq 0$ can be described by the differential constraints (2). If the functions $\varphi^\tau(\tau, p)$, $\varphi^p(\tau, p)$, $\varphi^u(\tau, p)$ are found, then a solution of the gas dynamics equations (1) is restituted by quadratures. Thus, for finding exact solutions of the gas dynamics equations one can use solutions of system (3).

Equations (2) admit the Lie algebra with the generators

$$X_1 = \tau\partial_\tau + p\partial_p, \quad X_2 = \varphi^\tau\partial_{\varphi^\tau} + \varphi^p\partial_{\varphi^p} + \varphi^u\partial_{\varphi^u},$$
$$X_3 = \tau\partial_\tau - p\partial_p + \varphi^\tau\partial_{\varphi^\tau} - \varphi^p\partial_{\varphi^p}.$$

The generators X_2 and X_3 are inherited by the operators admitted by the one-dimensional gas dynamics equations of a polytropic gas (1): $Y_1 = t\partial_t + x\partial_x$, $Y_2 = \tau\partial_\tau - p\partial_p$, respectively. The generator X_1 produces a new set of symmetries: it is not admitted by a system of the gas dynamics equations (1).

The algebra $\{X_1, X_2, X_3\}$ is Abelian. In the presentation all classes of invariant and partially invariant solutions related with the subalgebra $X_1 + k_2X_2 + k_3X_3$ are considered. Here k_2 and k_3 are constant.

It is interesting to note that among the set of invariant solutions there is one class of solutions which has a functional arbitrariness. It is interesting because usually for two independent variables an invariant solution with respect to a one-parameter Lie group is reduced to a system of ordinary differential equations which has only constant arbitrariness.

For partially invariant solutions it is shown that all unreduceable partially invariant solutions coincide with solutions characterized by two differential constraints of first-order of the gas dynamics equations [6]. Thus, this gives a solution of the problem which was set up by N. N. Yanenko and L. V. Ovsiannikov.

REFERENCES

1. *Yanenko N. N.* Compatibility theory and methods of integrating systems of nonlinear partial differential equations // Proceedings of the Fourth All–Union Mathematics Congress. Nauka, Leningrad, 1964, P. 613.
2. *Sidorov A. F., Shapeev V. P., Yanenko N. N.* The method of differential constraints and its applications in gas dynamics. Nauka, Novosibirsk, 1984.
3. *Meleshko S. V.* Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations. Springer Science+Business Media, Inc., New York, 2005.
4. *Raspopov V. E., Shapeev V. P., Yanenko N. N.* An application of the method of differntial constraints to the one-dimensional gas dynamics equations // Izvestiya V.U.Z. Matematica. 1974. V. 150, № 11. P. 69–74.
5. *Raspopov V. E., Shapeev V. P., Yanenko N. N.* Method of differential constraints for the one-dimensional gas dynamics equations // Chislennye metody mehaniki sploshnoi sredy (Novosibirsk). 1977. V. 8, № 2. P. 100–105.
6. *Meleshko S. V.* Nonisentropic solutions of simple wave type of the gas dynamics equations // New mathematical models in continuum mechanics: construction and study. Abstracts of All Russia conference dedicated to L.V.Ovsiannikov 85-anniversary. Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, 2004. P. 92–93.
7. *Ovsiannikov L. V.* Groups and group-invariant solutions of partial differential equations // Dokl. RAS. 1958. V. 118, № 3. P. 439–442.
8. *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. Nauka, Moscow, 1978. English translation, Ames, W.F., Ed., published by Academic Press, New York, 1982.
9. *Ovsiannikov L. V.* Program submodels. gas dynamics // J. Appl. Maths Mechs. 1994. V. 58, № 4. P.30–55.
10. *Ovsiannikov L. V.* Some results of the implementation of the "podmodeli" program for the gas dynamics equations // J. Appl. Maths Mechs. 1999. V. 63, № 3, P. 349–358.

УДК 517.956

ON PROPAGATION OF PERTURBATIONS FOR SOLUTIONS TO QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

© **A. B. Muravnik**

amuravnik@yandex.ru

Computing Centre of the 4th Clinical Polyclinic of Voronezh City, Voronezh, Russia

It is well known that perturbations have an infinite velocity of propagation according to the classical heat-conductivity model. However, it was found in [1] that, in the case of a single spatial variable, the above velocity becomes finite under certain natural restrictions for the initial-value function (it suffices to assume that it is positive definite and its derivative is bounded).

Here we present an estimate of the above velocity for a new class of quasilinear parabolic equations. More exactly, the Cauchy problem for the following quasilinear equation is considered (for $\alpha > 0$):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2. \tag{1}$$

Assuming that $0 < \sigma \leqslant u_0(x) < \infty$ and $|u_0'(x)| \leqslant M < \infty$, we obtain the estimate

$$\|u\Big|_{t=T}\|_{L(a,b)} \leqslant (b-a)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \|u_0\|_{L_{\alpha+1}(a-\lambda T, b+\lambda T)}$$

for any positive T and any real a and b such that $a < b$, where λ stands for the constant $\dfrac{(\alpha+1)M(\sup u_0)^\alpha}{\sigma^{\alpha+1}}$.

Nonlinearities of the kind (1) arise, e.g., in models of directed polymers and interface growth (see [2, 3]).

REFERENCES

1. *Kalašnikov A. S.* Quasilinear degenerate parabolic equations with a finite speed of propagation of perturbations // Partial Differential Equations (Proc. Conf. dedicated to the 70th birthday of S. L. Sobolev, Novosibirsk, 1978), “Nauka”, Sibirsk. Otdel., Novosibirsk, 1980, C. 80–83 [in Russian].
2. *Kardar M., Parisi G., Zhang Y.-C.* Dynamic scaling of growing interfaces// Phys. Rev. Lett. 1986. T. 56. C. 889–892.
3. *Medina E., Hwa T., Kardar M., Zhang Y.-C.* Burgers equation with correlated noise: renormalization group analysis and applications to directed polymers and interface growth// Phys. Rev. A. 1989. T. 39. C. 3053–3075.

УДК 517.95

A PRIORY ESTIMATES FOR SOME CLASS OF QUASILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

© **Nurkhat Nurlybayev**

nurhat@gmail.com

Centre of Physical and Mathematical Research of National Academy of Sciences, Almaty, Kazakhstan

A priori estimates of solutions to the Cauchy problem for some class of quasi-linear hyperbolic equations are obtained. For these equations the positiveness of solutions and in some special cases the global solvability are proved.

We consider the Cauchy problem for the following class of equations

$$\frac{d}{dl}u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})+u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})Q(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c}))=P(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})), \tag{1}$$

where $\frac{d}{dl}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{c}\nabla_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$ and $\mathbf{c}$ are n-dimensional vectors.

The following assertion takes place for this equation.

Lemma. *Let* $P(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c}))>0$ *if* $u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})>0$, $Q(t,\mathbf{x},\mathbf{c},u(t,\mathbf{x},\mathbf{c}))<\infty$ *if* $u<\infty$, $u(0,\mathbf{x},\mathbf{c})=u_0(\mathbf{x},\mathbf{c})>0$. *Then* $u(t,\mathbf{x},\mathbf{c})$ *is positive for all* $t>0$.

Proof. Transforming the Boltzmann equation

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{c}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\Big)f(t,\mathbf{x},\mathbf{c})=\int\big[f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}')f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}_1')-f(t,\mathbf{x},\mathbf{c})f(t,\mathbf{x},\mathbf{c}_1)\big]gd\sigma(g)d\mathbf{c}_1$$

and its discrete model [1]

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+c^i\nabla_x\Big)u_i(t,x)=\sum_{l\neq j,k\neq i}^{n}\mu_{ij}^{kl}(u_k(t,x)u_l(t,x)-u_i(t,x)u_j(t,x))$$

to the form (1) we get that the solution to Cauchy problem for these equations will be positive if initial data are positive.

Applying this approach to the Carleman discrete model [2] and its generalization

$$\Big(\frac{\partial}{\partial t}+c^i\nabla_x\Big)u_i\equiv\frac{d}{dl_i}u_i=\sum_{l,k\neq i}\mu_{kl}^{ii}(u_ku_l-u_i^2),\qquad \sum_{l,k\neq i}\mu_{kl}^{ii}=1$$

we get the upper estimates for solutions to these equations

$$||u_i(t,x)||_C\le\max\big\{||u_i^0(x)||_C\big\}.$$

This implies their global solvability.

REFERENCES

1. *Nurlybaev N.* Discrete velocity method in the theory of kinetic equations // Transport Theory and Statistical Physics. 1993. V. 22, N 1. P. 109–119.
2. *Carleman T.* Problemes Mathematiques de la Theorie Cinetique des Gas. Almquist and Wilksell, Upsala, 1957.

УДК 517.95

A THEORETICAL ESTIMATE OF THE CONVERGENCE RATE OF THE STEEPEST DESCENT METHOD FOR THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM

© A. V. Penenko

aleks@ommgp.sscc.ru

Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russia

A one-dimensional sideways heat conduction problem (1)–(4) is considered:

$$u_t = u_{xx}, \quad t \in [0,T],\, x \in [0,1], \tag{1}$$

$$u(1,t) = f(t), \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

$$u_x(1,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,1], \tag{4}$$

$$u(0,t) = q(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

To solve the problem, an output least square one is posed with introducing the functional:

$$J(q) = \frac{1}{2}\left\| u(1,t;q) - f(t) \right\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{6}$$

where $u(x,t;q)$ is the solution of the direct heat conduction problem (1),(3)–(5). The optimization problem obtained is solved with the steepest descent method. The goal of the paper is to estimate the convergence rate of the algorithm. Following the framework proposed in [1] to estimate a convergence rate of the gradient based method we combine 3 facts:

- conditional stability estimate for the problem (1)–(4). In case of the sideways heat equation this one can be taken from [2];
- an estimate of the functional's (6) decrease rate;
- the fact that the conditional stability estimate is applicable to the sequence, produced by the gradient-based method. This is a corollary to the statement, that a gradient-based method doesn't increase the error $\|q_n - q^*\|_{L_2(0,T)}$ [3].

As the result, the estimate of the following form can be obtained

$$\|u(x,.;q_0) - u(x,.;q^*)\|_{L_2(0,T)} \leqslant F(n, \|q_0 - q^*\|_{L_2(0,T)}, x, \|\mathrm{A}\|),$$

where $F(n,w,x,r)$ is some function, q^* is such that $u(1,t;q^*) = f(t)$ and A is a linear operator specified by the formula:

$$A : q(t) \mapsto u(1,t;q).$$

Theoretical results are compared with those of numerical runs.

The work is supported by the RF President's grant (SSch-1172.2003.1) and RFBR grant (05-01-00559).

REFERENCES

1. *Kabanikhin S. I.* Convergence rate estimation of gradient methods via conditional stability of inverse and ill-posed problems // J. Inv. Ill-Posed Problems. 2005. V. 13 , № 3. P. 259–264.
2. *Knabner P., Vesella S.* The optimal stability estimate for some ill-posed Cauchy problems for a parabolic equation // Math. Methods in the App. Sci. 1988. V. 10. P. 575–583.
3. *Alifanov O. M., Artiukhin E. A., Rumiantsev C. B.* Extremal Methods for Incorrect Problem Solutions. Moscow: Nauka.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 404–405

УДК 517.956, AMS: 35J70

THE RIEMANN – HILBERT PROBLEM FOR A CLASS OF MODEL VEKUA EQUATIONS WITH SINGULAR DEGENERATION

© R. S. Saks

romen-saks@yandex.ru

Institute of Mathematics of the Ufa Scientific Center of RAS, Ufa, Russia

In the talk we consider model equations

$$\frac{\partial v}{\partial \overline{z}} - \frac{\lambda + \delta|z|^s}{2\overline{z}}\overline{v} = 0,$$

depending on parameters λ, $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ and $s \in \mathbb{N}$, with the singular degeneration at $z = 0$ in the region $G \setminus \{0\} = \{z\colon 0 < |z| < 1\}$ and with the boundary value condition

$$\Re v|_\Gamma = f(t).$$

If $\lambda = 0$ this equation is included in the more general class of equations studied by I. N. Vekua [1].

We have proved [6]:

Theorem. *Let* $\lambda > 0$, $\delta > 0$, $s \in N$ *and* $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$, $0 < \alpha \leqslant 1$. *Then the solution* v *of this problem is uniquely determined and* v *is given by the explicit formula. This solution belongs to the class*

$$C(\overline{G}) \bigcap C^1(G \setminus \{0\}).$$

Remark 1 (Another known results). This problem is uniquely solvable in the cases

a) if $\delta = 0$, and the solution coincide with the Usmanov' solution [4];

b) if $\lambda \neq 0$, $\arg\lambda \neq \pi$, and δ is small [4];

c) if λ is small, $\arg\lambda \neq \pi$, and δ is arbitrary [5];

d) recently, A. Timofeef and his student from Syktyvkar University have turn up another value of λ and δ for which the conclusion of Theorem is true . This paper will by published soon and these results will be in the talk.

In general case (λ, $\delta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$) we get to explicit formulas of solutions of this equation, depending on parameters $a_0 \in \mathbb{R}$, $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Finally, we've proved that the solvability of this problem is equivalent to existence zeros for the functions $h_k(\lambda, \delta)$. These functions are given by series.

Remark 2. In general case we don't know the existence of λ, δ, k such that $h_k(\lambda, \delta) = 0$. But from our formulas we can see that

a) The Fredholm alternative take a place, i. e., either the homogeneous problem has a nontrivial solution or the nonhomogeneous problem is solvable for all f;

b) The number n of linear independent solutions of the homogeneous problem is equal to the number n' of the linear independent solvability conditions (or $n = n' < \infty$ or $n = n' = \infty$).

Calculation experiments show that functions $h_k(\lambda, \delta) \neq 0$ if number $k \geq N$.

REFERENCES

1. *Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Moscow: Nauka, 1988 (in Russian).
2. *Mikhailov L.* A New Class of Singular Integral Equations and Its Applications to Differential Equations with Singular Coefficients. Berlin: Akademie-Verlag, 1970.
3. *Usmanov Z.* About one class of generalized Cauchy – Riemann systems with a singular point // Siberian Math. Journal. 1970. V. 14, N 5. P. 1076–1087 (in Russian).
4. *Usmanov Z.* Generalized Cauchy–Riemann Systems with a Singular Point. Doushanbe: Ac. Sc. Rep. Tadj., 1993. 245 p. (in Russian).
5. *Reissig M., Timofeef A.* Special Vekua equations with singular coefficients // Applicable Analysis. OPA. Malaysia. 1999. V. 73(1-2).
6. *Saks R. S.* Riemann – Hilbert problem for new class of model Vekua equations with singular degeneration // Applicable Analysis. OPA. Malaysia. 1999. V. 73(1-2). P. 201-211.

УДК 517.95

MULTIPHASE MODELS WITH MEMORY EFFECT ARISING FROM HOMOGENIZATION

© G. V. Sandrakov

sandrako@mail.ru

Kyiv National T. Shevchenko University, Kyiv, Ukraine

Multiphase flows equations or multiphase models are usually derived by using the concept of multivelocity continuum and the assumption of interpenetrating motion of the components. In a sense, this concept means that several materials are simultaneously present at each spatial point under consideration. Here we discuss another approach to particular multiphase models that is arisen from homogenization theory.

For this purpose, the homogenization of unsteady diffusion processes in a periodic medium consisting of several materials with widely different properties is considered. The conductivity of one of the materials is assumed to be considerably lower than the conductivity of the other materials. The diffusion processes under study are governed by parabolic equations with coefficients depending on two small positive parameters ε and σ. The microscale parameter ε determines the period of the coefficients in these equations, which corresponds to the assumption that the medium under study has a periodic structure with period ε. The inverse of σ characterizes the scatter of the conductivities in these equations, which corresponds to the assumption that one of the materials has a very low conductivity as compared to the others.

We present homogenized (limit as $\varepsilon \to 0$ and $\sigma \to 0$) equations whose solutions approximate the solutions to the equations under consideration and estimate the accuracy of such approximations. Under certain assumptions on the geometry of the periodic distribution of the constituting materials in space, the homogenized equations form a system of equations coupled through exchange coefficients. The coefficients characterize dynamic diffusion exchange between the materials viewed as components of the medium under consideration and are involved in the homogenized equations via convolution operators with respect to the time variable. Such terms with time convolution in equations has a well-known mechanical interpretation corresponding to the memory effect arising in the homogenized medium.

The homogenized coupled equations and accuracy estimate admit also a natural interpretation of the multiphase flows equations for particular diffusion models. Each equation of such homogenized system characterizes diffusion in the domain occupied by a particular (well conducting) material, and diffusion exchange between these materials is determined by the exchange coefficients coupling the equations. Note also that the equations for the general multiphase models are generally not closed and contain terms that cannot be determined without making additional theoretical assumptions or conducting additional experimental studies, whereas the homogenized multiphase models discussed here for the diffusion problems are given in terms of mathematically defined quantities. Special case of such homogenized models is a well-known model of parallel flows in mechanics of porous media.

Some cases of the homogenized multiphase models were derived and justified in [1–3].

REFERENCES

1. *Sandrakov G. V.* Multiphase nonstationary diffusion models arising from homogenization // Comput. Math. and Math. Physics. 2004. V. 44, № 10. P. 1741–1755. (English translation from Zhurnal Vichisl. Mat. Mat. Fiz. 2004. V. 44, № 10)
2. *Sandrakov G. V.* Multiphase homogenized models for diffusion in highly nonhomogeneous media // Doklady Math. 2004. V. 70, № 1. P. 507–511. (English translation from DAN 2004. V. 397, № 1)
3. *Sandrakov G. V.* Multiphase diffusion models in homogenization // Doklady Math. 2004. V. 69, № 1. P. 50–53. (English translation from DAN 2004. V. 394, № 2)

УДК 517.946

ON THE PROBLEM OF SOLVING THE GENERALIZED MOISIL – TEODORESCU SYSTEM

© E. N. Sattorov

Sattorov-e@rambler.ru

Samarkand State University, Samarkand, Uzbekistan

The problem of describing the function given on a part of the boundary of a domain which can be analytic continued into the domain has been thoroughly studied. The first result was obtained by V. A. Fock and F. M. Kuni [1] in the one-dimensional case. A generalization of the theorem of Fock – Kuni was obtained in a series of the papers for holomorphic function in several variables [2]. The problem of continuation of function given on a part of the boundary of a domain to this domain as a solution of the Helmholtz equation, a equation theory elasticity, i. e, as harmonic function has been considered in [3–5].

We consider the problem of describing the vector-function given on a part of the boundary of a three dimensional domain can be continued to this domain as a solution of the generalized Moisil – Teodorescu system of equations. Our investigation is based on the analog of the generalized Cauchy integral formula for the generalized Moisil – Teodoresco system and a jimp formula for the limiting values of the generalized Cauchy type integral [6].

Continuation for the solution of the of the generaslized Cauchy – Riemann system equations to the domain by its values on a part of the boundary is based on constructing the Carleman matrix for the generalized Moisil – Teodoresco system equation. The notation of Carleman fiunction was introduced by M. M. Lavrent'ev [7]. By using the continuation formula we found necessary and sufficient for the extendibility of functions given an a part of a boundary to the domain as a solution of the generalized Moisil – Teodoresco system. We prove the Fock – Kuni theorem fore this one.

REFERENCES

1. *Fock V.A., Kuni F.M.* // Dokl. Acad. Nauk SSSR 127. 1959. №6, P.1195–1198.
2. *Aizenberg L.A ., Kytmanov A. M.* // Mat. Sb. 1991. № 4. P.490–507.
3. *Yarmukhamedov Sh.* Cauchy problem for the Laplace equation // Dokl. Acad. Nauk SSSR. 1977. V. 235, № 2. P. 281–283.
4. *Yarmukhamedov Sh.* On continuation of solution of the Helmholtz equation // Acad. Nauk SSSR. 1997. V. 357, № 3. P.320–323.
5. *Yarmukhamedov Sh.* Sibirsk. Math. Zh. 2004. V. 45, № 3, P. 702–719.
6. *Obolasvili E. I.* Analog of space of generalized analytic function // Note Sic. Acad. GSSR. 1974. V. 73, № 1.
7. *Lavrent'ev M. M.* Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics. Computer Center of the Sibirian Divison of the Russion Academy of Sciences, Novosibirsk, 1962. 92 p.

УДК 517.95

THE DIRICHLET PROBLEM FOR ANISOTROPIC QUASILINEAR DEGENERATE ELLIPTIC EQUATIONS

© Aris S. Tersenov

aterseno@ucy.ac.cy

University of Cyprus, Nicosia, Cyprus

Consider the Dirichlet boundary value problem

$$-\sum_{i=1}^{n}\mu_i(|u_{x_i}|^{p_i}u_{x_i})_{x_i}=c(\mathbf{x})g(u)+f(\mathbf{x})\ \text{ in }\ \Omega\subset\mathbf{R^n},\quad u=0\ \text{ on }\ \partial\Omega. \tag{1}$$

Here constants $\mu_i>0$ and $p_i\geq 0$. We assume that the parts of $\partial\Omega$ lying in the half spaces $x_i\leq 0$ and $x_i\geq 0$ can be expressed as

$$x_i=F_i\ \text{ and }\ x_i=G_i,\quad i=1,\dots,n,$$

respectively, where F_i and G_i are independent of x_i. Without loss of generality we suppose that

$$\Omega\subset\{\mathbf{x}:-l_i\leq x_i\leq l_i,\quad i=1,\dots,n\}.$$

Concerning the function g we suppose that

$$g(0)=0,\quad g(z)>0\ \text{ if }\ z>0\ \text{ and }\ |g(z)|\leq g(C)\ \text{ for }\ |z|\leq C, \tag{2}$$

where C is an arbitrary positive constant.

Definition 1. We say that $u(\mathbf{x})$ is *a generalized solution of problem* (1) if $u(\mathbf{x})\in W^{1,\infty}(\Omega)$, $u(\mathbf{x})=0$ for $\mathbf{x}\in\partial\Omega$ and

$$\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}\mu_i|u_{x_i}|^{p_i}u_{x_i}\phi_{x_i}(\mathbf{x})d\mathbf{x}=\int_\Omega\Big(c(\mathbf{x})g(u)+f(\mathbf{x}\Big)\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x}\ \ \forall\phi\in\overset{0}{W}{}^{1,r}(\Omega),\quad 1\leq r<+\infty.$$

New a priori estimates for solutions and for the gradient of solutions of problem (1) are established. Based on these estimates sufficient conditions guaranteeing the solvability of the problem are formulated. The results are new even in the semilinear case when the principal part is the Laplace operator.

Assume that there exists a positive constant M such that

$$(c_0g(M)+f_0)\Big(\frac{3l^2+2l}{2}\Big)^{p+1}<\mu(p+1)M^{p+1}. \tag{3}$$

Here $p=p_{i_0}=\max\{p_1,\dots,p_n\}$, $\mu=\mu_{i_0}$, $l=l_{i_0}$, $c_0=\sup_\Omega|c(\mathbf{x})|$ and $f_0=\sup_\Omega|f(\mathbf{x})|$.

Theorem 1. i) *Suppose that* $c(\mathbf{x})$ *and* $f(\mathbf{x})$ *are bounded in* $\bar\Omega$, $g(u)$ *is a Hölder continuous function on* $[-M,M]$ *and conditions* (2), (3) *are fulfilled. If* $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ *is strictly convex, then there exists a generalized solution of problem* (1) *such that*

$$||u||_{L_\infty(\Omega)}\leq M_0\ \ \textit{and}\ \ ||u_{x_i}||_{L_\infty(\Omega)}\leq(1+2l_i)\Big(\frac{\Phi_0}{\mu_i(1+p_i)}\Big)^{\frac{1}{p_i+1}},\quad i=1,\dots,n,$$

where $M_0 = \inf\{M : M \ \ satisfies \ \ (3)\}$ *and*

$$\Phi_0 = \max_{\bar{\Omega}\times[-M_0,M_0]} |c(\mathbf{x})g(u) + f(\mathbf{x})|.$$

ii) *If in addition* $c(\mathbf{x}) \leq 0$ *and* $g(u)$ *is a nondecreasing function then the solution is unique.*

Remark 1. If $g(u) = u^q$ (or $g(u) = |u|^{q-1}u$ or $g(u) = |u|^q$) and $p+1 > q$ as well as if $c_0 = 0$ then for an arbitrary bounded $f(\mathbf{x})$ one can always find $M > 0$ satisfying (3) and as a consequence obtain the existence of a generalized solution by Theorem 1.

Consider the Dirichlet problem for semilinear equation:

$$-\mu\Delta u = c(\mathbf{x})g(u) + f(\mathbf{x}) \ \text{ in } \ \Omega \subset \mathbf{R^n} \quad u = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega. \tag{4}$$

Assume that there exists a positive constant M such that

$$(c_0 g(M) + f_0)\frac{3\tilde{l}^2 + 2\tilde{l}}{2} < \mu M, \quad \tilde{l} = \min\{l_1, \ldots, l_n\}. \tag{5}$$

Theorem 2. **i**) *Suppose that* $c(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \in C^\gamma(\bar{\Omega})$, $g(u) \in C^\gamma([-M, M])$, $\partial\Omega \in C^{2+\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$. *If* (5) *is fulfilled then there exists a classical solution of problem* (4) $u(x) \in C^{2+\gamma}(\bar{\Omega})$ *such that*

$$\max_{\Omega} |u| \leq M_0, \quad \textit{where} \quad M_0 = \inf\{M : M \quad \textit{satisfies} \quad (5)\}$$

ii) *If in addition* $c(\mathbf{x}) \leq 0$ *and* $g(u)$ *is a nondecreasing function then the solution is unique.*

Remark 2. If Ω in Theorem 2 is strictly convex then we additionally have

$$\max_{\Omega} |u_{x_i}| \leq (1 + 2l_i)\frac{\Phi_0}{\mu}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 410–411

УДК 517.9

FUNCTIONS OF REPRESENTATIONS OF THE CLASS 1 ON THE HOMOGENEOUS SPACES OF THE DE SITTER GROUP

© V. V. Varlamov

root@varlamov.kemerovo.su

Siberia State University of Industry, Novokuznetsk, Russia

A starting point of this research is an analogue between universal coverings of the Lorentz and de Sitter groups, which was first established by Takahashi [1] (see also the work of Ström [2]). Namely, the universal covering of $SO_0(1,4)$ is $\mathbf{Spin}_+(1,4) \simeq Sp(1,1)$ and the spinor group $\mathbf{Spin}_+(1,4)$ is described in terms of 2×2 quaternionic matrices. Spherical functions on the group $SO_0(1,4)$ are understood as functions of representations of the class 1 realized on the homogeneous spaces of $SO_0(1,4)$. A list of homogeneous spaces of $SO_0(1,4)$, including symmetric Riemannian and non-Riemannian spaces, consists of the group manifold $\mathfrak{S}_{10}$ of $SO_0(1,4)$, two-dimensional quaternion sphere S^q_2, four-dimensional hyperboloid $H^4 \sim SO_0(1,4)/SO(4)$, three-dimensional real sphere $S^3 \sim SO(4)/SO(3)$ and a two-dimensional real sphere $S^2 \sim SO(3)/SO(2)$.

Using the universal covering $\mathbf{Spin}_+(1,4) \simeq Sp(1,1)$ of $SO_0(1,4)$, we can write a first Casimir operator F on the group manifold $\mathfrak{S}_{10}$,

$$-F = \frac{\partial^2}{\partial\theta^{q2}} + \cot\theta^q\frac{\partial}{\partial\theta^q} + \frac{1}{\sin^2\theta^q}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^{q2}} - \frac{2\cos\theta^q}{\sin^2\theta^q}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^q\partial\psi^q_1} + \cot^2\theta^q\frac{\partial^2}{\partial\psi^{q2}_1} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^{q2}}, \tag{1}$$

where

$$\begin{array}{rclrcl}
\dfrac{\partial}{\partial\theta^q} &=& \dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\partial}{\partial\phi} + \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\tau}, & \dfrac{\partial}{\partial\dot{\theta}^q} &=& \dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{\partial}{\partial\phi} - \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\tau},\\
\dfrac{\partial}{\partial\varphi^q} &=& \dfrac{\partial}{\partial\varphi} + \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\epsilon} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial\varsigma}, & \dfrac{\partial}{\partial\dot{\varphi}^q} &=& \dfrac{\partial}{\partial\varphi} - \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\epsilon} - \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial\varsigma},\\
\dfrac{\partial}{\partial\psi^q} &=& \dfrac{\partial}{\partial\psi} + \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon} + \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\omega} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial\chi}, & \dfrac{\partial}{\partial\dot{\psi}^q} &=& \dfrac{\partial}{\partial\psi} - \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon} - \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\omega} - \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial\chi},\\
\dfrac{\partial}{\partial\psi^q_1} &=& \dfrac{\partial}{\partial\psi} + \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial\chi}. & \dfrac{\partial}{\partial\dot{\psi}^q_1} &=& \dfrac{\partial}{\partial\psi} - \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial\varepsilon} - \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial\chi}.
\end{array}$$

Here, ψ, φ, θ, ϕ, ς, χ, τ, ϵ, ε, ω are Euler angles of $Sp(1,1)$, $\theta^q = \theta+\phi-\mathbf{i}\tau$, $\varphi^q = \varphi-\mathbf{i}\epsilon+\mathbf{j}\varsigma$, $\psi^q = \psi-\mathbf{i}\varepsilon-\mathbf{i}\omega+\mathbf{k}\chi$ are quaternion Euler angles. The second Casimir operator W of $SO_0(1,4)$ is equal to zero on the representations of the class 1.

Matrix elements $t^\sigma_{mn}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{M}^\sigma_{mn}(\varphi^q,\theta^q,\psi^q)$ of irreducible representations of the group $SO_0(1,4)$ are eigenfunctions of the operator (1):

$$[-F+\sigma(\sigma+3)]\,\mathfrak{M}^\sigma_{mn}(\mathfrak{q}) = 0, \tag{2}$$

where

$$\mathfrak{M}^\sigma_{mn}(\mathfrak{q}) = e^{-\mathbf{i}(m\varphi^q + n(\psi^q_1-\mathbf{i}\omega))}\mathfrak{Z}^\sigma_{mn}(\cos\theta^q), \tag{3}$$

since $\psi^q = \psi^q_1 - \mathbf{i}\omega$. Here, $\mathfrak{M}^\sigma_{mn}(\mathfrak{q})$ are general matrix elements of the representations of $SO_0(1,4)$, and $\mathfrak{Z}^\sigma_{mn}(\cos\theta^q)$ are *hyperspherical functions*. Substituting the functions (3) into (2) and taking into account the operator (1), after substitution $z=\cos\theta^q$ we arrive at the following differential equation:

$$\left[(1-z^2)\frac{d^2}{dz^2} - 2z\frac{d}{dz} - \frac{m^2+n^2-2mnz}{1-z^2} + \sigma(\sigma+3)\right]\mathfrak{Z}^\sigma_{mn}(z) = 0. \tag{4}$$

The latter equation has three singular points -1, $+1$, ∞. It is a Fuchsian equation. A particular solution of (4) can be expressed via the hypergeometric function

$$\mathfrak{Z}^{\sigma}_{mn}(\cos\theta^q)=C_1\sin^{|m-n|}\frac{\theta^q}{2}\cos^{|m+n|}\frac{\theta^q}{2}\times$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\sigma+3+\frac{1}{2}(|m-n|+|m+n|),-\sigma+\frac{1}{2}(|m-n|+|m+n|)\\ |m-n|+1\end{matrix}\middle|\sin^2\frac{\theta^q}{2}\right). \quad (5)$$

An explicit form of the functions $\mathfrak{Z}^{\sigma}_{mn}(\cos\theta^q)$ can be derived via the multiple hypergeometric series. Namely, using an addition theorem for generalized spherical functions [3], we obtain

$$\mathfrak{Z}^{\sigma}_{mn}(\cos\theta^q)=\sqrt{\frac{\Gamma(\sigma+m+1)\Gamma(\sigma-n+1)}{\Gamma(\sigma-m+1)\Gamma(\sigma+n+1)}}\cos^{2\sigma}\frac{\theta}{2}\cos^{2\sigma}\frac{\phi}{2}\cosh^{2\sigma}\frac{\tau}{2}\times$$
$$\sum^{\sigma}_{k=-\sigma}\sum^{\sigma}_{t=-\sigma}\mathbf{i}^{m-k}\tan^{m-t}\frac{\theta}{2}\tan^{t-k}\frac{\phi}{2}\tanh^{k-n}\frac{\tau}{2}\times$$
$${}_2F_1\left(\begin{matrix}m-\sigma,-t-\sigma\\ m-t+1\end{matrix}\middle|-\tan^2\frac{\theta}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}t-\sigma,-k-\sigma\\ t-k+1\end{matrix}\middle|-\tan^2\frac{\phi}{2}\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}k-\sigma,-n-\sigma\\ k-n+1\end{matrix}\middle|\tanh^2\frac{\tau}{2}\right) \quad (6)$$

for $m\geq t,\ t\geq k,\ k\geq n$. In addition to (6) there exist seven functions $\mathfrak{Z}^{\sigma}_{mn}(\cos\theta^q)$ for $m\geq t,\ k\geq t,\ k\geq n$; $t\geq m,\ k\geq t,\ n\geq k$; $t\geq m,\ t\geq k,\ n\geq k$; $t\geq m,\ k\geq t,\ k\geq n$; $t\geq m,\ t\geq k,\ k\geq n$; $m\geq t,\ t\geq k,\ n\geq k$; $m\geq t,\ k\geq t,\ n\geq k$.

Hyperspherical functions for other homogeneous spaces of $SO_0(1,4)$ are particular cases of the functions (6). For example, on the quaternion 2-sphere we have associated functions $\mathfrak{Z}^{m}_{\sigma}(\cos\theta^q)$. Further, the function (6) is reduced to the Jacobi function $\mathfrak{P}^{\sigma}_{mn}(\cosh\tau)$ on the hyperboloid $H^4\sim SO_0(1,4)/SO(4)$ and to a generalized spherical function $P^{\sigma}_{mn}(\cos\theta)$ on the real 3-sphere. Finally, on the surface of the real 2-sphere $S^2\sim SO(3)/SO(2)$ we have from (6) the usual spherical functions $Y^m_{\sigma}(\cos\theta)$.

REFERENCES

1. *Takahashi R.* Sur les représentations unitaries des groupes de Lorentz généralisés // Bull. Soc. math. France. 1963. V. 91. P. 289–433.
2. *Ström S.* On the decomposition of a unitary representation of (1+4) de Sitter group with respect to representations of the Lorentz group // Arkiv för Fysik. 1969. V. 40. P. 1–33.
3. *Varlamov V. V.* Spherical functions on the de Sitter group // J. Phys. A: Math. Theor. 2007. V. 40. P. 163–201.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 412–413

УДК 517.633.2

NEW PROPERTY OF PDE AND CONSTRUCTION OF SOLUTION TO PDE IN THE PARAMETRIC FORM

© K. A. Volosov

volosov@yahoo.co.uk

MSU of Railway Engineering, Moscow, Russia

The new property of PDE is found. It allows to construct new exact solutions in parametric form. This property is spread to the PDE with variable coefficients. The algorithm is stated in the conditional form. Let's assume that all necessary functions exist and have that smoothness which is required for the algorithm can be applied. Consider the quasilinear hyperbolic equation

$$\mu Z_{tt} + Z_t - (K(Z)Z_x)_x + F(Z) = 0, \tag{1}$$

where μ is the parameter. Let's make a change of variables $Z(x,t)\big|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = U(\xi,\delta)$ where function $Z(x,t)$ is solution of the equation (1). Let's assume that Jacobian $\det J = x_\xi t_\delta - x_\delta t_\xi \neq 0$ is not equal to zero. Let's assume that there exists an inverse mapping, at least locally, $\xi = \xi(x,t)$, $\delta = \delta(x,t)$, the derivatives of direct and inverse mapping have the form $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \det J \frac{\partial \delta}{\partial t}$, $\frac{\partial t}{\partial \xi} = -\det J \frac{\partial \delta}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial \delta} = -\det J \frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial t}{\partial \delta} = \det J \frac{\partial \xi}{\partial x}$. Let's assume that the relations for flows have the form $K(Z)\frac{\partial Z}{\partial x}\big|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = Y(\xi,\delta)$, $K(Z)\frac{\partial Z}{\partial t}\big|_{x=x(\xi,\delta),t=t(\xi,\delta)} = T(\xi,\delta)$. We obtain

$$K(U)\Big(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\Big) = Y(\xi,\delta)\det J, \qquad K(U)\Big(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial U}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi}\Big) = T(\xi,\delta)\det J. \tag{2}$$

The equation (1) after all substitutions has the form

$$\mu K(U)\Big(\frac{\partial (T/K)}{\partial \delta}\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial (T/K)}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \delta}\Big) - K(U)\Big(\frac{\partial Y}{\partial \xi}\frac{\partial t}{\partial \delta} - \frac{\partial Y}{\partial \delta}\frac{\partial t}{\partial \xi}\Big) + \det J[T + K(U)F(U)] = 0. \tag{3}$$

The equality for mixed derivative has to be true $Z_{x,t} = Z_{t,x}$. This relation can be rewritten as follows

$$-\frac{\partial}{\partial \xi}\Big[\frac{Y}{K(U)}\Big]\frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial}{\partial \delta}\Big[\frac{Y}{K(U)}\Big]\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[\frac{T}{K(U)}\Big]\frac{\partial t}{\partial \delta} + \frac{\partial}{\partial \delta}\Big[\frac{T}{K(U)}\Big]\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0. \tag{4}$$

The analysis of the system (2)–(4) is divided into two stages. At the first stage we shall consider (2)–(4) as the nonlinear algebraic system for the derivatives x'_ξ, x'_δ, t'_ξ, t'_δ.

Theorem 1. *The nonlinear algebraic system* (2) – (4) *for the derivatives* x'_ξ, x'_δ, t'_ξ, t'_δ *has unique solution of the form*

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \xi} =& [K[-FK^3U'_\xi[U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi] - \\ & K^2[-TU'_\delta Y'^2_\xi - TT'_\delta U'^2_\xi + TU'_\delta T'_\xi U'_\xi - YY'_\delta T'_\xi U'_\xi + TY'_\delta Y'_\xi U'_\xi - TU'_\delta Y'^2_\xi] + \\ & \mu[T^2K'U'_\xi[U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta] - KTT'_\xi[T'_\xi U'_\delta - U'_\xi T'_\delta]]]]/P_1(\xi,\delta) = g_1(\xi,\delta),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \delta} =& -[K[FU'_\delta[U'_\delta T'_\xi - T'_\delta U'_\xi]K^3+ \\
& K^2[TT'_\xi U'^2_\delta - YY'_\delta T'_\xi U'_\delta - TT'_\delta U'_\xi U'_\delta + YT'_\delta Y'_\xi U'_\delta - TY'_\delta Y'_\xi U'_\delta + TY'^2_\delta U'_\xi]+ \\
& \mu[-K'U'_\delta[U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta]T^2 - KT'_\delta[T'_\delta U'_\xi - U'_\delta T'_\xi]T]]]/P_1(\xi,\delta) = g_2(\xi,\delta), \\
\frac{\partial t}{\partial \xi} =& [K[FU'_\xi[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]K^3 - K^2[YY'_\xi - TU'_\xi][U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]+ \\
& \mu[K[YU'_\delta T'^2_\xi - YU'_\xi T'_\delta T'_\xi - TU'_\xi T'_\xi Y'_\delta + TU'_\xi T'_\delta Y'_\xi]- \\
& T^2K'U'_\xi[U'_\delta Y'_\xi - U'_\xi Y'_\delta]]]]/P_1(\xi,\delta) = g_3(\xi,\delta), \\
\frac{\partial t}{\partial \delta} =& [K[FU'_\delta[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]K^3 + K^2[YY'_\delta - TU'_\delta][Y'_\delta U'_\xi - U'_\delta Y'_\xi]K^2+ \\
& \mu[K[YT'_\delta[U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta] + TU'_\delta[Y'_\xi T'_\delta - T'_\xi Y'_\delta]]- \\
& T^2K'U'_\delta[Y'_\xi U'_\delta - U'_\xi Y'_\delta]]]]/P_1(\xi,\delta) = g_4(\xi,\delta),
\end{aligned}$$

where $P_1(\xi,\delta)) = [F[-YU'_\delta T'_\xi + YT'_\delta U'_\xi - TY'_\delta U'_\xi + TU'_\delta Y'_\xi]K^3 - [Y'_\delta U'_\xi T^2 - U'_\delta Y'_\xi T^2 + YTU'_\delta T'_\xi - YTT'_\delta U'_\xi - Y^2Y'_\delta T'_\xi + Y^2T'_\delta Y'_\xi]K^2 + \mu[T^2[YK'[U'_\delta T'_\xi - U'_\xi T'_\delta] + K[T'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta T'_{xi}]] - T^3K'[U'_\delta Y'_\xi - Y'_\delta U'_\xi]]$.

At the second stage we shall formulate a condition of solvability of the system for the functions $x = x(\xi,\delta)$, $t = t(\xi,\delta)$. The key point is following statement:

Theorem 2. *The necessary conditions of solvability for system are the equalities*

$$(x''_{\xi\delta} - x''_{\delta\xi})/T = 0, \qquad (t''_{\xi\delta} - t''_{\delta\xi})/Y = 0.$$

These two equalities **coincide** for any smooth functions $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$, $K(U)$, $F(U)$, this gives the relation for the functions $U(\xi,\delta)$, $Y(\xi,\delta)$, $T(\xi,\delta)$

$$\frac{\partial}{\partial\delta} g_1(\xi,\delta) - \frac{\partial}{\partial\xi} g_2(\xi,\delta) = 0. \tag{5}$$

This new property of PDE allows **to construct new solutions in the parametric form of the equation (1)** [1–3].

Let's discuss one possible way how to satisfy a common relation (5).

Let's find functions Y , T in (5) in the form $Y(\xi,\delta) = r(U) + h(U)G(\xi,\delta,U)$, $T(\xi,\delta) = w(U) + v(U)G(\xi,\delta,U)$.

This equality is possible to satisfy having equated to with zero coefficients at degrees G . We have the system of four equations on four functions r , h , w , v . The functions $G(\xi,\delta,U)$, U (!) remain arbitrary.

REFERENCES

1. *Volosov K. A.* New method of construction of solutions of the quasilinear parabolic equations in the parametrical form // Conference R Pedagogical SU, April 17–22, 2006. Saint-Peter. P. 35–40.
2. *Volosov K. A.* New way of construction of solutions of PDE in the parametrical form // The Inter. Conference “Tikhonov and Contemporary Mathematics”, June 19–24, 2006. Lomonosov MSU. Sec. 3. P. 133–134.
3. *Volosov K. A.* New way of construction of solutions of the quasilinear parabolic equations in the parametrical form // Inter. conference of diff. eq. and dynamical systems, July 10–15, 2006. Steklov Math Inst, Vladimir SU, Lomonosov MSU. P. 56–60.
4. *Volosov K. A.* New method of construction of solutions of PDE in the parametrical form // IUTAM Symposium, August 25–30, 2006. Steklov Math Inst. http: // conf2006.rcd.ru. P. 147–149.
5. *Volosov K. A.* New method of construction of solutions of the quasilinear parabolic equations in the parametrical form // Izvestiya Russian Pedagogical State University named after A. I. Gerzen “Nature and exactly science”. Saint-Petersburg. 2007. In print.
6. *Volosov K. A.* New method of construction of solutions of the quasilinear parabolic equations in the parametrical form // Differentsial’nye Uravneniya. 2007. In print.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ
THEORY OF FUNCTIONS AND COMPLEX ANALYSIS

УДК 517.956.22

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕСОМ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

© Г. М. Айрапетян

hhairapet@seua.am

Государственный инженерный университет Армении, Ереван, Армения

1. Пусть B_1 — класс функций u гармонических в верхней полуплоскости $G^+ = \{z; Imz > 0\}$, удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$ неравенству $|u(z)| < Aexp|z|^\gamma,\ \gamma < 1,\ Imz > y_0 > 0$, где A — постоянная, зависящая от y_0. Рассматривается задача Дирихле в полуплоскости в следующей постановке: определить действительную гармоническую функцию $u(x,y) \in B_1$, так что имело место граничное условие

$$\lim_{y \to +0} \|u(x,y) - f(x)\|_{L^p(\rho)} = 0, \tag{1}$$

где $\rho(x) = \rho_1(x)(1+|x|)^{-\alpha}$, причем ρ_1 — медленно меняющаяся функция на бесконечности справа и слева ([1]), α — действительное число, $\|\cdot\|$ — норма пространства $L^p(\rho)$, $f \in L^p(\rho)$. При $\alpha \leq 1$ задача (1) при $p = 1$ исследована в [2] и установлено, что она имеет решение для любой функции $f \in L^1(\rho)$.

2. Скажем, что $\rho \in R_0$, если α нецелое число, либо целое число и выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x)}{1+|x|} dx < \infty.$$

Положим $n_0 = \left[(\alpha - 1)p^{-1}\right] + 1.$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

a). Если $n_0 > 0,\ \rho \in R_0$, то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде

$$u_0(z) = Re \sum_{k=0}^{n_0-1} i a_k z^k, \tag{2}$$

где a_k — произвольные действительные числа.

b). Если $n_0 > 0,\ \rho \notin R_0$, то общее решение однородной задачи (1) можно представить в виде (2) при условии, что $a_{n_0-1} = 0$.

c). Если $n_0 \leq 0$, то $u_0(z) \equiv 0$.

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

a). Пусть $n_0 \geq 0$, тогда задача (1) разрешима для любой функции $f \in L^p(\rho)$, общее решение можно представить в виде $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$, где $u_0(z)$ общее решение однородной задачи, а

$$u_1(z) = Re\left(\frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)}\right) + Re\left(\frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)}\right). \tag{3}$$

b). Пусть $n_0 < 0$ и $\rho \in R_0$, тогда задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -n_0 - 1. \tag{4}$$

При выполнении условий (4) задача (1) имеет единственное решение и его можно представить в виде $u(z) = u_0(z) + u_1(z)$, где

$$u_0(z) = ReC_0(z+i)^{n_0}, \quad C_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)dt}{(t+i)^{n_0+1}},$$

а $u_1(z)$ — функция (3).

c). Пусть $n_0 < 0$ и $\rho \notin R_0$, тогда задача (1) имеет решение тогда и только тогда, когда f удовлетворяет условиям (4), где $k = 0, 1, 2, \ldots, -n_0 - 1$. При выполнении этих условий задача имеет единственное решение и его можно представить в виде (3).

3. Применяя теорему 2, можно получить теорему единственности в классе ограниченных гармонических функций в полуплоскости.

Теорема 3. *Пусть $u(z)$ ограниченная гармоническая функция в верхней полуплоскости и $\sup\left(|u(x,y)| \exp \phi(x)\right) < \infty$, $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in (0, \infty)$, где $\phi(x)$ выпуклая относительно $\ln x$ положительная четная функция. Тогда, если $\phi(x)(1+|x|^2)^{-2} \notin L^1(-\infty, \infty)$, то $u(z) \equiv 0$.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что функция $u(z)$ имеет граничные значения почти всюду на действительной оси при $y \to 0$. Обозначив граничную функцию через $f(x)$, будем иметь $f \in L^1(\rho)$ и

$$\lim_{y \to +0} \|u(x,y) - f(x)\|_{L^p(\rho)} = 0,$$

где $\rho(x) = |x+i|^{-2}\phi(x)$. Применяя теорему 2 заключаем, что функция f удовлетворяет условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)t^k dt = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Пусть, теперь $F(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$. Из условий теоремы следует, что $F(\lambda)$ бесконечно дифференцируемая функция и в силу (5) $F^k(0) = 0$. Применяя известную теорему о квазианалитических классах [3] заключаем, что $F(\lambda) \equiv 0$. Следовательно $f(x) \equiv 0$ и $u(x,y) \equiv 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.
2. *Айрапетян Г .М.* О разрешимости задачи Дирихле с граничными функциями из пространств с весом // Математические заметки. 2004. Т. 76, вып. 5. С. 643–650.
3. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М., 1955.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 416–417

УДК 517.518

О ПОРЯДКАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ

© Г. Акишев

akishev@kargu.krg.kz

Карагандинский государственный университет, Караганда, Казахстан

Пусть $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in I^m = [0, 2\pi)^m$ и числа $\theta_j, q_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, \ldots, m$. Через $L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ обозначим пространства всех измеримых по Лебегу функций $f(\overline{x})$ имеющих 2π-период по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\bar{q},\bar{\theta}} = \left[\int_0^{2\pi} t_m^{\frac{\theta_m}{q_m}-1}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}\Big(f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1,\ldots,t_m)\Big)^{\theta_1} t_1^{\frac{\theta_1}{q_1}-1}dt_1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\cdots\right]^{\frac{\theta_m}{\theta_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{1}{\theta_m}}$$

конечна, где $f^{*_1,\ldots,*_m}(t_1, \ldots, t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(\overline{x})|$ по каждой переменной x_j при фиксированных остальных переменных, $\overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ — множество всех функций $f \in L^*_{\overline{q},\overline{\theta}}(I^m)$ таких, что

$$\int\limits_0^{2\pi} f(\overline{x})\, dx_j = 0, \ \ \forall j = 1, \ldots, m,$$

$a_{\overline{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(I^m)$ по кратной тригонометрической системе. Положим

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i<\overline{n},\overline{x}>},$$

где $\langle\bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in Z^m : \quad 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \ldots, m\right\}$.

Числовая последовательность $\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in Z^m,} \in l_{\overline{p}}$ если

$$\left\|\{a_{\overline{n}}\}_{\overline{n}\in Z^m}\right\|_{l_{\overline{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[\cdots\left[\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\overline{n}}|^{p_1}\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Рассмотрим класс О. В. Бесова

$$B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}} = \left\{f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\overline{p},\overline{\theta}}(I^m) : \|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}} = \|f\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}} + \left\|\left\{2^{<\overline{s},\overline{r}>}\,\|\delta_{\overline{s}}(f)\|^*_{\overline{p},\overline{\theta}}\right\}\right\|_{l_{\overline{\tau}}} \le 1\right\},$$

где $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_m)$, $\overline{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_m)$, $1 \le p_j, \theta_j, \tau_j < +\infty$, $j = 1, \ldots, m.$

Пусть дан положительный вектор $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$. Положим

$$Q_n^{\bar{\gamma}} = \cup_{<\bar{s},\bar{\gamma}><n}\rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{\bar{\gamma}}) = \{t(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{\bar{\gamma}}} b_{\bar{k}} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\},$$

$E_n^{(\bar\gamma)}(f)_{\bar p,\bar\theta}$ — наилучшее приближение функции $f \in L^*_{\bar p,\bar\theta}(I^m)$ полиномами из множества $T(Q_n^{\bar\gamma})$.

Оценки порядка приближения различных функциональных классов в полиномами из множества $T(Q_n^{\bar\gamma})$ в пространствах Лебега с изотропными нормами исследовали К. И. Бабенко, С. А. Теляковский, Я. С. Бугров, Б. С. Митягин, Н. С. Никольская, Э. М. Галеев, Э. С. Белинский, Динь Зунг, Б. Базарханов, В. Н. Темляков, Б. С. Кашин, А. С. Романюк, А. И. тепанец, Н. Н. Пустовойтов.

В докладе будут представлены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $1 \le p_j < q_j < +\infty$, $1 \le \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < +\infty$. *Если* $f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar p,\bar\theta^{(1)}}(I^m)$ *и величина*

$$\sigma(f) \equiv \left\{ \sum_{s_m=1}^{\infty} 2^{s_m\theta_m^{(2)}(\frac{1}{p_m}-\frac{1}{q_m})} \left[\cdots \left[\sum_{s_1=1}^{\infty} 2^{s_1\theta_1^{(2)}(\frac{1}{p_1}-\frac{1}{q_1})} \left(\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar p,\bar\theta^{(1)}} \right)^{\theta_1^{(2)}} \right]^{\frac{\theta_2^{(2)}}{\theta_1^{(2)}}} \cdots \right]^{\frac{\theta_m^{(2)}}{\theta_{m-1}^{(2)}}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m^{(2)}}}$$

конечна, то функция $f \in \overset{\circ}{L}{}^*_{\bar q,\bar\theta^{(2)}}(I^m)$ *и имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\bar q,\bar\theta^{(2)}} \le C(\bar p,\bar q,\bar\theta)\cdot\sigma(f).$$

Теорема 2. *Пусть* $\bar\theta^{(1)} = \left(\theta_1^{(1)},\dots,\theta_m^{(1)}\right)$, $\bar\theta^{(2)} = \left(\theta_1^{(2)},\dots,\theta_m^{(2)}\right)$, $\bar\tau = (\tau_1,\dots,\tau_m)$, $\bar p = (p_1,\dots,p_m)$, $\bar q = (q_1,\dots,q_m)$, $\bar r = (r_1,\dots,r_m)$, $\gamma_j = \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}}$, $j = 1,\dots,m$, *и* $1 \le \theta_j^{(1)},\theta_j^{(2)},\tau_j < +\infty$, $1 \le p_j < q_j < +\infty$, $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j} < r_j$, $j = 1,\dots,m$, $r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1} = \cdots = r_\nu+\frac{1}{q_\nu}-\frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1}+\frac{1}{q_{\nu+1}}-\frac{1}{p_{\nu+1}} \le \cdots \le r_m+\frac{1}{q_m}-\frac{1}{p_m}$, *Тогда справедливы соотношения*

$$E_n^{\bar\gamma}\left(B^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta^{(1)},\bar\tau}\right)_{\bar q,\bar\theta^{(2)}} = \sup_{f\in B^{\bar r}_{\bar p,\overline{\theta^{(1)}},\bar\tau}} E_n^{\bar\gamma}(f)_{\bar q,\overline{\theta^{(2)}}} \asymp$$

$$\asymp \begin{cases} 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum\limits_{j=2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}, & \theta_j^{(2)} < \tau_j,\ j=1,\dots,m \\ 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)}, & \tau_j \le \theta_j^{(2)},\ j=1,\dots,m \end{cases}$$

Если $\tau_j \le \theta_j^{(2)} < +\infty$, $j = 1,\dots,l<\nu$, $\theta_j^{(2)} < \tau_j < +\infty$, $j = l+1,\dots,m$ *,то*

$$C_1 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+2}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)} \le E_n^{\bar\gamma}\left(B^{\bar r}_{\bar p,\bar\theta^{(1)},\bar\tau}\right)_{\bar q,\bar\theta^{(2)}} \le C_2 2^{-n\left(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}\right)} \cdot n^{\sum\limits_{j=l+1}^{m}\left(\frac{1}{\theta_j^{(2)}}-\frac{1}{\tau_j}\right)}.$$

Замечание. В случае $\theta_j^{(1)} = \theta_j^{(2)}$, $j = 1,\dots,m$, эти утверждения ранее доказаны в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Акишев Г.* Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // Матем. сб. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 418–419

УДК 517.54

УРАВНЕНИЕ ЛЁВНЕРА. ПРИМЕНЕНИЯ

© А. И. Александров, И. А. Александров

aai@igrem.ru

Томский государственный университет, Томск

Доклад посвящен изложению результатов, относящихся к широкому кругу идей применения уравнения Лёвнера. Это уравнение составляет основу метода параметрических продолжений в теории однолистных функций, сыгравшего важную роль в доказательстве неравенств Бибербаха и при получении ранее и в дальнейшем многих других точных оценок. Уравнение Лёвнера первоначально возникло при изучении конформного отображения канонической области на область с разрезом по простой дуге переменной длины.

П. 1. Теорема 1 (из [1, 2]). *Решение* $\zeta = \zeta(\tau, z; \mu) = e^{-\tau}z + \dots$ *уравнения Лёвнера*

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = -\zeta\frac{\mu(\tau)+\zeta}{\mu(\tau)-\zeta}, \quad 0 \le \tau \le \tau^0, \quad 0 < \tau^0 \le +\infty, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывной управляющей функцией $\mu(\tau)$, $|\mu(\tau)| = 1$, *и начальным условием* $\zeta(0, z; \mu) = z$, $z \in E = \{z \in C : |z| < 1\}$, *существует на* $(0, \tau^0)$, *однолистно и конформно отображает (при фиксированном* τ *) круг* E *на односвязную область* $B(\tau; \mu)$, *лежащую в единичном круге; если* $\tau^0 = +\infty$, *то функция* $f_\mu(z) = \lim\limits_{\tau\to+\infty} e^{\tau}\zeta(\tau, z; \mu)$ *принадлежит классу* S *(т. е. множеству функций* $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, *голоморфных и однолистных в* E *).*

П. 2. В формировании границы области $B(\tau; \mu)$ определенным образом участвуют решения $\zeta(\tau, z; \mu)$, $z \in \overline{E} \setminus E$, создающие простые концы этой области. Представляют интерес условия, остающиеся пока не сформулированными, при которых $\zeta(\tau, E; \mu)$ — круг с разрезом по кривой. Приведен пример последовательности $\mu_1(\tau), \mu_2(\tau), \dots$ аналитических функций, равномерно сходящейся к такой функции $\mu(\tau)$, что хотя $\zeta(\tau, E; \mu)$ — круг с разрезом, но $\zeta(\tau, E; \mu)$ — круг с выброшенной луночкой.

П. 3. К эффективным представлениям некоторых подмножеств множества S можно прийти за счет удачного выбора $\mu(\tau)$ и последующего интегрирования уравнения (1).

Теорема 2 [3]. *Классу* S *принадлежат функции*

$$f(z) = \left[s(1+i\delta)\int_0^z \frac{(1-u)u^{s(1+i\delta)-1}}{(1-e^{-i\varphi}u)^{2s+1}}du\right]^{\frac{1}{s(1+i\delta)}}, \tag{2}$$

где $s > 0$, $-\infty < \delta < +\infty$, $-\pi < \varphi \le \pi$.

И. Е. Базилевич, рассматривая уравнение Лёвнера – Куфарева, получил интегральную формулу более общую, чем (2). Отметим здесь результаты Д. В. Прохорова, Г. Д. Садритдиновой, А. Н. Сыркашева.

П. 4. Представляют интерес обратные задачи. Проведены исследования двух типов таких задач. Восстановлены [4] управляющие функции $\mu(\tau)$, сответствующие экстремальным функциям относительно функционала $\arg f'(z)$, $f \in S$, $z \in E \setminus \{0\}$, и других простейших функционалов. Указан [5] алгоритм численного нахождения $\mu(\tau)$ для конформного отображения полуплоскости на плоскость с разрезом по лучу и примыкающей к нему дуге окружности. Он аналогичен алгоритму П. П. Куфарева [6] нахождения постоянных в интеграле Кристоффеля – Шварца, но оказался более сложным для численной реализации.

П. 5. Задача варьирования отображающей функции и её приближенного представления, первоначально поставленная Лаврентьевым и Люстерником, находит связь с уравнением Лёвнера. Пусть $\zeta(z,\tau)$, $\zeta(0,\tau)=0$, $\zeta'(0,\tau)=e^{-\tau}$, — функция, отображающая круг E на единичный круг с разрезом по начинающейся в точке $e^{i\varphi_0}$ простой дуге малой ддины. Тогда

$$\zeta(z,\tau)=z-z\tau\frac{e^{i\varphi_0}+z}{e^{i\varphi_0}-z}+o(\tau)$$

на компактах в E. Суперпозиция таких отображений позволяет перейти к более общим областям и рассматривать вопросы соответствия границ.

П. 6. Установлена связь $\zeta(\tau,z;-1)$ с производящими функциями некоторых ортогональных многочленов и и другими классами специальных функций. В частности, имеют место формулы, полученные с участием Г. А. Юферовой.

Теорема 3. *Справедливы формулы*

$$\frac{1}{1-z}\frac{d}{d\tau}\ln\zeta(\tau,z;-1)=\sum_{m=0}^{\infty}P_m(1-2e^{-\tau})z^m=\sum_{l=0}^{\infty}F(-l,l+1;e^{-\tau})z^l,\quad |z|<1,$$

$$\zeta^m(\tau,z;-1)=e^{-m\tau}\sum_{l=m}^{\infty}\begin{pmatrix} m+l-1\\ 2m-1\end{pmatrix}F(m+l,m-l;2m+1;e^{-\tau})z^l,\quad |z|<1,$$

где $P_m(x)$ — полиномы Лежандра, $F(\alpha,\beta,\gamma;z)$ — гипергеометрическая функция, $m=1,2,\ldots$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров И. А.* Параметрические продолжения в теории однолистных функций. М.: Наука, 1976. 344 с.
2. *Александров И. А.* Методы геометрической теории аналитических функций. Томск, Томский государственный университет, 2001. 220 с.
3. *Александров И. А.* Об одном случае интегрирования уравнения Лёвнера // Сибирский математический журнал. 1981. Т. XXII, № 2. С. 207–209.
4. *Александров И. А., Александров А. И.* Экстремальные управляющие функции в уравнении Лёвнера в теоремах вращения // Доклады РАН. 2000. Т. 371. С. 7–9.
5. *Замалиева И. В.* Отображение полуплоскости на круговой четырехугольник без внешних точек // Вестник Томского государственного университета. 2006. № 290. С. 38–45.
6. *Куфарев П. П.* Об одном численном методе определения параметров в интеграле Кристоффеля – Шварца // Доклады АН СССР. 1947. Т. 57. С. 535–537.

УДК 519.642

СИНГУЛЯРНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА – ГИЛЬБЕРТА В СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

© С. И. Безродных, В. И. Власов

sergeyib@pochta.ru, vlasov@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

1. Задача Римана – Гильберта в односвязной области g на комплексной плоскости z заключается в построении аналитической в этой области функции $f = u + iv$ по заданному на ее границе соотношению $\widetilde{a}(z')u(z') - \widetilde{b}(z')v(z') = \widetilde{c}(z')$, $z' \in \partial g$. Если при этом в некоторых точках области g или границы ∂g предписано условие роста решения $f(z)$, то такую задачу называют сингулярной задачей Римана – Гильберта. При помощи конформного отображения $\varphi : g \xrightarrow{\text{conf}} \mathbb{H}^+$ (приближенный метод построения отображения описан в п. 2) эта задача сводится к аналогичной задаче в верхней половине $\mathbb{H}^+$ плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. При этом исходное краевое условие переходит в аналогичное условие на вещественной оси:

$$\operatorname{Re}\big[\, h(\xi)\,\mathcal{P}^+(\xi)\,\big] \,=\, c(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}; \tag{1}$$

здесь $\mathcal{P}^+(\zeta) := f \circ \varphi^{-1}(\zeta)$, $h(\xi) := (\widetilde{a} + i\widetilde{b}) \circ \varphi^{-1}(\xi)$, $c(\xi) := \widetilde{c} \circ \varphi^{-1}(\xi)$.

Уточним постановку задачи (1). Пусть $\{\xi_k\} := \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_K\}$ — конечное множество точек на границе $\mathbb{R}$ верхней полуплоскости $\mathbb{H}^+$, причем $\xi_0 := \infty$, а $n_0, n_1, \ldots, n_K$ — заданные числа из $\mathbb{Z}^+$. Предположим, что функции h и c в (1) кусочно-гельдеровы с разрывами первого рода в точках $\{\xi_k\}$. Обозначим через α_k дробную часть величины $\pi^{-1}[\arg h(\xi_k + 0) - \arg h(\xi_k - 0)]$ при $k \neq 0$ и величины $\pi^{-1}[\arg h(+\infty) - \arg h(-\infty)]$ при $k = 0$; соответствующие целые части обозначаем $\varkappa_k$ и $\varkappa_0$. Пусть все $\alpha_k > 0$.

Требуется найти функцию $\mathcal{P}^+(\zeta)$, аналитическую в $\mathbb{H}^+$, непрерывную в $\overline{\mathbb{H}^+} \setminus \{\xi_k\}$, удовлетворяющую условию (1), а также следующим асимптотическим при $\zeta \to \xi_k$ соотношениям при $k \neq 0$: $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}\big[(\zeta - \xi_k)^{\alpha_k - n_k}\big]$, если $n_k \neq 0$, и $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(1)$, если $n_k = 0$, и следующему соотношению при $k = 0$: $\mathcal{P}^+(\zeta) = \mathcal{O}(\zeta^{\alpha_0 + n_0})$, $z \to \infty$.

Теорема 1. (i) *Если индекс $\varkappa := n_0 - \varkappa_0 + \sum_{k=1}^{K}(\varkappa_k + n_k)$ неотрицателен, то решение $\mathcal{P}^+$ поставленной задачи имеет вид*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) \,=\, \mathcal{X}^+(\zeta)\Big[\, P_\varkappa(\zeta) \,+\, \frac{\mathcal{S}(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t)\,dt}{\mathcal{S}(t)\,h(t)\,\mathcal{X}^+(t)\,(t-\zeta)}\,\Big],$$

где $P_\varkappa(\zeta)$ — произвольный полином степени $\varkappa$ с вещественными коэффициентами,

$$\mathcal{X}^+(\zeta) \,:=\, \prod_{k=1}^{K} (\zeta \,-\, \xi_k)^{-\varkappa_k - n_k}\, \exp[\,\mathcal{M}^+(\zeta)]$$

— каноническое решение задачи,

$$\mathcal{M}^\pm(\zeta) \,:=\, \frac{\zeta - \delta}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\big[\pi/2 - \arg h(t)\big]\,dt}{(t-\delta)\,(t-\zeta)}\,, \quad \mathcal{S}(\zeta) \,:=\, (\zeta - \lambda)^{2\{\varkappa/2\}}\,(\zeta^2+1)^{[\varkappa/2]};$$

здесь $\delta, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\xi_k\}$.

(ii) *Если* $\varkappa = -1$, *то единственным решением* $\mathcal{P}^+ \in \mathcal{H}^+$ *рассматриваемой задачи является функция*

$$\mathcal{P}^+(\zeta) = \frac{\mathcal{X}^+(\zeta)}{\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{c(t)\,dt}{h(t)\,\mathcal{X}^+(t)\,(t-\zeta)}\,.$$

Если $\varkappa < -1$ *и выполняются условия разрешимости* $\int_{\mathbb{R}} t^k c(t)\,[h(t)\,\mathcal{X}^+(t)]^{-1}\,dt = 0$ *при* $k = 0, 1, \ldots, |\varkappa| - 2$, *то единственное решение задачи дается той же формулой. Если же* $\varkappa < -1$ *и условия разрешимости не выполнены, то эта задача не имеет решений.*

2. Пусть g — конечная односвязная область со спрямляемой границей $\partial\, g$, которая состоит из двух звеньев γ и Γ (т.е. $\partial\, g = \gamma \cup \Gamma$), соединяющихся между собой в точках A_1 и A_2. Пусть еще γ в некоторых окрестностях этих точек является дугой Ляпунова, а Γ представляет собой жорданову кусочно-гладкую кривую. Тогда будем говорить, что область g удовлетворяют условию (γ, Γ) и писать $g \in (\gamma, \Gamma)$.

Расширением области $g \in (\gamma, \Gamma)$ через дугу Γ будем называть область G, для которой выполняются следующие включения: $g \subset G$, $\gamma \subset \partial G$, $\operatorname{int}\Gamma \subset G$, а контур ∂G в некоторых окрестностях точек A_1, A_2 представляет собой дугу Ляпунова.

Пусть $g \in (\gamma, \Gamma)$ и G — расширение области g через дугу Γ. Конформное отображение $\Phi : G \xrightarrow{\mathrm{conf}} \mathbb{H}$ подчиним следующим условиям: $\Phi(N) = 0$, $\Phi(M) = \infty$, где $N \in \operatorname{int}\gamma$, $M \in \partial G \setminus \gamma$. Введем также отображение $\mu : g \xrightarrow{\mathrm{conf}} \mathbb{U}^+$, где $\mathbb{U}^+ := \mathbb{H} \cap \{|w| < 1\}$ — полукруг, удовлетворяющее условиям $\mu(A_1) = -1$, $\mu(N) = 0$, $\mu(A_2) = 1$.

На дуге Γ введем функцию $h\,(z) := -\ln|\Phi\,(z)|$, определим систему функций $\{\Omega_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ по формуле $\Omega_k\,(z) := \operatorname{Re}\big[\Phi(z)\big]^k$ и, обозначив через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение в $L_2\,(\Gamma)$, рассмотрим систему линейных уравнений

$$\sum_{l=0}^{N} (\Omega_k,\, \Omega_l)\, a_l^N \;=\; (\Omega_k,\, h), \qquad k = 0,\, \ldots,\, N \tag{2}$$

относительно величин $(a_0^N,\, \ldots,\, a_N^N)$. Верхний индекс N у величин a_l^N подчеркивает их зависимость от размера системы уравнений (2). Справедлива следующая

Теорема 2. *Последовательность функций* $\big\{\mu_N\,(z)\big\}_N$, *определяемых по формуле*

$$\mu_N\,(z) \;:=\; \Phi\,(z)\, \exp\Big[\sum_{k=0}^{N} a_k^N\, \Phi^k\,(z)\Big],$$

где $(a_0^N,\, \ldots,\, a_N^N)$ *— решение системы (2), равномерно сходится к функции* $\mu(z)$ *на множестве* $g \cup \operatorname{int}\gamma$, *причем эту последовательность можно дифференцировать произвольное число раз на объединении* g *и аналитических учатков* γ.

Из теоремы 2 вытекает, что последовательность функций $\varphi_N\,(z) := T \circ \mu_N\,(z)$, где $T(w) := (1+w)^2/(1-w)^2$, сходится на множестве $g \cup \operatorname{int}\gamma$ к функции $\varphi(z)$, конформно отображающей область g на верхнюю полуплоскость, причем причем эта последовательность допускает дифференцирование произвольное число раз на объединении g и аналитических участков γ.

Приведенные результаты были применены при реализации модели пересоединения магнитного поля, а также к некоторым задачам теории упругости, сводящимся к задаче Римана – Гильберта в сложной области с кусочно-гельдеровыми коэффициентами и условиями роста в некоторых точках границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503), программы фундаментальных исследований ОМН РАН № 3 и программы РАН “Современные проблемы теоретической математики”, проект “Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики”.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 422–423

УДК 517.518.85

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СПЛАЙНОВ И ПРОИЗВОДНЫХ

© Ю. С. Волков

volkov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Пусть полный полиномиальный сплайн s степени $2n-1$ гладкости $C^{2n-2}[a,b]$ интерполирует некоторую функции f на сетке $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$. Изучается задача о сходимости процессов интерполяции, а именно при каких условиях $s^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ для любой функции $f \in C^k[a,b]$, $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$. Под сходимостью понимается равномерная сходимость, т. е. $\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty} \to 0$ при $\bar{h} \to 0$, где $\bar{h}$ — наибольший шаг сетки Δ.

Наибольший интерес представляет вопрос: при каких значениях k сходимость будет иметь место без ограничений на последовательность разбиений $\{\Delta\}$. К. де Бор [1] высказал предположение, что безусловная сходимость будет иметь место только для средних производных порядков $n-1$ и n, и показал, что при $k = 0, \ldots, n-2$ сходимость без ограничений на сетки невозможна. Автором [2] были построены примеры расходимости процессов интерполяции для $k = n+1, \ldots, 2n-1$, т. е. и для обеспечения сходимости старших производных на последовательность сеток необходимо накладывать какие-либо ограничения.

При $k = n$ указанная задача эквивалентна широко известной проблеме К. де Бора об ограниченности нормы оператора наилучшего среднеквадратичного приближения функции сплайнами степени n как операторов из $C[a,b]$ в $C[a,b]$, которая после усилий многих математиков недавно была решена А. Ю. Шадриным [3]. Тем самым для интерполяционных сплайнов s степени $2n-1$ доказано, что $\|s^{(n)} - f^{(n)}\|_{L_\infty} \to 0$ при $\bar{h} \to 0$ для любой функции $f \in C^n[a,b]$ без каких-либо ограничений на сетки.

В докладе устанавливаются оценки величины $\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty}$ через max-норму обратной матрицы к $\boldsymbol{A}_k$ и модуль непрерывности $f^{(k)}$. Матрицы $\boldsymbol{A}_k$ были введены автором [4], [5] как матрицы систем определяющих уравнений для построения интерполяционных сплайнов произвольной степени. Определяемыми параметрами при этом являются коэффициенты разложения производной сплайна порядка k по нормализованным B-сплайнам.

Теорема 1. *Для k-й производной погрешности интерполяции полным сплайном s функции $f \in C^k[a,b]$ $(0 \leqslant k \leqslant 2n-2)$ справедлива оценка*

$$\|s^{(k)} - f^{(k)}\|_{L_\infty} \leqslant \Big[K_1 + K_2 \big\|(\boldsymbol{A}_{2n-k-1}^T)^{-1}\big\|_\infty\Big]\omega\big(f^{(k)}; \bar{h}\big),$$

где константы K_1 и K_2 зависят только от n и k, но не от Δ.

Для периодического случая данная теорема доказана в [6].

Кроме того, вопрос о сходимости процессов интерполяции эквивалентен вопросу об ограниченности норм соответствующих операторов интерполяции P_Δ, связывающих функцию $f \in C[a,b]$ и полный сплайн s, интерполирующий её на сетке Δ, т. е. $s = P_\Delta f$. Если интерполируемая функция более гладкая $f \in C^k[a,b]$, $1 \leqslant k \leqslant 2n-1$, то можно рассмотреть оператор $P_\Delta^{(k)}$, связывающий $f^{(k)}$ с соответствующей производной сплайна $s^{(k)}$, а именно $P_\Delta^{(k)} f^{(k)} = \big(P_\Delta f\big)^{(k)}$. В этом случае изучается вопрос об ограниченности $\|P_\Delta^{(k)}\|$. При $k = 0$ считаем, что $P_\Delta^{(0)} = P_\Delta$.

Теорема 2. *Для любого $k = 0, \ldots, 2n-1$ имеют место неравенства*

$$D_{k,n}\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\|_\infty \leqslant \|P_\Delta^{(k)}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}_k^{-1}\|_\infty,$$

с константами $D_{k,n}$ *, зависящими только от* n *и* k *, но не от сетки* Δ *.*

Следствие. *Пусть на последовательности сеток* $\{\Delta\}$ *с условием* $\bar{h} \to 0$ *последовательность полных сплайнов* $\{s\}$ *интерполирует функцию* $f \in C^k[a,b]$ *,* $k = 0, \ldots, 2n-1$ *. Тогда* $s^{(k)}(x) \to f^{(k)}(x)$ *равномерно относительно* x *на* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда существует число* K *такое, что для матрицы* $\boldsymbol{A}_k$ *соответствующей системы уравнений построения сплайна* s *выполнено* $\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\|_\infty \leqslant K$ *.*

Теорема 2 показывает, что сходимость процесса интерполяции для какой-либо производной k , $0 \leqslant k \leqslant 2n-1$, при требованиях гладкости $f \in C^k[a,b]$ эквивалентна ограниченности max-нормы обратной матрицы к $\boldsymbol{A}_k$. Теорема 1 показывает, что эта же сходимость может обеспечиваться ограниченностью max-нормы обратной матрицы к транспонированной $\boldsymbol{A}_{2n-k-1}^T$, поскольку $\omega(g;\bar{h}) \to 0$ при $\bar{h} \to 0$ для любой функции $g \in C[a,b]$.

С другой стороны, если для некоторой последовательности сеток $\{\Delta\}$ нормы $\left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|_\infty$ могут быть ограничены константой, не зависящей от сеток, то в силу ленточности матриц нормы $\left\|(\boldsymbol{A}_k^T)^{-1}\right\|_\infty$ тоже будут ограничены константой, не зависящей от сеток.

Таким образом, «хорошая» оценка последовательности норм $\left\|\boldsymbol{A}_k^{-1}\right\|_\infty$, соответствующих некоторой последовательности сеток $\{\Delta\}$, гарантирует равномерную сходимость $s^{(k)}$ к $f^{(k)}$ при $\bar{h} \to 0$ для функций $f \in C^k[a,b]$ и одновременно сходимость $s^{(2n-k-1)}$ к $f^{(2n-k-1)}$ для функций $f \in C^{2n-k-1}[a,b]$ на рассматриваемой последовательности сеток $\{\Delta\}$. И наоборот, сходимость одного из указанных процессов вызывает сходимость другого, а, следовательно, и ограниченность последовательности норм матриц $\boldsymbol{A}_k^{-1}$.

Таким образом, как следствие теорем 1 и 2 и результата А. Ю. Шадрина [3], получаем окончательное доказательство предположения К. де Бора [1], т. е. безусловную сходимость и остававшейся средней производной порядка $k = n-1$.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in C^{n-1}[a,b]$ *и любой последовательности сеток* $\{\Delta\}$ *, удовлетворяющей условию* $\bar{h} \to 0$ *, последовательность* $s^{(n-1)}$ *сходится равномерно к* $f^{(n-1)}$ *, где полные сплайны* s *степени* $2n-1$ *интерполируют функцию* f *в узлах сеток* Δ *и значения производных* $f^{(p)}(a)$ *и* $f^{(p)}(b)$ *,* $p = 1, \ldots, n-1$ *.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ-ННИО (проект 04-01-04003), Отделения математических наук РАН (проект 2006-1.3.1), Интеграционных проектов СО РАН (проект 2006-66).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *de Boor C.* On bounding spline interpolation // J. Approxim. Theory. 1975. V. 14, N 3. P. 191–203.
2. *Волков Ю. С.* Расходимость интерполяционных сплайнов нечетной степени // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1984. Вып. 106. С. 41–56.
3. *Shadrin A. Yu.* The L_∞ -norm of the L_2 -spline projector is bounded independently of the knot sequence: A proof of de Boor's conjecture // Acta Math. 2001. V. 187, N 1. P. 59–137.
4. *Волков Ю. С.* О построении интерполяционных полиномиальных сплайнов // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1997. Вып. 159. С. 3–18.
5. *Волков Ю. С.* Вполне неотрицательные матрицы в методах построения интерполяционных сплайнов нечётной степени // Матем. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 3–34. Перевод: *Volkov Yu. S.* Totally positive matrices in the methods for constructing interpolation splines of odd degree // Siberian Adv. in Math. 2005. V. 15, N 4. P. 96–125.
6. *Волков Ю. С.* Безусловная сходимость ещё одной средней производной для интерполяционных сплайнов нечётной степени // ДАН. 2005. Т. 401, № 5. С. 592–594.
7. *Волков Ю. С.* Условия ограниченности операторов сплайн-интерполяции. Новосибирск, 2006. 18 с. (Препринт № 167 / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики им. С. Л. Соболева).

УДК 517.968 + 517.944

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦЫ-ФУНКЦИИ

© А. Ф. Воронин

voronin@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Исследование корректности краевой задачи Римана для кусочно-голоморфного вектора, системы уравнений Винера – Хопфа и системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши сводится к проблеме нахождения частных индексов при факторизации соответствующих матриц-функций [1, с. 416–455; 2, 3]. В общем случае, эта проблема не решена. Более того, класс матриц-функций, для которых частные индексы можно вычислить, весьма беден.

В данной работе найдено несколько неизвестных ранее классов матриц-функций, у которых все частные индексы равны нулю. Среди них классы четных унитарных и эрмитовых матриц-функций. Получен критерий, с помощью которого выделяется класс матриц-функций со всеми равными частными индексами. Кроме того, в работе приведены результаты полного исследования корректности краевой задачи Римана с матричным коэффициентом из отмеченных выше классов матриц-функций. И как следствие, приведены результаты полного исследования корректности системы уравнений Винера – Хопфа и характеристической системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Перейдем к постановке задачи. Пусть Γ — простая замкнутая кривая, разбивающая плоскость на две области — внутреннюю D^+ и внешнюю (бесконечную) D^-. На Γ задана непрерывная невырожденная матрица-функция $G(t)$ размера $n\times n$. Неособенная матрица-функция $G(t)$ размера $n\times n$ допускает левую стандартную факторизацию на Γ, если справедливо следующее представление для $G(t)$:

$$G(t) = G^+(t)D(t)G^-(t),\ t\in\Gamma,$$

где $G^\pm$ — фактор-множители, непрерывные на Γ матрицы-функции, аналитически продолжимы в области $D^\pm$ и обратимы там, соответственно; $D(t) = \{t^{\kappa_1},\dots,t^{\kappa_n}\}$ — диагональная матрица-функция размера $n\times n$, $\kappa_1\ge\kappa_2\ge\dots\ge\kappa_n$ — частные индексы (целые числа),

$$\kappa := \mathrm{Ind}_\Gamma\, \det G(t) \equiv \frac{1}{2\pi}[\arg\, \det G(t)]_\Gamma = \sum_{j=1}^{n}\kappa_j \ \text{ — суммарный индекс матрицы } G.$$

Аналогичным образом определяется правая стандартная факторизация [3, с. 32]. Стандартная факторизация называется канонической, если все частные индексы матрицы $G(t)$ равны нулю.

Ниже будем считать, что $\Gamma = R$. Все результаты работы, полученные для этого случая, переносятся на общий случай с помощью конфорного отображения области D^+ на полуплоскость $\mathrm{Im}\, p > 0$.

1. Основные результаты о частных индексах. Обозначим за I_1 матрицу $n\times n$, состоящую из нулей за исключением неглавной диагонали, которую заполняют единицы, $I_1^2 = I$ — единичная матрица.

Теорема 1 (критерий канонической факторизации). *Пусть*

$$G\in\mathcal{R}_{n\times n},\quad \det G(x)\ne 0,\quad x\in R,\quad G(\infty) = I, \tag{1}$$

где $\mathcal{R}_{n\times n}$ — кольцо матриц-функций с элементами из $\mathcal{R}$ [3, с. 17]. *Тогда матрица $(\frac{x-i}{x+i})^{-\kappa/n}G(x)$, где κ — суммарный индекс $G(x)$, допускает каноническую факторизацию тогда и только*

тогда, когда существуют две различные левые (правые) стандартные факторизации матрицы $G(x)$ *с фактор множителями* $G^{\pm}(x)$ *и* $\widetilde{G}^{\pm}(x)$ *соответственно, такие, что*

$$G^{+}(\infty) = I, \quad \widetilde{G}^{+}(\infty) = I_1.$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (1). Тогда в следующих двух случаях матрица* $G(x)$ *допускает левую и правую канонические факторизации:*

a) $G(x) = (G(x))^* \equiv \overline{G^T(x)}$, $x \in R$ *(матрица* $G(x)$ *— эрмитова);*

b) $G^{-1}(x) = G^*(-x)$, $x \in R$ *(матрица* $G(x)$ *— унитарная, если* $G(x) = G(-x)$ *).*

Рассмотрим пример. В теории интегрального уравнения в свертках на конечном интервале фундаментальную роль играет следующая матрица-функция $G(x) \in \mathcal{R}_{2\times 2}$ [4]:

$$G(x) = \frac{1}{1 - \mathcal{F}k_-(x)} G_0(x), \quad G_0(x) = -\begin{pmatrix} 1 & -e^{ixb}\mathcal{F}k_-(x) \\ e^{-ixb}\mathcal{F}k_+(x) & 1 - \mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $k(t)$ — ядро интегрального уравнения в свертках, $k(t) = 0$, $t \overline{\in} (-b, b)$, $k_{\pm}(t) = \theta(\pm t)k(t)$, $t \in R$, θ — функция Хевисайда, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье. Из (2) и теоремы 2 a) вытекает

Предложение. *Пусть* $k(t)$ *— четная вещественная функция и* $\det G_0(x) \neq 0$, $x \in R$. *Тогда матрица* G *в (2) допускает левую (правую) правильную факторизацию с равными частными индексами.*

2. Основные результаты в области краевой задачи Римана и систем интегральных уравнений. Для кусочно-аналитического вектора Φ рассмотрим на вещественной оси краевую задачу Римана:

$$\Phi^{+}(p) = G(p)\Phi^{-}(p) + g(p), \ p \in R, \tag{3}$$

$$\Phi_l^{\pm} \in \mathcal{R}_0^{\pm}, \ g_l \in \mathcal{R}_0, \ l = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где $G \in \mathcal{R}_{n\times n}$ — матрица-функция, $\Phi^{\pm}(p) = (\Phi_1^{\pm}(p), \ldots, \Phi_n^{\pm}(p))^T$, $g(p) = (g_1(p), \ldots, g_n(p))^T$ — вектора-столбцы.

Теорема 3 (корректности). *Пусть для матричного коэффициента* $G(p)$ *выполнены условия теоремы 2 a) или b). Тогда задача Римана (3)–(4) имеет решение, причем единственное. Кроме того, решение устойчиво по коэффициентам задачи* G *и* g *в соответствующих нормах.*

Из теоремы 3 непосредственно вытекают аналогичные теоремы для системы интегральных уравнений в свертках на полуоси и характеристической системы сингулярных интегральных уравнений на вещественной оси в виду эквивалентности (в вопросах корректности) систем уравнений в свертках и сингулярных с ядром Коши задаче Римана для кусочно голоморфного вектора [1, с. 446–449; 2, 3].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 48) и гранта поддержки ведущих научных школ России (НШ-7157.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М. : Наука, 1968.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для системы n пар функций // Успехи мат. наук. 1954. Т. 7, № 4(50). С. 3–54.
3. *Гохберг И. Ц, Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 2(80). С. 3–72.
4. *Воронин А. Ф.* Полное обобщение метода Винера – Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами // Диф. уравн. 2004. Т. 40, № 9. С. 1153–1160.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 426–427

УДК 512.812.2+514.752.8+517.9

ТЕОРЕМЫ О КАСАТЕЛЬНОМ КОНУСЕ ДЛЯ C^1-ГЛАДКИХ ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

© А. В. Грешнов

greshnov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть на некоторой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^N$ заданы C^1-гладкие векторные поля $X_1, \ldots, X_N$ такие, что для каждой точки $g \in U$ вектора $X_1(g), \ldots, X_N(g)$ линейно независимы, т. е. U — C^1-гладкое параллелизуемое многообразие, ср. с [1]. Пусть каждому векторному полю X_j соответствует некоторое натуральное число $\deg X_j < N$ такое, что

$$[X_i, X_j] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j \geq \deg X_k} C_{ijk}(g) X_k, \quad g \in U,$$

для некоторых непрерывных на U функций C_{ijk}, см. [2]. Данный набор векторных полей в дальнейшем обозначаем символом X, символом (U, X) обозначаем область U, «снабженную» базисом векторных полей X.

Для каждой точки $g \in U$ обозначим через $\theta_g : (x_1, \ldots, x_N) \to O_g \subset U$ локальную систему координат первого рода. Символом Δ_t^g, $t \geq 0$, далее обозначается неоднородный оператор растяжения, действующий по правилу

$$\Delta_t^g = \theta_g \circ \delta_t \circ \theta_g^{-1}, \quad \text{где} \quad \delta_t(x_1, \ldots, x_N) = (t^{\deg X_1} x_1, \ldots, t^{\deg X_N} x_N).$$

Пусть $\varepsilon^{\deg X_j} X_j = X_j^\varepsilon$, $j = 1, \ldots, N$.

Нами доказано следующее

Утверждение [3]. *Существует некоторая окрестность O точки g такая, что при $\varepsilon \to 0$ на множестве O имеют место следующие равномерные сходимости*

$$(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g)_* X_i^\varepsilon \to \widehat{X}_i^g, \quad [(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g)_* X_i^\varepsilon, (\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g)_* X_j^\varepsilon] \to [\widehat{X}_i^g; \widehat{X}_j^g], \quad i, j = 1, \ldots, N.$$

Векторные поля $\{\widehat{X}_j^g\}$ удовлетворяют на O следующей «таблице коммутаторов»

$$[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum_{\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k} \widehat{C}_{ijk} \widehat{X}_k^g.$$

Тогда, следуя работе [2], мы можем ввести следующее

Определение [3]. Односвязная нильпотентная группа Ли G, соответствующая алгебре Ли $\{\widehat{X}_j^g\}$, называется *нильпотентным касательным конусом* параллелизуемого многообразия (U, X) в выделенной точке $g \in U$.

Утверждение получено получено при помощи аналитических методов группового анализа дифференциальных уравнений, разработанных Л. В. Овсянниковым [4]. Другими методами утверждение и определение были получены ранее в работе [2] для систем координат 2-го рода.

Используя методы аппроксимации, утверждение обобщено нами на случай липшицевых векторных полей. Также в качестве следствия нами доказано существование квазиметрик Карно – Каратеодори d_{cc} на (U, X); для квазипространств (O, d_{cc}) доказаны теорема о существовании нильпотентного касательного конуса (O, d_c^g) (который рассматривается как локальная

группа Карно с соответствующей квазиметрикой d_c^g) в выделенной точке $g \in O$ и следующий аналог локальной аппроксимационной теоремы Громова.

Теорема. *Пусть* $B_{cc}(x,r)$, $B_c^g(x,r)$ *— открытые шары в квазиметриках* d_{cc} , d_c^g *соответственно. Тогда*

$$B_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon) \subset B_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon + o(\varepsilon)) \quad \text{и} \quad B_{cc}(\hat{g},\lambda\varepsilon) \subset B_c^g(\hat{g},\lambda\varepsilon + o(\varepsilon)),$$

где $\hat{g} \in B(g,\varepsilon)$, $0 \le \lambda \le 1$, *а величины* $o(\varepsilon)$ *равномерны по* $\hat{g}$.

Доказательство теоремы основано на свойствах отображения θ_g , а также использует некоторые результаты работы [5].

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (код проекта 06-01-00735-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.
2. *Gromov M.* Carnot – Caratheodory spaces seen from within // в книге: Sub-Reimannian Geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
3. *Грешнов А. В.* О методах группового анализа дифференциальных уравнений на C^1 -гладких параллелизуемых многообразиях // (в печати)
4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
5. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно – Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 428–429

УДК 517.597

НЕРАВЕНСТВО СОБОЛЕВА ПО ФИНСЛЕРОВОЙ МЕРЕ

© Е. Г. Григорьева

e_grigoreva@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Пусть в области $D \subset \mathbf{R}^n$ задана неотрицательная непрерывная функция $\Phi : D \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ со свойствами:

(a) для всех $\xi \in \mathbf{R}^n$ и $\lambda \geq 0$ выполнено $\Phi(x, \lambda\xi) = \lambda\Phi(x, \xi)$;

(b) $\Phi(x, \xi)$ выпукла по переменной ξ;

(c) для всех $x \in D$ множество $\Xi(x) = \{\xi \in \mathbf{R}^n \ : \ \Phi(x, \xi) \leq 1\}$ локально равномерно ограничено.

Рассмотрим двойственную функцию для множества $\Xi(x)$:

$$H(x, \eta) = \sup_{\xi \in \Xi(x)} \langle \eta, \xi \rangle,$$

где $\langle \eta, \xi \rangle$ — скалярное произведение векторов ξ и η. Так как $H(x, \eta)$ является положительной однородной степени 1 по переменной η функцией, то мы можем определить в D *финслерову метрику* (см. [1])

$$d(x, y) = \inf \int\limits_{\gamma} H(x, dx) \quad \forall x, y \in D,$$

где точная нижняя грань берется по всем локально спрямляемым путям $\gamma \subset D$, соединяющим точки $x, y \in D$. Область D с так определенной финслеровой метрикой будем называть *финслеровым пространством.*

Пусть $\sigma : D \to \mathbf{R}$ — неотрицательная измеримая функция Тогда для любого множества $B \subset D$ *финслерова мера* B определяется равенством (см.[1])

$$|B|_\mu = \int\limits_B d\mu = \int\limits_{\{x \in B\}} \sigma(x) dx.$$

Обозначим среднее значение функции $u = u(x) \in L^1_{\mathrm{loc}}(D)$ через

$$u_B = \frac{1}{|B|_\mu} \int\limits_B u(x) d\mu.$$

Для формулировки теоремы сделаем два дополнительных предположения:

1) Пусть $x_0 \in D$ — произвольная точка и $B(x_0, R) = B_R = \{x \in D : d(x, x_0) < R\}$ — шар в метрике $d(x, y)$ с центром x_0 радиуса R. Предположим, что существует постоянная $C = C(x_0, R)$ такая, что

$$\sigma(x) \leq C(x_0, R), \quad \forall x \in B_R.$$

2) Для любой функции $u \in W^{1,1}(B_R)$ найдется измеримая локально ограниченная в D функция $C(x)$ такая, что

$$|u(x) - u_{B_R}| \leq \frac{C(x)}{|B_R|_\mu} \int\limits_{B_R} \frac{\Phi(x, \nabla u(x))}{d^{n-1}(x, y)} d\mu.$$

Теорема 1. *Если справедливы предположения* (1) *и* (2), *тогда существует постоянная* $C_0 = C_0(H, n, x_0, R)$ *такая, что для всех точек* $x_0 \in D$, *всех шаров* $B_R \subset D$ *радиуса* R *с центром в точке* x_0 *и для всех функций* $u = u(x) \in W_0^{1,1}(B_R)$ *справедливо неравенство*

$$\left[\int\limits_{B_R} |u(x) - u_{B_R}|^{\frac{n}{n-1}} d\mu\right]^{\frac{n-1}{n}} \le \frac{C_0}{|B_R|_\mu^{1-\frac{1}{n}}} \int\limits_{B_R} \Phi(x, \nabla u(x)) d\mu,$$

где

$$C_0 = \left[C(x_0, R) 2^{2+n/(n-1)} \omega_{n-1}\right]^{\frac{n-1}{n}} \cdot \sup_{x \in B_R} \left\{ \sup_{w \in S^{n-1}} \int\limits_0^{\rho(w)} \sigma(x + \rho w) \rho^{n-1} h(\rho, w) d\rho \right\},$$

$$h(\rho, w) = \sup_{0 \le s \le \rho} \frac{H(x + sw, w)}{\sigma(x + sw)}, \rho(w) = \sup_{(x+\rho w) \in B_R} \rho.$$

Теорема 2. *Для любого* $1 \le q < +\infty$, $0 \le \delta(p, q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{1}{n}$ *существует постоянная* C_1 *такая, что для всех измеримых множеств* $B \subset D$ *и всех функций* $u \in W^{1,p}(D)$ *выполнено*

$$\left[\int\limits_B |u(x) - u_B|^q d\mu\right]^{\frac{1}{q}} \le C_1 \left(\int\limits_B (\Phi(x, \nabla u(x)))^p d\mu\right)^{1/p},$$

где

$$C_1 = \sup_{x \in B} \left\{ \sup_{\omega \in S^{n-1}} \int\limits_0^{\rho(w)} \sigma(x + \rho \cdot w) \rho^{n-1} d\rho \right\} \cdot \sup_{x \in B} \left\{ \int\limits_B \left[\frac{H(y, x - y)}{|x - y|^n}\right]^{\frac{1}{1-\delta}} d\mu \right\}^{1-\delta}.$$

Замечание. Заметим, что постоянные C_0 и C_1 в правой стороне неравенств из теоремы 1 и теоремы 2 являются асимптотически точными, поскольку в случае, когда $\Phi(x, \xi) = |\xi|$,эти постоянные не зависят от области.

Наш подход к доказательству теоремы 1 следующего изопериметрического неравенства:

Лемма (изопериметрическое неравенство). *Для любого открытого множества* B *с липшицевой границей такого, что* $\overline{B} \subset B_R$, *выполнено*

$$|B|_\mu^{\frac{n-1}{n}} \le C \cdot \int\limits_{\partial B} \Phi(x, \eta(x)) d\mu,$$

где $\eta(x)$ *— единичный вектор нормали к границе* ∂B .

При доказательстве данного неравенства были использованы некоторые идеи из статьи [2].

Замечание. Заметим также, что теорема 1 остается справедливой и в случае, когда в предположении (2) вместо $d(x, y)$ взято $|x - y|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981. С. 36–43.
2. *Capogna L., Danielli D., Garofalo N.* The geometric Sobolev embedding for vector fields and the isoperimetric inequality // Comm. In Analysis and Geom. 1994. Т. 2, № 2. С. 203–215.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 430–431

УДК 517.957:517.548

УСТОЙЧИВОСТЬ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СТРОЯЩИХСЯ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ И НУЛЬ-ЛАГРАНЖИАНОВ

© **А. А. Егоров**

yegorov@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Первые результаты по устойчивости классов плоских и пространственных конформных отображений были получены М. А. Лаврентьевым при исследовании квазиконформных отображений. Теория устойчивости конформных отображений, возникшая в рамках теории квазиконформных отображений, в дальнейшем развивалась главным образом усилиями самого М. А. Лаврентьева, а также П. П. Белинского и Ю. Г. Решетняка. Отталкиваясь от теории устойчивости конформных отображений, А. П. Копылов предложил общую концепцию устойчивости в C-норме классов отображений, названную им концепцией ξ-устойчивости (см., например, [1]). В рамках концепции ξ-устойчивости получены теоремы об устойчивости классов многомерных голоморфных отображений, классов решений эллиптических систем линейных уравнений в частных производных, классов гомотетий и ряда других классов отображений (см., например, работы А. П. Копылова, Н. С. Даирбекова, Т. В. Соколовой и др.).

Развивая теорию ξ-устойчивости, в работах [2–4] мы исследуем устойчивость классов решений $u\colon V\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ нелинейных дифференциальных уравнений

$$F(u'(x)) = G(u'(x)) \quad \text{для п. в. } x\in V, \tag{1}$$

строящихся с помощью квазивыпуклых функций F и нуль-лагранжианов G. Здесь $u'(x)$ — матрица Якоби отображения u в точке $x\in V$. Непрерывная функция $F\colon\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$, заданная на пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных $m\times n$-матриц, называется *квазивыпуклой* в смысле Ч. Б. Морри, если $|B(0,1)|F(\zeta)\le\int_{B(0,1)}F(\zeta+\varphi'(x))\,dx$ для всех функций $\varphi\in C_0^\infty(B(0,1);\mathbb{R}^m)$ и матриц $\zeta\in\mathbb{R}^{m\times n}$, а функция $G\colon\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ называется *нуль-лагранжианом* в смысле Дж. Болла, если G и $-G$ являются квазивыпуклыми функциями. Здесь для множества $A\subset\mathbb{R}^n$ величина $|A|$ есть его внешняя мера Лебега. Большинство упомянутых выше классов отображений могут быть рассмотрены как классы решений уравнений вида (1). Например, сохраняющие ориентацию конформные отображения являются решениями уравнения (1) с $F(\zeta)=|\zeta|$ и $G(\zeta)=\det\zeta$, $\zeta\in\mathbb{R}^{m\times n}$. Здесь $|\zeta|$ — операторная норма матрицы $\zeta\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Множество $\Gamma_n^k := \{I=(i_1,\dots,i_k) : 1\le i_1<\dots<i_k\le n,\ i_\varkappa\in\{1,\dots,n\},\ \varkappa=1,\dots,k\}$ состоит из k-наборов упорядоченных индексов. Если $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ и $I=(i_1,\dots,i_k)\in\Gamma_n^k$, то полагаем $x_I:=(x_{i_1},\dots,x_{i_k})\in\mathbb{R}^k$. Для $J=(j_1,\dots,j_k)\in\Gamma_m^k$ и $I=(i_1,\dots,i_k)\in\Gamma_n^k$ величина $\det_{JI}\zeta := \det\begin{pmatrix}\zeta_{j_1i_1} & \cdots & \zeta_{j_1i_k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{j_ki_1} & \cdots & \zeta_{j_ki_k}\end{pmatrix}$ есть $k\times k$-минор матрицы $\zeta=\begin{pmatrix}\zeta_{11} & \cdots & \zeta_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \zeta_{m1} & \cdots & \zeta_{mn}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

Фиксируем число $k\in\mathbb{N}$, $2\le k\le\min\{n,m\}$. Для непрерывных функций $F\colon\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ и $G\colon\mathbb{R}^{m\times n}\to\mathbb{R}$ мы считаем, что выполнены следующие предположения: (H1) F является квазивыпуклой функцией; (H2) G является нуль-лагранжианом; (H3) F и G положительно однородны степени k, т. е. $F(t\zeta)=t^kF(\zeta)$ и $G(t\zeta)=t^kG(\zeta)$ для всех чисел $t>0$ и матриц $\zeta\in\mathbb{R}^{m\times n}$; (H4) $\sup\{K\ge0 : F(\zeta)\ge KG(\zeta),\ \zeta\in\mathbb{R}^{m\times n}\}=1$; (H5) $c_F:=\inf\{F(\zeta) : \zeta\in\mathbb{R}^{m\times n},\ |\zeta|=1\}>0$; (H6) $d_G:=\sup\bigl\{\sum_{J\in\Gamma_m^k,I\in\Gamma_n^k}|\gamma_{JI}||x_I|^2 : x\in\mathbb{R}^n,\ |x|=1\bigr\}<kc_F/(n-$

k) в случае $k < n$. Здесь коэффициенты $\gamma_{JI} \in \mathbb{R}$ из представления k-однородного нуль-лагранжиана G в виде линейной комбинации $k \times k$-миноров: $G(\zeta) = \sum_{J\in\Gamma^k_m, I\in\Gamma^k_n} \gamma_{JI} \det_{JI} \zeta$, $\zeta \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Для $K \geq 1$ обозначим через $\mathfrak{G}(K) = \mathfrak{G}_{F,G}(K)$ класс отображений $v \in W^{1,k}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$, определенных на областях $V \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих неравенству $F(v'(x)) \leq KG(v'(x))$ для п. в. $x \in V$. Обозначим через W^1 класс отображений $v\colon V \to \mathbb{R}^m$, определенных на областях $V \subset \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию $v \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(V;\mathbb{R}^m)$ для некоторого $p = p(v) > n$.

Из условия (H4) следует, что класс $\mathfrak{G} := \mathfrak{G}(1)$ состоит из решений u уравнения (1).

Основным результатом об устойчивости класса $\mathfrak{G}$ является следующая теорема [4].

Теорема 1. *Пусть функции F и G удовлетворяют предположениям* (H1)–(H6). *Тогда класс $\mathfrak{G}$ ξ-устойчив относительно класса W^1.*

Следуя А. П. Копылову [1], говорят, что класс $\mathfrak{G}$ является *ξ-устойчивым относительно класса W^1*, если класс $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям ξ-нормальности $\mathfrak{g}_1 - \mathfrak{g}_6$ из [1] и существует функция $\alpha = \alpha_{\mathfrak{G}}\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ такая, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon) = \alpha(0) = 0$ и $\xi(v,\mathfrak{G}) \leq \alpha(\Xi(v,\mathfrak{G}))$ для всех отображений $v \in W^1$. Здесь функционал $\xi(\cdot,\mathfrak{G})$ глобальной близости и функционал $\Xi(\cdot,\mathfrak{G})$ локальной близости определяются следующим образом [1]. Возьмем число $\rho \in (0,1)$ и шар $B = B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Для локально ограниченного отображения $v\colon B \to \mathbb{R}^m$ обозначим через $\xi_{\rho,B}(v,\mathfrak{G})$ точную нижнюю грань чисел $\varepsilon \geq 0$, для которых найдется отображение $u\colon B \to \mathbb{R}^m$ из класса $\mathfrak{G}$ такое, что $\|v-u\|_{C(B(x,\rho r);\mathbb{R}^m)} \leq \varepsilon \operatorname{diam} v(B)$. Функционал $\xi_B(v,\mathfrak{G}) := \int_0^1 \xi_{\rho,B}(v,\mathfrak{G})\,d\rho$ измеряет близость отображения v к классу $\mathfrak{G}$ в равномерной метрике внутри шара B, отнесенной к размерам $v(B)$. Для отображения $v\colon V \to \mathbb{R}^m$, определенного на области $V \subset \mathbb{R}^n$, мы полагаем $\xi(v,\mathfrak{G}) := \sup\{\xi_B(v,\mathfrak{G}) : B \subset V\}$ и $\Xi(v,\mathfrak{G}) := \sup\{\liminf_{r\to 0}\xi_{B(x,r)}(v,\mathfrak{G}) : x \in V\}$. Здесь в определении $\xi(v,\mathfrak{G})$ точная верхняя грань берется по всем шарам B, лежащим в области V. Функционал $\xi(v,\mathfrak{G})$ глобальной близости измеряет близость отображения v к классу $\mathfrak{G}$ внутри каждого шара, компактно содержащегося в области определения отображения v, а функционал $\Xi(v,\mathfrak{G})$ локальной близости — во всех малых шарах из области определения отображения v. Таким образом, теорема 1 означает, что отображение $v \in W^1$, локально близкое к отображениям класса $\mathfrak{G}$, глобально близко к ним в C-норме на каждом шаре, компактно содержащемся в области определения отображения v. Из теоремы 1 и теоремы 1.1.2 монографии [1] следует, что локально близкое к классу $\mathfrak{G}$ отображение $v \in W^1$ глобально близко в C-норме к отображениям класса $\mathfrak{G}$ не только на шарах, но и на любой подобласти, компактно содержащейся в области определения отображения v.

Важным шагом в доказательстве теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *существует функция $\bar\alpha(\varepsilon) = \bar\alpha_{F,G}(\varepsilon)$, определённая для $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ и такая, что $\lim_{\varepsilon\to 0}\bar\alpha(\varepsilon) = \bar\alpha(0) = 0$ и для каждого отображения $v \in W^1$ неравенство $\Xi(v,\mathfrak{G}) \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ влечёт $v \in \mathfrak{G}(1+\bar\alpha(\varepsilon))$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ, Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006 г. № 117 и Фонда содействия отечественной науке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Копылов А. П.* Устойчивость в C-норме классов отображений. Новосибирск: Наука, 1990.
2. *Егоров А. А.* Устойчивость классов решений дифференциальных соотношений, построенных с помощью выпуклых и квазиаффинных функций // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та матем., 2003. С. 275–288.
3. *Egorov A. A.* Stability of classes of solutions to partial differential relations constructed by quasiconvex functions and null Lagrangians // EQUADIFF 2003. Hackensack, NJ: World Sci. Publ., 2005. P. 1065–1067.
4. *Егоров А. А.* Устойчивость классов отображений, квазивыпуклость и нуль-лагранжианы // Докл. РАН (принята к печати).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 432–433

УДК 517.51

К ТЕОРЕМАМ ОБ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ И О НЕЯВНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© И. В. Журавлев

igor.zhuravlev@volsu.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Работа посвящена теоремам об обратной функции и о неявной функции [1–6] для липшицевых отображений областей банаховых пространств.

Пусть Y, Z — нормированные пространства. Если $a \in Y$, то символом $B(a,r)$ обозначим открытый шар в Y с центром a радиуса $r > 0$. Обозначим через $\mathcal{L}(Z,Y)$ пространство линейных непрерывных операторов, действующих из Z в Y.

Если $a \in Z$ и $M \subset Z$, то $\pi(a,\ M) = \{z \in Z : z = a + (m-a)t,\ m \in M,\ t \in \mathbf{R}\}$ — множество точек, каждая из которых лежит на прямой, проходящей через a и некоторую точку $m \in M$, $m \neq a$.

Пусть $U \subset Y$. Будем говорить, что функция $\Phi : U \to Z$ удовлетворяет на множестве U *условию Липшица с постоянной* L, если для любых $y_1, y_2 \in U$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(y_2) - \Phi(y_1))\|_Z \leq L\,\|y_2 - y_1\|_Y\,.$$

Точную нижнюю границу постоянных L в этом неравенстве будем обозначать $\mathrm{Lip}(\Phi, U)$.

Теорема 1. *Пусть Y, Z — банаховы пространства, $B = B(y_0, r) \subset Y$ и $\Phi : B \to Z$ — ограниченное отображение, удовлетворяющее на B следующему условию: существует такое линейное непрерывное отображение $C \in \mathcal{L}(Z,Y)$ и постоянная q, $0 \leq q < 1$, что*

$$\mathrm{Lip}(C\Phi(y) - y, B) \leq q < 1.$$

Тогда, если для некоторого $y \in B$ множество $\pi(\Phi(y),\ \Phi(B))$ совпадает с пространством Z, то множество $\Phi(B)$ открыто и отображение Φ гомеоморфно отображает B на $\Phi(B)$. При этом отображения Φ и $\Phi^{-1} : \Phi(B) \to B$ удовлетворяют условию Липшица.

Пусть $U \subset Y$. Для ограниченной функции $\Phi : U \to Z$ полагаем

$$\omega\,(\Phi, U) = \inf_{C \in \mathcal{L}(Z,Y)} \mathrm{Lip}(C\Phi(y) - y, U).$$

Отметим, что для любой ограниченной на U функции $\Phi : U \to Z$ выполняется нравенство $\omega\,(\Phi, U) \leq 1$. Если точка $a \in U$, то $\omega\,(\Phi, a) = \lim\limits_{r \to 0+} \omega\,(\Phi, U \cap B(a,r))$. Пусть $\pi(\Phi, a) = \bigcap\limits_{0<r} \pi(\Phi(a),\ \Phi(U \cap B(a,r)))$.

Теорема 2. *Пусть Y, Z — банаховы пространства, $B = B(y_0, r) \subset Y$ и $\Phi : B \to Z$ — ограниченное отображение, которое в некоторой точке $a \in B$, удовлетворяет условиям $\omega\,(\Phi, a) < 1$ и $\pi(\Phi, a) = Z$. Тогда существует такой шар $U = B(a, r_1) \subset B$, что множество $\Phi(U)$ открыто и отображение Φ гомеоморфно отображает U на $\Phi(U)$. При этом отображения Φ и $\Phi^{-1} : \Phi(U) \to B$ удовлетворяют условию Липшица.*

Пусть $U \subset X$, $V \subset Y$ и $D = U \times V$. Будем говорить, что функция $\Phi : D \to Z$ удовлетворяет на множестве D *условию Липшица с постоянной* L, если для любых (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in D$ выполняется неравенство

$$\|\Phi(x_2, y_2) - \Phi(x_1, y_1))\|_Z \leq L\,(\|x_2 - x_1\|_X + \|y_2 - y_1\|_Y)\,.$$

Точную нижнюю границу постоянных L в этом неравенстве будем обозначать $\mathrm{Lip}(\Phi, D)$.

Теорема 3. *Пусть U — непустое подмножество пространства X, $B = B(y_0, r) \subset Y$. Полагаем $D = U \times B$ и пусть $\Phi : D \to Z$ — отображение, удовлетворяющее на D условию Липшица. Предположим, что существует такое линейное отображение $A \in \mathcal{L}(Z, Y)$ и постоянная q, $0 \leq q < 1$, что*

$$\|A(\Phi(x, y_2) - \Phi(x, y_1)) - (y_2 - y_1)\|_Y \leq \|y_2 - y_1\|_Y ,$$

для всех $(x, y_2), (x, y_1) \in D$. Если $\pi(\Phi(x, y),\ \Phi(x, B)) = Z$ хотя бы для одного $(x, y) \in D$, то для каждой точки $(a, b) \in D$ на множестве $U_\rho = B(a, \rho) \cap U$, $\rho = \dfrac{(1 - q)(r - \|b\|_Y)}{\|A\|\,\mathcal{L}ip(\Phi, D)}$, существует и единственно отображение $G : U_\rho \to B(b,\ r - \|b\|_Y)$, $G(a) = b$, которое для всех $x \in U_\rho$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi(x, G(x)) = \Phi(a, b).$$

Отображение G липшицево на U_ρ и $\mathrm{Lip}(G,\ U_\rho) \leq \dfrac{(r - \|b\|_Y)}{\rho}$.

В следующай теореме удается отказаться от условия $\pi(\Phi(y),\ \Phi(B)) = Z$. Обозначим через $\overline{\mathcal{L}_0\,(Z, Y)}$ замыкание множества тех $A \in \mathcal{L}\,(Z, Y)$, для которых $\ker A = \{\,0\} \subset Z$ и пусть $\mathcal{L}_0 = \overline{\mathcal{L}_0\,(Z, Y)} \cup \{0\}$, где $0 \in \mathcal{L}\,(Z, Y)$. Для липшицевой функции $\Phi : U \to Z$, $U \subset Y$, полагаем

$$\omega_0\,(\Phi, U) = \inf_{C \in \mathcal{L}_0} \mathrm{Lip}(C\Phi(y) - y, U).$$

Теорема 4. *Пусть Y, Z — банаховы пространства, $B = B(y_0, r) \subset Y$ и $\Phi : B \to Z$ — отображение, удовлетворяющее на B условию Липшица. Предположим, что $\omega_0\,(\Phi, B) < 1$. Тогда множество $\Phi(B)$ открыто и отображение Φ гомеоморфно отображает B на $\Phi(B)$. При этом отображение $\Phi^{-1} : \Phi(B) \to B$ удовлетворяет условию Липшица.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. Н.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.
3. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
4. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971. 392 с.
5. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. М.: Наука, 1988. 280 с.
6. *Krantz S. G., Parks H. R.* The Implicit Funtion Theorem: History, Theory and Applications. Boston, Bukhäuser, 2002. 164 p.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 434–435

УДК 515.125+517.550.2

КЛАССИФИКАЦИЯ СТРУН И ПУЧКОВ СТРУН ОБЛАСТЕЙ И ИХ ПОВЕДЕНИЕ ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЯХ

© А. П. Кармазин

kap@kpm.surgu.ru

Сургутский государственный университет, Сургут

В работе с помощью теории предконцов (см. [1]) дана классификация струн областей евклидова пространства R^n, $n \geq 2$. Понятия струны и полуструны области введены в [2]. В терминах отображений, гомеоморфизм $\alpha : (-1,1) \to D$ есть *струна* в области $D \subset R^n$ если его предельные множества $C(\alpha,1)$, $C(\alpha,-1)$ лежат на евклидовой границе ∂D области D; гомеоморфизм $\alpha : [-1,1) \to D$ есть *полуструна* в D, если $C(\alpha,1) \subset \partial D$. Нас будет интересовать классификация полуструн с точки зрения их асимптотического поведения при приближении к границе области. В основном в работе изучаются различные метрические характеристики асимптотического поведения полуструн. Отсюда возникает следующая терминология. Пусть D есть гомеоморфная шару область R^n, $\lambda_D(x,y)$ — некоторая внутренняя метрика в D. Тогда любую полуструну в метрическом пространстве (D,λ_D) называем λ-полуструной в D.

Сначала в работе дается первоначальная традиционная классификация λ-полуструн области. Рассматриваются множества спрямляемых и достижимых λ-полуструн из D, и изучается их поведение при λ-квазиизометриях областей. Под λ-*квазиизометрией* областей $D,G \subset R^n$ понимается гомеоморфизм $f : D \to G$, при котором метрики λ_D, λ_G областей D, G будут квазиинвариантны.

Последующая основная классификация λ-полуструн связана с различными множествами граничных элементов области D, к которым может сходиться рассматриваемая λ-полуструна. Говорим, что λ-полуструна $\alpha : [-1,1) \to D$ является *идеальной*, *главной*, *основной* или *общей* λ-полуструной в D, если она соответственно будет в первом случае — представителем некоторого элемента идеальной по М. Громову λ-границы области D (см. [1], [3]); во втором — образующей кривой некоторого простого λ-предконца области D (см. [1]); в третьем — сходиться к элементу $\varphi \in \Phi_0^\lambda[D]$ (см. [1]); и в четвертом — сходиться к некоторой λ-молекуле области D (см. [1]). Далее, две λ-полуструны какого-либо введенного выше типа называются *эквивалентными*, если они сходятся к одному и тому же соответствующему граничному элементу области. Изучены взаимосвязи между различными типами λ-полуструн и их поведение при λ-квазиизометриях областей. Устанавливается, что любая область D, гомеоморфная шару, секвенциально предкомпактна по множеству своих основных λ-полуструн, а любые два различных класса эквивалентных общих λ-полуструн отделимы друг от друга.

Затем в работе на основе понятия полного бруска области (см. [1]) вводится понятие λ-пучка главных λ-полуструн области. Определены три типа (эллиптических, параболических и гиперболических) λ-пучков области, в зависимости от того, какими свойствами обладает полный брусок, к которому сходятся представители данного λ-пучка. А именно, пусть P есть простой λ-конец области D (см. [1]), $\{q_k\}$ — цепь сечений области D, принадлежащая P, $\{d_k\}$ — соответствующая ей цепь подобластей из D. Говорим, что сечение σ области D *принадлежит* P, $\sigma \in P$, если оно разделяет некоторые два сечения из цепи $\{q_k\}$. В области D определим функцию:

$$h^\lambda(x,P) = \begin{cases} \lambda_D(q_1), x \in D \setminus d_1, \\ \inf\{\lambda_D(\sigma), x \in \sigma, \sigma \in P\}, x \in d_1. \end{cases}$$

Говорим, что λ-пучок Q области D является *эллиптическим*, если для любого его представителя $\alpha : [0,1) \to D$ будем иметь, что

$$\lim_{t\to 1} h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) = 0;$$

параболическим, если одновременно

$$\overline{\lim_{t\to 1}}\, h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) > 0, \quad \underline{\lim_{t\to 1}}\, h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) = 0;$$

и *гиперболическим*, если

$$\underline{\lim_{t\to 1}}\, h^{\lambda}(\alpha(t), P(\alpha)) > 0$$

(здесь $P(\alpha)$ есть простой λ-конец области D, индуцированный кривой α).

Наличие λ-пучка какого-либо типа позволяет судить о степени сложности строения рассматриваемой области, и дает возможность получить некоторую классификацию областей евклидова пространства. Определены семейства соответственно эллиптических, параболических и гиперболических областей R^n. Рассмотрены свойства λ-пучков различных типов. Показано, что λ-пучки и их типы инвариантны при λ-квазиизометриях областей, и что любые два различных λ-пучка области обязательно отделимы друг от друга. Описан класс областей, предкомпактных по множеству своих λ-пучков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кармазин А. П.* Квазиизометрии, теория предконцов и метрические структуры пространственных областей. Сургут: изд-во СурГУ, 2003. 210 с.
2. *Vaisala J.* Quasisimmetric maps of products of curvies into the plane // Revue Roumaine Mathematiques Pures et Appliqués. 1988. T. 33, N 1–2. P. 147–156.
3. *Кармазин А. П.* Множество предконцов и идеальная граница многообразия без края // Мат. заметки. 2002. Т. 71, вып. 4. С. 554–557.

УДК 517.54

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

© А. Н. Кондрашов

ankondr@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Пусть $D \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ — односвязная область, $z = x_1 + ix_2 \in D$, и $\mu(z)$ — комплекснозначная измеримая в D функция. Будем рассматривать уравнение Бельтрами

$$w_{\bar{z}} = \mu(z) w_z, \quad z \in D \tag{1}$$

где $w = u_1 + iu_2$.

Если

$$|\mu(z)| < 1 \ \text{ п.в.} \quad \text{в } D, \tag{2}$$

то при различных дополнительных ограничениях на μ известны (см., например, [1]) версии теоремы о существовании и единственности гомеоморфного в D решения уравнения (1). Что можно сказать о существовании и единственности решений уравнения Бельтрами, если условие (2) не выполняется: имеются точки в которых $|\mu(z)| < 1$ и точки в которых $|\mu(z)| > 1$?

Нами установлено следующее утверждение.

Теорема. *Если $\mu(z) : D \to \mathbb{C}$ — такова, что функция*

$$K(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{|1 - |\mu(z)||}$$

является локально $W^{1,2}$-мажорируемой в D, то существует гомеоморфизм $w : D \to w(D) = \mathcal{D} \subset \mathbb{C}$, т.ч.

1) $w \in W^{1,2}_{loc}(D)$ и $w^{-1} \in W^{1,2}_{loc}(\mathcal{D})$.

2) в подобластях где $|\mu(z)| < 1$, уравнению Бельтрами удовлетворяет $w(z)$, а в подобластях где $|\mu(z)| > 1$ ему удовлетворяет $\overline{w(z)}$.

Гомеоморфизм единственный с точностью до конформного отображения в w-плоскости.

Другие результаты об уравнениях Бельтрами переменного типа содержатся, например, в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Martio O., Miklyukov V.* On existence and uniqueness of degenerate Beltrami equation // Reports of the Department of Mathematics, University of Helsinki, Preprint 347. 2003. P. 1–12.
2. *Srebro U., Yakubov E.* Branched folded maps and alternating Beltrami equations // Journal d'analyse mathematique. 1996. V. 70. P. 65–90.

УДК 517.3

ПРИЗНАК СЮРЪЕКТИВНОСТИ СОБСТВЕННЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

© Д. С. Коновалова

dsk@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Исследуется разрешимость уравнений, заданных нелинейными непрерывными операторами, действующими в конечномерных пространствах H^n. Предполагается, что рассматриваемые нелинейные операторы являются собственными (для конечномерных пространств это означает, что образ неограниченной последовательности также является неограниченной последовательностью).

В данном сообщении представлены условия, при которых соответствующие отображения являются сюръективными. Более конкретно, получена следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $F : H^n \to H^n$ *— непрерывное отображение, обладающее следующими свойствами:*

(i) *существует замкнутый шар* $B_0(x_0, r) \subset H^n$ *такой, что сужение* $F|_{B_0}$ *— взаимно-однозначное отображение,*

(ii) B_0 *— полный прообраз множества* FB_0,

(iii) F *— собственное отображение.*

Тогда отображение F *сюръективно.*

Доказательство теоремы носит геометрический характер и проводится с использованием теоремы Брауэра об инвариантности областей при гомеоморфизмах, а также классических фактов математического анализа.

Замечание. Условия (i) – (ii) теоремы, фактически, означают требование единственности прообраза для каждого элемента множества FB_0. Незначительное изменение доказательства позволяет заменить это требование более слабым, а именно: каждый элемент множества FB_0 имеет *нечетное* количество прообразов. Это позволяет применить результат теоремы к более широкому классу отображений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке СО РАН (Междисциплинарный интеграционный проект № 48) и гранта поддержки ведущих научных школ России (НШ-7157.2006.1).

УДК 517.54

КОНКРЕТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ С СИММЕТРИЕЙ ПЕРЕНОСА

© Л. С. Копанева

copanev_d@mail.ru

Томский государственный университет, Томск

Н. И. Лобачевский при вычислении объема конкретных фигур в неевклидовой геометрии [1] использовал специальное отображение $L(x) = -\int\limits_0^x \ln\cos t\,dt$, носящее сегодня его имя. Продолжение отображения $f(x) = \ln\cos x$ с вещественной оси на верхнюю полуплоскость $\Pi = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ дает однолистное голоморфное отображение $w = f(z) = C_1 \ln\cos z + C_2$, у которого множество значений

$$f(\Pi) = \mathbb{C} \setminus \left(\bigcup_{k=0}^{\infty} \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = a + k\pi,\ -\infty < \operatorname{Im} w \le b\} \right)$$

есть область с симметрией переноса вдоль вещественной оси типа полуплоскости. Начиная с работы [2] ведется систематическое изучение класса однолистных голоморфных в Π отображений с симметрией переноса вдоль вещественной оси, т. е. обладающих свойством: $\exists t,\ T \in \mathbb{R}$ такие, что $f(x+kt) = f(z) + kT,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Кроме приведенного отображения на сегодня известны следующие конкретные элементарные отображения. Отображение (α) $f(z) = C_1\left(z - 2\ln\sin\left(\frac{z}{2} + a\right)\right) + C_2$, у которого $f(\Pi)$ есть плоскость с разрезами по параллельным лучам под углом θ к вещественной оси. Отображение (β) $f(z) = C_1\left(z + i\ln(1-\cos z)\right) + C_2$, у которого $f(\Pi)$ есть плоскость с исключенными замкнутыми областями $D_k = D + 2k\pi$, $\partial D = \{w \in \mathbb{C} : 2w = t + i\ln(1-\cos t),\ -2\pi < t < 0\}$. Отображение (γ) $f(z) = C_1 \arcsin\left(A\sin\frac{z}{2}\right) + C_2$, у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с разрезами по параллельным отрезкам, перпендикулярным вещественной оси. Отображение (δ)

$$f(z) = \left(\ln\left(\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2} - \sqrt{\sin z}\right) + \arcsin\left(\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}\right)\right) + C_2,$$

у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с добавленными равнобедренными треугольниками, имеющими общие вершины и углом при основании $\frac{\pi}{4}$.

Отображения (α) при $\theta = \frac{\pi}{4}$ и (β) получены с помощью уравнения типа Левнера для рассматриваемого класса [3]. Отображения (α) и (δ) получены с помощью формулы типа Кристоффеля – Шварца [4].

Следующие отображения являются новыми. Отображение

$$f(z) = C_1 \arccos\frac{1}{2}\left(\left(1+r^2\right)\cos\frac{z}{2} + \sqrt{\left(1+r^2\right)^2\cos^2\frac{z}{2} - 4r^2}\right) + C_2,$$

у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с исключенными замкнутыми областями $D_k = D + 2k\pi$, $\partial D = \left\{w \in \mathbb{C} : \cos\frac{z}{2} = re^{it},\ \pi \le t \le 3\pi\right\} \bigcup \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = b,\ |\operatorname{Re} w - \pi| \le 2\arccos r\}$.

Отображение $w = f(z)$, определяемое неявно равенством $\sqrt{\cos^2 w + a} = A + B\cos z$, у которого $f(\Pi)$ есть полуплоскость с разрезами по параллельным отрезкам разной длины, перпендикулярным вещественной оси.

Отображение (γ) и новые отображения получены с использованием принципа симметрии.

Константы определяются геометрией отображения и их можно подобрать так, чтобы $\lim\limits_{\operatorname{Im} z \to +\infty} (f(z) - z) = 0$ равномерно относительно $\operatorname{Re} z$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лобачевский Н. И.* Полное собрание сочинений, М.-Л., Гостехиздат, 1951. Т. 3
2. *Александров И. А.* Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса // Известия ВУЗов. Математика. 1999. № 6(445). С. 15–18.
3. *Копанева Л. С.* Параметрическое представление отображений с симметрией переноса // В сб. Исследования по математическому анализу и алгебре. Томск, 2001. С. 135–144.
4. *Копанев С. А., Копанева Л. С.* Формула типа Кристоффеля – Шварца для счетноугольника // Вестник ТГУ. Серия Математика. Кибернетика. Информатика. Томск, ТГУ. 2003. Т. 280. С. 52–54.

УДК 517.54

ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЁННЫХ МЕР В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА – РУБИНШТЕЙНА

© А. С. Кравченко

kravch@math.nsc.ru

Новосибирский государственный университет, Новосибирск

Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство и $Q(X)$ — линейное пространство сепарабельных (т.е. с сепарабельным носителем) счётно-аддитивных обобщённых мер (зарядов) ν, заданных на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$, таких, что $\nu(X) = 0$. Обозначим

$$\mathrm{lip}_1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \ |f(x) - f(y)| \le \rho(x, y) \text{ для всех } x, y \in X\}.$$

Для каждой обобщённой меры $\nu \in Q(X)$ рассмотрим супремум

$$K(\nu) = \sup\left\{\int_X f\,d\nu : \ f \in \mathrm{lip}_1(X)\right\}.$$

Определим $\mathcal{M}(X)$ как множество таких обобщённых мер ν из $Q(X)$, для которых значение $K(\nu)$ определено и конечно и $|\nu|(X) \le 1$. Множество $\mathcal{M}(X)$ является метрическим пространством с метрикой Канторовича [2]: $\rho_K(\nu, \mu) = K(\nu - \mu)$. Данная метрика имеет важное значение в теории самоподобных фракталов (см. [1, 3]).

Теорема. *Метрическое пространство $\mathcal{M}(X)$ — полно.*

Данная теорема обобщает основной результат работы [3] на множество зарядов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hutchinson J.* Fractals and Self Similarity // Indiana Univ. Math. Journal. 1981. V. 30, № 5. P. 713–747.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984. 752 с.
3. *Кравченко А. С.* Полнота пространства сепарабельных мер в метрике Канторовича – Хатчинсона // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 85–96.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 441–442

УДК 517.53

СИММЕТРИЯ СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ПОТЕНЦИАЛА ДВОЙНОГО СЛОЯ

© В. Н. Кутрунов

vkutrunov@utmn.ru

Тюменский государственный университет, Тюмень

В работе [1], был введён кватернионный интегральный оператор оператор A по правилу

$$A\,(p) = \pi^{-1}\int_l h n_x p\,(x)\,dl_x,\ y \in l,$$

где l — граница некоторой плоской области S, n_x — внешняя нормаль в точке x границы l, $h = \nabla_x ln|r|$, $|r| = |x - y|$, $x, y \in l$. Здесь в представлениях нормали и градиента вместо ортов декартова базиса стоят мнимые единицы кватернионов и все арифметические операции выполняются по правилам операций с кватернионами. В рассматриваемом плоском случае будет рассматриваться кватернионная гёльдеровская функция двух переменных $p(x_1, x_2) = q_0(x_1, x_2) + e_1 q_1(x_1, x_2) + e_2 q_2(x_1, x_2) + e_3 q_3(x_1, x_2)$, где e_i — мнимые единицы, а q_0, q_i — действительная и мнимые части кватернионной функции $p(x)$. Доказывается кватернионное тождество

$$A^2 p = p$$

Вводятся интегральные операторы B, C, D, F по правилу

$$Bq_0 = \pi^{-1}\int\limits_l q_0 h\cdot n_x dl_x,\ Cq_0 = \pi^{-1}\int\limits_l q_0 h\times n_x dl_x$$

$$Dq = \pi^{-1}\int\limits_l [-qh\cdot n_x + (h\times n_x)\times q] dl_x,\ Fq = \pi^{-1}\int\limits_l q\cdot(h\times n) dl_x$$

где $(\cdot)$, $(\times)$ — скалярное и векторное произведения и $q_0(x)$, $q(x)$ интерпретируются как произвольные скалярная и векторная гёльдеровские функции, заданные на l. Тогда записанное тождество можно представить в виде четырёх интегральных тождеств:

$$B^2 q_0 - FCq_0 = q_0,\ BFq - FDq = 0,\ -CBq_0 + DCq_0 = 0,\ -CFq + D^2 q = q$$

В случае $y \overline{\in} l$, оператор B известен как потенциал двойного слоя. Используя эти тождества и структуру операторов B, C, D, F, можно доказать следующие теоремы:

Теорема 1. *За исключением $\lambda = \pm 1$ собственные числа оператора D совпадают с собственными числами оператора потенциала двойного слоя B. Собственные функции взаимно пересчитываются с помощью равенств*

$$(Dq = \lambda q,\ By = \lambda y),\ Cy = (\lambda^2 - 1)q,\ Fq = y.$$

Теорема 2. *За исключением точек $\lambda = \pm 1$ собственные числа операторов B, D симметричны относительно нуля. Собственные функции φ, φ^*, соответствующие собственным числам λ и $-\lambda$ оператора B, связаны соотношением $\varphi = k\cdot C\varphi^*$, где $k-$ единичный вектор, ортогональный области S. Собственные функции ψ, ψ^*, оператора D, соответствующие собственным числам λ, $-\lambda$ связаны соотношением $\psi = C(k\cdot\psi^*)$.*

Теорема 3. *На классе гёльдеровских функций спектр оператора D действительный, состоит из собственных чисел конечной кратности $\pm\lambda$, $|\lambda| < 1$ и собственных чисел ± 1, являющихся точками бесконечной кратности, может иметь единственную точку сгущения, равную нулю.*

Отметим также, что кроме теоретического интереса, утверждение о симметрии спектра потенциала двойного слоя представляет практический интерес. Существует итерационные методы Чебышевского типа (см. [4, 5]), которые можно применять для решения интегральных уравнений теории потенциала. В этих методах требуется знать две границы спектра. В случае плоских областей достаточно находить лишь одну границу. Перечисленные теоремы иллюстрируют также эффективность применения рассмотренных здесь тождеств. Другие применения этих тождеств (в том числе в пространственном случае) даны в работах [1, 2, 3, 6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кутрунов В. Н.* Кватернионный метод регуляризации интегральных уравнений теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 5. С. 864–868.
2. *Кутрунов В. Н., Курята З. С.* Некоторые интегральные тождества математической физики // Вестник ТюмГУ. 1998. № 2. С. 34–41.
3. *Кутрунов В. Н., Курята З. С.* Интегральные уравнения векторного поля // Известия вузов, сер. математика. 1999. № 6. С. 33–36.
4. *Лебедев В. И.* Чебышевские итерационные методы // В кн. Пашковский С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983. 384 с.
5. *Кутрунов В. Н.* Полином наилучшего равномерного приближения в итерационном методе решения линейных алгебраических уравнений // Сибирский математический журнал. 1992. Т. 33, № 1. С. 21–29.
6. *Кутрунов В. Н., Кутрунова З. С.* Интегральные тождества теории упругости и регуляризация сингулярных интегральных уравнений // Упругость и неупругость. Материалы Международного научного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвящённого девяностопятилетию со дня рождения А. А. Ильюшина. (Москва, 19–20 января 2006 г.). М.: ЛЕНАНД. С. 343–350.

УДК 517.548.2

КОЭФФИЦИЕНТ БЕЛЬТРАМИ, МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© Т. Г. Латфуллин

tlatfullin@yandex.ru

Тюменский государственный университет, Тюмень

Пусть $D=\{|z|\leq 1\}$ единичный круг комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и $f:D\to\mathbb{C}$ дифференцируемое (в смысле $\mathbb{R}^2$) отображение. Если $dz=dx+idy$, $d\overline{z}=dx-idy$, то дифференциал f имеет представление

$$df(z)=f_z(z)dz+f_{\overline{z}}(z)d\overline{z},$$

где $f_z=(1/2)(f_x-if_y)$, $f_{\overline{z}}=(1/2)(f_x+if_y)$.

Гомеоморфизм $f:D\to\mathbb{C}$, сохраняющий ориентацию, называется квазиконформным, если он принадлежит соболевскому классу W_2^1 локально в круге D и существует измеримая функция $\mu:D\to\mathbb{C}$, $|\mu(z)|\leq q<1$, такая, что в точках, где определены f_z и $f_{\overline{z}}$ выполнено

$$f_{\overline{z}}(z)=\mu(z)f_z(z). \tag{1}$$

Уравнение (1) называется уравнением Бельтрами, а функция μ комплексной характеристикой отображения f [1], [2] (или коэффициентом Бельтрами). Для любого коэффициента Бельтрами μ существует гомеоморфизм круга D на себя, удовлетворяющий уравнению (1), (см., например [1], [2]).

Определение. Пусть $f:D\to D$ квазиконформный гомеоморфизм, удовлетворяющий уравнению (1). Для точек z_1, z_2 из D определим расстояние

$$\rho(z_1,z_2)=\inf\int\limits_{\gamma}|dz+\mu(z)dz|,$$

где точная нижняя грань берется по всем спрямляемым кривым, соединяющим z_1 и z_2 в D.

Утверждение 1. *Тождественное отображение круга D является квазиизометрическим отображением евклидова круга D на метрическое пространство (D,ρ).*

Утверждение 2. *Существует почти всюду конформный гомеоморфизм круга D на метрическое пространство (D,ρ).*

Доказательство. Отображение f^{-1}, обратное к f, квазиконформно, поэтому дифференцируемо почти всюду. Пусть w – точка дифференцируемости f^{-1}. Через φ обозначим гомеоморфизм D на (D,ρ) утверждения 1. Тогда композиция $\varphi\circ f^{-1}$ переводит бесконечно малый круг с центром в точке w в бесконечно малый круг метрического пространства (D,ρ).

Вывод. Любому коэффициенту Бельтрами соответствует единственное метрическое пространство (D,ρ), также как соответствует единственный нормированный квазиконформный гомеоморфизм [1]. Это означает, что информацию о поведении решения уравнения (1) можно получить исследуя соответствующее метрическое пространство.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 512 с.
2. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969. 135 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 444–445

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЕ НА СЛУЧАЙ ПОЛУОСИ НЕРАВЕНСТВА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

© В. Г. Лежнев

lzhnv@mail.kubsu.ru

Кубанский государственный университет, Краснодар

Множество целых функций $F(z)$, $z = x + iy$, экспоненциального типа (т. е. таких, что

$$|F(z)| \le C\exp(\sigma|z|)$$

для некоторого $\sigma > 0$), ограниченных на вещественной оси, обозначим через B_σ.

Неравенством Бернштейна для целых функций называется следующее утверждение [1]: если $F(z) \in B_\sigma$, то

$$|F'(x)| \le \sigma \sup|F(x)|, \quad -\infty < x < \infty.$$

Известны различные обобщения этого утверждения ([1–4]), мы рассмотрим естественный подкласс ограниченных на полуоси функций из B_σ.

Обозначим через B_σ^+ множество целых функций экспоненциального типа $\le \sigma$, ограниченных на полуоси $\{z = x + iy : \ x > 0, \ y = 0\}$. Докажем отдельно следующее утверждение.

Теорема 1. *Если* $F(z) \in B_\sigma^+$, *то* $F'(x) \in B_\sigma^+$.

Доказательство. Пусть $f(s)$ — преобразование Бореля функции $F(z)$ [5], f аналитична в круге $\{s : |s| > \sigma\}$, и выполняется равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(s)e^{zs}ds,$$

где L — окружность радиуса $R > \sigma$ с центром в начале координат, с положительным направлением обхода. Пусть

$$L^+ = L \cap \{s : \operatorname{Re} s \ge 0\}, \;\; L^- = L \cap \{s : \operatorname{Re} s \le 0\}$$

— правая и левая полуокружности, $L = L^+ \cup L^-$, и пусть

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} f(s)e^{zs}ds.$$

Функция $f(s)$ непрерывна на L, следовательно, $F_1(z)$ и

$$F_1'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^-} sf(s)e^{zs}ds$$

ограничены при $z = x > 0$.

Функция

$$F_2(z) := F(z) - F_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L^+} f(s)e^{zs}ds$$

есть целая функция экспоненциального типа не выше σ. Как и выше, получаем, что $F_2(z)$ ограничена при $z = x < 0$. По условию леммы $F(z)$, а вместе с ней и $F_2(z)$, ограничены при $z = x > 0$, т. е. функция $F_2(z)$ ограничена на вещественной оси, а следовательно, по неравенству Бернштейна, и функция $F_2'(z)$. Теорема доказана.

Для доказательства равномерной в B_σ^+ оценки используются результаты и построения Л. Ф. Леонтьева [6].

Теорема 2. *Если* $F(z) \in B_\sigma^+$ *, то*

$$|F'(x)| \leq C(\sigma) \sup |F(x)|, \quad x \geq 0,$$

где постоянная $C(\sigma)$ *не зависит от* F *.*

Отметим, что если $F(z)$ — целая функция порядка $1/2$ типа $\leq \sigma$ и $|F(x)| \leq M$ при $x \geq 0$, то ([1, с. 351])

$$|F'(x)| \leq \frac{1}{2}\sigma^2 M, \quad x \geq 0.$$

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 06-01-96648.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. М., 1947.
2. *Ахиезер Н. И., Левин Б. Я.* Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 1957. Т. 117, № 3. С. 735–738.
3. *Бари Н. К.* Обобщения неравенств Бернштейна и Маркова // ДАН СССР. 1953. Т. 90, № 5.
4. *Иванов В. И.* Некоторые неравенства для тригонометрических полиномов и их производных // Матем. заметки. 1975. Т. 18, № 4. С. 489–498.
5. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М., 1967.
6. *Леонтьев Л. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 446–447

УДК 517.54

О ПОРЯДКЕ РОСТА ОТОБРАЖЕНИЙ С S-СУММИРУЕМОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

© А. Н. Малютина

ndm@main.tusur.ru

Томский государственный университет, Томск

Приведем примеры, которые показывают, что класс отображений с s-суммируемой характеристикой [1] не пуст и шире класса отображений с ограниченным искажением [2,3] и класса с ограниченным в среднем искажением.

Пример 1. В пространстве R^3 рассмотрим тор D, точки $x=(x_1,x_2,x_3)$ которого удовлетворяют условиям $|x_1|<1, |x_2|<1, |x_3|<1$, $x_1=(R+r\cos\Theta)\cos\varphi$, $x_2=(R+r\cos\Theta)\sin\varphi$, $x_3=r\sin\Theta$; здесь $0\le\varphi<2\pi$, $0\le\Theta<2\pi$, $0<r<R$, $R<1$.

В области D зададим отображение $f:(r,\varphi,\Theta)\to(r,\varphi,r^p\Theta)$, где p — отрицательное число. Легко показать, что для чисел $\alpha>0$, $\beta>0$ существует число $0>p>\max\{-(2\beta)^{-1},-(1+\alpha)^{-1}\}$, для которого одновременно конечны интегралы вида $\int\limits_D k_I^\alpha(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x<\infty$, $\int\limits_D k_O^\beta(x,f)d\sigma_x<\infty$. Ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места.

Пример 2. Пусть $D=\{x\in R^3: 0<x_1<\infty,\quad 0<x_2<x_1^2,\quad 0<x_3<1\}$.

Рассмотрим отображение: $f(x)=\{y\in R^3: y_1=x_1,\quad y_2=\frac{x_2}{x_1},\quad y_3=x_1^{1-\alpha}x_3\}$, которое отображает область D на область $D^*=\{y\in R^3: 0<y_1<\infty,\quad y_2<y_1,\quad 0<y_3<y_1^{1-\alpha}\}$.

Отображение f является отображением с s-суммируемой характеристикой при $s>0$, $\alpha\ge 1,5$.

Теорема 1. *Пусть $f:D\to R^n$ — отображение с s-суммируемой характеристикой. Тогда выполняется неравенство $M(\Gamma^*)\le\inf\limits_{\rho\wedge\Gamma}\int\limits_D(\rho(x))^nK_I(x,f)d\sigma_x$, где Γ — некоторое семейство кривых в области D, Γ^* — образ Γ при отображении f.*

Нами установлена оценка искажения расстояний $|f(x)-f(x_0)|$ при стремлении x к изолированной точке x_0.

Теорема 2. *Пусть $f:D\to D^*$ — отображение с s-суммируемой характеристикой. Тогда для точки $x\in B^n(x_0,d)$, $d=\rho(x_0,\partial D)$, справедлива оценка $|f(x)-f(x_0)|\le\lambda R^*e^{-t(x,x_0)}$, где $R^*=R(f(x_0),f[B^n(x_0,d)])$, $R(x,A)=\sup\limits_{y\in A}|x-y|$, λ — некоторая величина, зависящая только от n, $t(x,x_0)=\left[\omega_{n-1}^{-1}\cdot n^{\frac{n(n-1)}{2}}\int\limits_D r^n(|x-x_0|,y)K_I(y,f)d\sigma_x\right]^{\frac{1}{1-n}}$ и $r(t,y)$ — произвольная функция, допустимая для семейства $\Gamma([0,t],S^n(s_0,d);B^n(x_0,d))$, $0<t<d$.*

В [4] рассматривается поведение отображений квазиконформных в среднем в изолированной особой точке. В теореме 3 устанавливается порядок роста отображений с s-суммируемой характеристикой в окрестности изолированной особой точки.

Теорема 3. *Пусть f — отображение с s-суммируемой характристикой шара B^n на себя, $f(0)=0$ и $\operatorname{vrai\,max}\limits_{x\in S(x_0,t)\bigcap D}K_I(x,f)\le\left(\ln\frac{c}{t}\right)^{\alpha(n-1)}$, где $0<\alpha<1$, $0<t<1$, постоянная $c\ge e$. Тогда $|f(x)|\le\lambda|x|^{g(c,|x|)}$, где $g(c,t)=n^{-\frac{n}{2}}\left[\beta((\ln ct^{-1})^\beta-(\ln c)^\beta)^{-1}\ln t^{-1}\right]^{\frac{1}{n-1}}$, $\beta=\alpha(n-1)+1$.*

Построен пример, показывающий, что порядок стремления к нулю функции $g(c,t)$ при $t\to 0$ в теореме 3 увеличить нельзя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малютина А. Н., Кривошеева И. И.,Баталова Н. Н.* Искажение сферического модуля семейства кривых. // Издание Томского государственного университета. 2001. № 3. С. 189–193.
2. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск, 1970. 39 с.
3. *Vaisala Ju.* Lectures on N-dimentional quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. A1. 1965. V. 362. P. 1–12.
4. *Стругов Ю. Ф.* Отображения, квазиконформные в среднем. Новосибирск, 1979. 39 с. Препринт АН СССР, Сиб. отд. ин-та математики.

УДК 517.53:517.947.42

К ТЕОРЕМЕ РИМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ОДНОЙ И ДВУМЯ ПАРАМИ ХАРАКТЕРИСТИК

© В. М. Миклюков

miklyuk@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Рассматривается проблема существования и единственности вырождающихся квазиконформных отображений с одной и двумя парами характеристик одной плоской области на другую. Формулируются нерешенные задачи.

1. Относительно невырожденного случая постановку задачи и основные результаты см. у М. А. Лаврентьева [1] и И. Н. Векуа [2]. Здесь имеются практически исчерпывающие результаты.

В случае вырождающихся квазиконформных отображений с двумя парами характеристик проблема изучена весьма недостаточно. Здесь оказываются определяющими связи скорости вырождения характеристик вблизи границы с конфигурациями областей. Первые результаты в указанном направлении можно найти у Г. Д. Суворова [3, §7 главы III].

Для вырождающихся квазиконформных отображений с одной парой характеристик ситуация несколько проще, хотя также не прояснена до конца. Установлены существование и единственность отображений с $W^{1,2}$-мажорируемой характеристикой $p(z)$, что влечет, в частности, существование и единственность изотермических координат на негладких поверхностях класса $W^{2,2}$ (см. [4, глава 3]). Вместе с тем полного описания $W^{1,2}$-мажорируемых функций в настоящее время не имеется.

2. В докладе приводятся теоремы о существовании и несуществовании вырождающихся квазиконформных отображений с двумя парами характеристик одной плоской области на другую, обобщающие и усиливающие соответствующие результаты из [5]. Приведем типичный результат.

Пусть $D, \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ — области в $z = (x, y)$ и $w = (u, v)$ плоскостях соответственно. Рассмотрим задачу о справедливости теоремы Римана для системы

$$a\,u_x + b\,u_y = v_y, \quad c\,u_x + d\,u_y = -v_x\,. \tag{1}$$

Предполагается, что

$$\operatorname*{ess\,inf}_{D'} \big(ad - (b+c)^2/4\big) > 0 \quad \text{для всякой подобласти} \quad D' \Subset D. \tag{2}$$

Символом $\tilde{\partial} D$ будем обозначать границу D в расширенной плоскости $\tilde{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Зафиксируем множество $\Gamma \subset \tilde{\partial} D$ и локально липшицеву функцию $h : D \to \mathbb{R}$ со свойствами: 1) $\lim_{z\to\Gamma} h(z) = 0$; 2) для произвольной подобласти $D' \Subset D$ выполнено

$$0 < \operatorname{ess\,inf}_{D'} |\nabla h(z)| \le \operatorname{ess\,sup}_{D'} |\nabla h(z)| < \infty\,.$$

Пусть $E_t = \{z \in D : h(z) = t\}$. Положим

$$w(\Gamma) = \{w \in \tilde{\partial}\mathcal{D} :\ \exists\ \ z_n \in D,\, z_n \to \Gamma\, \text{так, что}\ w(z_n) \to w\}.$$

Ясно, что если дуга $\Gamma \subset \partial D$ связна и граница ∂D является простой жордановой кривой, то $w(\Gamma)$ также связна.

Пусть $\mathcal{D}$ — произвольная подобласть (u,v)-плоскости. Множество $L \subset \tilde{\partial}\mathcal{D}$ назовем u-*разветвленным*, если найдутся как минимум две точки $w' = (u', v')$, $w'' = (u', v'') \in L$ такие, что отрезок

$$l = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = u',\, v' < v < v''\} \quad \text{лежит в} \quad \mathcal{D}$$

и отделяет от $\tilde{\partial}D \setminus L$ некоторую подобласть $U \subset \mathcal{D}$, граница которой $\tilde{\partial}U \subset \bar{l} \cup L$.

К примеру, пусть $\mathcal{D}$ — круг и $\partial\mathcal{D}$ — ограничивающая его окружность. Тогда правая и левая полуокружности суть u-разветвленные, а верхняя и нижняя полуокружности не являются u-разветвленными.

Теорема. *Предположим, что* $\mathcal{D}$ *есть подобласть полуплоскости* $\{(u,v) : |u| < M\}$, *где* $0 < M < \infty$ *— постоянная. Предположим, что* $\Gamma \subset \tilde{\partial}D$ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0 dt \left(\int\limits_{D\cap E_t} (a+d)\frac{ad-bc}{\Delta}\,|\nabla h|\, d\mathcal{H}^1(E_t) \right)^{-1} = \infty\,, \quad \Delta = ad - \left(\frac{b+c}{2}\right)^2,$$

и $L \subset \tilde{\partial}\mathcal{D}$ *является* u*-разветвленной. Тогда не существует* $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$ *решений* $w = w(z)$ *системы* (1)–(2), *осуществляющих гомеоморфное отображение* D *на* $\mathcal{D}$ *такое, что* $w(\Gamma) \supset L$.

Доказательство опирается на специальный принцип максимума для решений эллиптических уравнений с сильным вырождением вблизи границы, аналогичный соответствущему утверждению в [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. А.* Общая задача теории квазиконформных отображений плоских областей // Матем. сб. 1947. Т. 21. С. 285–320.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: ГИФМЛ, 1959. 628 с.
3. *Суворов Г. Д.* Обобщенный "принцип длины и площади" в теории отображений. Киев: Наукова думка, 1985. 280 с.
4. *Миклюков Г. Д.* Конформное отображение нерегулярной поверхности и его применения. Волгоград: изд-во ВолГУ, 2005. 273 с.
5. *Martio O., Miklyukov V. M., and Vuorinen M.* Some remarks on an existence problem for degenerate elliptic systems // Proc. Amer. Math. Soc. 2004. V. 133, N 5. P. 1451–1458.
6. *Martio O., Miklyukov V. M., and Vuorinen M.* Functions monotone close to boundary // Tohoku Mathematical Journal. 2005. V. 57, N 4. P. 605–621.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 450–451

УДК 515.12

О СОВЕРШЕННЫХ ТРУБЧАТО (О-С)-МОРФИЗМАХ ТРУБЧАТО (СЛАБО) П-ПОЛНЫХ И ТРУБЧАТО (СЛАБО) СУПЕРПАРАКОМПАКТНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

© Д. К. Мусаев, С. Д. Мусаева

davlatali52@mail.ru

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Всюду ниже под пространством понимается топологическое пространство, под отображением — непрерывное отображение пространств.

Для системы $\omega = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств пространства X и $M \subseteq X$ считаем $\cup\omega = \cup\{O_\alpha : \alpha \in A\}$; $[\omega] = [\omega]_X = \{[O_\alpha]_X : \alpha \in A\}$.

Относительно (максимальной) бикомпактификации ($\beta f : \beta_f X \to Y$) $bf : b_f X \to Y$ тихоновского отображения [1] и ее нароста ($R_\beta X = R_{\beta X} X = \beta_f X \setminus X$) $R_b X = R_{bX} X = b_f X \setminus X$ сошлемся на [1].

Напомним основные для данной работы определения.

Определение 1 [2]. Для пространства X, его подпространства A и множества $B \subset X \setminus A$ (точки $x \in X \setminus A$) будем говорить, что покрытие λ пространства A выкалывает множество B (точку x) в X, если $B \cap (\cup[\lambda]_X) = \emptyset$ ($x \notin \cup[\lambda]_X$).

Определение 2 [2]. Тихоновское отображение $f : X \to Y$ назовем

1) (τ -) суперпаракомпактным (соответственно слабо (τ -) суперпаракомпактным), если для любого замкнутого в $\beta_f X$ множества $F \subseteq \beta_f X \setminus X$ найдется открыто-замкнутое дизъюнктное (соответственно открыто-замкнутое) τ -покрытие пространства X, выкалывающее множество F в $\beta_f X$;

2) трубчато (τ -) суперпаракомпактным (соответственно трубчато слабо (τ -) суперпаракомпактным), если для любого замкнутого $\beta_f X$ множества $F \subseteq \beta_f X \setminus X$ у каждой точки $y \in (\beta f)F$ существуют такая окрестность Oy в Y и открыто-замкнутое дизъюнктное (соответственно открыто-замкнутое) τ -покрытие трубки $f^{-1}Oy$, выкалывающее множество F в $(\beta f)^{-1}Oy$;

3) (τ -) П-полным (соответственно слабо (τ -) П-полным), если для любой точки $x \in R_\beta X$ найдется открыто-замкнутое дизъюнктное (соответственно открыто-замкнутое) τ -покрытие пространства X, выкалывающее точку x в $\beta_f X$;

4) трубчато (τ -) П-полным (соответственно трубчато слабо (τ -) П-полным), если для любой точки $x \in R_\beta X$ найдутся окрестность O точки $\beta f(x)$ и открыто-замкнутое дизъюнктное (соответственно открыто-замкнутое) τ -покрытие трубки $f^{-1}O$, выкалывающее точку x в $(\beta f)^{-1}O$.

Определение 3. Морфизм [3] $\varphi : f \to g$ назовем (трубчато) (О-С)-морфизмом отображения $f : X \to Y$ в отображение $g : Z \to Y$, если $\varphi : X \to Z$ является (трубчато) (О-С) отображением (см. [4, опр.7]).

Заметим, что любой сюръективный совершенный и монотонный [2] морфизм $\varphi : f \to g$ отображений $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$ является трубчато (О-С)-морфизмом, следовательно, и (О-С)-морфизмом отображений $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$. Обратное, вообще говоря, не верно.

Предложение. *Если морфизм $\varphi : f \to g$ тихоновских отображений $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$ является совершенным (трубчато) (О-С)-морфизмом, то продолжающий [1] его морфизм $\tilde{\varphi} : \beta f \to \beta g$ также является совершенным (трубчато) (О-С)-морфизмом.*

Теорема 1. *Пусть сюръективный морфизм $\varphi : f \to g$ тихоновских отображений $f : X \to Y$ и $g : Z \to Y$ является: а) совершенным (О-С)-морфизмом; б) совершенным (трубчато) (О-С)-морфизмом. Тогда: а) если f — (слабо) П-полно, то и отображение g — (слабо) П-полно; б) если f — трубчато (слабо) П-полно, то и отображение g — трубчато (слабо) П-полно.*

Из теоремы 1 в случае одноточечного пространства Y вытекает

Следствие. *Если f — совершенное (О-С)-отображение (слабо) П-полного пространства X на тихоновское пространство Y, то Y (слабо) П-полно.*

Теорема 1 является обобщением предложения 4 из [2].

Теорема 2. *Пусть имеем отображение $f : X \to Y$.*
а) отображение f (τ-) суперпаракомпактно, слабо (τ-) суперпаракомпактно, если, соответственно, таким же является пространство X, и пространство Y хаусдорфово; б) пространство X является (τ-) суперпаракомпактным, слабо (τ-) суперпаракомпактным, если, соответственно, такими же являются пространство Y и отображение f.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пасынков Б. А.* О распространении на отображения некоторых понятий и утверждений, касающихся пространств // Отображения и функторы. М.: Изд-во МГУ, 1984. С. 72–102.
2. *Мусаев Д. К.* О характеризации полных отображений посредством морфизмов в нульмерные // Мат. труды. 2004. Т. 7, № 2. С. 72–97.
3. *Мусаев Д. К., Пасынков Б. А.* О свойствах компактности и полноты топологических пространств и непрерывных отображений. Ташкент: ФАН, 1994.
4. *Мусаев Д. К.* Бикомпактность полных отображений и ее связи с различными видами несвязностей непрерывных отображений // Мат. труды. 2005. Т. 8, № 2. С. 184–198.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 452–453

УДК 517.9

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ТИПА ХАРДИ

© М. Г. Насырова

nassm@mail.ru

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск

Пусть на $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ заданы σ-конечные неотрицательные меры λ, μ и ν. Для фиксированных параметра p, $1 < p < \infty$, и меры λ лебегово пространство $L_{p,\lambda}$ определяется как множество всех λ-измеримых функций $f = f(x)$ на $\mathbb{R}_+$, для которых $\|f\|_{p,\lambda} := \left(\int_{[0,\infty)} |f(x)|^p \, d\lambda(x)\right)^{1/p} < \infty$.

Пусть функция $k_1(x,y)$ измерима по мере $\nu \times \lambda$, а $k_2(x,y)$ измерима по мере $\mu \times \nu$. Будем также считать, что функции $k_i(x,y)$, $i = 1,2$, удовлетворяют условию Ойнарова, т. е. для них выполнено

$$\begin{array}{ll} i) & k_i(x,y) \ge 0, \\ ii) & D^{-1}(k_i(x,z) + k_i(z,y)) \le k_i(x,y) \le D(k_i(x,z) + k_i(z,y)), \quad x \ge z \ge y \ge 0. \end{array}$$

Определим интегральные операторы

$$K_1 f(x) := \int_{[0,x]} k_1(x,y) f(y) d\lambda(y) \quad \text{и} \quad K_2 f(x) := \int_{[0,x]} k_2(x,y) f(y) d\nu(y),$$

а также композицию

$$K f(x) := K_2(K_1 f(x)) = \int_{[0,x]} k(x,y) f(y) d\lambda(y),$$

где новое ядро определено как

$$k(x,y) := \int_{[y,x]} k_2(x,s) k_1(s,y) d\nu(s).$$

Оператор K не удовлетворяет условию Ойнарова. Поэтому, используя характеризацию для операторов с ядрами Ойнарова (соответствующие результаты в весовом случае, полученные Р. Ойнаровым, В. Д. Степановым приведены, например, в [1]), доказана

Теорема. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Неравенство типа Харди*

$$\|Kf\|_{q,\mu} \le C \|f\|_{p,\lambda}$$

выполнено для всех неотрицательных $f \in L_{p,\lambda}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} < \infty$. Более того, $C \approx \mathbb{A}$, где

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{A}_3 + \mathbb{A}_4;$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_1 &:= \sup_{t \ge 0} \left(\int_{[t,\infty)} k(x,t)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \left(\int_{[0,t]} d\lambda\right)^{1/p'}; \\
\mathbb{A}_2 &:= \sup_{t \ge 0} \left(\int_{[t,\infty)} \left(\int_{[t,x]} k_2(x,s) d\nu(s)\right)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \left(\int_{[0,t]} k_1(t,y)^{p'} d\lambda(y)\right)^{1/p'}; \\
\mathbb{A}_3 &:= \sup_{t \ge 0} \left(\int_{[t,\infty)} k_2(x,t)^q d\mu(x)\right)^{1/q} \left(\int_{[0,t]} \left(\int_{[y,t]} k_1(s,y) d\nu(s)\right)^{p'} d\lambda(y)\right)^{1/p'}; \\
\mathbb{A}_4 &:= \sup_{t \ge 0} \left(\int_{[t,\infty)} d\mu\right)^{1/q} \left(\int_{[0,t]} k(t,y)^{p'} d\lambda(y)\right)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Также получены приложения этой теоремы к оценке нормы функции через норму ее k-й "весовой" производной и аналогичный результат для соотношения параметров $1 < q < p < \infty$ в случае абсолютно непрерывных мер. Представленная работа обощает результаты статьи [2].

Работа выполнена при поддержке гранта ДВО РАН № 06-III-A-01-003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kufner A. and Persson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type // World Scientific. Singapore. 2003.
2. *Калыбай А. А.* Обобщение весового неравенства Харди для одного класса интегральных операторов // Сибирский митематический журнал. 2004. Т. 45, № 1. С. 119–133.
3. *Прохоров Д. В.* Неравенство Харди с тремя мерами // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2006. Т. 255. С. 233–245.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 454–455

УДК 517.982.2

ДИСКРЕТНАЯ НОРМА ДЛЯ СЛЕДА ПРОСТРАНСТВА W_p^2 В ЛИПШИЦЕВОЙ ОБЛАСТИ

© **А. И. Парфёнов**

pai79@sibmail.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $N = n+1$, $\omega = [0,1]^n$, $\mathring{\omega}$ — внутренность ω, и дана липшицева функция $f : \mathring{\omega} \to \mathbb{R}$. В липшицевой области

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^N \colon x' \in \mathring{\omega}, f(x') < x_N < f(x') + 2\right\}, \quad x = (x', x_N),$$

рассмотрим пространство Соболева $W_p^2(\Omega)$, где $1 < p < \infty$. Через $\mathrm{tr}\, v$ ($\in L_1(\mathring{\omega})$) обозначим след функции $v \in W_p^2(\Omega)$ на поверхности $\{x_N = f(x')\}$, записанный через x'. Он определяется условием "$\mathrm{tr}\, v(\xi) = v(\xi^\uparrow)$ при $\xi \in \mathring{\omega}$ на функциях $v \in C(\overline{\Omega})$", где $\xi^\uparrow = (\xi, f(\xi)) \in \mathbb{R}^N$, и требованием непрерывности оператора tr.

Пространство $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ естественно нормировать так:

$$\|u\| = \inf_{v \in W_p^2 : \mathrm{tr}\, v = u} \|v\|_{W_p^2}.$$

Пусть $p > N/2$, так что $W_p^2(\Omega)$ и $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ состоят из непрерывных функций. Наша цель — представить эквивалентную норму в $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$, принимающую в расчет значения функции только в "диадических" точках — точках с двоично-рациональными координатами. Для анизотропных пространств Бесова в кубе такая норма получена в [7].

Пусть $\mathcal{D}$ — семейство $\cup_{j=0}^\infty \mathcal{D}_j$ всех диадических кубов, где $\mathcal{D}_j$ состоит из 2^{jn} замкнутых кубов с ребром 2^{-j}, в объединении дающих куб $[0,1]^n$. Для $I \in \mathcal{D}$ через $I_\bullet$ обозначим тот угол, все координаты которого минимальны. Для числового семейства $\beta = (\beta_I)_{I \in \mathcal{D}}$ положим

$$\|\beta\|_I^p = \sum_{J \in \mathcal{D} \colon J \subset I,\, |J| = |I|/2} |\beta_I - \beta_J|^p + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n \colon (I_\bullet)_i \neq 1 - |I|} |\beta_I - \beta_{I + |I| e_i}|^p,$$

где $\{e_i\}$ — канонический базис в $\mathbb{R}^n$, а $I + |I|e_i$ — сдвиг куба I на вектор $|I|e_i$.

Пусть $u \in C(\omega)$. Для числа θ положим $u_\theta(\xi) = u(\xi) - \theta f(\xi)$,

$$E(u, I, \theta) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left| u_\theta(I_\bullet) - u_\theta(I_\bullet + |I|e_i) - u_\theta(I_\bullet + |I|e_j) + u_\theta(I_\bullet + |I|e_i + |I|e_j) \right| + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n \colon (I_\bullet)_i \neq 1 - |I|} \left| u_\theta(I_\bullet) - 2u_\theta(I_\bullet + |I|e_i) + u_\theta(I_\bullet + 2|I|e_i) \right|,$$

$$\|u\|_{\text{дискр}} = \inf_\beta \left[|\beta_\omega| + \left(\sum_{I \in \mathcal{D}} \left\{ |I|^{N-2p} E^p(u, I, \beta_I) + |I|^{N-p} \|\beta\|_I^p \right\} \right)^{1/p} \right],$$

где $\inf$ берётся по всем числовым семействам $\beta = (\beta_I)_{I \in \mathcal{D}}$.

Теорема 1. *При $p > N/2$ функция $u \in C(\omega)$ принадлежит $\mathrm{tr}\, W_p^2(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\|u\|_{\text{дискр}} < \infty$. В этом случае*

$$\inf_{\substack{v \in W_p^2(\Omega) \colon \\ \mathrm{tr}\, v = u}} \|v\|_{W_p^2} \sim |u(0)| + \sum_{i=1}^n |u(e_i)| + \|u\|_{\text{дискр}}.$$

О следах на “плохих” множествах и нормах с участием $\mathcal{D}$ см. [1], [3], [4], [5], [6].

Скажем, что поверхность $\{x_N = f(x')\} = \{\xi^{\uparrow} : \xi \in \mathring{\omega}\}$ W_p^2*-распрямляема*, если пространство tr $W_p^2(\Omega)$ равно обычному (для гладкой границы, $f = 0$) пространству следов $B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$ с эквивалентностью норм. В неявном виде это понятие встретилось в [8]. Из пункта 1.1.7 в [2] получаем, что условие $f \in C^{1,1}(\omega)$ достаточно для распрямляемости. Выбор $v(x) = x_N$ показывает, что условие $f \in B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$ необходимо для распрямляемости. Теперь из теоремы 1 легко выводится

Теорема 2. *При* $p > N/2$ *норма в* $B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$ *эквивалентна норме*

$$|u(0)| + \sum_{i=1}^{n} |u(e_i)| + \left[\sum_{I \in \mathcal{D}} |I|^{N-2p} E^p(u, I, 0) \right]^{1/p}$$

(частный случай теоремы 1.1 в [7]) и имеем непрерывное вложение

$$B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega}) \subset tr\ W_p^2(\Omega).$$

При $p > N$ *равносильны следующие условия:*

(i) *поверхность* $\{\xi^{\uparrow} : \xi \in \mathring{\omega}\}$ W_p^2*-распрямляема;*

(ii) $\sum_{I \in \mathcal{D}} |I|^{N-2p} E^p(f, I, 0) < \infty$*;*

(iii) $f \in B_{p,p}^{2-1/p}(\mathring{\omega})$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иродова И. П.* Диадические пространства Бесова // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 40–80.
2. *Мазья В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. Л.: Ленингр. ун-т, 1985.
3. *Buffa A., Geymonat G.* On traces of functions in $W^{2,p}(\Omega)$ for Lipschitz domains in $\mathbb{R}^3$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2001. V. 332, N 8. P. 699–704.
4. *Geymonat G., Krasucki F.* On the existence of the Airy function in Lipschitz domains. Application to the traces of H^2 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 330, N 5. P. 355–360.
5. *Jonsson A.* Besov spaces on surfaces with singularities. // Manuscripta Math. 1991. V. 71, N 2. P. 121–152.
6. *Jonsson A., Wallin H.* Function spaces on subsets of $\mathbb{R}^n$ / Mathematical Reports. V. 2, Part 1. New York: Harwood Acad. Publ., 1984.
7. *Kamont A.* A discrete characterization of Besov spaces // Approx. Th. Appl. 1997. V. 13, N 2. P. 63–77.
8. *Marschall J.* The trace of Sobolev – Slobodeckij spaces on Lipschitz domains // Manuscripta Math. 1987. V. 58, N 1, 2. P. 47–65.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 456–457

УДК 517.962.22

РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ДВУМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА И. Н. ВЕКУА С ФИКСИРОВАННЫМ СИНГУЛЯРНЫМ И СВЕРХСИНГУЛЯРНЫМ ЯДРОМ

© Н. Раджабов

nusrat38@mail.ru

Таджикский государственный национальный университет, Душанбе, Таджикистан

Пусть $D=\{R_1<|z|<R_2\}$ и $\Gamma_1=\{|z|=R_1\}$, $\Gamma_2=\{|z|=R_2\}$. В области D рассмотрим комплексное интегральное уравнение следующего вида

$$w(z)-\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{(\lambda w(t)+\mu\overline{w(t)})exp(i\theta)}{(p-R_1)(R_2-p)(t-z)}d\xi d\eta=f(z), \tag{1}$$

где λ, μ — заданные вещественные или комплексные числа, $\theta=arg\,t$, $t=\xi+i\eta$, $\rho^2=\xi^2+\eta^2$, $z=x+iy$, $f(z)$ — заданная функция, $w(z)$ — искомая функция.

Исследованию линейных интегральных уравнений вида (1) с фиксированными граничными сингулярными и сверхсингулярными ядрами посвящены работы [1–5].

В случае, когда λ, μ вещественные, $\lambda+\mu>0$, $\lambda-\mu>0$, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в интегральном уравнении* (1) $\lambda+\mu>0$, $\lambda-\mu>0$ (a) $\lambda>\mu>0$; b) $\lambda<0$, $\mu<0$, $|\mu|>|\lambda|$; c) $\lambda>0$, $\mu<0$, $\lambda<|\mu|$) $f(z)=f(r)=f_1(r)+if_2(r)\in C(\overline{D})$, $f_1(R_2)=0$, $f_2(R_2)=0$ *с асимптотическим поведением* $f_1(r)=o[(R_2-r)^{\gamma_1}]$, $\gamma_1>\frac{2(\lambda+\mu)}{R_2-R_1}$; $f_2(r)=o[(R_2-r)^{\gamma_2}]$, $\gamma_2>\frac{2(\lambda-\mu)}{R_2-R_1}$ *при* $r\to R_2$ *и* $f(R_1)=0$.

Тогда для разрешимости интегрального уравнения (1) *в классе функций* $w(z)=w(r)\in C(\overline{D})$, *обращающихся в нуль на* Γ_1 *и* Γ_2, *необходимо и достаточно выполненение условий*

$$\int_{R_1}^{R}\left(\frac{\tau-R_1}{R_2-\tau}\right)^{\frac{2(\lambda+\mu)}{R_2-R_1}}\frac{f_1(\tau)d\tau}{(\tau-R_1)(R_2-\tau)}=0,\quad \int_{R_1}^{R}\left(\frac{\tau-R_1}{R_2-\tau}\right)^{\frac{2(\lambda-\mu)}{R_2-R_1}}\frac{f_2(\tau)d\tau}{(\tau-R_1)(R_2-\tau)}=0, \tag{2}$$

где $R_1<R<R_2$.

При выполнение условий (2) *интегральное уравнение* (1) *имеет единственное решение, которое дается при помощи формулы*

$$w(z)\equiv w(r)=w_1^0(r)+f(r)-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{K^+(r,\rho)f(\rho)+K^-(r,\rho)\overline{f(p)}}{(\rho-R_1)(R_2-\rho)(t-z)}d\xi d\eta\equiv w_1^0(r)+M_1[f(r)],$$

где $w_2^0(r)=0$ *при* $R_1<r\le R$ *и* $w_1^0(r)=\left(\frac{R_2-r}{r-R_1}\right)^{\frac{2(\lambda+\mu)}{R_2-R_1}}\cdot c_1+i\left(\frac{R_2-r}{r-R_1}\right)^{\frac{2(\lambda-\mu)}{R_2-R_1}}\cdot c_2$ *при* $R\le r<R_2$,

$$K^{\pm}(r,\rho)=(\lambda+\mu)\left[\left(\frac{\rho-R_1}{R_2-\rho}\right)\left(\frac{R_2-r}{r-R_1}\right)\right]^{\frac{2(\lambda+\mu)}{R_2-R_1}}\pm(\lambda-\mu)\cdot\left[\left(\frac{\rho-R_1}{R_2-\rho}\right)\left(\frac{R_2-r}{r-R_1}\right)\right]^{\frac{2(\lambda-\mu)}{R_2-R_1}},$$

$$c_1=-(\lambda+\mu)\int_R^{R_2}\left(\frac{\rho-R_1}{R_2-\rho}\right)^{\frac{2(\lambda+\mu)}{R_2-R_1}}\frac{f_1(\rho)d\rho}{(\rho-R_1)(R_2-\rho)},$$

$$c_2 = -(\lambda-\mu)\int_R^{R_2}\left(\frac{\rho-R_1}{R_2-\rho}\right)^{\frac{2(\lambda-\mu)}{R_2-R_1}}\frac{f_2(\rho)d\rho}{(\rho-R_1)(R_2-\rho)}.$$

Замечание 1. Аналогичные результаты получены и в случаях, когда λ, μ вещественные и удовлетворяют условиям $\lambda+\mu<0$, $\lambda-\mu<0$.

Замечание 2. Аналогичный результат получен и в случае, когда λ и μ вещественные кусочно постоянные, т. е. $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\mu_1$ для $R_1\le r<R$ и $\lambda=\lambda_2$, $\mu=\mu_2$ для $R<r\le R$, $R_1<r<R_2$.

Замечание 3. Аналогичный результат получен и в случае, $\lambda+\mu>0$, $\lambda-\mu<0$ (a) $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda<\mu$; b) $\lambda<0$, $\mu>0$, $\mu>|\lambda|$) и в случае $\lambda+\mu<0$, $\lambda-\mu>0$($\lambda<0$, $\mu<0$, $|\mu|<|\lambda|$)).

Замечание 4. Исследован случай, когда λ и μ комплексные числа.

Замечание 5. В окружности $D^+=\{|z|<R\}$ найдено радиально-симметричное решение интегрального уравнения

$$w(z)-\frac{1}{\pi}\iint_D\frac{(\lambda w(t)+\mu\overline{w(t)})exp[i\theta]d\xi d\eta}{(R-\rho)^\alpha(t-z)}=f(z),$$

где λ, μ заданные комплексные числа, $\alpha>1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функциию. М.: Наука. 1988. 510с.
2. *Раджабов Н.* Об одном методе решение интегрального уравнения типа И. Н. Векуа // Докл. АН Тадж. ССР. 1961. Т. 4. С. 3–7.
3. *Раджабов Н.* Явное решение одного класса двумерного комплексного интегрального уравнения второго рода с сингулярными и суперсингулярными ядрами на границе области // Материалы межд. науч. конф. “Дифференциальные уравнения и их приложения”. Душанбе, 2006. С. 72–73.
4. *Rajabov N.* An explicit solution to a class of a second kind complex integral equation with singular and super-singular kernel // Functional Analytic and Complex Methods, their. Interactions, and Applications to Partial Differential Equations. World Scientific, 2001. P. 313–329.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 458–459

УДК 517.962.22

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕМ ДВУХМЕРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТИПА ВОЛЬТЕРРА С ОСОБЕННОСТЬЮ И СИЛЬНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© Л. Раджабова

lutfya62@mail.ru

Таджикский транспортный институт, Душанбе, Таджикистан

Через D обозначим прямоугольник $D = \{(x, y) : a < x < a_0, b_0 < y < b\}$. Соответственно обозначим $\Gamma_1 = \{a < x < a_0, y = b\}$, $\Gamma_2 = \{x = a, b_0 < y < b\}$. В области D рассмотрим следующее интегральное уравнение:

$$u(x,y) + \int_a^x \frac{K_1(x,y;t)u(t,y)}{(t-a)^\alpha} dt - \int_y^b \frac{K_2(x,y;s)u(x,s)}{(b-s)^\beta} ds +$$

$$\int_a^x \frac{dt}{(t-a)^\alpha} \int_y^b \frac{K_3(x,y;t,s)u(t,s)}{(b-s)^\beta} ds = f(x,y) \tag{1}$$

где $\alpha = const > 0$, $\beta = const > 0$, $K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;s)$, $K_3(x,y;t,s)$ — заданные функции по своим переменным, $f(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2_{xy}(D)$ — заданная функция в $\overline{D}$.

К рассмотрению частных случаев интегрального уравнения (1) приводят задачи о нахождении непрерывных решений линейных гиперболических уравнений второго порядка с двумя сингулярными линиями.

Случай, когда в интегральном уравнении (1) ядра $K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;s)$, $K_3(x,y;t,s)$ являются постоянными числами, рассмотрен в [1, 2]. Случай, когда данные ядра являются функциями переменных интегрирования, рассмотрен в [3, 4].

В данной работе интегральное уравнение (1) исследовано в случае, когда $\alpha = 1$, $\beta > 1$, $\delta = -\lambda\mu$, где $\lambda = K_1(a,b;a)$, $\mu = K_2(a,b;b)$, $\delta = K_3(a,b;a,b)$

Ранее интегральное уравнение (1) было изучено в случаях, когда $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\delta = -\lambda\mu$ [5]; $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\delta = -\lambda\mu$ [6].

В данной работе доказано, что для определенных значений λ, μ: $\lambda < 0$, $\mu > 0$; $\lambda < 0$, $\mu < 0$; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ однородное интегральное уравнение (1) имеет бесконечное число линейно-независимых решений, для других значений λ, μ однородное интегральное уравнение (1) не имеет решения, кроме нулевого $(\lambda > 0, \mu < 0)$.

Неоднородное уравнение (1) для некоторых значений λ, μ всегда имеет решение и общее решение содержит четыре произвольные функции одного переменного (случай $\lambda < 0$, $\mu > 0$), при $\lambda < 0$, $\mu < 0$; $\lambda > 0$, $\mu > 0$ общее решение неоднородного уравнения содержит две произвольные функции одного переменного и в случае $\lambda > 0$, $\mu < 0$ неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение.

Имеет место следующее утверждение:

Теорема. *Пусть в уравнении (1)* $\alpha = 1$, $\beta > 0$, $\lambda < 0$, $\mu > 0$, $f(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2_{xy}(D)$, $f(a,b) = 0$ *с асимптотическим поведением:*

$$f(x,y) = o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1} e^{-\mu\omega_b^\beta(y)}\right], \quad \delta_1 > |\lambda|, \quad \gamma_1 > \beta - 1.$$

Функции $K_1(x,y;t)$, $K_2(x,y;s)$, $K_3(x,y;t,s)$ *соответственно по своим переменным являются непрерывными для всех* $(x,y) \in \overline{D}$ *и* $(t,s) \in (\overline{D})$. *Кроме того, допустим что разности*

$K_1(x,y;t)-K_1(a,b;a)$, $K_2(x,y;s)-K_2(a,b;b)$, $K_3(x,y;t,s)-K_3(a,b;a,b)$ *при* $x\to a$, $y\to b$, $t\to a$, $s\to b$ *обращаются в нуль со следующими асимптотическими поведениями:*

$$K_1(x,y;t)-K_1(a,b;a)=o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1}(t-a)^{\delta_2}e^{-\mu\omega_b^{\beta}(y)}\right],\quad \delta_1>|\lambda|,\quad \gamma_1>\beta-1,$$

$$K_2(x,y;s)-K_2(a,b;b)=o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\Gamma_1}(b-s)^{\gamma_2}(t-s)^{\gamma_2}e^{-\mu\omega_b^{\beta}(y)}\right],\quad \delta_2>0,\quad \gamma_2>\beta-1,$$

$$K_3(x,y;t,s)-K_3(a,b;a,b)=o\left[(x-a)^{\delta_1}(b-y)^{\gamma_1}(t-a)^{\delta_2}(b-s)^{\gamma_2}e^{-\mu\omega_b^{\beta}(y)}b^{\beta}(y)\right],$$

$$\omega_b^{\beta}(y)=\left[(\beta-1)(b-y)^{\beta-1}\right]^{-1}.$$

Тогда задача о нахождении общего решения двумерного интегрального уравнения (1) в классе $C(\overline{D})$ *эквивалентна задаче о нахождении решения двумерного интегрального уравнения Вольтерровского типа со слабыми особенностями следующего вида*

$$u(x,y)+\int_a^x\frac{N_1(x,y;t)u(t,y)}{t-a}dt+\int_y^b\frac{N_2(x,y;s)u(x,s)}{(b-s)^{\beta}}ds+\int_a^x\frac{dt}{t-a}\int_y^b\frac{N_3(x,y;t,s)u(t,s)}{(b-s)^{\beta}}ds=$$

$$P_{1,\beta}\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\psi_1(y),\psi_2(y),f(x,y)\right],$$

где $N_1(x,y;t)$, $N_2(x,y;s)$, $N_3(x,y;t,s)$ *— известные функции, непрерывные по переменным* (x,y) *и имеющие нуль порядка больше чем* $\varepsilon>0$ *по переменному* t *и нуль порядка больше чем* $\beta-1$ *по переменному* s, $P_{1,\beta}\left[\varphi_1(x),\varphi_2(x),\psi_1(y),\psi_2(y),f(x,y)\right]$ *— известный интегральный оператор,* $\varphi_j(x)$, $\psi_j(x)$, $j=1,2$ *— произвольные функции точек* Γ_1 , Γ_2 *удовлетворяющие определеным условиям.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раджабов Н., Раджабова Л.* Исследование одного класса двухмерного интегрального уравнения с фиксированными особыми ядрами, связанное с гиперболическим уравнением // Докл. АН России. 2003. Т. 391, № 1. С. 20–22.
2. *Rajabov N., Rajabova L., Ronto M.* On some two dimentional Volterra type linear integral equations with syper-singularity // Mathematical Notes. 2003. V. 4, № 1, P. 65–76.
3. *Раджабова Л.* К теории одного класса двухмерного немодельного интегрального уравнения вольтерровского типа со сверхсингулярными граничными линиями в ядре // Докл. АН России. 2005. Т. 400, № 1. С. 602–605.
4. *Раджабова Л.* Явное решение одного класса немодельного двухмерного интегрального уравнения вольтерровского типа с одной сингулярной и одной слабо–сингулярной линиями // Труды Межд. конф. "Дифференциальные уравненияс частными производными и родсвенные проблемы анализа и информатики". Т. II. Ташкент, 2004. С. 78–80.
5. *Раджабова Л.* Об одном общем интегральном уравнении типа Вольтерра с сингулярными линиями // Труды Межд. научно–теор.конф. по качественным исследованиям дифференциальных уравнений и их приложений, посвященной 10–летию РТСУ. Душанбе, 2005. С. 96–98.
6. *Раджабова Л.* Об одном общем интегральном уравнение типа Вольтерра со сверхсингулярными линиями // Вестник национального университета. Душанбе, 2005. № 2. С. 116–123.

УДК 514.86

АППРОКСИМАЦИЯ И ИНТЕРПОЛЯЦИЯ КОНФОРМНО-ПЛОСКИХ МЕТРИК

© Е. Д. Родионов *, В. В. Славский **

* edr2002@mail.ru, ** slavsky@uriit.ru

* *Барнаульский государственный педагогический университет, Барнаул;*
** *Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск*

При численном решении задач в механике или физике связанных с отыскание конформно-плоской метрики возникает задача о наиболее естественной (с геометрической точки зрения) интерполяции конформно-плоской метрики заданной в точках (узлах) на всю область. В работе предлагается метод интерполяции, основанный на конструкции изометричного вложения конформно-плоской метрики в изотропный конус пространства Лоренца. Данный метод позволяет легко контролировать кривизну и другие геометрические свойства получающейся метрики.

Пусть в некоторой области $D \subset R^3$ евклидова пространства R^3 имеется конформно-плоская метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2}{f^2(x)},$$

В работе [1] была введена одномерная секционная кривизна конформно-плоской метрики в направлении единичного вектора $\xi \in R^3$

$$K(\xi) = f(x)\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{1}{2}\left|\nabla f\right|^2$$

Риманова кривизна метрики двумерной площадки $\xi \wedge \eta$ равна $K(\xi \wedge \eta) = K(\xi) + K(\eta)$, где ξ, η — единичные ортогональные векторы в R^3. При размерности $n \geq 3$ метрика имеет постоянную кривизну только в том случае, когда функция $f(x)$ имеет вид $f(x) = k(x - x_0)^2 + b$. Кривизна в этом случае равна $K(\xi \wedge \eta) = 4kb$. Фиксируем число $\varkappa$, обозначим через $\Xi_\varkappa$ семейство функций определенных в R^3 вида

$$\Xi_\varkappa = \left\{ f(x) = k(x - x_0)^2 + b : b > 0,\, 4kb = \varkappa \right\}$$

Пусть в R^3 задана триангуляция Делоне некоторого выпуклого многогранника P, то есть указано множество вершин $V = \{a_i\}$, и множество симплексов $E = \{\sigma_k\}$, каждый симплекс $\sigma_k = \{a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, a_{k_4}\}$ определяется своим набором вершин, попарно симплексы не пересекаются, более того сфера описанная вокруг симплекса σ_k не содержит других вершин. Симплексы $E = \{\sigma_k\}$ образуют разбиение многогранника P.

Пусть на вершинах $V = \{a_i\}$ заданы значения положительной функции $f : V \to R^+$, $f(a_i) = f_i$. Обозначим через $F' = \langle V, E, f \rangle$ тройку, состоящую из триангуляции и значений функции в вершинах, для краткости назовем $F' = \langle V, E, f \rangle$ сеткой. Требуется продолжить функцию f с вершин сетки внутрь симплексов так, чтобы конформно-плоская метрика имела ограниченную кривизну.

Определение. Определим по данной сетке $F' = \langle V, E, f \rangle$ и числу $\varkappa$ функции

$$f_\varkappa^-(x) = \sup\left\{ g(x) : g \in \Xi_\varkappa, \forall a_i \in V,\, g(a_i) \leq f_i \right\},$$
$$f_\varkappa^+(x) = \inf\left\{ g(x) : g \in \Xi_\varkappa, \forall a_i \in V,\, g(a_i) \geq f_i \right\}$$

и назовем их соответственно *нижней и верхней* $\varkappa$ *огибающей* данной сетки $F' = \langle V, E, f \rangle$.

Теорема. *Для любой непустой сетки* $F' = \langle V, E, f\rangle$ *и числа* $\varkappa > 0$ *определены и всюду в* R^3 *конечны верхняя и нижняя огибающая* $f^{\pm}_{\pm\varkappa}(x)$ *, принадлежащие классу* $C^{1,1}(R^3 \setminus V)$ *, одномерная секционная кривизна соответствующих метрик ограничена* $|K(\xi)| \le \frac{\varkappa}{2}$ *(в обобщенном смысле). Кроме того, выполняется*

$$f^{-}_{\varkappa_1}(x) \le f^{-}_{\varkappa_2}(x) \quad \text{при} \quad \varkappa_1 \le \varkappa_2,$$
$$f^{+}_{\varkappa_1}(x) \ge f^{+}_{\varkappa_2}(x) \quad \text{при} \quad \varkappa_1 \le \varkappa_2.$$

Замечание. Вообще говоря, будут выполняться неравенства $f^{+}_{\varkappa}(a_i) \ge f_i,\ f^{-}_{-\varkappa}(a_i) \le f_i$, если $a_i \in V$. Чтобы выполнялись равенства необходимо выполнение определенных условий на значения f_i в узлах сетки. В силу конечности сетки очевидно существует наименьшее $\varkappa_0 > 0$ такое, что при $\varkappa \ge \varkappa_0$ выполняется

$$f^{-}_{\varkappa}(a_i) = f^{+}_{\varkappa}(a_i) = f_i \quad \forall a_i \in V.$$

Число $\varkappa_0$ назовем *абсолютной кривизной* сетки $F' = \langle V, E, f\rangle$. В работе указаны оценки абсолютной кривизной сетки в терминах хордового расстояния между вершинами сетки.

Работа поддержана грантами НШ-8526.2006.1, 06-01-81002-Бел_а “Инвариантные тензорные поля на однородных многообразиях”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. Геометрия. 2006. Т. 37. С. 36–43.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 462–463

УДК 517.51

ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛЕДОВ СОБОЛЕВСКИХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТИ С ГЕЛЬДЕРОВЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

© **А. С. Романов**

asrom@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В последние годы довольно активно изучаются различные функциональные классы соболевского типа на метрических пространствах. Помимо самостоятельного интереса получаемые результаты оказываются полезными и при изучении свойств классических пространств Соболева в нерегулярных евклидовых областях. В частности, использование взаимосвязи в областях с гельдеровыми особенностями между соболевскими пространствами W_p^1 и пространствами Хайлаша $M^{1,p}$ позволяет довольно просто получить условия, при которых оператор вложения пространства следов соболевских функций в пространства Лебега на границе области будет компактным [3].

Введенные П. Хайлашем [1] пространства функций, удовлетворяющих специального вида оценке липшицевого типа, могут быть определены на произвольном метрическом пространстве с борелевской мерой. Теоремы вложения для пространств Хайлаша $M^{1,p}$ с одной стороны, имеют довольно универсальный характер, с другой стороны, доказываются достаточно просто [1, 2]. В евклидовых областях с гладкой границей пространства Хайлаша $M^{1,p}$ совпадают с классическими пространствами Соболева W_p^1. В областях с нерегулярной границей эти классы функций могут оказаться и различными.

Для областей с гладкой границей пространство следов соболевских функций совпадает с соответствующим пространством Бесова. И хотя полного описания пространства следов соболевских функций на границе области в терминах пространств Хайлаша получить не удается, возникающие на границе пространства типа $M^{1,p}$ оказываются близкими к пространствам следов даже в случае областей с гельдеровыми особенностями. Это позволяет получить точные оценки на показатели суммируемости в соответствующих теоремах вложения.

Пусть $\lambda \geq 1$. Рассмотрим "нулевой"пик G_λ с гельдеровой особенностью в вершине

$$G_\lambda = \{x \in R^n \mid 0 < x_1 < 1,\ x_2^2 + \cdots + x_n^2 < x_1^{2\lambda}\}$$

и нулевой "гребень" $\Gamma_\lambda = G_\lambda \times (0,1) \subset R^{n+1}$. Через σ обозначим соответствующую поверхностную меру на границе области. Показатель $\Lambda = 1+(n-1)\lambda$ в теоремах вложения для пика G_λ играет роль "размерности".

Теорема 1. *Пусть* $\dfrac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \infty$, *тогда оператор следа*

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \to L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1. $1 \leq q < p\dfrac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - p}$, *когда* $\dfrac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \Lambda$;
2. $1 \leq q < \infty$, *когда* $p = \Lambda$;
3. $1 \leq q \leq \infty$, *когда* $p > \Lambda$.

Теорема 2. *Пусть* $\dfrac{\Lambda + 1}{\Lambda - \lambda + 2} < p < \infty$, *тогда оператор следа*

$$Tr : W_p^1(\Gamma_\lambda) \to L_q(\partial \Gamma_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

1. $1 \le q < p\dfrac{\Lambda+1-\lambda}{\Lambda+1-p}$, *когда* $\dfrac{\Lambda+1}{\Lambda-\lambda+2} < p < \Lambda+1$;
2. $1 \le q < \infty$, *когда* $p = \Lambda+1$;
3. $1 \le q \le \infty$, *когда* $p > \Lambda+1$.

Простые примеры показывают точность полученных в теоремах оценок на показатель суммируемости q.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 05-01-00482-а), программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-8526.2006.1) и Междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hajlasz P.* Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
2. *Hajlasz P., Koskela P.* Sobolev Met Poincare // Memoirs AMS, V. 145, N 688. P. 1–101.
3. *Романов А. С.* О следах соболевских функций на границе пика с гельдеровой особенностью // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 1. С. 176–184.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 464–464

УДК 517.518.13+517.518.14+512.81+517.518.475

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© Н. Н. Романовский

nnrom@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В докладе рассматриваются сингулярные интегральные операторы следующего вида:

$$If(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x^{-1}\cdot y|^{\nu}} K(x, x^{-1}\cdot y)\, dy, \tag{1}$$

где через Ω обозначена область группы Карно G, ν обозначает однородную размерность группы G, а $\cdot$ групповую операцию, ядро $K(x,z)$ предполагается однородным порядка 0 относительно z, $K \in C^{\infty}(\Omega \times (G \setminus \{e\}))$ и интеграл K по переменной z по единичной сфере группы равен 0. Мы доказали ограниченность таких интегральных операторов в смысле L_p-нормы, $1 < p < \infty$, см. [1].

В случае, когда G есть евклидово пространство размерности n, имеем $x\cdot y := x+y$, $\nu = n$. Таким образом, доказанный результат представляет из себя обобщение теоремы Михлина, см. [2]. Также названный результат обобщает результат работы А. В. Кнаппа и Е. М. Стейна [3], в которой доказана ограниченность оператора

$$If(x) = \int\limits_{\Omega} \frac{1}{|x^{-1}\cdot y|^{\nu}} K(x^{-1}\cdot y)\, dy,$$

здесь Ω, как и в нашем случае, является областью группы Карно, но ядро K зависит только от $x^{-1}\cdot y$, и известную теорему Зигмунда – Кальдерона. Имеется также связь с результатами работ О. В. Бесова, см. [4], в которых доказана ограниченность сингулярных интегральных операторов в анизотропном случае.

Ограниченность оператора (1) может быть использована в теории пространств Соболева для функций, заданных в областях групп Карно, при выводе коэрцитивных оценок. Интегральный оператор, возникающий при дифференцировании слагаемого, содержащего производные, в интегральном представлении Соболева имеет описанный вид, см. [5]. Также доказанный результат может быть использован в связи с некоторыми вопросами дифференциальной геометрии, см. [6], и теории уравнений в частных производных, например, при изучении свойств решений некоторых систем уравнений в частных производных и исследовании свойств решений некоторых смешанных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Романовский Н. Н.* О проблеме Михлина на группах Карно // Сиб. мат. журн. (в печати).
2. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Knapp A. W., Stein E. M.* Intertwining operators for semi-simple groups // Ann. of Math. 1971. V. 93. P. 489–578.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
6. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Изд–во Ин–та математики СО РАН, 1996.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 465–466

УДК 517.5; 517.956.225

ОДНО ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА БОННЕЗЕНА

© Р. Г. Салахудинов

Rustem.Salahudinov@ksu.ru

НИИ математики и механики КГУ, Казань

Введение. Пусть Ω — односвязная область на плоскости, $\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$ — расстояние от точки z до границы $\partial\Omega$ области Ω, $R(z,\Omega)$ — конформный радиус Ω в точке $z\in\Omega$ и $\mathrm{P}(\Omega)$ — жесткость кручения области Ω, т. е.

$$\mathrm{P}(\Omega) := 2\iint_{\Omega} v(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

где $v=v(x,y)$ — решение уравнения Пуассона $\triangle v = -2$ с граничным условием $v=0$. Рассмотрим геометрические функционалы

$$\mathrm{I}_p(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} \operatorname{dist}^p(z,\partial\Omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \mathrm{I}_c(\Omega) = \iint\limits_{\Omega} R^2(z,\Omega)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

являющиеся, соответственно, *евклидовым моментом области Ω относительно её границы порядка p* и *конформным моментом инерции области Ω*.

Ф. Г. Авхадиевым [1] было доказано, что для односвязных областей $\Omega\subset\overline{\mathbb{C}}$ имеем $\mathrm{P}(\Omega)\sim \mathrm{I}_2(\Omega)\sim \mathrm{I}_c(\Omega)$, а именно, справедлива цепочка неравенств

$$\mathrm{I}_2(\Omega)\le \mathrm{I}_c(\Omega)\le \mathrm{P}(\Omega)\le 4\mathrm{I}_c(\Omega)\le 64\mathrm{I}_2(\Omega).$$

Одним из основных изопериметрических свойств для жесткости кручения является неравенство Сен-Венана – Полиа

$$\mathrm{P}(\Omega)\le \frac{\mathrm{A}^2(\Omega)}{2\pi},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Л. Е. Пейн доказал (см. [2]), что в действительности справедливо более сильное неравенство

$$\mathrm{A}^2(\Omega) - 2\pi\,\mathrm{P}(\Omega) \ge (\mathrm{A}(\Omega) - 2\pi\, v(\Omega))^2,$$

где $v(\Omega)=\max\limits_{(x,y)\in\Omega} v(x,y)$. Равенство также достигается тогда и только тогда, когда Ω — круг.

Аналоги неравенства Сен-Венана – Полиа для евклидовых моментов были доказаны в работе [3] и обобщены в [4]. Поэтому логичным является предположение о существовании аналога последнего неравенства для евклидовых моментов.

Основные результаты и следствия. Обозначим $\rho(\Omega)=\max\limits_{z\in\Omega}\operatorname{dist}(z,\partial\Omega)$.

Теорема 1. *Пусть Ω – односвязная область конечной площади и $p\ge 0$. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathrm{I}_p(\Omega) - \frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)} \le \frac{\rho^p(\Omega)}{(p+1)}\left(\mathrm{A}(\Omega) - \pi\rho^2(\Omega)\right).$$

Случаи равенства в неравенстве совпадают со случаями равенства в неравенстве Боннезена (т. е. экстремальные области Ω являются выпуклыми и состоят из прямоугольника и двух полукругов).

Можно показать, что для многоугольников имеют место соотношения

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)}\left(\mathrm{I}_p(\Omega)-\frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)}\right)=l(\rho(\Omega))$$

и

$$\lim_{p\to-1}\frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)}\left(\mathrm{I}_p(\Omega)-\frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)}\right)=l(\Omega)-2\pi\rho(\Omega).$$

Тогда, как одно из следствий теорем 1 получаем следующую цепочку неравенств

$$l(\rho(\Omega))\le\frac{3}{\rho^3(\Omega)}\left(\mathrm{I}_2(\Omega)-\frac{\pi\rho^4(\Omega)}{6}\right)\le\frac{\mathrm{A}(\Omega)-\pi\rho^2(\Omega)}{\rho(\Omega)}\le l(\Omega)-2\pi\rho(\Omega),$$

где $l(\mu)$ — длина линии уровня функции расстояния до границы области $(0\le\mu\le\rho(\Omega))$ и $l(\Omega)=l(0)$. Последнее неравенство представляет собой неравенство Боннезена.

Последние соотношения позволяют предположить, что функция

$$f(p):=\frac{p+1}{\rho^{p+1}(\Omega)}\left(\mathrm{I}_p(\Omega)-\frac{2\pi\rho^{p+2}(\Omega)}{(p+1)(p+2)}\right)$$

является невозрастающей для $p\in[-1,+\infty)$, предполагается, что $l(\Omega)<+\infty$. Такое свойство называется свойством изопериметрической монотонности. Это означает, что для фиксированных значений p_1 и p_2 с условием $p_1<p_2$ имеет место неравенство $f(p_1)\ge f(p_2)$, причем равенство $f(p_1)=f(p_2)$ возможно лишь для областей, для которых $f(p)\equiv const$. Несколько функционалов с таким свойством были построены Дж. Хершем и К. Бэндл (см. [5]).

Мы доказываем изопериметрическую монотонность $f(p)$, а именно, следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть Ω односвязная область и $\mathrm{I}_{p_0}(\Omega)<+\infty$ для некоторого $p_0\in[-1,\infty)$. Тогда*

1) *Если Ω не совпадает с экстремалью в неравенстве Боннезена, то $f(p)$ — строго убывающая функция от p.*

2) *Если Ω совпадает с одной из экстремалей в неравенстве Боннезена, то $f(p)\equiv const$, для $p\in[-1,+\infty)$.*

Заметим, что существуют односвязные области Ω, для которых условие $\mathrm{I}_{p_0}(\Omega)<+\infty$ не выполняется ни при каких p_0. Примерами таких областей являются полуплоскость и полоса.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ грант № 05-01-00523.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авхадиев Ф. Г.* Решение обобщенной задачи Сен-Венана //Матем. сборник. 1998. Т. 189, вып. 12. С. 3–12.
2. *Payne L. E.* Some inequalities in the torsion problem for multiply connected regions // Studies in Mathematical analysis and Related Topics: Essays in honor of G. Polya. Stanford University Press. Stanford. California. 1962. P. 270–280.
3. *Avkhadiev F. G., Salahudinov R. G.* Bilateral isoperimetric inequalities for boundary moments of plane domains // Lobachevskii J. of Mathematics. 2001. V. 9. P. 3–5 (URL: http://ljm.ksu.ru)
4. *Salahudinov R. G.* Isoperimetric inequalities for L^p-norms of the distance function to the boundary // Ученые записки КГУ. Серия: Физико-математические науки. 2006. Т. 148, кн. 2. С. 151–162.
5. *Hersch J.* Isoperimetric monotonicity — some properties and conjectures (connection between Isoperimetric inequalities) // SIAM J. Math. Anal. 1978. V. 9. P. 1126–1136.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 467–468

УДК 517.544

ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА СО СЧЕТНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОЧЕК РАЗРЫВА КОЭФФИЦИЕНТОВ (СЛУЧАИ КОНЕЧНОГО И БЕСКОНЕЧНОГО ИНДЕКСОВ)

© Р. Б. Салимов, П. Л. Шабалин *

* Pavel.Shabalin@mail.ru

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, Казань

Рассматривается задача о нахождении аналитической в верхней полуплоскости функции $F(z)$ по краевому условию

$$a(t)\mathrm{Re}F(t) - b(t)\mathrm{Im}F(t) = c(t),$$

которое выполняется на вещественной оси L всюду, кроме сгущающейся на бесконечности монотонной последовательности точек t_k, $t_k > 0$, в которых коэффициенты краевого условия $a(t)$, $b(t)$ и свободный член $c(t)$ имеют разрывы первого рода. Условимся считать, что вещественнозначные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ непрерывны по Гельдеру на каждом интервале (t_k, t_{k+1}) включая концы, $c(t) = O(|t|^{-\gamma})$, при $t \to \infty$, $0 < \gamma < 1$, и $a(t)^2 + b(t)^2 \neq 0$. В этой задаче возможны две существенно различные ситуации: случаи конечного и бесконечного индекса, связанные со сходимостью либо расходимостью ряда, составленного из скачков и приращений на интервалах непрерывности функции $\nu(t) = \arg G(t)$, $G(t) = a(t) - ib(t)$.

1. Случай конечного индекса. В случае конечного индекса решение задачи будем искать в классе аналитических в верхней полуплоскости функций, имеющих интегрируемые особенности в точках t_k, и стремящихся к бесконечности порядка меньше единицы при $|z| \to \infty, y \to 0+0$ по некасательным путям. Ветвь $\nu(t) = \arg G(t)$ выберем последовательно на каждом интервале непрерывности коэффициентов так, чтобы скачок δ_k этой функции в точке t_k удовлетворял неравенству $0 \leq \delta_k < 2\pi$. Дополнительно предположив, что существует конечный предел $\lim_{t\to-\infty} \nu(t) = \nu(-\infty)$, определим функцию $\varphi(t) = \nu(t) - \beta(t)\pi$, где $\beta(t)$ — целочисленная функция, принимающая значения β_k, в интервалах (t_k, t_{k+1}), $k = \overline{1, \infty}$, $\beta(t) = 0$ при $0 < t < t_1$ и $\beta(t) = -\kappa$ при $t < 0$. Число β_k выберем так, чтобы $0 \leq \varphi(t_k+0) - \varphi(t_k-0) < \pi$, число κ определим ниже так, чтобы скачок функции $\beta(t)$ в точке $t = 0$ был целым и чтобы величина $\kappa_\infty = [\varphi(-\infty) - \varphi(+\infty)]/\pi$ удовлетворяла неравенству $0 \leq \kappa_\infty < 1$. Обозначим символом κ_k скачок функции $\varphi(t)$ в точке t_k, m_k — приращение $\varphi(t)$ на интервале (t_k, t_{k+1}) и полагаем сходящимися следующие числовые ряды $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \kappa_j = \kappa_+$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m_j = m$. Предположим, что существует предел $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \varphi(+\infty)$, и, обозначая $\pi\beta_* = \nu(-\infty) - \nu(t_1 - 0)$, вычислим $\kappa_\infty = \beta_* + \kappa - \kappa_+ - m$, откуда находим $\kappa = -E(\beta_* - \kappa_+ - m)$, если $\beta_* - \kappa_+ - m$ — любое положительное или целое отрицательное число и $\kappa = -E(\beta_* - \kappa_+ - m) + 1$, если $\beta_* - \kappa_+ - m$ — нецелое отрицательное число, где через $E(p)$ обозначена целая часть числа p. Замечая, что $\varphi(0-0) - \varphi(0+0) = \kappa\pi$, число κ назовем индексом данной задачи в выбранном классе решений. Решение задачи проведем сведением к задаче Шварца методом аналитического выделения всех особенностей коэффициентов краевого условия , которое преобразуем к виду

$$\mathrm{Re}\frac{F(t)}{-iF_0(t)} = c_1(t),\ c_1(t) = \frac{c(t)|P_+(t)|e^{K_0(t)}}{|G(t)||t+i|^{\kappa_\infty+\kappa_+-\kappa_0}|t|^{\kappa_0}\cos[\beta(t)\pi]},$$

причем $c_1(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на вещественной оси и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке, $F_0(z)$ находится с использованием формулы Шварца с непрерывной по Гельдеру плотностью $\phi(t)$, полученной из $\varphi(t) = \arg F_0(t) - \pi/2$ выделением особенностей в точках t_k, бесконечно удаленной точке и начале координат, $\kappa_0 = 0$ при четном κ и $\kappa_0 = -1$,

если κ — нечетное число, $P_+(z) = \prod_{k=1}^{\infty}[(1-z)/t_k]^{\kappa_k}$. Предполагаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/t_k$ сходится. Картина разрешимости рассмотренной задачи полностью аналогична случаю задачи Гильберта с конечным множеством точек разрыва коэффициентов [1].

2. Случай бесконечного индекса. Теперь рассмотрим случай, когда $\sum_{k=1}^{\infty}[\kappa_k + m_k]$ расходится. Неограниченное вращения вектора $G(t)$ приводит к обращению в бесконечность индекса рассматриваемой задачи. При этом рассматриваемая здесь задача существенно отличается от изученных в [2, 3] задач Гильберта с бесконечным индексом и непрерывными коэффициентами. Для изучения асимптотического поведения функции $P_+(z)$, введем считающую функцию $n_+^*(x) = 0, \quad 0 \le x < t_1, \quad n_+^*(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \kappa_j, \quad t_{k-1} \le x < t_k, \quad k = \overline{2, \infty}$. Ограничимся рассмотрением случая $\lim\limits_{x\to+\infty} n_+^*(x)x^{-\kappa^+} = \Delta_+$, где κ^+ — положительная постоянная, удовлетворяющая неравенству $\kappa^+ < 1$, $\Delta_+ > 0$. Для введенной выше функции $P_+(z)$ справедлива формула

$$\ln P_+(z) = \frac{\pi\Delta_+ e^{-i\kappa^+\pi}}{\sin\pi\kappa^+} z^{\kappa^+} + I(z), \quad I(z) = -z\int_0^{+\infty} \frac{n_+^*(x) - \Delta_+ x^{\kappa^+}}{x(x-z)} dx.$$

Обозначим $p_k = n_+^*(t_k) - \Delta_+(t_k)^{\kappa_+}$, $p_k > 0$, и числа p_k, t_k, $k = 1, 2, \ldots$, будем подбирать так, чтобы выполнялись равенства $p_k = -n_+^*(t_k) + \Delta_+(t_{k+1})^{\kappa^+}$. При сделанных здесь ограничениях на характеристики точек разрыва можно установить ограниченность и непрерывность по Гельдеру на вещественной оси функции $I(t)$.

Теперь, обозначив $\varphi_1(t) = \varphi(t) + \arg P_+(t)$, $\Gamma(z)$ — решение задачи Шварца для $\varphi_1(t)$, краевое условие соответствющей однородной задачи запишем так $\operatorname{Im}\left\{ie^{-\Gamma^+(t)}F(t)P_+(t)\right\} = 0$. Отсюда с использованием принципа симметрии получим общее решение однородной задачи в классе функций с ограниченным произведением $|\Phi(z)|e^{\operatorname{Re}I(z)}$ вида

$$F(z) = ie^{\Gamma(z)}e^{-I(z)}\exp\Big\{-\pi\Delta_+ e^{-i\pi\kappa^+} z^{\kappa^+} / \sin(\pi\kappa^+)\Big\}\Phi(z),$$

в котором $\Phi(z)$ — целая функция порядка $\rho_F \le \kappa^+$, удовлетворяющая условию зеркальной симметрии относительно вещественной оси и некоторому ограничению скорости роста на вещественной оси. Изучены условия существования и числа решений.

Краевое условие неоднородной задачи запишем в виде

$$\operatorname{Re}\Big[e^{-i\Gamma^+(t)}F(t)P_+(t)F_1(t)\Big] = c_2(t), \quad c_2(t) = c(t)|P_+(t)|/\Big\{|G(t)|F_1(t)\cos(\beta(t)\pi)e^{\Gamma(t)}\Big\},$$

где $\Gamma(t) = \operatorname{Re}\Gamma^+(t)$, $F_1(z)$ — специально построенная по выбранной последовательности нулей заданного порядка целая функция, позволяющая применять оператор Шварца для $c_2(t)$. Теперь общее решение неоднородной задачи представляется в виде суммы частного решения неоднородной задачи и общего решения однородной.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00523).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Салимов Р. Б., Селезнев В. В.* К решению краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами // Труды семинара по краевым задачам. № 16. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 149–162.
2. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости // ИАН БССР. Сер. физ.-мат. н. 1974. № 6. С. 16–23.
3. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* К решению задачи Гильберта с бесконечным индексом // Матем. заметки. 2003. Т. 73, № 5. С. 724–734.

УДК 517.925.7

ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВЕКУА – ЭРДЕЙИ – ЛАУНДЕСА

© С. М. Ситник

mathsms@yandex.ru

Воронежский институт МВД России, Воронеж

Определение 1. Пусть дана пара операторов (A, B). Оператор T называется оператором преобразования (ОП, transmutation), если выполняется соотношение

$$TB = BT. \tag{1}$$

Соотношение (1) называется иначе сплетающим свойством, тогда говорят, что ОП T сплетает операторы A и B. Для превращения (1) в строгое определение необходимо задать пространства или множества функций, на которых действуют операторы A, B, и, следовательно, T. Иногда в определение ОП закладывают и требование обратимости, что является желательным, но не обязательным свойством. В конкретных реализациях операторы A и B обычно являются дифференциальными, T — линейный оператор на стандартных пространствах.

Основы теории ОП изложены, например, в монографиях [1–10].

Важным классом являются ОП Векуа – Эрдейи – Лаундеса (ВЭЛ), которые осуществляют сдвиг по спектральному параметру [11–12].

Определение 2. Обобщённым оператором преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса называется сплетающий оператор для пары $(A + \lambda_1, A + \lambda_2)$, где A — некоторый базовый оператор, λ_1, λ_2 — комплексные числа.

Иными словами

$$T(A + \lambda_1) = (A + \lambda_2)T.$$

ОП ВЭЛ были введены и изучены в работах И. Н. Векуа [13–16], А. Эрдейи [17–19] и Дж. С. Лаундеса [20–22]. В их работах рассматривались такие базовые дифференциальные операторы:

$$A = D^2 = \frac{d^2}{dx^2},\ A = B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D, A = x^\beta B_\nu\ .$$

Мы продолжаем рассмотрение тех же операторов.

Первый ОП ВЭЛ был построен Ильёй Несторовичем Векуа в виде

$$J_\lambda f(x) = f(x) - \int\limits_0^x t\frac{J_1(\lambda\sqrt{x^2-t^2})}{\sqrt{x^2-t^2}}\ f(t)\ dt, J_\lambda(D^2+\lambda) = D^2 J_\lambda,$$

где $J_1(\cdot)$ — функция Бесселя. Такой ОП может быть использован, например, для представления решений телеграфного уравнения через решения волнового.

Для ОП ВЭЛ нами рассмотрены следующие вопросы.

1. Выделено семейство из восьми основных операторов ВЭЛ.

2. Изучены факторизации этих операторов через более простые: Фурье, Ханкеля, дробные интегралы Римана – Лиувилля, Эрдейи – Кобера и другие [23].

3. Изучены полугрупповые свойства введённых операторов ВЭЛ по параметру.

4. Найдены условия на произвольные интегральные операторы, обеспечивающие их принадлежность к классу ОП ВЭЛ.

5. Описаны общие методы построения ОП ВЭЛ из уже известных. На этом пути получены новые операторы ВЭЛ, ядра которых выражаются через гипергеометрические функции, а также функции Райта, Фокса, Гумберта, Кампе де Ферье и другие.

6. Построено взаимно однозначное соответствие между ОП ВЭЛ и ОП, сплетающими весовые операторы Бесселя:

$$T(x^2 B_\nu) = (x^2 B_\mu) T.$$

Подобные ОП изучались в [24]. Другие родственные классы ОП изучались автором в [25–27].

Таким образом, теория операторов преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса является сформировавшимся разделом общей теории ОП с достаточно большим набором собственных результатов и важными применениями в теории уравнений в частных производных. Замечательно, что начало этой плодотворной тематики было заложено в трудах Ильи Несторовича Векуа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Carroll R.* Transmutation and Operator Differential Equations // North Holland. 1979.
2. *Carroll R.* Transmutation, Scattering Theory and Special Functions // North Holland. 1982.
3. *Carroll R.* Transmutation Theory and Applications // North Holland. 1986.
4. *Gilbert R.* Constructive Methods for Elliptic Equations // Springer Lecture Notes Math. 1974. № 365.
5. *Gilbert R., Begehr H.* Transformations, Transmutations and Kernel Functions // Longman, Pitman. 1992.
6. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма–Лиувилля. Киев, 1972.
7. *Марченко В. А.* Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.
8. *Фаге Д. К., Нагнибида Н. И.* Проблема эквивалентности обыкновенных дифференциальных операторов. Новосибирск: Наука, 1977.
9. *Левитан Б. М.* Теория операторов обобщённого сдвига. М.: Наука, 1973.
10. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
11. *Ляховецкий Г. В., Ситник С. М.* Операторы преобразования Векуа – Эрдейи – Лаундеса. Препринт института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток, 1994. 24 с.
12. *Lyahovetskii G. V., Sitnik S. M.* The Vekua–Erdelyi–Lowndes transmutations. Препринт института автоматики и процессов управления Дальневосточного отделения РАН. Владивосток, 1994. 14 с.
13. *Векуа И. Н.* О решениях уравнения $\Delta u + \lambda^2 u$ // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. 1942. Т. III, № 4. С. 307–314.
14. *Векуа И. Н.* Обращение одного интегрального преобразования и его некоторые применения // Сообщения Акад. Наук Груз. ССР. 1945. Т. VI, № 3. С. 177–183.
15. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений // М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
16. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. М.: Наука, 1988.
17. *Erdelyi A.* Some applications of fractional integration // Boeing Sci. Res. Labor. Docum. Math. Note. 1963. № 316. 23 p.
18. *Erdelyi A.* An application of fractional integrals // J. Analyse Math. 1965. V. 14. P. 113–126.
19. *Erdelyi A.* On the Euler–Poisson–Darboux equation // J. Analyse Math. 1970. V. 23. P. 89–102.
20. *Lowndes J.S.* An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J. 1979. V. 20, № 1. P. 35–41.
21. *Lowndes J. S.* On some generalizations of Riemann–Liouville and Weil fractional integrals and their applications // Glasgow Math. J. 1981. V. 22. № 2. P. 73–80.
22. *Lowndes J. S.* Cauchy problems for second order hyperbolic differential equations with constant coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V. 26, № 3. P. 97–105.
23. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск.: Наука и техника. 1987.
24. *Килбас А. А., Сайго М., Жук В. А.* // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1640–1642.
25. *Ситник С. М.* Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана – Эрдейи // Докл. РАН. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.
26. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Композиционный метод построения B-эллиптических, B-гиперболических и B-параболических операторов преобразования // Докл. РАН. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.
27. *Ситник С. М.* Унитарность и ограниченность операторов Бушмана – Эрдейи нулевого порядка гладкости. Препринт ИАПУ ДВО РАН. Владивосток, 1990. 45 с.

УДК 517.9

ФРЕДГОЛЬМОВА РАЗРЕШИМОСТЬ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕКЛАССИЧЕСКОГО ТИПА

© **А. П. Солдатов**

Soldatov@bsu.edu.ru

Белгородский государственный университет, Белгород

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение, которое под знаком интеграла содержит при ядре Коши множитель, приближенно однородный степени нуль относительно расстояния до узлов кривой. Случай, когда этот множитель зависит только от одной переменной и кусочно гельдеров, охватывается классической теорией Мусхелишвили – Векуа. Для указанного уравнения установлен критерий фредгольмовости и приведена формула его индекса.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 472–473

УДК 517.54

О СТРУКТУРНЫХ ФОРМУЛАХ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОНЕЧНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

© А. С. Сорокин

andsor@mail.ru

Кузбасская государственная педагогическая академия, Новокузнецк

В работе рассмотрен центральный вопрос теории интегральных представлений регулярных и однозначных функций — даётся распространение центральных теорем метода структурных формул для некоторых классов обобщенных аналитических функций [1-4].

Эти интегральные представления регулярной и однозначной в многосвязной круговой области функции получены методом функциональных уравнений, основанным на разделении особенностей функции преобразования и на сведении задачи её определения к системе функциональных уравнений, которые затем решаются методом последовательных подстановок.

В связи с необходимостью преодоления эффектов многозначности, проявляющихся из-за многосвязности области, указываются дополнительные условия разрешимости задачи.

Теорема. *Пусть* $W(z)$ *есть регулярное и однозначное решение в* G *уравнения Векуа с коэффициентом, принадлежащим* $L_p, p > 2$ *и пусть вещественная часть* $W(z)$ *на граничных компонентах* $C_k, k = 0, \ldots, n;$ *принимает непрерывные значения* $f_k(\zeta)$.

Пусть, далее $\widetilde{\mu}_k(\vartheta) = \mu_k\left(a_k + R_k\exp(i\vartheta)\right),\ k = 0, 1, \ldots, n,$ *— функции класса* $VB[-\pi, \pi]$, *удовлетворяющие соотношениям*

$$\mathcal{A}_m = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\widetilde{\mu}_m(\vartheta) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n} \frac{\delta_k}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} S_k\left(a_k + R_k\exp(i\vartheta)\right)\, d\widetilde{\mu}_k(\vartheta), \quad m = 1, \ldots, n,$$

где

$$S_m(\zeta) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k_1\neq k_2}^{k_{2\nu}\neq k}\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{n}\left(\frac{\zeta + \overline{L_m}E_{2\nu}L_k(z)}{\zeta - \overline{L_m}E_{2\nu}L_k(z)}\Bigg|_{b_k}^{a_m} - \frac{\zeta + \overline{E_{2\nu}L_k}(z)}{\zeta - \overline{E_{2\nu}L_k}(z)}\Bigg|_{\overline{b_k}}^{\overline{a_m}}\right).$$

$b_0 = 0\,,\ b_m = \infty\,,\ m = 1, \ldots, n,\ \ \delta_k$ *— символ Кронекера* [1].

При этом

$$E_{2\nu}(z) = L_{k_1}\overline{L_{k_2}}\cdots L_{k_{2\nu-1}}\overline{L_{k_{2\nu}}}(z), \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

$$E_0(z) \equiv z.$$

Кроме того,

$$L_k(\zeta) = \overline{a_k} + \frac{R_k^2}{\zeta - a_k}.$$

Далее, пусть

$$C_2^1\widehat{W}_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\rho}\frac{W(z)}{z}\,dz,$$

$$R_0 > \rho > R_0^0 = \max_{1\leq m\leq n-1}\{R_m + |a_m|\},$$

где $\mathcal{C}_2^1$ *— вещественное число,* $\widehat{W}_1(z)$ *определяется константными решениями уравнения Векуа. Тогда структурная формула*

$$W(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta_k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_k\left(a_k + R_k \exp(i\vartheta), z\right) d\widetilde{\mu}_k(\vartheta) + C_2^1 \widehat{W}_1(z),$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности функции $W(z)$ *классу* $\mathcal{B}(R_j, a_j, j = 0, \ldots, n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сорокин А. С.* Формула Вилля для обобщенных аналитических функций // Докл. АН СССР. 1973. Т. 210, № 6. С. 1293–1296.
2. *Сорокин А. С.* Об одной смешанной краевой задаче теории обобщенных аналитических функций // Метрические вопросы теории функций и отображений. Киев: Наукова Думка, 1977. С. 125–131.
3. *Сорокин А. С.* Параметрическое представление функций в конечносвязных областях// Сиб. матем. журн. 1997. Т. 38, № 5. С. 1163 – 1178.
4. *Сорокин А. С.* Структурные формулы некоторых классов аналитических функций в конечносвязной области // Матем. сб. 1997. Т. 188, № 12. С. 107–134.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 474–475

УДК 517.5

О СПЕКТРАХ, СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ И РЕЗОНАНСАХ ОПЕРАТОРА ЭНЕРГИИ ДВУХМАГНОННЫХ СИСТЕМ В ОДНОМЕРНОМ НЕГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОМ ФЕРРОМАГНЕТИКЕ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ БЛИЖАЙШИХ СОСЕДЕЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ СПИНА S

© С. М. Ташпулатов

toshpul@mail.ru, toshpul@rambler.ru

Институт ядерной физики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается двухмагнонная система в одномерной негейзенберговской ферромагнетике со произвольным значением спина S с взаимодействием ближайших соседей и исследуется спектр, связанные состояние(СС) и резонансы системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -\sum_{n=1}^{2s}\sum_{m,\tau} J_n(\vec{S}_m\vec{S}_{m+\tau})^n, \tag{1}$$

и он действует в симметрическом Фоковском пространстве $\mathcal{H}$, где $J_n > 0, n = 1, 2, \ldots, 2s$, — параметры мультиполных обменных взаимодействий между ближайшими атомами решетки, а $\vec{S}_m$ — оператор атомного спина в узле m со значением спина S, а τ суммирует по ближайшим соседям, $S-$ значение спина, $S \in \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, ...\}$ —произвольное фиксированное число. Обозначим через $\mathcal{H}_2$ двухмагнонное инвариантное подпространство оператора H, $H_2 = H/_{\mathcal{H}_2}$. Оператор H_2 является ограниченный самосопряженный оператор. Оператор H_2 в квазиимпульсном представлении в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2 = L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле:

$$(\tilde{H}_2 f)(x; y) = h(x; y)f(x; y) + \int_{T^\nu} h_1(x; y; s)f(s; x + y - s)ds, \tag{2}$$

где $h(x; y) = A\sum_{k=1}^{\nu}[1 - \cos\frac{x_k + y_k}{2}\cos\frac{x_k - y_k}{2}]$,

$$\begin{aligned} h_1(x; y; s) &= B\sum_{k=1}^{\nu}[\cos\frac{x_k - y_k}{2} - \cos\frac{x_k + y_k}{2}]\cos(\frac{x_k + y_k}{2} - s_k) \\ &+ C\sum_{k=1}^{\nu}[1 + \cos(x_k + y_k) - 2\cos\frac{x_k + y_k}{2}\cos\frac{x_k - y_k}{2}], \end{aligned}$$

Здесь A, B, C — коэффициенты зависящие от параметров $J_k, k = 1, 2, ..., 2s$, и значением спина S, т. е. $A = A(J_1, J_2, ..., J_{2s}, S), B + B(J_1, J_2, ..., J_{2s}, s), C = C(J_1, J_2, ..., J_{2s}, S)$ и T^ν - ν-мерный тор, снабженный нормированной мерой Лебега $d\lambda : \lambda(T^\nu) = 1$. Нами найдены явные формулы для коэффициента $A : A = 4[2sJ_1 - (2s)^2J_2 + (2s)^3J_3 - ... + (-1)^{2s+1}(2s)^{2s}J_{2s}]$, $B = J_1 + (4s^2 - 6s + 1)J_2 + (1 - 10s + 32s^2 - 24s^3)J_3 + (112s^4 - 160s^3 + 72s^2 - 14s + 1)J_4 +$

$(-480s^5+786s^4-448s^3+128s^2-18s+1)J_5+...,\ C=(s-2s^2)J_2+(12s^3-8s^2+s)J_3+(56s^4-48s^3+12s^2-s)J_4-(240s^5-256s^4+96s^3-16s^2+s)J_5+....$

Нами исследованы спектр, СС и резонансы оператора $\tilde{H}_2$. Фиксируя полный квазиимпульс системы и его двухмагнонное подсистемы $x+y=\Lambda$, мы можем расслоить пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ и оператор $\tilde{H}_2$ в прямой интеграл .

Ясно, что непрерывный спектр оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ не зависит от функций $h_{1\Lambda}(x;t)$ и заполняет весь отрезок $[m^\nu_\Lambda; M^\nu_\Lambda]=\mathrm{Im}\ h_\Lambda(x)$, где $m^\nu_\Lambda=\min_{x\in T^\nu}h_\Lambda(x), M^\nu_\Lambda=\max_{x\in T^\nu}h_\Lambda(x)$.

Рассмотрим оператор $(K_\Lambda(z)f_\Lambda)(x)=\int_T\frac{h_{1\Lambda}(x;t)}{h_\Lambda(t)-z}f_\Lambda(t)dt.$ Он является вполне непрерывным оператором в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$ для значений z, лежащих вне множества $[m^\nu_\Lambda; M^\nu_\Lambda]$. Обозначим через $\Delta_\Lambda(z)$ определитель Фредгольма оператора $E_\Lambda+K_\Lambda(z)$, где E_Λ — единичный оператор в пространстве $\mathcal{H}_{2\Lambda}$.

Лемма. *Число $z=z_0$ является собственным значением оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$ тогда и только тогда, когда оно является нулем функции $\Delta_\Lambda(z)$.*

Обозначим через $\Delta^\star_\Lambda(z)$ аналитическое продолжение функции $\Delta_\Lambda(z)$ по любой кривой, лежащее в $V'_\varepsilon(m^\nu_\Lambda)$, где $V'_\varepsilon(m^\nu_\Lambda)=\{z\in C:|z-m^\nu_\Lambda|<\varepsilon\}$. Нули функции $\Delta^\star_\Lambda(z)$, не совпадающие с нулями исходной функции $\Delta_\Lambda(z)$, назовем резонансами оператора $\tilde{H}_{2\Lambda}$; резонансы, лежащие в области $V^+=\{z\in V'_\varepsilon(m^\nu_\Lambda), Rez\geq m^\nu_\Lambda\}$, называются физическими резонансами.

Теорема 1. *Пусть $A=0$. Тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС Ψ со значением энергии $z=-2C-8s(2s-1)B\sum_{i=1}^\nu\cos^2\frac{\Lambda}{2}$, лежащим вне области непрерывного спектра и не имеет резонансов.*

Доказательство. Если $A=0$, тогда $h_\Lambda(s)\equiv 0$ и функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид $\Delta_\Lambda(z)=1+\frac{2C}{z}+\frac{8s(2s-1)B\sum_{k=1}^\nu\cos^2 ¡2}{z}$. Теперь решая уравнение $\Delta_\Lambda(z)=0$, получаем доказательство теоремы.

Теорема 2. *Если $\Lambda=\pi$ и $B\neq 0$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет единственное СС Ψ со значением энергии равным $z=8sA-2B$, лежащим вне области непрерывного спектра и не имеет резонансов.*

Доказательство. Если $\Lambda=\pi$ и $B\neq 0$, то функция $\Delta_\Lambda(z)$ имеет вид $\Delta_\Lambda(z)=1-\frac{2B}{8sA-z}$. Теперь решая уравнение $\Delta_\Lambda(z)=0$, получаем доказательство теоремы.

Теорема 3. *Если $B=0$, тогда оператор $\tilde{H}_2$ имеет не более одного СС со значением энергии, лежащим вне области непрерывного спектра и имеет не более два резонанса, т. е., в этом случае общие количество резонансов и СС равны двум.*

Доказательство. Если $B=0$, тогда $A=-(4s^2-4s+1)C$ и

$\Delta_\Lambda(z)=1-4s(2s-1)C\int_T\frac{1+\cos\Lambda-2\cos\frac{\Lambda}{2}\cos(\frac{\Lambda}{2}-s)}{h_\Lambda(s)-z}ds.$ Интеграл вычисляется в квадратурах. Вычисляя значение интеграла и исследуя уравнение $\Delta_\Lambda(z)=0$ вне области непрерывного спектра, мы немедленно получаем доказательство теоремы.

Кроме того, показано что, спектр и СС системы при $s=1/2$ и при $s>1/2$ качественно отличаются друг от друга. Качественная картина изменения энергетического спектра системы для целых и полуцелых значениях спина, а также для четных и нечетных значениях спина, одинакова.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 476–477

УДК 517.5

О СУЩЕСТВЕННЫХ И ДИСКРЕТНЫХ СПЕКТРАХ ОДНОГО ДИСКРЕТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

© С. М. Ташпулатов

toshpul@mail.ru, toshpul@rambler.ru

Институт ядерной физики АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается двухмагнонная система в трехмерной изотропной примесной негейзенберговской ферромагнитной модели с произвольным значением спина S с взаимодействием ближайших соседей и исследуется структура существенного спектра системы и качественно исследуется дискретный спектр системы.

Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$H = -\sum_{m,\tau}\sum_{n=1}^{2s} J_n(\vec{S}_m\vec{S}_{m+\tau})^n - \sum_{\tau}\sum_{n=1}^{2s}(J_n^0 - J_n)(\vec{S}_0\vec{S}_\tau)^n, \qquad (1)$$

и он действует в симметрическом Фоковском пространстве $\mathcal{H}$, где $J_n > 0$ и J_n^0 параметры мультиполного обменного взаимодействии между ближайшими атомами и между атома и примесями соответственно, а $\vec{S}_m$ — оператор атомного спина в узле m со значением спина S, а τ суммирует по ближайшим соседям.

Обозначим через $\mathcal{H}_2$ двухмагнонное инвариантное подпространство оператора H, $H_2 = H/_{\mathcal{H}_2}$. Оператор H_2 является ограниченный самосопряженный оператор и он в квазиимпульсном представлении в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_2 = L_2(T^\nu \times T^\nu)$ действует по формуле:

$$(\tilde{H}_2 f)(x;y) = h(x;y)f(x;y) + \int\limits_{T^\nu} h_1(x;y;s)f(s;x+y-s)ds + D\int\limits_{T^\nu}\int\limits_{T^\nu} h_2(x;y;s;t)f(s;t)dsdt$$

$$-2\sum_{k=1}^{2s}(-2s)^k(J_k^0 - J_k)\int\limits_{T^\nu} h_3(x;s)f(s;y)ds - 2\sum_{k=1}^{2s}(-2s)^k(J_k^0 - J_k)\int\limits_{T^\nu} h_4(y;t)f(x;t)dt, \qquad (2)$$

где $h(x;y) = 4\sum_{n=1}^{2s}(-1)^{n+1}(2s)^n\sum_{k=1}^{\nu}[1 - \cos\frac{x_k+y_k}{2}\cos\frac{x_k-y_k}{2}]$,

$$\begin{aligned} h_1(x;y;s) &= B\sum_{k=1}^{\nu}[\cos\frac{x_k-y_k}{2} - \cos\frac{x_k+y_k}{2}]\cos(\frac{x_k+y_k}{2} - s_k) \\ &+ C\sum_{k=1}^{\nu}[1+\cos(x_k+y_k) - 2\cos\frac{x_k+y_k}{2}\cos\frac{x_k-y_k}{2}]. \end{aligned}$$

Здесь $B = J_1 + (4s^2-6s+1)J_2 + (1-10s+32s^2-24s^3)J_3 + (112s^4-160s^3+72s^2-14s+1)J_4$ $+(-480s^5+786s^4-448s^3+128s^2-18s+1)J_5 + ...$, $C = (s-2s^2)J_2 + (12s^3-8s^2+s)J_3 + (56s^4-48s^3$ $+12s^2-s)J_4 - (240s^5-256s^4+96s^3-16s^2+s)J_5 + ...$, $D = D(J_1;J_2;...;J_{2s};J_1^0;J_2^0;...;J_{2s}^0;s)$,

$h_2(x;y;s;t)$ — конкретная 2π-периодическая аналитическая функция, $h_3(x,s)=\nu+\sum\limits_{i=1}^{\nu}[\cos(x_i-s_i)-\cos x_i-\cos s_i]$, $h_4(y,t)=\nu+\sum\limits_{i=1}^{\nu}[\cos(y_i-t_i)-\cos t_i-\cos y_i]$, $\quad x,y,s,t\in T^{\nu}$.

Гамильтониан одномагнонной системы имеет вид (1). Через $\mathcal{H}_1$ обозначим одномагнонное подпространство оператора H, а $H_1=H/_{\mathcal{H}_1}$. Оператор H_1 в квазиимпульсном представлении в пространстве $\mathcal{H}_1$ действует по формуле

$$(\tilde{H}_1 f)(x)=p(s)h(x)f(x)+q(s)\int\limits_{T^{\nu}}h_1(x;t)f(t)dt, \tag{3}$$

где $h(x)=\nu-\sum_{i=1}^{\nu}cosx_i$, а $h_1(x;t)=\nu+\sum_{i=1}^{\nu}[\cos(x_i-t_i)-\cos x_i-\cos t_i]$. Здесь $p(s)=-2\sum_{k=1}^{2s}(-2s)^kJ_k, q(s)=-2\sum_{k=1}^{2s}(-2s)^k(J_k^0-J_k)$. Обозначим через Ω множество значений всех пар $\omega=(p(s);q(s))$ и при $\nu=3$ введем его подмножества Q_1-Q_{16} (см. в [1]).

Видно, что оператор $\tilde{H}_2$ можно представлять в виде:

$$(\tilde{H}_2 f)(x;y)=(\tilde{H}_1 f)(x)\bigotimes I+I\bigotimes(\tilde{H}_1 f)(y)$$

$$+\int\limits_{T^{\nu}}h_1(x;y;s)f(s;x+y-s)ds+\int\limits_{T^{\nu}}\int\limits_{T^{\nu}}h_2(x;y;s;t)f(s;t)dsdt. \tag{4}$$

Фиксируя полный квазиимпульс системы и его двухмагнонное подсистемы $x+y=\Lambda$, мы можем расслоить пространство $\tilde{\mathcal{H}}_2$ и оператор $\tilde{H}_2$ в прямой интеграл , после того интегральные операторы с ядрами $h_1(x;y;s)$ и $h_2(x;y;s;t)$ становится компактными операторами в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_{2\Lambda}$. Теперь используя известными результатами о спектрах оператора $\tilde{H}_1$ описываем существенный спектр оператора $K=\tilde{H}_1\bigotimes I+I\bigotimes\tilde{H}_1$. Известно, что $\sigma(K)=\{\lambda+\mu:\lambda\in\sigma(\tilde{H}_1),\mu\in\sigma(\tilde{H}_1)\}$.

Теорема 1. *Если* $\Omega\in Q_1\bigcup Q_2\bigcup Q_3\bigcup Q_4$, *тогда существенный спектр оператора* $\tilde{H}_2$ *состоит из единственный отрезок* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2)=[0;12p(s)]$ *или* $\sigma_{ess.}\tilde{H}_2=[12p(s);0]$, *а дискретный спектр оператора конечен.*

Теорема 2. *Если* $\Omega\in Q_5\bigcup Q_6,(\Omega\in Q_7\bigcup Q_8)$, *тогда существенный спектр оператора* $\tilde{H}_2$ *состоит из двух сегментов:* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2)=[0;12p(s)]\bigcup[z_1;z_1+6p(s)]$. *Дискретный спектр оператора левее (правее) существенного спектра конечен.*

Теорема 3. *Если* $\Omega\in Q_9\bigcup Q_{10},(\Omega\in Q_{11}\bigcup Q_{12})$, *тогда существенный спектр оператора* $\tilde{H}_2$ *состоит из трех сегментов:* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2)=[0;12p(s)]\bigcup[z_1;6p(s)+z_1]\bigcup[z_2;6p(s)+z_2]$. *Дискретный спектр оператора левее (правее) существенного спектра конечен.*

Теорема 4. *Если* $\Omega\in Q_{13}\bigcup Q_{14}(\Omega\in Q_{15}\bigcup Q_{16})$, *тогда существенный спектр оператора* $\tilde{H}_2$ *состоит из четырех сегментов:* $\sigma_{ess.}(\tilde{H}_2)=[0;12p(s)]\bigcup[z_1;z_1+6p(s)]\bigcup[z_2;z_2+6p(s)]\bigcup[z_3;z_3+6p(s)]$. *Дискретный спектр оператора* $\tilde{H}_2$ *левее (правее) существенного спектра конечен.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ташпулатов С. М.* Одномагнонные системы в изотропной негейзенберговской ферромагнитной примесной модели // ТМФ. 2005. Т. 142, № 1. С. 83–92.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 478–479

УДК 513.03+517.944

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ И. Н. ВЕКУА МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

© Е. В. Тюриков

lucy@jeo.ru

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

Постановка рассматриваемой ниже задачи восходит к известной работе И. Н. Векуа [1] по теории обобщенных аналитических функций и ее приложению к граничным задачам безмоментного напряженного состояния выпуклой упругой оболочки с заданным на границе ее срединной поверхности вектором касательного или нормального усилий. Там же поставлен вопрос (*смешанная* граничная задача) о возможности реализации безмоментного напряженного состояния равновесия при условии, что на какой-либо части границы задано только касательное, а на другой части — только нормальное усилия (см. также [2, 3]). Смешанная граничная задача для сферической оболочки, край срединной поверхности которой состоит из конечного числа плоских гладких дуг (*сферический купол*), поставлена А. Л. Гольденвейзером в [4].

Пусть S_ν, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{2n})$ — строго внутренняя часть замкнутой выпуклой поверхности класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2$, с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{2n} L_j$, состоящим из конечного числа дуг L_j класса регулярности $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, и содержащим $2n$ угловых точек c_j с внутренними углами $\nu_j \pi$ $(0 < \nu_j < 2)$ соответственно, образованными векторами $\overline{s}_j^{(1)}$, $\overline{s}_j^{(2)}$ с началом в точке c_j $(j = 1, \ldots, 2n)$ и задающими направления дуг, сходящихся в этой точке. Рассматривается вспомогательная задача (задача B): существуют ли бесконечно малые (б. м.) изгибания поверхности S_ν, совместимые с граничным условием

$$\delta k_n = \sigma_i(s) \quad \text{на} \quad L_{2i-1} \quad (i = 1, \ldots, n); \quad \delta k_g = \sigma_j \quad \text{на} \quad L_{2j} \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $\sigma_i(s)$ — наперед заданные гельдеровы функции, s — натуральный параметр, δk_n и $\delta \tau_g$ — вариации нормальной кривизны и геодезического кручения поверхности S_ν в направлении края, L_k $(k = 1, \ldots, 2n-1)$ — дуга с началом и концом в точках c_k и c_{k+1} соответственно, а L_{2n} — дуга с началом и концом в точках c_{2n} и c_1. В целях упрощения изложения ограничимся рассмотрением *канонической* задачи B_0, полагая, что в каждой из точек c_j выполняется одно из следующих условий:

1°. направление одного из векторов $\overline{s}_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ совпадает с главным направлением на поверхности S_ν в этой точке;

2°. в направлении одного из векторов $\overline{s}_j^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ геодезическое кручение поверхности S_ν в точке c_j принимает наибольшее значение.

Для формулировки результата введем классификацию угловых точек, по которой каждую точку можно отнести к одному из пяти типов, а именно: точка c_j $(1 < j \leqslant 2n)$ есть точка k-го типа, если $0 < \nu_j \leqslant 1/4$ при $k = 1$; $(2k-3)/4 < \nu_j \leqslant (2k-1)/4$ при $k = 2, 3, 4$; $7/4 < \nu_j < 2$ при $k = 5$. Обозначим через $N^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, 5;\ \sum\limits_{k=1}^{5} N^{(k)} = 2n)$ число угловых точек k-го типа. Имеет место

Теорема 1. *Пусть S_ν — заданная выше поверхность класса регулярности $W^{3,p}$, $p > 2\theta_0$, $\theta_0 = \max\{1, \omega(\nu)\}$, где набор $\omega(\nu) \equiv (\theta_1, \ldots, \theta_{2n})$ вполне определен выбором точек c_j и направлений $\overline{s}_j^{(1)}$, $\overline{s}_j^{(2)}$ на S_ν. Если*

$$N = \sum_{k=1}^{5} (5 - 2k) N^{(k)} \geqslant 6,$$

то поверхность S_ν допускает $(N/2-3)$-параметрическое семейство нетривиальных б. м. изгибаний класса регулярности $W^{1,q}$, $2 < q < \frac{2p}{2+p(1-1/\theta_0)}$, совместимых с условием (1), в котором $\sigma_i \not\equiv 0$ хотя бы на одной из дуг L_i. Если при этом функция σ, определенная на L равенствами (1), удовлетворяет дополнительным условиям точечного типа $\sigma(c_j) = 0$ ($j = 1, \ldots, 2n$), то б. м. изгибания непрерывны в $S_\nu \cup L$.

Справедлива также

Теорема 2. *Если $N > 6$, то поверхность S_ν при условии стационарности нормальной кривизны на L_{2i-1} и геодезического кручения на L_{2i} ($i = 1, \ldots, n$) (т. е. при условии $\sigma \equiv 0$ на L) допускает точно $N/2-3$ линейно-независимых нетривиальных б. м. изгибаний указанного класса, и является жесткой в том же классе, если $N \leqslant 6$.*

Доказательство теорем 1, 2 опирается на результаты работы [5]. Используя метод И. Н. Векуа [1–3] и теоремы 1, 2, получаем следующий результат: если V — тонкая упругая оболочка со срединной поверхностью S_ν, для которой $N > 6$, а касательные усилия на дугах L_{2j-1} и нормальные усилия на дугах L_{2j} ($j = 1, \ldots, n$) соответственно равны нулю, то в оболочке V безмоментное напряженное состояние равновесия реализуется при любом распределении нормальных усилий на L_{2j-1} и касательных усилий на L_{2j} ($j = 1, \ldots, n$).

Для формулировки результата в общем случае (в угловых точках c_j, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, ни одно из условий 1°, 2° не выполняется) вводится более тонкая классификация угловых точек края. По этой классификации каждую угловую точку также можно отнести к одному из пяти типов, однако тип угловой точки c_j в этом случае определяется внутренним углом $\nu_j\pi$ и направлениями дуг границы L, сходящихся в этой точке. При этом остаются справедливы теоремы 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Мат. сб. 1952. Т. 31, № 2. С. 217–314.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
3. *Векуа И. Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Физматгиз, 1982.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Физматгиз, 1976.
5. *Тюриков Е. В.* Краевые задачи теории б.м. изгибаний поверхностей // Мат. сб. 1977. № 3 (7). С. 445–462.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 480–481

УДК 517.544

К ТЕОРИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОГО СЛУЧАЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В КЛАССЕ ГИПЕРФУНКЦИЙ

© Т. М. Урбанович

UrbanovichTM@gmail.com

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

В классической постановке задачи Римана (см., например, [1,2]) отыскиваются функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические внутри и вне замкнутой кривой $\Gamma\in\mathbb{C}$, соответственно, предельные значения которых удовлетворяют краевому условию

$$\Phi^+(x)=G(x)\Phi^-(x)+g(x),\ \ x\in\Gamma, \tag{1}$$

где $G(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции, для которых выполнено некоторое дополнительное условие гладкости.

При решении конкретных прикладных задач возникает необходимость исследования задачи (1) в предположении, что $g(x)$ является обобщённой функцией. Постановка краевой задачи Римана в пространстве обобщённых функций принадлежит, по-видимому, Парасюку (см., например, [7]), а именно, в [3], решая парные уравнения типа свёртки, он пришёл к задаче Римана на прямой в одном классе обобщённых функций. Ранее Кёте [4] рассматривал частный случай задачи Римана — задачу о представлении обобщённой функции в виде разности предельных значений функций, аналитических внутри и вне аналитической кривой. Беркович [5] пришёл к краевой задаче Римана в пространстве обобщённых функций в связи с решением бесконечной системы алгебраических уравнений с разностным индексом в случае быстрого роста свободного члена.

Краевая задача Римана в классе обобщённых функций изучалась многими авторами. Черский [6] предложил рассматривать Φ^+ и Φ^- как некоторые операторы, действующие в пространстве обобщённых функций, и на этой основе исследовал соответствующую задачу Римана. Рогожину [7-9] удалось решить в замкнутом виде краевую задачу Римана, свободный член которой является обобщённой функцией, и истолковать решение как предельное значение кусочно-аналитической функции. При этом использовалась теория обобщённых функций, определённых на основном пространстве, состоящем из бесконечно дифференцируемых функций точек достаточно гладкого контура.

В монографии [10] приводится постановка в классах гиперфункций краевой задачи Гильберта, тесно связанной с задачей Римана. Однако, полное исследование задачи Римана (в частности, в исключительном случае) в классах гиперфункций далеко от завершения и представляет самостоятельный интерес.

В докладе излагается решение в классе гиперфункций $\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$ (см.[10]) краевой задачи Римана в исключительном случае (см. [2, с. 130-137])

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}G_0(x)\Phi^-(x)+g(x),\ \ -\infty<x<+\infty, \tag{2}$$

где $a_1<\dots<a_m,\ b_1<\dots<b_n,\ a_j\neq b_k;\ \alpha_j,\beta_k\in\mathbb{N}$, $G_0(x)$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера и не обращающаяся в нуль на прямой.

Под решением задачи (2) в классе гиперфункций понимается гиперфункция $\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}$, для которой равенство (2) выполняется во всех тех точках $x\in\mathbb{R}$, в которых предельные значения $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ существуют.

Решение задачи (2) в классе гиперфункций определяется выбором пространства решений (см. [11, с. 133]) и записывается через комплексные аналоги δ-функции и её производных (см.[12]).

Общее решение задачи (2) в классе гиперфункций, исчезающих на бесконечности, имеет вид

$$\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\} = \left\{ X_0^+(z) \cdot \left(g_1^+(z) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{\beta_k - 1} B_{kp} \delta^{(p)}(z - b_k) \right), \right.$$

$$X_0^-(z) \cdot \left(g_1^-(z) \cdot \frac{(-i)^m i^n}{2^{m+n} \prod\limits_{j=1}^{m} \sin \pi\alpha_j \prod\limits_{k=1}^{n} \sin \pi\beta_k} \cdot \left[\prod_{j=1}^{m} [(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j} (z - a_j)^{-\alpha_j}] \right]_- \times \right.$$

$$\left. \left. \times \left[\prod_{k=1}^{n} [(b_k - z)^{\beta_k} - (-1)^{\beta_k} (z - b_k)^{\beta_k}] \right]_- + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=0}^{\alpha_j - 1} A_{jr} \delta^{(r)}(z - a_j) \right) \right\},$$

где $X_0(z)$ — каноническая функция задачи Римана с коэффициентом $G_0(x)$ (см. [2, с. 109]), $g_1(x) = \frac{g(x)}{X_0^+(x)}$, $g_1(x) = \{g_1^+(z), g_1^-(z)\}$; $[...]_-$ означает нижнюю компоненту гиперфункций $f_1(x) = \prod\limits_{j=1}^{m} (x - a_j)^{-\alpha_j}$ и $f_2(x) = \prod\limits_{k=1}^{n} (x - b_k)^{\beta_k}$, соответственно (см. [13]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.
3. *Парасюк О. С.* О “парных” интегральных уравнениях в классе обобщённых функций // Доклады АН СССР. 1956. Т. 110, № 6. С. 957–958.
4. *Köthe G.* Die Randverteilungen analitscher Funktionen // Math. Zeitschrift. 1952. V. 57. P. 13–33.
5. *Беркович Ф. Д.* О решении одной бесконечной системы в классе растущих последовательностей // Доклады АН СССР. 1963. Т. 149, № 3. С. 495–498.
6. *Черский Ю. И.* К решению краевой задачи Римана в классах обобщённых функций // Доклады АН СССР. 1959. Т. 125, № 3. С. 500–503.
7. *Рогожин В. С.* Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщённых функций // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2, № 5. С. 734–745.
8. *Рогожин В. С.* Краевая задача Римана в классе обобщённых функций // Известия АН СССР. 1964. Т. 28. С. 1325–1344.
9. *Рогожин В. С.* Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщённых функций // Доклады АН СССР. 1965. Т. 164. С. 277–280.
10. *Imai I.* Applied Hyperfunction Theory. Dordrecht: Kluwer AP, 1981.
11. *Урбанович Т. М.* К теории краевой задачи Римана в исключительных случаях // Труды 4-й международной конференции “Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений”. Т. 1. Математический анализ. Мн.: Институт математики НАН Беларуси. 2006. С. 131–138.
12. *Бремерман Г.* Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М., Мир, 1968.
13. *Урбанович Т. М.* О решении в классе гиперфункций задачи о скачке // Вестник Полоцкого государственного университета. Серия С. Фундаментальные науки. 2005. № 4. С. 38–44.

УДК 517.537+517.923 → 517.58

РАЗЛОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ${}_mF_{m-1}(z)$ В РЯДЫ ТИПА МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФОРМЫ НЕЙМАНА ПО ОБОБЩЕННЫМ ФУНКЦИЯМ БЕССЕЛЯ

© **М. Д. Хриптун**

Khriptun@math.nsc.ru

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Хорошо известно, что обобщенные гипергеометрические функции (ОГФ)

$$ {}_pF_q(a_1, a_2, \ldots, a_p;\, b_1, b_2, \ldots, b_q;\, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_m}{(b_1)_n \ldots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!} $$

являются решениями многих задач в математике, статистике, математической физике и других областях.

Во многих случаях очень нужно знать поведение этих решений при больших значениях их параметров a_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Для ОГФ стандартное асимптотическое разложение известно, когда аргумент z большой, а параметры фиксированные (см. [1], [2]). Для ${}_pF_q(z)$ дифференциальное уравнение имеет порядок $\max(p, q+1)$. Но для больших порядков уравнений нет подходящего метода для построения равномерного разложения для больших значений их параметров.

В докладе приводим теорему разложения ОГФ ${}_mF_{m-1}(z)$ в модифицированный ряд типа Неймана по обобщенным функциям Бесселя (ОФБ), которую можно использовать для нахождения асимптотического поведения ее при больших значениях параметров a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Теорема. *Если* $\left|\left(\frac{z}{m}\right)^m / (m-1)^{m-1} a_1 \cdot a_2 \cdots a_m\right| < 1$, *то для любых* a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, b *и* z *имеет место разложение*

$$ \frac{(z/m)^b}{\Gamma(b+1)}\, {}_mF_{m-1}\left[a_1, \ldots, a_m;\, \frac{b+1}{m-1}, \ldots, \frac{b+m-1}{m-1};\, \frac{(z/m)^m}{(m-1)^{m-1}\, a_1 \cdots a_m}\right] = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\, {}_{m+1}F_0\left(-l, a_1, \ldots, a_m;\, \frac{1}{a_1 \cdots a_m}\right) \left(\frac{z}{m}\right)^l U^{(m)}_{b+(m-1)l}(z), $$

где ${}_mF_{m-1}(z)$ — *ОГФ,* ${}_{m+1}F_0(-l) = {}_{m+1}F_0\left(-l, a_1, \ldots, a_m;\, \frac{1}{a_1 \cdots a_m}\right)$ — *обобщенный гипергеометрический полином,* $U^{(m)}_b(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(z/m)^{b+mk}}{k!\Gamma[(m-1)k+b+1]}$ — *обобщенная функция Бесселя* (см. [3], формула (3) при $b = \nu_m$), $(a)_n = a(a+1)\cdots(a+n-1) = \Gamma(a+m)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$ — *символ Похгаммера,* $\Gamma(z)$ — *гамма-функция.*

Доказательство теоремы основано на использовании интегрального представления Эйлера для гамма-функции и классических фактов математического анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Braaksma B. L.* Asymptotic Expansion and Analytic Continuation for a Class of Barnes-Integrals. Noordhoff, Groningen, 1963.
2. *Luke Y. L.* The Special Functions and Their Approximations. New York: Academic Press, 1969. V. I–II.
3. *Хриптун М. Д.* Теоремы умножения для решений обобщенного дифференциального уравнения Бесселя m-го порядка // Дифференциальные уравнения. 1975. Т. 11, № 2. С. 287–293.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 483–483

УДК 517

РАЦИОНАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

© В. Г. Чередниченко

maths@sibupk.nsk.su

Сибирский университет потребительской кооперации, Новосибирск

В работе автора [1] дан эффективный способ нахождения рациональной интерполяции. Рациональная функция строится в аналитическом виде по её значениям в конечном числе точек, почти также, как полином. Преодолена основная трудность в использовании рациональной интерполяции во многих задачах анализа, вычислительной математики, приложений, например при аппроксимации, аналитическом продолжении, прогнозировании. Весьма расширились возможности для использования априорной информации об изучаемом объекте. Здесь приводятся результаты ряда численных экспериментов, устанавливается связь с аппроксимациями Паде [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чередниченко В. Г.* Рациональная интерполяция, аналитическое решение // Сибирский математический журнал. 2002. Т. 43, № 1. С. 188–193.
2. *Cherednichenko V. G.* Rational approximation and analytical continuation from a finite member of points // J. Ivn. Ill-Posed Problems. 2006. T. 14, № 7. C. 643–649.
3. *Бейкер Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. М.: Мир, 1986.

УДК 517.545

МЕРОМОРФНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ И ФУНКЦИИ НА КОНЕЧНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

© В. В. Чуешев*, А. Н. Чичкакова**

* vvchueshev@ngs.ru

* *Кемеровский государственный университет, Кемерово;*
** *Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск*

Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$ и F' — (конечная) риманова поверхность типа (g, n), $n \geq 1$. Обозначим через $\Omega(F')$ пространство голоморфных (абелевых) дифференциалов на F'.

Теорема 1. *Комплексное векторное пространство $\Omega(F')$ будет бесконечномерно.*

Зададим отображение $\chi : \Omega(F') \to \mathbf{C}^{2g+n-1}$ по правилу

$$\omega \to \left(\int\limits_{a_1} \omega, \ldots, \int\limits_{a_g} \omega, \int\limits_{b_1} \omega, \ldots, \int\limits_{b_g} \omega, \int\limits_{c_1} \omega, \ldots, \int\limits_{c_{n-1}} \omega \right),$$

где $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, c_1, \ldots, c_n$ — образующие в группе $\pi_1(F', O)$.

Теорема 2. *Пространство $\Omega(F') = \ker\chi \bigoplus Im\chi$, причём ядро $\ker\chi$ бесконечномерно и состоит из всех точных голоморфных дифференциалов на F', а $Im\chi$ имеет размерность $2g + n - 1$.*

Теорема 3. *Для любой точки Q на F' и для любого натурального числа $l \geq 1$ существует мероморфная функция f на F' такая, что $(f) \geq \frac{1}{Q^l}$, но $(f) \ngeq \frac{1}{Q^{l-1}}$ на F', т. е. l будет непробелом Вейерштрасса для Q на F'.*

Теорема 4. *Для любой последовательности $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ и для любого натурального числа $s \geq 1$ существует мероморфная функция f на F' такая, что $(\widetilde{f}) \geq \frac{1}{Q_l \cdots Q_s}$ и $(\widetilde{f}) \ngeq \frac{1}{Q_l \cdots Q_{s-1}}$, т. е. s будет непробелом Нётера для данной последовательности на F'.*

Таким образом, теоремы Вейерштрасса и Нётера о пробелах не имеют аналогов на F'.

Следующая теорема является аналогом теоремы Абеля для конечной поверхности.

Теорема 5. *Дивизор D является дивизором однозначной мероморфной функции f на F' класса A_1 тогда и только тогда, когда существуют целые числа $m_1, \ldots, m_n$ такие, что:*
1) $-degD = m_1 + \cdots + m_n$,
2) $-\varphi(D) \equiv \sum\limits_{j=1}^{n} m_j \varphi(P_j)$ *в многообразии Якоби* $J(F)$ *для* F.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чуешев В. В.* Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности. Кемерово: Изд-во Кемер. ун-та, 2005. 401 с.
2. *Behnke H., Sommer F.* Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veranderlichen. Berlin: Springer-Verlag, 1955

УДК 517.55

О МЕТОДЕ СУММИРОВАНИЯ КРАТНОГО СТЕПЕННОГО РЯДА В СПИРАЛЬНОЙ ЗВЕЗДЕ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

© Е. И. Яковлев

yei@nm.ru

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. академика М. Ф. Решетнева, Красноярск

Метод суммирования Бореля — один из наиболее популярных методов суммирования степенного ряда (см., например, [1–4]). Впервые понятие α-спиральной звезды Миттаг-Леффлера при изучении области суммирования ввел Е. Линделеф. Н. У. Аракелян в [1] показал, что в случае одного переменного, области эффективной суммируемости могут быть только спиральными. В связи с новой волной интереса к суммированию расходящихся рядов (см., например, [5]) в настоящей работе приводится многомерный аналог метода Бореля суммирования кратного степенного ряда для многомерного обобщения звезды Миттаг-Леффлера.

Всюду в дальнейшем изложении фиксируем $x \in R_0^n := \{x \in R^n x_j > 0, j = 1, \ldots, n\}; \alpha \in R^n$. Пусть

$$f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{\|k\| \geq 0} a_k z^k = \sum_{\|k\| \geq 0} a_{k_1 \ldots k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} \tag{1}$$

— n-кратный степенной ряд, который сходится в некоторой окрестности U начала координат в C^n. В настоящей работе предлагается метод суммирования ряда (1) (строится аналитическое продолжение функции f) в так называемой (x, α)-спиральной области, являющиеся естественным обобщением спиральных областей для C^n. Перейдем к точным определениям.

Определение 1. Пусть $x \in R_0^n, \alpha \in R^n$. Множество G в C^n назовем (x, α)*-спиральным*, если вместе с каждой точкой $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_n^0)$ в области G содержится множество (x, α)-отрезок:

$$\{z \in C^n : z_j = z_j^0 t^{x_j(1+i\alpha_j)}; j = 1, \ldots, n; \forall t \in [0, 1]\}$$

Множество $G \in C^n$ назовем *спиральным параболически звездным* (или просто *спиральным*), если оно (x, α)-спирально для некоторых $x \in R_0^n, \alpha \in R^n$. Аналогично дается определение $(x; \alpha)$-звезды Миттаг-Леффлера.

Определение 2. Максимальную $(x; \alpha)$-спиральную область, в которую голоморфно продолжается функция f, заданная сходящимся n-кратным степенным рядом (1), назовем (x, α)-*спиральной звездой Миттаг-Леффлера* ряда (1) или функции f. Обозначать (x, α)-спиральную звезду Миттаг-Леффлера функции f будем $G_f^{(x,\alpha)}$.

Понятие (x, α)-спиральной звезды Миттаг-Леффлера, естественно, шире понятия x-звезды Миттаг-Леффлера. Особенно наглядно это видно при $n = 1$.

Пример 1. Главная звезда функции $f(z) = (1-z)^{-1}$ совпадает с комплексной плоскостью без луча $[1, \infty)$, а ее α-спиральная звезда Миттаг-Леффлера совпадает с множеством

$$M_\alpha := C \backslash \{z \in C : z = t^{1+i\alpha}, t \in [1, +\infty)\}$$

В случае $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ (x, α)-спиральные множества переходят в x-звездные. В случае одного переменного всякая x-звезда Миттаг-Леффлера совпадает с обычной звездой Миттаг-Леффлера или главной звездой данного степенного ряда. В случае многих переменных это не так.

Пример 2. Функция $f(z_1, z_2) = (1 - z_2 + z_1^2)^{-1}$ имеет главную звезду, отличную от (1,2)-звезды Миттаг-Леффлера.

Таким образом, можно указать функцию f, у которой, например, (1,2)-звезда несет больше информации о функции, чем ее главная или (1,1)-звезда.

Рассмотрение спиральных множеств накладывает свой отпечаток на введение преобразование Бореля. Ассоциируем с функцией f, заданной рядом (1), целую функцию $F_{(x;\alpha,\rho)}(z)$.

Определение 3. Пусть $x \in R_0^n$, $\alpha \in R^n$, $\rho > 0$. Назовем $(x;\alpha,\rho)$*-преобразованием Бореля* функции $f(z)$, заданной рядом (1) функцию $F_{(x;\alpha,\rho)}(z)$, определяемую степенным рядом:

$$F_{(x;\alpha,\rho)}(z) = \sum_{\|k\|\geq 0} \frac{a_{k_1\ldots k_n} z_1^{k_1}\ldots z_n^{k_n}}{\Gamma((x_1(1+i\alpha_1)k_1+\cdots+x_n(1+i\alpha_n)k_n)\rho^{-1}+1)}$$

Функция f, заданная рядом (1), сходящимся в некоторой окрестности U начала координат, и ее $(x,;\alpha,\rho)$-преобразование Бореля связаны интегральной формулой

$$f(z_1,\ldots,z_n) = \int_0^\infty e^{-t} F_{(x;\alpha,\rho)}(z_1 t^{\frac{x_1(1+i\alpha_1)}{\rho}},\ldots,z_n t^{\frac{x_n(1+i\alpha_n)}{\rho}})dt. \tag{2}$$

Формула (2) справедлива всюду в области сходимости ряда (1), но интеграл в формуле (2) может абсолютно и равномерно сходиться и в большей области, давая тем самым аналитическое продолжение функции f.

Теорема. *Пусть f голоморфна в некоторой окрестности начала координат в C^n, задана там кратным степенным рядом (1) и $F_{(x;\alpha,\rho)}$ — ее спиральное преобразование Бореля. Тогда формула*

$$f(z) = \lim_{\rho\to\infty}\int_0^\infty e^{-t} F_{(x;\alpha,\rho)}(z_1 t^{\frac{x_1(1+i\alpha_1)}{\rho}},\ldots,z_n t^{\frac{x_n(1+i\alpha_n)}{\rho}})dt.$$

дает голоморфное продолжение функции f в любую область D, компактно принадлежащую $G_f^{x;\alpha}$ — $(x;\alpha)$-звезде Миттаг-Леффлера функции f.

В случае $n=1$ настоящий результат в усиленном варианте принадлежит С. К. Балашову и имеется в [5].

В [2, 3] даны продолжения ряда вида (1) соответственно в его (x)-звезду и главную звезду Миттаг-Леффлера с помощью иных формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аракелян Н. У.* Об эффективном аналитическом продолжении степенных рядов // Матем. сб. 1984. Т. 124, № 5. С. 24–44.
2. *Маергойз Л. С.* Асимптотичекие характеристики целых функций и их приложения в математике и биофизике. Н.: Наука, 1991.
3. *Айзенберг Л. А., Трутнев В. М.* Об одном методе суммирования Бореля кратных степенных рядов // Сиб. матем. журнал. 1971. Т. 12, № 6. С. 1398–1404.
4. *Балашов С. К.* О целых функциях вполне регулярного роста ао кривым правильного вращения. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов-на-Дону, 1972. 107 с.
5. *Рамис Ж.-П.* Расходящиеся ряды и асиптотические теории. М. – Ижевск: Инст. комп. иссл., 2002. 80 с.

УДК 517.544

APPLICATIONS OF THE RIEMANN – HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM ON RIEMANN SURFACES IN MECHANICS AND PHYSICS

© Yu. A. Antipov *, V. V. Silvestrov **

* antipov@math.lsu.edu, ** v_silvestrov@mail.ru

* *Louisiana State University, Baton Rouge, USA;*
** *Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Moscow, Russia*

The following problems of mechanics and physics are considered:

(1) scattering problem of electromagnetic waves by a right-angled wedge when one of the sheets is magnetically conductive and the second one is perfectly electrically conductive, and a scattering problem of a plane electromagnetic wave from an anisotropic half-plane with four different complex impedance parameters,

(2) cavitational flow of ideal fluid in multiply-connected regions,

(3) stress concentration in 2d composites with cracks and inclusions along the interface (the Comninou type models of frictionless contact and other models),

(4) contact of a stringer of piecewise thickness and rigidity located (i) on the boundary of a plate or (ii) on the junction of two different plates.

Mathematically, these models are formulated as the vector Riemann – Hilbert boundary value problem with a generalized Chebotarev – Khrapkov matrix coefficient, a system of first-order difference equations or a scalar second-order difference equation with meromorphic periodic coefficients, or a vector Riemann – Hilbert problem with a piece-wise constant matrix coefficient. A closed-form solution to the problems listed are found by a technique based on the reduction to the Riemann – Hilbert problem on a hyperellitic surface and its solution. The practical implementation of the procedure proposed requires the solution of the associated Jacobi inversion problem. Formulas for the Riemann constants by different authors are revised. Numerical solution of the Jacobi problem on a surface of genus 3 arising in the scattering problem is discussed.

The main results are reported in [1–6].

The research is supported by the Russian Foundation for Basic Research grant 07-01-00038 and Louisiana Board of Regents grant LEQSF(2005-07)-ENH-TR-09.

REFERENCES

1. *Antipov Y. A., Silvestrov V. V.* Factorization on a Riemann surface in scattering theory // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2002. V. 55, N 4. P. 607–654.
2. *Silvestrov V. V., Efimova E. G.* Cavitational streamlining of two plates below the free surface // High Speed Hydrodynamics: Proceedings of the International Summer Scieintific School. Cheboksary – Washington: Cortana Corporation, 2002. P. 187–190.
3. *Silvestrov V. V.* The method of Riemann surface in the problem on interface cracks and inclusions with concentrated forces // Trans. Schools High. Educ., Math. (Rus. Math.). 2004. N 7. P. 78–91.
4. *Antipov Y. A., Silvestrov V. V.* Second-order functional-difference equations. I: Method of the Riemann-Hilbert problem on Riemann surfaces; II: Scattering from a right-angled conductive wedge for E-polarization // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2004. V. 57, N 2. P. 245–265 (part I); 267–313 (part II).
5. *Antipov Y. A., Silvestrov V. V.* Electromagnetic scattering from an anisotropic impedance half-plane at oblique incidence: an exact solution // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2006. V. 59, N 2. P. 211–251.
6. *Antipov Y. A., Silvestrov V. V.* Method of Riemann surfaces in the study of supercavitating flow around two hydrofoils in a channel // Physica D. 2007 (submitted).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 488–489

УДК 515.176 + 517.548 + 517.55

EQUIVARIANT HOMEOMORPHISMS IN CARNOT GROUPS AND SYMMETRIC SPACES AND THEIR QUASICONFORMALITY

© Boris N. Apanasov

apanasov@ou.edu

University of Oklahoma, Norman, OK, USA
Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

1. Introduction. In order to study homeomorphisms $M \to M'$ of two locally symmetric manifolds (or orbifolds) M and M' (locally modelled on a non-positive curved symmetric space X or its Carnot group $\mathcal{N} = \partial X \backslash \{\infty\}$, one has equivariant homeomorphisms $f : X \to X$, that is homeomorphisms compatible with the action of the fundamental group $\Gamma = \pi_1(M) \subset \operatorname{Aut} X$ in the sense that $f \Gamma f^{-1} = \Gamma' \subset \operatorname{Aut} X$. For such homeomorphisms f it is naturally to ask whether they are quasiconformal (or homotopic to quasiconformal ones). Since the classical works by M. A. Lavrentiev, L. V. Ahlfors, I. N. Vekua, P. P. Belinskii and Yu. G. Reshetnyak, such homeomorphisms were studied by many authors, especially in the case of Riemann surfaces, see [1, 2]. In particular, such quasiconformal homeomorphisms f of a given domain $D \subset \mathbb{C}$ can be taken as generalized homeomorphic solutions $w = f(z)$ of Beltrami's equation $w_{\bar z} - \mu(z) w_z = 0$, where w_z and $w_{\bar z}$ are locally square-integrable and $\mu(z)$ is a measurable function in D with $||\mu||_\infty < 1$, see [1]. In the case of mappings of Riemann surfaces the coefficient $\mu(z)$ must also represent a Beltrami differential $\mu(z) d\bar z / dz$, i.e. this form must remain invariant under a change of the local parameter z on the given Riemann surface, or to be Γ-invariant for the action of its fundamental group Γ on $\mathbb{C}$, i. e. $\mu(\gamma(z))\overline{\gamma'(z)}/\gamma'(z) = \mu(z)$ for all $\gamma \in \Gamma$, $z \in \mathbb{C}$, see [2, 3].

2. Equivariant homeomorphisms in symmetric rank one spaces. Especially such equivariant homeomorphisms become important for deformations of locally symmetric spaces of rank one, that is spaces modeled on $\mathbb{F}$-hyperbolic spaces $H^n_{\mathbb{F}}$ over numbers $\mathbb{F}$ that are either real $\mathbb{R}$, complex $\mathbb{C}$, quaternions $\mathbb{H}$, or Cayley numbers (octonions) $\mathbb{O}$. First, Mostow's theorem on rigidity of deformations $\rho : \Gamma \to H$ of lattices $\Gamma \subset H$ in the isometry group H of a $\mathbb{F}$-hyperbolic spaces $H^n_{\mathbb{F}}$ implies that any homeomorphism $M \to M'$ of such locally symmetric spaces of finite volume is homotopy equivalent to an isometry between them. Then K.Corlette and M. Gromov – R. Schoen extended the G. A. Margulis superrigidity theorem for lattices Γ in semisimple Lie groups H of real rank at least two to the case of real rank one symmetric spaces which correspond to automorphisms groups $\mathrm{O}(n,1)$, $\mathrm{U}(n,1)$, $\mathrm{Sp}(n,1)$ and F_4^{-20} of real, complex and quaternionic hyperbolic spaces and the hyperbolic Cayley plane. Namely they proved that any lattice Γ in $\mathrm{Sp}(n,1)$, $n \geq 2$, or F_4^{-20} is superrigid over archimedian fields and in p-adic case (which also implies its arithmeticity). For a geometric sense of such superrigidity for quaternionic manifolds, see [4, 5].

It is important to note that these quaternionic and octonionic hyperbolic spaces appear to be very rigid in the sense of quasiconformality. Namely, as P. Pansu [6] observed for the first time, any quasi-isometry there induces only "conformal" mapping at infinity, so one does not have any non-trivial quasiconformal homeomorphisms in the Carnot groups at their infinity. Nevertheless our constructions show, see [7–10]:

Theorem 1. *There is a big class of equivariant homeomorphisms in all type of symmetric spaces $H^n_{\mathbb{F}}$, corresponding to the so called "bending deformations" of locally symmetric rank one manifolds. In the real and complex hyperbolic spaces these bending homeomorphisms appear to be quasiconformal.*

3. Quasiconformal instability in complex spaces. In the remaining cases of real and complex hyperbolic spaces we have many non-arithmetic lattices and there are a number of constructions which show that superrigidity does not hold here either, see [7–10]. However there is a new

type of rigidity for embeddings of uniform lattices $\Gamma \subset \mathrm{PU}(n-1,1) \hookrightarrow \mathrm{PU}(n,1)$ nearby their inclusions (here $\hookrightarrow$ is the natural lifting), see [11]:

Theorem 2. *Let* $\Gamma \subset \mathrm{PU}(n-1,1) \hookrightarrow \mathrm{PU}(n,1)$ *be a uniform lattice in* $\mathrm{PU}(n-1,1)$, $n \geq 2$. *Then for any its representation* $\rho \operatorname{col} \Gamma \to \mathrm{PU}(n,1)$ *nearby the inclusion, the group* $\rho(\Gamma)$ *preserves a complex totally geodesic* $(n-1)$*-subspace where, if* $n > 2$, *its action is conjugate to that of* Γ.

This new rigidity implies that one has no non-trivial quasiconformal homeomorphisms in $H^n_{\mathbb{C}}$ equivariant with respect to the action of mentioned lattices $\Gamma \subset \mathrm{PU}(n-1,1)$. We note however that both conditions of this rigidity, the action of a lattice in an *analytic* subspace and its co-compactness are essential. The latter follows from Theorem 1. The former is related to the existence of non-uniform lattices in complex hyperbolic geometry which appear to be quasiconformally instable, i. e. their small deformations induced by equivariant homeomorphisms of the complex hyperbolic space $H^n_{\mathbb{C}}$ cannot be induced by equivariant quasiconformal conjugations, see Apanasov [12, 13]:

Theorem 3. *Let a complex surface* M *be the total space of a complex disc bundle over a non-compact (hyperbolic) Riemann surface* $S = S_{g,k}$ *of genus* $g \geq 0$ *with* $k \geq 1$ *punctures. Let us assume that* M *has a complex hyperbolic structure* $M_0 = (M, \rho_0)$ *such that the surface* S *is embedded in* M_0 *as its section, a totally geodesic complex 1-submanifold. Then the Teichmüller space* $T(M)$ *of complex hyperbolic structures on* M *has a non-trivial smooth curve* $\{M_t = (M, \rho_t), -\varepsilon < t < \varepsilon\}, \varepsilon > 0,$ *passing through* M_0 *and consisting of complex surfaces* M_t *homeomorphic but not quasiconformally equivalent to* M_0 *for any* $t \neq 0$.

4. Combinatorial conditions on quasiconformal conjugations in real spaces. For the most flexible real hyperbolic geometry, we give a construction [14] which negatively answers the following question related to quasiconformal homeomorphisms equivariant with discrete Möbius actions in unit balls (or the question on the shape of quasiconformal balls in $\mathbb{R}^n$).

Question 4. *Whether any discrete Möbius group* G *generated by finitely many reflections with respect to spheres* $S^{n-1} \subset S^n$ *and such that its fundamental polyhedron* $P(G) \subset S^n$ *is the union of two contractible polyhedra* $P_1, P_2 \subset S^n$ *of the same combinatorial type is quasiconformally conjugate in the sphere* S^n *to some Fuchsian group* Γ *preserving a round ball* $B^n \subset S^n$ *?*

REFERENCES

1. *Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Pergamon, New York, 1962.
2. *Krushkal S. L.* Quasiconformal Mappings and Riemann Surfaces. Winston, New York, 1979.
3. *Krushkal S. L., Apanasov B. N., and Gusevskii N. A.* Kleinian Groups and Uniformization in Examples and Problems. American Math. Soc., Providence, 1986.
4. *Kamishima Y.* Geometric rigidity of spherical hypersurfaces in quaternionic manifolds // Asian J. Math. 1999. V. 3. P. 519–555.
5. *Apanasov B. N.* Action of non-superrigid lattices in symmetric rank one spaces // Russian Acad. Sci. Doklady Math. 2000. V. 62. P. 237–240.
6. *Pansu P.* Métriques de Carnot – Carathéodory et quasiisométries des espaces symmétries de rang un // Ann. of Math. 1989. V. 129. P. 1–60.
7. *Apanasov B. N.* Conformal Geometry of Discrete Groups and Manifolds // De Gruyter Expositions in Math. V. 32. W. de Gruyter, Berlin – New York, 2000.
8. *Apanasov B. N.* Bending deformations of complex hyperbolic surfaces // J. reine angew. Math. 1997. V. 492. P. 75–91.
9. *Apanasov B. N.* Geometry and topology of complex hyperbolic and CR-manifolds // Russian Math. Surveys. 1988. V. 52. P. 895–928.
10. *Apanasov B. N. and Kim I.* Cartan Angular Invariant and Deformations in Rank One Symmetric Spaces // Sbornik: Mathematics. 2007. V. 198:2. P. 153–175.
11. *Corlette K.* Flat G-bundles with canonical metrics // J. Diff. Geom. 1988. V. 28. P. 361–382.
12. *Apanasov B. N.* Deformations and stability in complex hyperbolic geometry. Preprint, MSRI at Berkeley, 1997. http://www.msri.org/publications/preprints/online/1997-111.html
13. *Apanasov B.N.* Disc bundles with quasiconformally instable complex structures // Proc. Steklov Math. Inst. 2006. V. 252. P. 1–19.
14. *Apanasov B. N. and Tetenov A. V.* Quasifuchsian groups generated by reflections and deformations of hyperbolic structures // Russian Acad. Sci. Doklady Math. 2006. V. 74. P. 552–554.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 490–490

УДК 517.9

COMPLEX PARTIAL DIFFERENTIAL MODEL EQUATIONS

© Heinrich Begehr

begehr@math.fu-berlin.de

Freie Universität Berlin, Berlin, Germany

A model complex partial differential equation is an equation the partial differential operator of which is just the main part of a linear differential operator. Typical examples are the Cauchy – Riemann operator, the Bitsadze, the Laplace, the polyanalytic, the polyharmonic operator and any product of powers of the Cauchy – Riemann and the anti Cauchy – Riemann operators. The fundamental solutions to these operators are contained in a family of kernel functions leading to a hierarchy of higher order Pompeiu integral operators appearing in higher order Cauchy – Pompeiu representations. The basic Pompeiu operator and the simplest Cauchy – Pompeiu formula were fundamental tools in I. N. Vekua's treatment of the generalized Beltrami equation, in particular for developing his theory of generalized analytic functions. In the same way any complex higher order linear differential equation can be treated. Using potentials of the leading term of the differential operator given in form of the respective higher order Pompeiu operator the differential equation can be rewritten as a singular integral equation. This integral equation can under some ellipticity condition be treated by the Fredholm theory.

The Cauchy – Pompeiu representations are in general not proper for solving boundary value problems. Hence they need modification in order to be useful for solving boundary value problems. Such boundary value problems are of Schwarz, Dirichlet, Neumann, Robin type. For higher order equations however a variety of boundary value problems arise by combining these basic problems. Not all of them are well posed so that solvability conditions have to be determined before solutions can be looked for. A justification for posing boundary value problems is the aesthetics of the resulting representation formula of the solution. Explicit solutions can be only attained for particular domains. These are discs, half planes, quarter planes etc. Particular kernel functions appearing are the higher order Schwarz kernel, polyharmonic Green, Neumann, Robin functions and hybrid ones consisting of convolutions of lower order ones. There is thus a variety of such kernel functions and it becomes a combinatorial problem to determine all of them. This is the more as there are other polyharmonic Green – Almansi functions not given in an inductive way by a convolution process. The latter were used by I. N. Vekua in solving a Dirichlet boundary value problem for polyharmmonic functions. Using the proper higher order Pompeiu operator this Dirichlet problem can be solved for the related higher order Poisson equation. But as was just mentioned there is a variety of Dirichlet problems for this equation. Some of them are formulated and solved.

УДК 517.955

GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS IN FRACTIONAL SPACES AND SOME APPLICATIONS

© N. K. Bliev

Bliev@math.kz

Institute of Mathematics, Almaty, Kazakhstan

1^0. We consider the differential equation

$$\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

in a bounded domain G of points $z = x + iy$.

The theory of I. N Vekua [1] of generalized analytic functions, which are the generalized (in some sense) solutions of the equation (1), where $A(z)$, $B(z) \in L_q(G)$, $q > 2$, have found many real targets of applications. A somewhat different approach to the theory is presented in [2]. A very wide class of an elliptic system of equations of a more general form reduced to the form (1).

The generalized in the sense of [1] solutions of equation (1) with coefficients $A(z)$ and $B(z)$ from Nikol'skii – Besov spaces $B^{\alpha}_{p,\theta}(G)$, where α, p, θ satisfy one of the conditions

$$\text{a) } 1 < p < 2, \quad \alpha = \frac{2}{p} - 1, \quad \theta = 1,$$

$$\text{b) } p \geq 2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 1 \leq \theta \leq \infty,$$

G is a domain with Lyapunov's boundary $\Gamma \in C^1_\nu$, $\alpha < \nu \leq 1$, are the generalized analytic functions [3]. The regular solutions of the equation (1) belong to $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$. In the case b) there occurs the imbedding $B^{\alpha}_{p,\theta}(G) \subset L_q(G)$ for some $q > 2$, that we have the case [1]. However, the assertion on the unconditional solvability of equation (1) in the fractional spaces $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$ is a new one. In the case a), for $1 < p < 2$, $\alpha = \frac{2}{p} - 1$, $B^{\alpha}_{p,1}(G)$ is not imbedded in $L_q(G)$ for any $q > 2$, but $B^{1+\alpha}_{p,1}(G) \subset C(\overline{G})$ [4]. Thus, this assertion introduces a new class of coefficients, not included in $L_q(G)$, $q > 2$, for which equation (1) always has a (regular) solution, which is continues (from $B^{1+\alpha}_{p,1}(G)$) in closed region $\overline{G}$. Moreover, in the case b) for $\alpha p = 2$ and $\theta = 1$, we have $B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G) \subset C(\overline{G})$, but $B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G) \nsubseteq C_\beta(\overline{G}), 0 < \beta \leq 1, B^{1+\frac{2}{p}}_{p,1}(G) \subset C^1(\overline{G})$. Thus, it follows from this assertion that, for any continuous (not necessarily Holder continuous) $A(z)$, $B(z) \in B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G)$, the equation (1) has a solution in the classical sense. This is a new property of equation (1) (in general for elliptic equations) has been proved for any Holder continuous coefficients.

2^0. The Cauchy type integral

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - z}, \quad z \in G,$$

with arbitrary density $f(t) \in B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma) \subset C(\Gamma)$, $1 < p < 2$, as a function of z belongs to $B^{\frac{2}{p}}_{p,1}(G) \subset C(\overline{G})$ [3]. This result seems interesting because it is known that a Cauchy type integral with arbitrary continuous density in general need not be a continuous function in the closed domain.

3^0 . Consider the singular integral equation

$$a(t)f(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)d\tau}{\tau - t} + (Kf)(t) = g(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

where $a(t)$, $b(t)$, $g(t) \in B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$, $1 < p < 2$, are given functions, K is a compact operator in $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma)$. Let $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ on Γ i. e., (2) is the elliptic equation.

The equation (1) is Fredholm one in $B^{\frac{1}{p}}_{p,1}(\Gamma) \subset C(\Gamma)$, $1 < p < 2$. It is possible to show for equation (2) the spaces of Fredholm's solvability in the cases, when ellipticity is violated at the finitely many points on Γ [5].

The analogous results are valid for the systems of the equations of type (2).

REFERENCES

1. *Vekua I. N.* Generalized Analytic Functions. Pergamon Press, Oxford, 1962.
2. *Bers L.* Theory of Pseudo-Analytic Functions. New York Univ., New York 1953.
3. *Bliev N. K.* Generalized Analytic Functions in Fractional Spaces. Longman, 1997.
4. *Besov O. V., Il'in V. P., Nikol'skii S. M.* Integral Representations of Functions and Embedding Theorems. P. 1, 2. New York, 1978, 1979.
5. *Bliev N. K.* Singular integral operators with Cauchy kernel in fractional spaces // Siberian Math. Journal. 2006. V. 47, № 1. C. 37–45 (in Russian).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 493–494

УДК 517.95+519.46

ON COMMON ZEROES OF THE LAPLACE – BELTRAMI EIGENFUNCTIONS

© V. M. Gichev

gichev@ofim.oscsbras.ru

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Omsk, Russia

Let M be a compact connected closed orientable Riemannian C^∞-manifold, Δ be the Laplace – Beltrami operator on it, and

$$E_\lambda = \{u \in C^2(M) : \Delta u + \lambda u = 0\}.$$

be the eigenspace for an eigenvalue $-\lambda > 0$ (we assume that the functions are real valued). Let $H^p(M)$ denote de Rham cohomologies.

Theorem 1 ([1]). *Let M be as above.*

(1) *If $H^1(M) = 0$, then for any $\lambda \neq 0$ and every $u, v \in E_\lambda$ there exists $p \in M$ such that $u(p) = v(p) = 0$.*

(2) *If M is a homogeneous space of a compact Lie group G acting by isometries, then the converse is true: $H^1(M) \neq 0$ implies the existence of $\lambda \neq 0$ and a pair of $u, v \in E_\lambda$ without common zeroes.*

There is a simple example for the second assertion: let G be the circle group $\mathbb{T} = \mathbb{T}/2\pi\mathbb{Z}$, which acts on itself by the translations. Then $u(t) = cost$, $v(t) = sint$ have no common zero. In fact, (2) follows from this example and the existence of G-equivariant mapping $M \to \mathbb{T}$ for a nontrivial action of G on $\mathbb{T}$, which is a consequence of the assumption $H^1(M) \neq 0$.

For an eigenfunction u, $N_u = u^{-1}(0)$ is said to be the *nodal set*, and connected components of $M \setminus N_u$ are called *nodal domains*. The proof of (1) is based on the following properties of them:

(A) if U, V are nodal domains for $u, v \in E_\lambda$, respectively, and $V \subseteq U$, then $u = cv$ for some $c \in \mathbb{R}$;

(B) $u \in E_\lambda \setminus \{0\}$ cannot keep its sign near every point of N_u.

For a homogeneous space $M = G/H$ and any G-invariant Riemannian metric on M, each G-irreducible invariant subspace $E \subset L^2(M, \sigma)$, where σ is the invariant measure with the total mass 1 on M, is contained in some E_λ. For $a \in M$, let $\phi_a \in E$ be the function which realizes the evaluation functional at a: $\langle u, \phi_a \rangle = u(a)$ for all $u \in E$. For $a_1, \dots, a_k, x, y \in M$, set $a = (a_1, \dots . a_k) \in M^k$, $\phi(x, y) = \langle \phi_x, \phi_y \rangle$, and

$$\Phi^a_{k,y}(x) = \det \begin{pmatrix} \phi(a_1, a_1) & \dots & \phi(a_1, a_k) & \phi(a_1, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi(a_k, a_1) & \dots & \phi(a_k, a_k) & \phi(a_k, y) \\ \phi(x, a_1) & \dots & \phi(x, a_k) & \phi(x, y) \end{pmatrix}.$$

Further, let Φ_k be the mapping $(a, y) \to \Phi^a_{k,y}$, $n = \dim E - 1$, and set $U_n = \Phi_n(M^{n+1})$.

Theorem 2. *If $u \in E$, $u \neq 0$, then there exists a nontrivial continuous function $c(a, y)$ on $(N_u)^n \times M$ such that $\Phi^a_{n,y} = c(a, y)u$. Moreover, U_n is a compact symmetric neighbourhood of zero in E. For every $a \in M^n$, there exists a nontrivial nodal set which contains a; for a generic a, this set is unique.*

The construction, which is classical, can be applied to each finite dimensional space of continuous functions but usually the set U_n is small. The proof essentially uses (A).

Let M be the unit sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Then $\lambda_n = n(n+1)$ is the n-th eigenvalue. The corresponding eigenspace $E_n = E_{\lambda_n}$ consists of spherical harmonics; they can be defined as restrictions to S^2 of homogeneous polynomials of degree n on $\mathbb{R}^3$ which are harmonic with respect to the ordinary Laplacian in $\mathbb{R}^3$. The zonal spherical functions ϕ_a can be written explicitly by the n-th Legendre polynomial; $\dim E_n = 2n+1$. Let $\nu(u,v)$ be the number of points in $N_u \cap N_v$, where $u, v \in E_n$. This set can be infinite. However, $\nu(u,v) \leq 2n^2$ for generic $u, v \in E_n$, and there are examples of u, v such that $\nu(u,v) = 2n^2$. The greatest lower bound is not known but partial results and computer experiments support the following conjecture: $\nu(u,v) \geq 2n$ for all $u, v \in E_n$. Also, there are examples for the equality (for all $n > 0$).

For problems and results (up to 2001) on the geometry of eigenfunctions, see the survey [2] and references in it.

REFERENCES

1. *Gichev V. M.* A note on common zeroes of Laplace–Beltrami eigenfunctions // Ann. of Global Anal. and Geom. 2004. V. 26. P. 201–208.
2. *Надирашвили Н., Тот Дж., Якобсон Д.* Геометрические свойства собственных функций// Успехи матем. наук. 2001. Т. 56, № 6. С. 67–88.

УДК 517.54

ON CAUCHY AND MORERA TYPE CRITERIONS FOR BOUNDEDNESS OF THE COEFFICIENT OF DISTORTION

 Mikhail Korobkov

korob@math.nsc.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

We give criteria for a mapping to have bounded distortion in terms of an integral estimate of the multiplicity function without any a priori assumption on the differential properties of the mapping. In this talk we extend some results of [1].

Let Δ be a domain in $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$. Recall that a continuous mapping $f = (f_1, \ldots, f_n) : \Delta \to \mathbb{R}^n$ is *a mapping with bounded distortion* [2] if the following conditions are fulfilled:

(i) $f \in W^{1,n}_{loc}(\Delta)$;

(ii) The Jacobian $J(f, x) = \det\big(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}\big) \geq 0$ almost everywhere (a. e.) in Δ;

(iii) There exists a constant $K \geq 1$ such that $|f'(x)|^n \leq K n^{n/2} J(f, x)$ a. e. in Δ, where $|f'(x)| = \big(\sum_{k,l=1}^{n} (\frac{\partial f_k}{\partial x_l})^2\big)^{1/2}$ is the Hilbert norm of the derivative $f'(x)$. The least constant K is called the *distortion coefficient* (*dilatation*) of f [2].

Denote the differential form $f_k \, dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_l} \wedge \cdots \wedge dx_n$ by ω_{kl}. Given a ball $B = B(x, r) \subset \Delta$, consider the numerical $(n \times n)$-matrix

$$\Omega(B) = \Bigg(\int\limits_{\partial B} \omega_{kl}, \ 1 \leq k, l \leq n \Bigg).$$

Endow the space $\mathcal{M}_n$ of all $(n \times n)$-matrices with the Hilbert norm

$$|(a_{kl})| = \Bigg(\sum_{k,l} a_{kl}^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Theorem. *Let $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$ be a continuous mapping of a domain $\Delta \subset \mathbb{R}^n$. Then $\exists K_0 > 1$ (K_0 doesn't depend on f) such that f is a mapping with distortion at most $K \in [1, K_0]$ if and only if the inequalities*

$$\left(\frac{|\Omega(B)|}{|B|} \right)^n \leq n^{n/2} K^n \, \frac{\int_{\mathbb{R}^n} N(f|_B, y)\, dy}{|B|} < \infty;$$

$$\det \Omega(B) \geq 0$$

hold for every ball $B = B(x, r)$ such that $B(x, 2r) \subset \Delta$.

Here we used the following notations. $|E|$ is the Lebesgue measure of a set E, $N(f|_E, \cdot)$ is the multiplicity function of the restriction $f|_E$, i. e., $N(f|_E, y) = \operatorname{card}(f^{-1}(y) \cap E)$.

Remark. Under the extra topological assumption that f is sense-preserving, above Theorem was proved in [1, Theorem 1']. Thus, Theorem 1 is a substantial strengthening of Theorem 1' of [1].

The author was supported by the Russian Foundation for Basic Research (Grant 05-01-00482-(a)) and the President of the Russian Federation (Grant MK-3778.2004.1)

REFERENCES

1. *Kopylov A. P., Korobkov M. V., Ponomarev S. P.* Stability in the Cauchy and Morera theorems for holomorphic functions and their spatial analogs // Sibirsk. Mat. Zh. 2003. V. 44, № 1. P. 120–131.
2. *Reshetnyak Yu. G.* Spase Mappings with Bounded Distortion. Providence, Amer. Math. Soc., 1989.

УДК 514.114, 514.132

TUTTE'S PROBLEM ON THE NUMBER OF MAPS ON RIEMANN SURFACE

© A. D. Mednykh

smedn@mail.ru

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia
Universidad Técnica Federico Santa Maria, Valparaiso, Chile

Let S be a closed Riemann surface. A graph G embedded into S is called a *map* or *dessins d'enfants* if any connected component of $S\backslash G$ is a disc. Topological and combinatorial background of the theory of maps was created by Tutte in a series of "Census"papers in 1962-1963. Later, in his famous Esquisse d'un programme (1984) Grothendick relied the investigation of maps with many problems in Complex Analysis, Combinatorial Theory, Number Theory, and Theory of Fuchsian groups. In particular, it turns that any map on Riemann surface is canonically associated with a meromorphic function having three critical values (Belyi function). In this case, Riemann surface is defined by an algebraic equation whose coefficients are algebraic numbers.

Two maps G and G' on Riemann surface S are *equivalent* if there is an orientation preserving homeomorphism of S sending G onto G'. A map is called *rooted* if one of its oriented edges is distinguished as a root. Isomorphisms between rooted maps take root into root. The main object of our consideration is the Tutte problem on the number of non-isomorphic maps of given genus with given number of edges x6ъ. Rooted version of this problem for genus [6] was solved by Tutte himself. A explicit formula for the number of rooted maps on the torus $(g = 1)$ was obtained by D. Arquès [1]. The generating functions for genus $g = 2$ and $g = 3$ cases were derived in [2]. In [4] a new method was suggested to calculate the number of conjugacy classes of subgroups in an arbitrary finitely generated group. As an application of this method we give the complete solution of Tutte's problem for the maps of prescribed genus and with given number of edges [5]. Earlier, this problem was solved only for the sphere [3]. As a further development of the method we suggest a new formula for the number of chiral pairs of maps (*twins*) with prescribed number of edges.

The research is partially supported by the Russian Foundation for Basic Research (grant 06-01-00153), INTAS (grant 03-51-36663) and Fondecyt (grants 7050189 and 1060378).

REFERENCES

1. *Arquès D.* Relations fonctionelles et dénombrement des cartes pointées sur le torre // J. Combinatorial Theory, Ser(B). 1987. V. 43. P. 253–274.
2. *Bender E. A., Canfield E. A.* The number of rooted maps on an orientable surface // J. Combinatorial Theory, Ser(B). 1991. V. 53. P. 293–299.
3. *Liskovets V. A.* Enumeration of nonisomorphic planar maps // Selecta Math. Sovietica. 1985. V. 4. P. 303–323.
4. *Mednykh A. D.* A New Method for Counting Coverings over Manifold with Finitely Generated Group // Doklady Mathematics. 2006. V. 74, N 1. P. 498–502.
5. *Mednykh A. D., Nedela R.* Enumeration of unrooted maps with given genus // Journal of Combinatorial Theory, Ser(B). 2006. V. 96. P. 706–729.
6. *Tutte W. T.* A census of planar maps // Canad. J. Math. 1963. V. 15. P. 249–271.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 497–498

УДК 517.5

BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ANALYTIC FUNCTIONS IN A RING DOMAIN

© T. S. Vaitekhovich

vaiteakhovich@mail.ru

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Four basic boundary value problems, namely, Schwarz, Dirichlet, Neumann, Robin for analytic functions or, equivalent, to the homogeneous Cauchy – Riemann equation, are considered in a concentric ring domain $R := \{z \in \mathbb{C}, r < |z| < 1\}$ of a complex plane $\mathbb{C}$, r is a real positive number.

Theorem 1. *The Schwarz problem for analytic functions in a ring domain R*

$$w_{\overline{z}} = 0 \text{ in } R,\ \ Re\, w = \gamma \text{ on } \partial R,\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} Im\, w(z)\frac{dz}{z} = c,$$

for $\gamma \in C(\partial R;\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ given, is uniquely solvable if and only if

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\gamma(z)\frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r}\gamma(z)\frac{dz}{z} = 0.$$

The solution is then given by

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\Big[\frac{\zeta+z}{\zeta-z} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\frac{r^{2n}\zeta}{r^{2n}\zeta - z} + \frac{r^{2n}z}{\zeta - r^{2n}z}\Big\}\Big]\frac{d\zeta}{\zeta} + ic.$$

Theorem 2. *The Dirichlet problem for analytic functions in a ring domain R*

$$w_{\overline{z}} = 0 \text{ in } R,\ \ w = \gamma \text{ on } \partial R,$$

for $\gamma \in C(\partial R;\mathbb{R})$ given, is solvable if and only if for $z \in R$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta} = 0.$$

Then the solution is unique and given by the Cauchy integral

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Theorem 3. *The Neumann problem for analytic functions in a ring domain R*

$$w_{\overline{z}} = 0 \text{ in } R,\ \ zw' = \gamma \text{ on } \partial R,\ w(z_{fix}) = c,$$

for $\gamma \in C(\partial R;\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{C}$ given, $z_{fix} \in R$ is solvable if and only if for $z \in R$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta} = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta}=0$$

are satisfied. If moreover $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta}=0$, *then the solution can be given by*

$$w(z)=c+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\log\Big|\frac{1-z_{fix}\overline{\zeta}}{1-z\overline{\zeta}}\Big|^2\frac{d\zeta}{\zeta}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\log\Big|\frac{z_{fix}\overline{\zeta}-r^2}{z\overline{\zeta}-r^2}\Big|^2\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Theorem 4. *The Robin problem for analytic functions in a ring domain* R

$$w_{\overline{z}}=0 \text{ in } R,\quad w+zw'=\gamma \text{ on } \partial R,\ z_{fix}w(z_{fix})=c$$

for $\gamma\in C(\partial R;\mathbb{R})$, $c\in\mathbb{C}$ *given,* $z_{fix}\in R$ *is solvable if and only if conditions*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{1-\overline{z}\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial R}\gamma(\zeta)\frac{\overline{z}d\zeta}{r^2-\overline{z}\zeta}=0,\ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)d\zeta=0$$

are satisfied for any $z\in R$. *Then the unique solution is given by*

$$w(z)=c+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\Big)(z^n-z_{fix}^{n+1})+$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{-2}\frac{1}{n+1}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=r}\gamma(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}\Big)(z^n-z_{fix}^{n+1}).$$

The work is partially supported by the Belarusian Fund fot Fundamental Research and by DAAD. The author is grateful to Prof. H. Begehr for his assistance during her visit FU, Berlin, winter semester 2006/2007.

REFERENCES

1. *Begehr H.* Complex Analytic Methods for Partial Differential Equations. An introductionary text. World Scientific, Singapore, 1994.
2. *Begehr H.* Boundary Value Problems in Complex Analysis, I // F. Bol. Asoc. Mat. Venezolana. 2005. V. XII, N 1. P. 65–85.
3. *Begehr H.* Boundary Value Problems in Complex Analysis, II // F. Bol. Asoc. Mat. Venezolana. 2005. V. XII, N 2. P. 217–250.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 499–500

УДК 517.581

ON THE GENERALIZED TRICOMI' FUNCTION

© N. Virchenko

lr@online.com.ua

National Technical University of Ukraine "KPI", Kyiv, Ukraine

Let us consider the following generalization (according to Wright) of the Tricomi' function:

$$\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a+1} \, {}_1\Psi_1 \left[\begin{array}{c} (a,\beta) \\ (a,\tau) \end{array} \middle| \, -zt^\tau \right] dt, \tag{1}$$

where $z \in \mathbf{C}$; $a, c \in \mathbf{C}$; $\tau, \beta \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, $\beta - \tau > -1$, $\Gamma(a)$ is the Euler gamma-function [1], ${}_1\Psi_1$ is the Fox – Wright function [2]; as $\beta = \tau = 1$ we have classical Tricomi function $\Psi(a;c;z)$ [1].

Some properties of (1) are studied, in particular, the differential, integral properties, and some applications are given [3].

Theorem 1. *For $z \in \mathbf{C}$, complex $a, c \in \mathbf{C}$; τ, $\beta \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, $\beta - \tau > -1$ there hold the next relations:*

$$\frac{d}{dz}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = -\frac{\Gamma(a+\beta)\Gamma(a+\beta-c-\tau+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}\Psi^{\tau,\beta}(a+\beta;\ c+\tau;\ z),$$

$$(a > c-1,\ a > -\beta);$$

$$\frac{d^n}{dz^n}\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z) = (-1)^n \frac{\Gamma(a+n\beta)\Gamma(a+n\beta-c-n\tau+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}\Psi^{\tau,\beta}(a+n\beta;\ c+n\tau;\ z);$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^a \Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^\beta)\right) = a(a-c+1)z^{a-1}\ \Psi^{\tau,\beta}(a+1;\ c;\ z^\beta);$$

$$\frac{d}{dz}\left(z^{1-c} \Psi^{\tau,\beta}(a;c;z^{-\tau})\right) = (a-c+1)z^{-c}\ \Psi^{\tau,\beta}(a;\ c-1;\ z^{-\tau}).$$

Theorem 2. *If $z \in \mathbf{C}$; $a, c \in \mathbf{C}$; $\tau, \beta \in \mathbf{R}$, $\tau > 0$, $\tau - \beta < 1$, $a \neq 1$, $a \neq c$, then the following relations are valid:*

$$\int_0^z t^{a-2}\Psi^{\tau,\beta}(a;\ c;\ t^\beta)dt = \frac{z^{a-1}}{(a-1)(a-c)}\ \Psi^{\tau,\beta}(a-1;\ c;\ z^\beta),$$

$$\int_0^z t^{-c-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;\ c;\ t^{-\tau})dt = \frac{z^{-c}}{a-c}\ \Psi^{\tau,\beta}(a;\ c+1;\ z^{-\tau}),$$

$$\int_0^1 (1-t)^{-a-c}t^{a-1}\Psi^{\tau,\beta}(a;\ c;\ z^{\tau+\beta}(1-t)^{-\tau})dt = B(a;t-c)\ \Psi^{\tau,\beta}(a;\ a+c;\ z^{\tau+\beta}).$$

The PROOFS of these two theorems are straightforward.

Theorem 3. *As* $a, c \in \mathbf{C}$, $\mathrm{Re}\, a > -1$; $\tau, \beta \in \mathbf{R}$, $\tau - \beta < 1$, $\mathrm{Re}\, a > -\beta$ *the following functional relation is valid:*

$$\Gamma(a+1)\Gamma(a-c+2)\ \Psi^{\tau,\beta}(a+1;\ c;\ z) - \Gamma(a+1)\Gamma(a-c+1)\ \Psi^{\tau,\beta}(a;\ c;\ z) = z\beta\Gamma(a+\beta)\Gamma(a+\beta-c-\tau+1)\ \Psi^{\tau,\beta}(a+\beta;\ c+\tau;\ z).$$

The PROOF of this theorem is carrying out by the comparison of the coefficients at z^n.

The (τ, β)-generalized Tricomi function can be used for the generalization of Γ, B, ζ, $L_\nu^\alpha(z)$-functions etc.

Let us give some of them.

a) (τ, β)-generalized Γ-function:

$${}_{\tau,\beta}\Gamma_a^c(\alpha;\gamma,\omega;b) = \int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}\ e^{-t^\omega}\ \Psi^{\tau,\beta}(a;\ c;\ bt^{-\gamma})dt,$$

where $\mathrm{Re}\, c > \mathrm{Re}\, a > 0$; $\mathrm{Re}\, \alpha > 0$; $\tau \in \mathbf{R}, \tau > 0$; $\beta \in \mathbf{R}$; $\beta > 0$, $b > 0$; $\gamma \geq 1$; $\omega > 0$; $\Psi^{\tau,\beta}(a;c;z)$ is the function (1).

b) (τ, β)-generalized Laguerre's function:

$${}_{\tau,\beta}L_\nu^\alpha(z) = \frac{sin\nu}{\pi}\int\limits_0^1 t^{-\nu-1}(1-t)^{\alpha+\nu}\ {}_1\Psi_1\left[\begin{array}{c|c} (\alpha+1,\tau) & \\ (\alpha+1,\beta) & zt^\tau \end{array}\right]dt,$$

where $\mathrm{Re}\, \alpha \geq -1$, $\mathrm{Re}\,(\alpha+\nu) > -\frac{1}{\alpha}$, ν is not integer; $\tau, \beta \in \mathbf{R}$, $\tau - \beta < 1$, ${}_1\Psi_1$ is the Fox – Wright function.

REFERENCES

1. *Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F. G.* Higher Transcendental Functions. McGraw-Hill, New York, 1953. V. 1.
2. *Kilbas A. A., Saigo M., Trujllo* On the generalized Wright function // Fract. Calc. Appl. Anal. 2002. V. 5, N 4. P. 437–460.
3. *Virchenko N. O.* Generalized special functions and their applications // Nauk. visti. Kyiv: KPI, 2006. N 4. P. 42–49.

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ
THEORY OF ELASTICITY

УДК 539.3

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОЛОСТЯХ В УПРУГИХ СРЕДАХ

© Л. А. Алексеева, Г. К. Кайшибаева

alexeeva@math.kz, gulnarkaishi@mail.ru

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Исследование сейсмических воздействий на протяженные подземные сооружения (трубопроводы, тоннели и т.п.) приводит к модельным задачам о действии сверхзвуковых подвижных нагрузок в цилиндрических полостях, расположенных в упругой среде. При дифракции сейсмических волн от удаленных источников (плоских волн) на сооружении скорость движения возмущений вдоль его оси выше скорости распространения возмущений в упругой среде. Математическое описание таких процессов приводит к решению краевых задач для уравнений и систем уравнений Ламе в подвижной системе координат, которые являются гиперболическими при углах падения волн к оси полости, меньше критического. При закритических углах падения уравнения становятся уравнениями смешанного типа. Для решения таких задач здесь используется метод граничных интегральных уравнений (ГИУ), ранее нами развитый для решения динамических задач в случае бегущих с постоянной скоростью стационарных нагрузок по цилиндрической полости в изотропной упругой среде [1, 2]. Метод базируется на использовании фундаментальных решений уравнений Ламе в подвижной системе координат, обладающих слабыми и сильными особенностями в точках действия сосредоточенных источников, а также на некоторых подвижных конусах — фронтах фундаментальных решений. Исследованы ядра сингулярных ГИУ в сверхзвуковом случае и их асимптотические свойства. На их основе проведены расчеты динамики среды при действии сосредоточенных на оси бегущих сверхзвуковых нагрузок [3]. Разработан алгоритм численного решения сингулярных ГИУ с использованием интерполяции граничных элементов поперечного сечения полости кубическими сплайнами, линейной интерполяции по z перемещений на шаге и кусочно-постоянной на каждом граничном элементе. Решена задача дифракции ударной волны давления на круговой цилиндрической полости в упругой среде при докритических углах падения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеева Л. А.* Граничные интегральные уравнения краевых задач для класса стационарных бегущих решений волновых уравнений в цилиндрических областях. Препринт. Алматы, 1997. 70 с.
2. *Alekseyeva L. A.* Boundary element method of boundary value problems of elastodynamics by stationary running loads // Int. J. Engineering Analysis with Boundary Element. 1998. V. 11. P. 37–44.
3. *Кайшибаева Г. К.* Напряженно-деформированное состояние упругой среды при действии сосредоточенных сверхзвуковых нагрузок // Межд. научная конф. “Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности”, посвящ 70-летию акад. У. А. Султангазина 4-6 октября 2006г. Алматы. С. 56–59.

УДК 539.3

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В АНИЗОТРОПНОЙ ДВУМЕРНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© Ю. А. Боган

bogan@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск

В работе автора [1] построена система регулярных интегральных уравнений для решения второй краевой задачи в анизотропной теории упругости в области с ляпуновской границей и непрерывными по Гельдеру граничными данными. С другой стороны, хорошо известно,см., например, учебник [2], что граничные уравнения теории потенциала для уравнения Лапласа разрешимы в классе непрерывных функций. В статье [3] при помощи одного искусственного приема показано, что решение задачи Дирихле для слабо связанной системы эллиптических уравнений на плоскости непрерывно в замкнутой ограниченной области с ляпуновской границей. Показано, что предложенный в [1] подход приводит к тому же результату естественным образом. без использования искусственных приемов. Этот подход допускает обобщение на произвольно слабо связанные системы уравнений и дать другое доказательство основного результата работы [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боган Ю. А.* Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной двумерной теории упругости // Изв. РАН. Мех. тв. тела. 2005. № 4. С. 17–26.
2. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Госиздат, 1961.
3. *Меликсетян Э. П.* Задача Дирихле для слабо связанных эллиптических систем дифференциальных уравнений с непрерывными граничными данными // Дифф. уравнения. 1982. Т. 18, № 3. С. 541–544.

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЕФОРМАЦИЙ

© О. П. Бушманова

bush@asu.ru

Алтайский государственный университет, Барнаул

Представлено математическое моделирование процесса локализации деформаций в плоском случае на дискретных системах линий — разрезах криволинейной формы. Берега разрезов являются частью границы области, а граничные условия, описывающие взаимодействие берегов, заменяют уравнения состояния в зоне локализации. Условия на линиях локализации деформаций обеспечивают возможность разрывов касательных и нормальных перемещений.

Форма и расположение линий локализации определяются в рамках метода последовательных нагружений в ходе решения задачи или предполагаются известными на основе экспериментальных и теоретических исследований. На первом шаге нагружения начало линии может быть задано при помощи некоторой малой локальной неоднородности в свойствах материала или граничных условиях. На последующих шагах нагружения развитие линии локализации происходит, если выполняются определенные критерии локализации деформаций.

На основе метода конечных элементов построен алгоритм численного моделирования возникновения и распространения разрывов перемещений вдоль разрезов криволинейной формы, расположенных на проблемно-ориентированных сетках конечных элементов с двойными узлами [1, 2].

Получены численные решения задач о деформировании материала в окрестности круглого отверстия в условиях локализации сдвигов на системах логарифмических спиралей с различными углами наклона и различными условиями на разрезах. Условия отражают трение Кулона со сцеплением или постоянное касательное напряжение вдоль линии локализации деформаций. Показано, что численные решения задач с большим количеством разрезов близки к континуальным аналитическим упруго-пластическим решениям.

Проведено численное моделирование начальных стадий выпуска в сходящихся каналах и в емкостях с вертикальными стенками при несимметричном и симметричном развитии линий скольжения. Построены численные решения задач о деформировании материала в условиях локализации сдвигов на системах замкнутых линий, формирующихся при развитом плоскопараллельном течении и на системах разрезов при простом сдвиге, задач об устойчивости откоса и о развитии линии сдвига при повороте подпорной стенки.

Предложенный подход позволяет описывать как стадию предразрушения нагруженного материала, так и промежуточную стадию между состоянием упругости, когда линий скольжения нет, и состоянием континуальной пластичности, когда линии скольжения бесконечно близки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бушманова О. П.* Моделирование локализации сдвигов // ПМТФ. 2003. № 6. С. 164–169.
2. *Бушманова О. П., Ревуженко А. Ф.* О пластическом деформировании в условиях локализации сдвигов на дискретной системе линий // Физическая мезомеханика. 2002. Т. 5, № 3. С. 9–16.

УДК 539.30

АСИММЕТРИЧНАЯ УПРУГОСТЬ

© В. О. Бытев *, Л. И. Шкутин **

* vbytev@utmn.ru, ** shkutin@icm.krasn.ru

* *Тюменский государственный университет, Тюмень;*
** *Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск*

Групповой анализ динамических уравнений классического (неполярного) континуума, являющихся следствием интегральных законов сохранения и классической двупараметрической термодинамики, обнаружил, что преобразование эквивалентности этих уравнений не содержит группы SO_3 (В. О. Бытев [1, 2]). На основе этого результата предложены конститутивные (определяющие) уравнения, решения которых позволяет строить неклассические замкнутые модели жидких и твердых сред. В частности, изучена линейная зависимость симметричного тензора напряжений от симметричного тензора деформаций в предположении, что вся модель среды допускает один оператор вращения (вращательная симметрия). Доказано, что в наиболее общем случае эти тензоры связаны несимметричным тензором преобразования с одиннадцатью независимыми компонентами. Полученная таким образом модель твердой среды названа "асимметричной упругостью".

Новая теория устраняет неоднозначность вырождения трехмерной задачи упругости в двумерную. В рамках этой теории даны постановки трехмерных и двумерных линейных краевых задач и точные решения, обобщающие классические полиномиальные решения, решения А. Лява, Н. И. Мусхелишвили и устраняющие некоторые их парадоксы.

"Asymmetric elasticity" is theory in which the symmetric stress tensor and symmetric strain tensor are related with a nonsymmetric transformation tensor. The transformation tensor structure is established with group analysis of integral conservation laws and classical two-parameter thermodynamics (V. O. Bytev [1, 2]). This new theory guarantees one-valued degeneration of a tree-dimensional elasticity problem to a two-dimensional one. In scope of the theory, the new formulations of two- and tree-dimensional linear boundary problems and exact solutions, generalizing the classical polynomial ones, solutions by A. Love, N. I. Muskhelishvily and eliminating some paradoxes of these solutions, are given.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аннин Б. Д., Бытев В. О., Сенашев С. И.* Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. Новосибирск: Наука, 1985. 144 с.
2. *Bytev V. O.* Building of Mathematical Models of continuum media on the basis of invariance principle // Acta Appl. Math. Kluwer Acad. Publ., Netherlands. 1989. V. 16. P. 117–142.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 505–506

УДК 517.548; 532.5

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ СТОКСА

© Ю. М. Григорьев

grigyum@yandex.ru

Якутский государственный университет им. М. К. Аммосова, Якутск

В двумерных задачах математической физики эффективным аналитическим аппаратом являются различные теории функций комплексного переменного. Определяющий вклад в одну из таких теорий сделал И. Н. Векуа. В его монографии [1] построена практически законченная теория обобщенных аналитических функций комплексного переменного. Многими исследователями ведутся работы по построению обобщений методов комплексных функций для многомерного случая. Развиваются различные варианты гиперкомплексных функций — кватернионный анализ, клиффордов анализ и др. [2–6]. В данной работе рассмотрена неклассическая, имеющая практическое значение, задача для системы Стокса. Показано, что эта задача сводится к задаче продолжения регулярных кватернионных функций неполной кватернионной переменной с куска границы на всю область.

Система Стокса, описывающая медленные течения вязкой несжимаемой жидкости, получается линеаризацией уравнений Навье – Стокса и в стационарном случае имеет вид: $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, $\nabla p - \mu \Delta \mathbf{v} = 0$, здесь $p(\mathbf{r}) \equiv p(x, y, z)$ — давление, $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ — вектор скорости, μ — динамический коэффициент вязкости. Модель такой жидкости находит самые разнообразные применения при решении различных, в том числе и чисто технических, задач. Даже в случае полета тел с достаточно высокой скоростью, но в разреженных слоях атмосферы можно применить такую модель "ползущего течения", т. к. из–за малой плотности разреженного воздуха обеспечивается малость числа Рейнольдса. Система Стокса также используется при моделировании переноса внутренних масс планет приливными деформациями. Кроме этого система Стокса совпадает с уравнениями равновесия несжимаемого упругого тела.

Если ввести функции f_0 и $\mathbf{f}$, связанные с решением системы Стокса соотношениями

$$f_0 = p, \quad \mathbf{f} = \mu \nabla \times \mathbf{v}, \tag{1}$$

то $f = f_0 + \mathbf{f}$ будет леворегулярной кватернионной функцией неполной кватернионной переменной $\mathbf{r} = ix + jy + kz$. Эта связь между системой Стокса и кватернионными функциями была известна давно, но эффективное использование этого факта для решения краевых задач отсутствует. Условие (лево)регулярности таких функций кратко записывается в виде: $\nabla f = 0$, где оператор $\nabla = i\partial_x + j\partial_y + k\partial_z$ действует как кватернионный. Это условие в скалярном виде называется системой Моисила – Теодореску, которая является трехмерным обобщением системы Коши – Римана из комплексного анализа.

Справедлива следующая

Теорема. *Общее решение системы Стокса в классе функций* $\mathbf{v} \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$, $p \in C^1(\Omega) \cap C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *выражается через произвольную регулярную кватернионную функцию* $f, g \in \mathcal{R}(\Omega) \cap C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *и первообразную* $F \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ *функции* f *в виде*

$$2\mu \mathbf{v}(\mathbf{r}) = -3F(\mathbf{r}) - f(\mathbf{r})\mathbf{r} + g(\mathbf{r}), \quad p = -2f_0, \quad \mathbf{r} \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

При этом выполняется тождество $f(\mathbf{r}) \equiv -\frac{1}{2}[p + \mu \nabla \times \mathbf{v}], \quad \mathbf{r} \in \overline{\Omega},$ *а за функцию* F *можно взять любую первообразную* $F \in C^2(\Omega) \cap C^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$ *функции* f, *подчинив* g *условию:* $g_0(\mathbf{r}) = 3F_0(\mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \overline{\Omega}.$

Функцию F называют первообразной регулярной функции f, если она связана с f соотношением $\nabla F = f$. Приведенная теорема обобщает формулы Колосова – Мусхелишвили из плоской теории упругости на трехмерные задачи гидродинамики.

Рассмотрим жидкость, занимающую конечную область $\Omega \in \mathbb{R}^3$. Граница S области Ω является достаточно гладкой и состоит из двух кусков S_1 и S_2, отделенных также достаточно гладким контуром. Пусть на части S_1 границы области известны давление, скорости и касательные вязкие напряжения, а на другой части S_2 граничные условия неизвестны. Такая задача может практически возникнуть в различных ситуациях, когда необходимо найти течение жидкости в некоторой области, если имеется возможность провести полные измерения и найти давление, скорости и вязкие напряжения только на части границы этой области. Подчеркнем, что вся граница области считается известной, т. е. этот класс задач отличается от традиционных задач гидродинамики со свободной границей.

Справедлива следующая

Лемма. *По заданным на S_1 значениям вектора скорости и касательных компонент напряжений однозначно определяются граничные значения ротора вектора скорости на S_1.*

Отсюда следует, что если на S_1 задано еще давление p, то по граничным значениям скорости и касательных напряжений на S_1 будут известны все компоненты регулярной кватернионной функции f, которая связана с решением системы Стокса соотношениями (1). Восстановление по по этим условиям регулярной функции есть задача регулярного продолжения кватернионной функции с куска границы — прямой аналог задачи аналитического продолжения. После нахождения f можно воспользоваться кватернионным представлением (2) общего решения системы Стокса, функция f в этом представлении отличается множителем $-1/2$ от функции f, определенной соотношениями (1) выше. При этом необходимо найти одну из первообразных F функции f. Затем для оставшейся функции g с помощью (2) найдем ее граничные значения на куске S_1 и решим задачу ее продолжения. Таким образом, рассмотренная неклассическая задача сведена к двум задачам продолжения регулярных кватернионных функций с куска границы. Такие задачи, как известно, относятся к классу условно-корректных краевых задач математической физики. Если решение такой задачи существует, то оно единственно, но неустойчиво по отношению к изменению граничных данных. Кроме этого, эта задача фактически является задачей Коши для системы Стокса, т. к. согласно лемме из граничных условий определяются и нормальные производные компонент скорости. В настоящее время в основном развивается метод функций Карлемана для этой задачи, что не очень удобно для приложений. Рассмотренная задача является аналогом $(u-p)$-задачи из теории упругости [7]. Для устойчивого численного решения $(u-p)$-задачи оказался эффективным подход, основанный на использовании теории системы Моисила – Теодореску, причем использовался матричный формализм из [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 510 с.
2. *Brackx F., Delanghe R., Sommen F.* Clifford analysis. (Research notes in math., 76).– Boston: Pitman Adv. Publ. Pr., 1982.– 308 p.
3. *Григорьев Ю. М., Наумов В. В.* Аппроксимационные теоремы для системы Моисила – Теодореску // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, № 5. С. 9–19.
4. *Gurlebeck K., Sprossig W.* Quaternionic Analysis and Elliptic Boundary Value Problems. Berlin: Akademie-Verlag, 1989. 254 p.
5. *Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А.* Кватернионы в релятивисткой физике. Минск: Наука и техника, 1989. 200 с.
6. *Ryan J., Sprossig W.* Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Vol. 2. Clifford Analysis. Boston etc.: Birkhauser, 2000. XXII. 320 p. (Progress in Physics. Vol. 19).
7. *Шваб А. А.* Решение обратной задачи теории упругости методом граничного интегрального уравнения для голоморфного вектора // Физика Земли. 1994. № 4. С. 62–67.
8. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966. 320 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 507–508

УДК 517.9; 539.3

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МИЗЕСА

© О. Н. Жданов

onzhdanov@mail.ru

Сибирский государственный аэрокосмический университет им. ак. М. Ф. Решетнева, Красноярск

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающих плоское напряженное состояние пластической среды Мизеса:

$$\begin{cases} \sigma_x - 2k(\theta_x \cos 2\theta + \theta_y \sin 2\theta) = 0, \\ \sigma_y - 2k(\theta_x \sin 2\theta - \theta_y \cos 2\theta) = 0; \end{cases} \tag{1}$$

где σ — гидростатическое давление, θ — угол между осью OX и первым главным направлением тензора напряжений, k — постоянная пластичности, индекс внизу означает дифференцировани по соответствующей переменной.

Ранее применение законов сохранения были решены задачи Коши и задача Римана для системы (1), см. [1, с. 165–183]. Смешанную задачу долгое время не удавалось решить. Наш подход заключается в применении к задаче не одного закона сохранения, как это было во многих работах, а одновременно нескольких таких законов.

Приведем точную формулировку задачи. На одной из характеристик заданы функции $\sigma = \sigma_1(x,y)$, $\theta = \theta_1(x,y)$, а на пересекающей её нехарактеристической кривой $\{x = \alpha(t), y = \beta(t)\}$ задана функция $\theta_2(x,y)$. Обозначим точку их пересечения M . Задачей является нахождение точек пересечения характеристик и значений функций σ, θ в них.

2. Метод решения. Мы сведем смешанную задачу к задаче Коши. Выберем на характеристике, несущей начальные данные, точку P и найдем соответствующую ей точку N на заданной нехарактеристической кривой, т. е. проведем из P характеристику другого семейства до пересечения с кривой.

Запишем законы сохранения для системы (1) в виде:

$$\partial_x(-A^i) + \partial_y(B^i) = 0, \tag{2}$$

$i = 1, 2$, где A^i , B^i — функции только от σ , θ .

Равенства (2) должны выполняться только на решениях системы (1). Введем новые переменные по формулам: $\sigma = k(\eta+\xi)$, $2\theta = \eta-\xi$. После упрощений имеем систему относительно A^i , B^i :

$$A^i_\xi + B^i_\xi \cdot \operatorname{ctg}\theta = 0, \quad A^i_\eta - B^i_\eta \cdot \operatorname{tg}\theta = 0, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Закон сохранения (2) равносилен равенству нулю интеграла по замкнутому контуру. Проинтегрировав по частям с учетом уравнений характеристик, положим:

$$\partial_\eta((A^i \cdot \operatorname{tg}\theta + B^i)|_{\xi=\xi_1}) = 0, \quad \partial_\xi((-A^i \cdot \operatorname{ctg}\theta + B^i)|_{\eta=\eta_i}) = 0,$$

где $\{\xi = \xi_1\}$ — уравнение характеристики одного семейства, а $\{\eta = \eta_i\}$ — другого. Каждая система уравнений эквивалентна интегро-дифференциальному уравнению, которое можно решить методом последовательных приближений.

В результате получаем систему уравнений относительно координат точек:

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k}\cdot x_Q^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_{1k}\cdot x_M^k + a_{11}\cdot x_N + a_{12}\cdot x_P = I_1(\xi), \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\cdot x_N^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k}\cdot x_P^k + a_{21}\cdot x_Q + a_{22}\cdot x_P = I_2(\xi), \end{cases} \tag{4}$$

где c_{ij}, a_{ij}, b_{ij} — постоянные, x_Q — координата еще одной точки пересечения характеристик, $I_i(\xi) = \int_{PM} A^i(\xi)dy + B^i(\xi)dx$ — интеграл, зависящий от параметра.

Из (4) находится x_N как функция ξ: $x_N = f(\xi)$.

Аналогично находится $y_N = g(\xi)$. Их (4) видно, что одного закона сохранения было недостаточно. Теперь имеем систему:

$$x_N = f(\xi),\ y_N = g(\xi), \quad x = \alpha(t), \quad y = \beta(t). \tag{5}$$

Решение системы (5) можно найти с любой наперед заданной точностью.

3. Результат. Выбрав точки P_j на характеристике, выходящей из M, находим соответствующие им точки N_j. Построенная последовательность точек $\{N_j\}$ на кривой сводит смешанную задачу к задаче Коши. Именно, из точек N_j выпускаем характеристики, ищем точки их пересечения и значения функций σ, θ в них, что является решенной задачей. (В формулы, полученные в [1], входит интеграл по кривой MN. Мы его вычисляем приближенно, взяв достаточное количество точек N_j). Таким образом, получаем решение в криволинейном треугольнике, ограниченном кривой и характеристиками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Киряков П. П., Сенашов С. И., Яхно А. Н.* Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 509–510

УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

© Г. К. Закирьянова

zakir@math.kz

Институт математики ЦФМИ МОН РК, Алматы, Казахстан

Исследование динамики сплошных сред в областях со сложной геометрией при разном типе граничных условий приводит, как правило, к решению начально-краевых задач для гиперболических систем. При решении таких задач появляется необходимость в использовании аппарата теории обобщенных функций, поскольку гиперболические уравнения имеют характеристические поверхности, на которых решения могут иметь скачки производных и описываются обобщенными функциями как регулярного, так и сингулярного типов с особенностями на волновых фронтах.

В работе рассматривается решение начально-краевых задач для строго гиперболических систем M уравнений с производными второго порядка в пространстве R^{N+1} (здесь $N, M =$2,3):

$$L_{ij}(\partial_x, \partial_t)u_j(x,t) + G_i(x,t) = 0, \ (x,t) \in R^{N+1},$$

$$L_{ij}\left(\partial_x, \partial_t\right) = C_{ij}^{ml}\partial_m\partial_l - \delta_{ij}\partial_t^2, \quad i,j = \overline{1,M}, \quad m,l = \overline{1,N}, \tag{1}$$

$$C_{ij}^{ml} = C_{ij}^{lm} = C_{ji}^{ml} = C_{ml}^{ij}, \quad C_{ij}^{ml}n_m n_l v^i v^j > 0 \quad \forall n \neq 0, \quad v \neq 0,$$

где $x \in S^-$, S^- — ограниченное компактное множество в R^N, S — граница, S^- принадлежит классу поверхностей Ляпунова с внешней нормалью n, $\|n\| = 1$, $(x,t) \in D^-$, $D^- = S^- \times [0,\infty)$, $D_t^- = S^- \times [0,t)$, $D = S \times [0,\infty)$, $D_t = S \times [0,t)$.

По одноименным индексам проводится суммирование в указанных пределах.

В пространстве обобщенных функций построены решения начально-краевой задачи при следующих граничных условиях:

(начальные данные) $u_i(x,0) = u_i^0(x), \quad x \in S^- + S, \quad u_{i,t}(x,0) = u_i^1(x), \quad x \in S^-;$

(краевые условия) $\sigma_i^l(x,t)n_l(x) = g_i(x,t), \quad x \in S, \quad t > 0, \quad \sigma_i^l = C_{ij}^{ml}u_{j,m}$
и условиях на волновых фронтах F_t:

$$[u_i(x,t)]_{F_t} = 0, \quad \left[\sigma_i^l \nu_l + c u_{i,t}\right]_{F_t} = 0, \quad \sigma_i^l = C_{ij}^{ml}u_{j,m},$$

которые являются характеристическими поверхностями для (1), $\nu(x,t)$ — нормаль к F_t.

Представлены условия на скачки производных решений на характеристических поверхностях (волновых фронтах) и рассмотрены вопросы единственности решений краевых задач, в т. ч. в классе ударных волн.

Используемый в работе метод обобщенных функций эффективен при решении краевых задач для систем уравнений с частными производными, особенно при решении систем гиперболических уравнений, если удается построить матрицу Грина системы. Здесь на основе этого метода, с использованием фундаментальных решений [1] системы (1), получено обобщенное решение задачи $u(x,t)$.

Теорема. *Если u — классическое решение краевой задачи, то обобщенное решение $\widehat{u}(x,t)$ представимо в виде сверток*

$$\widehat{u}_i(x,t) = U_i^k(x,t) * \widehat{G}_k(x,t) + U_i^k(x,t) \underset{x}{*} u_k^1(x) H_S^-(x)$$

$$+U^k_{i,t}(x,t) \underset{x}{*} u^0_k(x) H^-_S(x) + U^k_i(x,t) * g_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$$

$$-C^{ml}_{kj} V^k_{i,l}(x,t) * u_{j,t}(x,t) n_m(x)\delta_S(x)H(t)$$

$$-C^{ml}_{kj} V^k_{i,l}(x,t) \underset{x}{*} u^0_j(x) n_m(x)\delta_S(x),$$

здесь $\widehat{u}(x,t) = H(t)H^-_S(x)u(x,t)$, $\widehat{G}_k(x,t) = H(t)H^-_S(x)G_k(x,t)$, $H(t)$ — *функция Хевисайда,* $H^-_S(x)$ — *характеристическая функция множества* S^-, $g_k(x,t)\delta_S(x)H(t)$ — *сингулярная обобщенная функция — простой слой на цилиндре* D, *символ* “$*$” *означает полную свертку по* (x,t), *символ* “x” *под звездочкой соответствует свертке только по* x.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеева Л. А., Закирьянова Г. К.* Матрица Грина для строго гиперболических систем с производными второго порядка // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 4. С. 488–494.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 511–512

УДК 539.3

ОСРЕДНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В УПРУГИХ КОМПОЗИТАХ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

© А. М. Каримов

karimov@tps.uz

Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, Ташкент, Узбекистан

Рассмотрим распространение нестационарных волн в композиционном материале, занимающий объем V , ограниченной поверхностью $\sum$. Тензор модулей упругости C_{ijkl} и плотность которого является периодическими функциями координат.

Начально-краевая задача теории упругости для такой среды заключается в решении дифференциальных уравнений:

$$[C_{ijkl}(\overrightarrow{x})u_{k,l}]_{,j} + X_i = \rho(\overrightarrow{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{1}$$

относительно компонент вектора перемещений $\overrightarrow{u}$ при удовлетворении граничным и начальным условиям. Не будем конкретизировать типы этих условий.

После применения преобразования Фурье по времени к уравнениям (1) решение ищется в виде асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon,$ равный отношению характерного размера ячейки периодичности к характерному размеру рассматриваемой задачи:

$$u_i(\overrightarrow{x},\omega) = \sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_q N^{(s)(q)}_{ijk_1k_2\ldots k_{s-2q}}v_{j,k_1k_2\ldots k_{s-2q}}, \tag{2}$$

где $\overrightarrow{N}(\overrightarrow{\xi},\omega)$ — локальные функции, периодические по переменным $\overrightarrow{\xi} = \frac{\overrightarrow{x}}{\varepsilon}$. Суммирование по q происходит от $q=0$ так чтобы выполнялось условие $s-2q \geq 0$. Все локальные функции имеющие отрицательные индексы равны нулю. ω — параметр преобразования Фурье.

Подставляя (2) в (1) и применяя известной техники метода осреднения [1] получим начально-краевые задачи для однородного анизотропного тела с эффективными модулями упругости для отыскания “среднего” поля перемещений $\overrightarrow{v}_i(\overrightarrow{x},\omega)$ и неоднородных задач теории упругости на ячейке периодичности для определения локальных функций.

Для обеспечения единственного решения задачи на ячейки периодичности требуется, чтобы локальные функции были непрерывными и периодически продолжаемыми. Следовательно, при переходе через границу ячейки периодичности в направлении внешней нормали величина скачка функции $\overrightarrow{N}$ обращаются в нуль. Кроме этого, необходимо выполнение следующих условий

$$\langle N^{(s)(q)}_{ijk_1k_2\ldots k_{s-2q}}(\overrightarrow{\xi},\omega)\rangle = F^{(s)(q)}_{ijk_1k_2\ldots k_{s-2q}}(\omega), \tag{3}$$

где $F^{(s)(q)}_{ijk_1k_2\ldots k_{s-2q}}(\omega)$ — некоторые величины, которые определяются из сравнения точного решения тестовой задачи с решением полученным данным методом [2]. Здесь $\langle\cdot\rangle$ — оператор осреднения.

В результате, решение задачи на ячейки периодичности в отличие от [3], зависит от параметра преобразования Фурье, следовательно, от времени t . Это означает, что локальные функции отражают динамические эффекты, которые происходят на ячейки периодичности.

В частности, когда рассматриваются распространение стационарных волн в слоистом композите, образованный периодическим повторением двух однородных анизотропных слоев с разными механическими свойствами получено дисперсионное уравнение учитывающее дисперсии волн [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б. Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
2. *Каримов А. М.* Свободные колебания упругого композиционного слоя периодической структуры // Вестник МГУ. Сер. матем. мех. 1986. № 3. С. 106–108.
3. *Бахвалов Н. С., Эглит М. Э.* Об упругих модулях высшего порядка, определяющих дисперсию волн в микро неоднородных средах // Упругость и неупругость. М.: Изд-во МГУ, 2001. С. 263–276.
4. *Каримов А. М.* Дисперсионное уравнение упругих композитов, периодической структуры // Узбекский журнал проблем механики. 2001. № 1. С. 20–22.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 513–514

УДК 539.3

КОРРЕКТНОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕКЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ

© В. Ф. Кириченко

saratuni@list.ru

Саратовский государственный технический университет, Саратов

В рамках подхода И. В. Мещерского пологая оболочка определяется как распределенная механическая система переменной массы, занимающая в момент времени $t \in [t_0, t_1]$ область $\overline{D} = \overline{\Omega} \times [-\frac{h(t)}{2}, \frac{h(t)}{2}] \subset \mathbb{R}^3$, при этом пространство $\mathbb{R}^3$ параметризовано декартовой системой координат, (x_1, x_2, x_3) — координаты точки в $\mathbb{R}^3$; уравнение $x_3 = 0$ определяет срединную поверхность оболочки; $[t_0, t_1]$ — отрезок времени наблюдения за эволюцией оболочки; $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$; $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — измеримая по Лебегу односвязная область с границей $\partial\Omega$; функция $h(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, определяет толщину оболочки в момент времени t; $h(t) \geq \alpha > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, $\alpha = \mathrm{const} \in \mathbb{R}$, $h_0 = h_0(t)$; $D = \Omega \times (-\frac{h(t)}{2}, \frac{h(t)}{2})$; $\Gamma = \partial\Omega \times [t_0, t_1]$; $Q = \Omega \times (t_0, t_1)$; n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Исследуемая система эволюционных уравнений, соответствующая одному из вариантов геометрически нелинейной теории оболочек Рейсснера, с начальными и граничными условиями (первая начально-краевая задача) имеет такой вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \rho \frac{\partial u_{i0}}{\partial t} dx_3\right) - \int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \Big(\frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}}\Big) dx_3 = 0, \tag{1}$$

$$\int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \Big\{ -\frac{\partial A\sigma_{ii}}{\partial x_i} - \frac{\partial A\sigma_{12}}{\partial x_{3-i}} + \Big(1 - \frac{\partial B}{\partial x_3}\Big)\sigma_{i3}\Big\} dx_3 = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \rho \frac{\partial u_{30}}{\partial t} dx_3\right) + \int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \varepsilon \frac{\partial u_{30}}{\partial t} dx_3 - \sum_{i=1}^{2} \Big\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} \Big(B \frac{\partial \sigma_{ii}}{\partial x_i} + \sigma_{ii} \frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} +$$

$$\Big[1 - \frac{dB}{dx_3}\Big]\sigma_{i3} + \sigma_{12}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i} + B\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_{3-i}}\Big) dx_3 + \int\limits_{-h(t)/2}^{h(t)/2} k_i \sigma_{ii} dx_3 \Big\} = g(x_1, x_2, t), \tag{3}$$

$$u_{30}\big|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, \quad u_{i0}\big|_{\Gamma} = 0, \quad u_{i1}\big|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4}$$

$$u_{i0}(x_1, x_2, t_0) = \varphi_{i0}, \quad \frac{\partial u_{i0}}{\partial t}(x_1, x_2, t_0) = \psi_{i0},$$

$$u_{30}(x_1, x_2, t_0) = \varphi_{30}(x_1, x_2), \quad \frac{\partial u_{30}}{\partial t}(x_1, x_2, t_0) = \psi_{30}(x_1, x_2), \tag{5}$$

где $u_{i0} = u_{i0}(x_1, x_2, t_0)$, $u_{i1} = u_{i1}(x_1, x_2, t_0)$, $u_{30} = u_{30}(x_1, x_2, t_0)$ — искомые функции; ε, ρ, E, ν, k_i — строго положительные вещественные постоянные, $0 < \nu < \frac{1}{2}$;

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{3-i,3-i}), \quad \sigma_{i3} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{i3}, \quad i = 1,2, \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{12};$$

$$\varepsilon_{i3} = \frac{1}{2}\left[\frac{dA}{dx_3}u_{i1} + \Big(1 - \frac{dB}{dx_3}\Big)\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\right],$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i} + A\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(B\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\Big) - k_i u_{30} + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\Big)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u_{i0}}{\partial x_{3-i}} + A\frac{\partial u_{i1}}{\partial x_{3-i}} - \frac{\partial}{\partial x_{3-i}}\Big(B\frac{\partial u_{30}}{\partial x_i}\Big)\right) + \frac{\partial u_{30}}{\partial x_1}\frac{\partial u_{30}}{\partial x_2}\right]; \quad A = x_3 - \frac{4x_3^3}{3h_0^2}, \quad B = \frac{4x_3^3}{3h_0^2};$$

$g(x_1, x_2, t)$ — интенсивность поперечной нагрузки; $\varphi_{30}(x_1, x_2)$, $\psi_{30}(x_1, x_2)$, $\varphi_{i0}(x_1, x_2)$, $\psi_{i0}(x_1, x_2)$ ($i = 1, 2$) — известные функции, определяющие начальные условия (5).

Далее используем обозначения функциональных пространств из [1]; символ $|\cdot|_\Omega$ обозначает норму в пространстве $L^2(\Omega)$.

Теорема. *Пусть $\partial\Omega$ имеет гладкость, достаточную для используемых теорем вложения, и выполняются такие условия:*

$$g(x_1, x_2, t) \in L^2(Q), \quad \varphi_{i0} \in H_0^1(\Omega), \quad \psi_{i0} \in L^2(\Omega), \quad i = 1, 2,$$

$$\varphi_{30} \in H_0^2(\Omega), \quad \psi_{30} \in H_0^1(\Omega), \quad h(t) \in C^1([t_0, t_1]).$$

Тогда

1) существует хотя бы одно решение $\{\widetilde{u}_{i0}, \widetilde{u}_{i1}, \widetilde{u}_{30}\}$ задачи (1)–(5), при этом

$$\widetilde{u}_{i0}, \widetilde{u}_{i1} \in L_\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad i = 1, 2, \quad \widetilde{u}_{30} \in L_\infty(t_0, t_1; H_0^2(\Omega)),$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}_{30}}{\partial t} \in L_\infty(t_0, t_1; H_0^1(\Omega)), \quad \frac{\partial \widetilde{u}_{i0}}{\partial t} \in L_\infty(t_0, t_1; L^2(\Omega));$$

2) решение задачи (1)–(5) может быть продолжено на интервал (t_0, ∞).

Замечание. Результаты подобные сформулированным в теореме имеют место и при других случаях закрепления оболочек, например, оболочка может быть шарнирно оперта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972. 588 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 515–516

УДК 517.97

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИОННАЯ ЗАДАЧА О РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ

© В. А. Ковтуненко

kovtunenko@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН, Новосибирск;
Institute for Mathematics, Karl-Franzens University of Graz, Graz, Austria

Используя оптимизационный подход, рассматривается следующая нелинейная эволюционная задача о развитии трещины Γ_C в области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 2,3$, относительно временного параметра t: Найти $\Gamma_C(t) \in \Sigma(\Omega)$ при $t \geq 0$, такое что

$$u(t) \in K(\Omega \setminus \Gamma_C(t)), \quad T(u(t); \Omega \setminus \Gamma_C(t)) \leq T(v; \Omega \setminus \Gamma_C(t)) \quad \text{для всех } v \in K(\Omega \setminus \Gamma_C(t));$$

$$\Gamma_C(t) \supset \bigcup_{s<t} \Gamma_C(s), \quad T(u(t); \Omega \setminus \Gamma_C(t)) \leq T(u; \Omega \setminus \Gamma_C) \quad \text{для всех } \Gamma_C \supset \bigcup_{s<t} \Gamma_C(s),$$
$$\text{где } u \in K(\Omega \setminus \Gamma_C), \quad T(u; \Omega \setminus \Gamma_C) \leq T(v; \Omega \setminus \Gamma_C) \quad \text{для всех } v \in K(\Omega \setminus \Gamma_C).$$

Здесь функционал стоимости $u \mapsto T(u; \Omega \setminus \Gamma_C) : K(\Omega \setminus \Gamma_C) \mapsto \mathbb{R}$ выражает полную потенциальную энергию тела с трещиной в области $\Omega \setminus \Gamma_C$ над множеством допустимых перемещений $u \in K(\Omega \setminus \Gamma_C)$; геометрическое множество $\Sigma(\Omega)$ включает возможные пути развития трещины в Ω. Данная задача оптимизации описывает квазистатический процесс разрушения упругого тела с трещиной при монотонно возрастающей нагрузке согласно критерию Гриффитса. Вопрос об ее разрешимости в общем виде остается открытым.

Вводя в рассмотрение параметры формы для описания трещины Γ_C вдоль неизвестного пути $\Sigma \in \Sigma(\Omega)$, задача сводится к параметрической оптимизации, которая представляет собой обратную задачу для нахождения неизвестных параметров формы трещины. Доказаны теоремы о разрешимости однопараметрической задачи для описания процесса деламинации в композите, двухпараметрической задачи о росте прямолинейной трещины с изломом. При этом получены необходимые условия оптимальности первого порядка, которые характеризуют оптимальную трещину в процессе изменения как ее геометрии, так и топологии.

В качестве необходимых ингредиентов для анализа и решения задачи используются:

- кинематическое описание открытого многообразия коразмерности 1 (трещины) с помощью нахождения обобщенных характеристик, которые удовлетворяют задаче Коши для системы нелинейных ОДУ, или (линейному) скалярному транспортному уравнению с заданным полем скоростей;

- вариационные методы для задачи минимизации с односторонними ограничениями;

- методы анализа чувствительности по отношению к возмущению формы трещины;

- численные методы оптимизации с ограничением, основанные на свойстве обобщенной дифференцируемости (по Ньютону) оператора задачи и эквивалентных PDAS-методов. На их основе получены примеры численного решения эволюционной задачи о развитии трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06-01-00209) и Австрийского научного фонда FWF (код проекта P18267-N12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000. 408 p.
2. *Ковтуненко В. А., Сухоруков И. В.* Оптимизационная постановка эволюционной задачи о развитии трещины при квазихрупком разрушении // Прикл. механика техн. физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 107–118.
3. *Kovtunenko V. A.* Interface cracks in composite orthotropic materials and their delamination via global shape optimization // Optim. Eng. 2006. V. 7. P. 173–199.
4. *Kovtunenko V. A., Hintermüller M., Kunisch K.* Constrained optimization for interface cracks in composite materials subject to non-penetration conditions // J. Eng. Math. 2006. DOI 10.1007/s10665-006-9113-7.
5. *Kovtunenko V. A., Hintermüller M., Kunisch K.* An optimization approach for the delamination of a composite material with non-penetration. In: Glowinski R. and Zolesio J.-P. (eds.) Free and Moving Boundaries: Analysis, Simulation and Control. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 252. Chapman & Hall/CRC, 2006.

УДК 539.3

АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ МОМЕНТНОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

© **А. И. Левыкин** *, **И. В. Сухоруков** **

* lai@osmf.sscc.ru, ** runar@ngs.ru

* *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск;*
** *Институт гидродинамики СО РАН, Новосибирск*

Рассматривается первая основная задача линейной изотропной теории упругости для тела с кусочно-гладкой границей S, которая после обезразмеривания относительно линейных и упругих характеристик тела может быть сформулирована в виде интегрального уравнения Фредгольма второго рода для вектора фиктивных нагрузок $t(s)$, $s \in S$:

$$\int\limits_S T_f(r,s)t(s)dS + t(r) = T_*(r).$$

Здесь $T_*(r)$ — заданная на S, $r \in S$, $T_f(r,s)$ — обезразмеренная нагрузка, соответствующая источнику в точке поверхности с координатами s.

Для решения интегрального уравнения предлагается использовать метод моментов, когда на каждом гладком участке поверхности S исследуемой функции ставится в соответствие ряд векторов-моментов

$$S_k : T(s) \to M_n^k = \int\limits_{S_k} t(s)s^n dS.$$

Данный метод подробно анализируется для случая двумерной задачи аналитической деформации, когда искомая фиктивная нагрузка — скалярная функция.

Рассматривается двумерная область — многоугольник, и частные случаи — квадрат, бесконечный острый угол и полуплоскость. В докладе дано обоснование применимости моментного алгоритма вычисления решения и его производных. Основной упор делается на задачи с разрывными краевыми условиями. Исследуются области и скорость сходимости приближённого решения, установлен порядок погрешности. Показано преимущество данного подхода в сравнении с методом фиктивных нагрузок.

Работа поддержана научной программой “Ведущие научные школы” (НШ 4774.2006.1), частично поддержана грантами РФФИ (код проектов 05-01-00673, 05-01-08025, 06-08-96002, 06-01-00586), INTAS 03-51-6046.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 518–519

УДК 539.3

ПРИВЕДЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ К КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ ОБОБЩЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

© Н. И. Мартынов

uikmar50@mail.ru

Институт космических исследований, Алматы, Казахстан

Среди разнообразия существующих методов решения двумерных задач статики неоднородных анизотропных сред, нет единого универсального подхода, каким является метод Мусхелишвили (и его модификации) для решения краевых задач изотропной однородной упругой среды.

Вместе с тем хорошо известно, что теория аналитического вектора есть теория решения общих эллиптических систем на плоскости. Она достаточно полно разработана, но не нашла широкого применения в теории упругости.

Работа [1] в определенной мере восполняет этот пробел. В ней основные краевые задачи статики неоднородной изотропной упругой среды приведены к краевым задачам (задачи Римана – Гильберта) обобщенного аналитического вектора. Она основана на простой идее. Закон Гука, записанный через функцию напряжений U и вектор перемещений $w = u_1 + iu_2$ $(z = x_1 + ix_2, s \equiv \overline{z} = x_1 - ix_2)$ с дополнительным условием $U_{zs} = U_{sz}$, представляет собой эллиптическую систему первого порядка относительно w, $\overline{w}$, U_z, U_s, является интегралом уравнений совместности деформаций и уравнений равновесия. Поэтому решение краевых задач статики эквивалентно решению соответствующих краевых задач обобщенного аналитического вектора [1]. Такой подход позволяет обобщить метод Н. И. Мусхелишвили на неоднородные среды, ослабить условия на гладкость упругих параметров, записать общее решение и многое другое. Для решения конкретных задач применим метод граничных интегральных уравнений (НГИУ).

В настоящей работе обобщаются результаты [1] на анизотропные неоднородные упругие среды.

Закон Гука в комплексной форме для плоской деформации анизотропного неоднородного тела записывается в виде:

$$\begin{cases} \overline{w}_z = -bU_{zz} - dU_{ss} - cU_{sz} + F_1, w_s = -bU_{ss} - \overline{d}U_{zz} - \overline{c}U_{zs} + \overline{F}_1 \\ (w_z + \overline{w}_s) = \overline{c}U_{zz} + cU_{ss} + 4aU_{zs} - F_0, U_{zs} = U_{sz} \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d — комплексные параметры, линейно выражающиеся через приведенные упругие модули β_{ij} $(i, j = 1, 2, 6)$ [2], а F_1, F_0 — вполне определенные линейные функции от массовых сил.

Система уравнений (1) приводится к каноническому (по И. Г. Петровскому) виду [3, 4]:

$$\overrightarrow{\chi}_s - Q\overrightarrow{\chi}_s = A\overrightarrow{\chi} + B\overrightarrow{\overline{\chi}} + \overrightarrow{F}_*, \|Q\| < 1, z \in D \tag{2}$$

а краевые условия основных краевых задач записываются как:

$$Re[\overline{G}\overrightarrow{\chi}(t)] = \overrightarrow{g}(t), t \in \Gamma, \det|G| \neq 0 \tag{3}$$

Здесь $\overrightarrow{\chi} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ — неизвестный обобщенный аналитический вектор, а Q, A, B, $\overrightarrow{F}_*$, G, g — известные матрицы. Для изотропного, трансверсально-изотропного тела матрица $Q = const$, поэтому фундаментальное решение (2) записывается в явном виде.

Чтобы не накладывать дополнительных условий на "гладкость" упругих параметров, систему (1) можно исследовать непосредственно, сведя ее к системе интегральных уравнений с помощью интегральных операторов по области [3, 4]. Это существенно расширяет класс обобщенных решений и позволяет унифицировать класс контактных задач из составных материалов.

Поскольку закон Гука выполняется на границе, то решения многих задач можно получить в замкнутом виде.

Изложенный метод непосредственно переносится на обобщенно-плоскую деформацию, криволинейную анизотропию. Он может быть модифицирован для решения задачи Сомильяно упруго неоднородного анизотропного тела [2], и сыграет, по-видимому, важную роль в построении моментной теории оболочек на базе теории обобщенно аналитического вектора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мартынов Н. И.* Применение теории обобщенного аналитического вектора к решению статических задач неоднородной изотропной среды // Международная научная конференция "Суверенный Казахстан: 15-летний путь развития космической деятельности", посвященный 70-летию У. М. Султангазина. 2006. С. 62–65.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 509 с.
4. *Боярский Б. В.* Теория обобщенного аналитического вектора // Annales Polonici Mathematicy. 1966. V. 17. P. 281–320.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 520–520

УДК 517.946

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЕ В R^m

© О. И. Махмудов

MakhmudovO@rambler.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

В статье рассматриваются вопросы регуляризации задачи Коши для систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, ..., y_m)$ точки Евклидова пространства R^m и D область в R^m с кусочно-гладкой границей ∂D , S — часть ∂D, $\Sigma = \partial D \backslash S$. Рассмотрим в области D систему уравнений Ламе в векторной форме

$$\mu \Delta U(y) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U(y) = 0, \tag{1}$$

здесь $U = (U_1, ..., U_m)$ — вектор смещения; Δ — оператор Лапласа; λ, μ — постоянные Ламе.

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы на поверхности S:

$$\begin{cases} U(y) = f(y), \;\; y \in S, \\ T(\partial_y, n(y))U(y) = \psi(y), \;\; y \in S, \end{cases} \tag{2}$$

где $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ — заданные непрерывные вектор-функции на S, $T(\partial_y, n(y))$ — оператор напряжения, т. е.

$$T(\partial_y, n(y)) = ||T_{ij}(\partial_y, n(y))||_{m \times m} = \left|\left| \lambda n_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} \right|\right|_{m \times m},$$

δ_{ij} — символ Кронекера, а $n = (n_1, ..., n_m)$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

Требуется определить функцию $U(y)$ в D, исходя из заданных f и ψ, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения системы уравнений в пространственной области по ее значениям f и значениям ее напряжений ψ на гладком куске S границы.

Существенно используя результаты работ [1, 2] по задаче Коши для уравнения Лапласа, нам удалось построить матрицу Карлемана в явном виде и на ее основе регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений (1). Поскольку здесь идет речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес. При $m = 2, 3$ рассматриваемая задача совпадает с задачей Коши для системы уравнений теории упругости, уравнений статики изотропной упругой среды. В этих случаях задача (1), (2) для специальных классов областей исследована в работах [4–6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лаврентьев М. М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. 92 с.
2. *Ярмухамедов Ш. Я.* О задаче Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН СССР. 1977. Т. 235, № 2. С. 281–283.
3. *Махмудов О. И.* Задача Коши для системы теории упругости в пространстве. Дисс. к.ф.-м.н. Новосибирск, 1990. 80 с.
4. *Махмудов О. И.* Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях // Изв. ВУЗов. Математика. 1994. № 1 (380). С. 54–61.
5. *Махмудов О. И., Ниезов И. Э.* Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 369–376.
6. *Махмудов О. И., Ниезов И. Э.* Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36, № 5. С. 674–678.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 521–522

УДК 517.946

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© И. Э. Ниезов

iqboln@mail.ru

Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

Рассматривается задача аналитического продолжения решения системы уравнений моментной теории упругости в пространственной неограниченной области по ее значениям и значениям ее напряжений на части границы этой области, т. е. задача Коши.

Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$ и $y = (y_1, y_2, y_3)$ точки трехмерного вещественного евклидово пространство E^3, $D-$ неограниченная односвязная область в E^3, с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$ и плоскости $\partial D \backslash S: \; y_3 = 0$.

Пусть шести компонентный вектор-функция

$$U(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x), w_1(x), w_2(x), w_3(x)) = (u(x), w(x))$$

удовлетворяет в области D системы уравнений моментной теории упругости [1]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu+\alpha)\Delta u + (\lambda+\mu-\alpha)\,\mathrm{grad\,div} u + 2\alpha \mathrm{rot} w + \rho\theta^2 u = 0, \\ (\nu+\beta)\Delta w + (\varepsilon+\nu-\beta)\,\mathrm{grad\,div} w + 2\alpha \mathrm{rot} u - 4\alpha w + j\theta^2 w = 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

где коэффициенты $\lambda, \mu, \nu, \beta, \varepsilon, \alpha$ характеризующие среды, удовлетворяют условиям $\mu > 0,\ 3\lambda + 2\mu > 0,\ \alpha > 0,\ \varepsilon > 0,\ 3\varepsilon + 2\nu > 0,\ \beta > 0,\ j > 0,\ \rho > 0,\ \theta \in R^1$.

Для краткости изложения в дальнейшем систему (1) удобно записать в матричной форме

$$M(\partial_x)U(x) = 0. \tag{2}$$

Решение U системы(1) в области D назовем регулярным, если $U \in C^1(\overline{D}) \bigcap C^2(D)$.

Постановка задачи. Требуется определить регулярное решение U системы (1) в области D, исходя из ее данных Коши, заданных на поверхности S:

$$U(y) = f(y), \qquad T(\partial_y, n(y))U(y) = g(y), \quad y \in S, \tag{3}$$

где $T(\partial_y, n(y))$ оператор напряжения, $n(y) = (n_1(y), n_2(y), n_3(y))$ — внешный единичный вектор нормали к поверхности ∂D в точке y, $f = (f_1, \dots, f_6)$, $g = (g_1, \dots, g_6)$ заданные непрерывные вектор-функции на S.

Из определение матрицы Карлемана [2] вытекет, что всякое регулярное решение $U(x)$ системы (1) в ограниченной области D определяется формулой

$$U(x) = \int\limits_{\partial D} (\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y,x,\sigma)\}^* U(y))\, ds_y, \;\; x \in D, \tag{4}$$

где $\Pi(y, x, \sigma)$ — матрица Карлемана.

В данной работе для неограниченных областях специального вида строится матрица Карлемана и на ее основе доказывается справедливость формулы (4) для данной неограниченной области и строится регуляризованное решение задачи (1), (3).

Пусть область $D \in R^3$ лежит внутри полосы $0 < y_3 < h$, $h = \dfrac{\pi}{\rho}$, $\rho > 0$, граница которой состоит из гиперплоскости $y_3 = 0$ и некоторой гладкой поверхности S, заданной уравнением $y_3 = f(y')$, $y' \in R^2$, причем $0 < f(y') \leq h$ и $|\mathrm{grad}\ \ f(y')| \leq c < \infty$.

Введем обозначение

$$U_\sigma(x) = \int\limits_S [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)\}^*]\, ds_y, \ \ x \in D.$$

Теорема. *Пусть* $U(x)$ *регулярное решение* (1) *и удовлетворяет граничному условию*

$$|U(y)| + |T(\partial y, n)U(y)| \leq M, \quad y \in \partial D.$$

Тогда

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq MC(\rho, x)\sigma^2 \exp(-\sigma x_3), \quad x \in D,$$

где

$$C(\rho, x) = C(\rho) \int\limits_{y_3=0} \frac{ds_y}{r^4}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Купрадзе В. Д., Бурчуладзе Т. В. и др.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения. М.: Наука, 1976.
2. *Ишанкулов Т. И., Махмудов О. И.* Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве // Узбекский мат. журн. 1996. № 1. С. 22–29.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 523–524

УДК 539.3:517.958

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ УПРУГОСТИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ УПРУГИХ СРЕД

© Н. И. Остросаблин

abd@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Дана новая трактовка компонент тензора четвертого ранга модулей упругости как инвариантных постоянных, не зависящих от ортогонального преобразования системы координат. Показано, что определяющие соотношения для упругих сред представляются в инвариантной форме.

В прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 обобщенный закон Гука записывается в виде (по повторяющимся буквенным индексам проводится суммирование)

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \tag{1}$$

где $A_{ijkl} = A_{jikl} = A_{klij}$ — компоненты тензора четвертого ранга модулей упругости; $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — компоненты тензора напряжений; $\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk}$ — компоненты тензора деформаций. При ортогональном преобразовании системы координат

$$x_i = \alpha_{ij}\hat{x}_j, \qquad \hat{x}_j = \alpha_{ij}x_i, \qquad \alpha_{ip}\alpha_{iq} = \delta_{pq} \tag{2}$$

(δ_{pq} — единичная матрица) напряжения (деформации) и A_{ijkl} преобразуются по формулам

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\hat{\sigma}_{pq}, \qquad \hat{\sigma}_{pq} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\sigma_{ij};$$

$$A_{ijkl} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}\hat{A}_{pqrs}, \qquad \hat{A}_{pqrs} = \alpha_{ip}\alpha_{jq}\alpha_{kr}\alpha_{ls}A_{ijkl}. \tag{3}$$

В силу свойств симметрии тензор A_{ijkl} имеет только 21 независимую компоненту. Существуют многочисленные работы, в которых пытаются найти неприводимый базис полиномиальных инвариантов тензора A_{ijkl} при ортогональных преобразованиях (2), (3). Но эта задача до настоящего времени еще полностью не решена.

В данной работе предлагаются инвариантные постоянные упругости, остающиеся неизменными при ортогональных преобразованиях системы координат (2). Инвариантные постоянные упругости для кристаллов рассматривались в работе [1]. Закон Гука (1) записывается в инвариантной форме. В более общем случае определяющие соотношения сплошной среды, т. е. функциональная связь напряжений и деформаций, также оказываются инвариантными, если в пространстве симметричных тензоров второго ранга выбран ортогональный тензорный базис.

Пусть n_{ip} — произвольная ортогональная тройка единичных векторов: $n_{ip}n_{iq} = \delta_{pq}$. Тогда величины

$$\tilde{A}_{pqrs} = A_{ijkl}n_{ip}n_{jq}n_{kr}n_{ls} = A_{ijkl}t_{ijklpqrs}, \tag{4}$$

$$t_{ijklpqrs} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(n_{ip}n_{jq} + n_{iq}n_{jp})\frac{1}{2}(n_{kr}n_{ls} + n_{ks}n_{lr}) + \frac{1}{2}(n_{ir}n_{js} + n_{is}n_{jr})\frac{1}{2}(n_{kp}n_{lq} + n_{kq}n_{lp})\right]$$

остаются инвариантными при ортогональных преобразованиях системы координат (2), (3). Тензоры $t_{ijklpqrs}$ (четыре последних индекса обозначают номер тензора, всего — 21 тензор) образуют ортогональный базис [2] в пространстве тензоров четвертого ранга вида (1). Величины $\tilde{A}_{pqrs}$ являются проекциями тензора A_{ijkl} на базисные тензоры $t_{ijklpqrs}$. За счет выбора

трех параметров, определяющих положение векторов n_{ip}, $p=1,2,3$ число независимых инвариантных постоянных упругости $\tilde{A}_{pqrs}$ можно уменьшить до 18, например, всегда можно считать, что выполняются три условия Коши $\tilde{A}_{2311}=\tilde{A}_{1231}$, $\tilde{A}_{1322}=\tilde{A}_{2132}$, $\tilde{A}_{1233}=\tilde{A}_{3123}$. Из (4) следует, что

$$A_{ijkl}=t_{ijklpqrs}\tilde{A}_{pqrs}=n_{ip}n_{jq}n_{kr}n_{ls}\tilde{A}_{pqrs}. \tag{5}$$

Теперь с учетом (5) получаем из (1) инвариантную запись закона Гука

$$\tilde{\sigma}_{pq}=\tilde{A}_{pqrs}\tilde{\varepsilon}_{rs}, \qquad \tilde{\sigma}_{pq}=\sigma_{ij}n_{ip}n_{jq}=\sigma_{ij}t_{ijpq}, \tag{6}$$

$$t_{ijpq}=\frac{1}{2}(n_{ip}n_{jq}+n_{iq}n_{jp}), \qquad \tilde{\varepsilon}_{rs}=\varepsilon_{kl}t_{klrs}.$$

Тензоры $t_{ijpq}=t_{ijqp}$ (два последних индекса обозначают номер тензора) образуют ортогональный базис в пространстве симметричных тензоров второго ранга.

В общем случае упругой среды функциональная связь напряжений и деформаций также записывается в инвариантной форме [3]

$$\tilde{\sigma}_{pq}=t_{ijpq}f_{ij}(t_{klrs}\tilde{\varepsilon}_{rs})=\tilde{f}_{pq}(\tilde{\varepsilon}_{rs}), \tag{7}$$

где $t_{ijpq}=t_{ijqp}$ — ортонормированный тензорный базис, зависящий от 15 свободных параметров. Если в качестве тензорного базиса выбраны ортогональные собственные состояния t_{ijpq}, то закон Гука (6) принимает вид

$$\tilde{\sigma}_{pq}=\lambda_{pqrs}\tilde{\varepsilon}_{rs}, \qquad (pq)=(rs),$$

где λ_{pqrs}, $(pq)=(rs)$ — собственные модули упругости [4]. Базис t_{ijpq} может быть выбран таким образом, чтобы определяющие соотношения (7) имели наиболее простой вид [3]

$$\tilde{\sigma}_{11}=\tilde{f}_{11}(\tilde{\varepsilon}_{11}), \qquad \tilde{\sigma}_{22}=\tilde{f}_{22}(\tilde{\varepsilon}_{22}), \qquad \tilde{\sigma}_{33}=\tilde{f}_{33}(\tilde{\varepsilon}_{33}),$$

$$\tilde{\sigma}_{23}=\tilde{f}_{23}(\tilde{\varepsilon}_{23}), \qquad \tilde{\sigma}_{13}=\tilde{f}_{13}(\tilde{\varepsilon}_{13}), \qquad \tilde{\sigma}_{12}=\tilde{f}_{12}(\tilde{\varepsilon}_{12}),$$

при этом каждая функция зависит от одной переменной.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00728) и гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ НШ-6481.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Srinivasan T. P., Nigam S. D.* Invariant elastic constants for cristals // J. Math. Mech. 1969. V. 19, N 5. P. 411–420.
2. *Остросаблин Н. И.* Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. 1998. Т. 1, № 1. С. 155–163.
3. *Остросаблин Н. И.* О функциональной связи двух симметричных тензоров второго ранга // Деформирование и разрушение структурно-неоднородных сред и конструкций: Тез. докл. Всерос. конф. Новосибирск, 9–13 октября 2006 г. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2006. С. 96.
4. *Остросаблин Н. И.* О структуре тензора модулей упругости и классификации анизотропных материалов // Журн. прикл. механики и техн. физики. 1986. № 4. С. 127–135.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 525–526

УДК 539.375:534.1

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСЛОВИЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВИБРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА СИСТЕМОЙ ДЕФЕКТОВ

© О. Д. Пряхина, А. В. Смирнова

donna@kubsu.ru

Кубанский государственный университет, Краснодар

Гармонические колебания многослойной полуограниченной среды, вызванные вибрацией берегов трещин, описываются краевой задачей для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных, которая сводится к системе интегральных уравнений (ИУ) I рода [1–3]. Большая размерность этой системы в случае множественных дефектов и ее зависимость от большого числа параметров требует создания специальных методов исследования подобного рода задач [1–3].

Матрица-символ ядра указанной системы $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ является блочной, размерность ее элементов — матриц $\mathbf{K}_{ij}$ определяется физико-механическими свойствами среды. Для упругих материалов это матрицы размерности 3×3, а в общем случае для термоэлектроупругих сред — 5×5. Размерность системы ИУ равна $5\times M$, M — общее количество трещин в среде. Элементы матриц $\mathbf{K}_{ij}(\alpha,\beta,\omega)$ кроме параметров преобразования Фурье α,β и частоты гармонических колебаний ω зависят от геометрических и физико-механических параметров слоев, а также от параметров, характеризующих положение неоднородностей в среде. Кроме того, параметрами задачи являются размеры и относительное расположение областей, занятых трещинами.

Для представления $\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ в форме, допускающей простую интерпретацию результатов, введены специальные матрицы, характеризующие положение дефектов в среде. Не нарушая общности, предполагается, что дефекты расположены в плоскостях раздела физико-механических свойств слоев.

Для трещины, расположенной в плоскости $z=-2\sum\limits_{k=1}^{p}h_k$, вводится матрица

$$\mathbf{S}_{Np}=\mathbf{K}_p^-(h_1,h_2,\ldots,h_p)-\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1},h_{p+2},\ldots,h_N).$$

Здесь $\mathbf{K}_p^-$ — матрица Грина пакета p слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-p}$ — матрица Грина пакета $(N-p)$ слоев на жестком основании, h_i — полутолщина i-го слоя.

В этих обозначениях матрица-символ системы ИУ построена в форме [3]:

$$\mathbf{K}_{ij}=\begin{cases}\mathbf{S}_{Ni}^{-1}, & i=j,\\ \mathbf{R}_{ij}^-\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i<j,\\ \mathbf{R}_{ij}\mathbf{S}_{Nj}^{-1}, & i>j,\end{cases}$$

где $\mathbf{K}=\|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{N-1}$, матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}_{km}^-$, а также рекуррентная процедура вычисления матриц $\mathbf{K}_m^-(h_1,\ldots,h_m)$, $\mathbf{K}_{N-m}(h_{m+1},\ldots,h_N)$, $\mathbf{\Phi}_m(h_1,\ldots,h_m)$, $\mathbf{F}_{N-m}(h_{m+1},\ldots,h_N)$ приведены в [4]. Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_\pm$ даются в [1,2].

Полученные соотношения позволяют моделировать любое сочетание трещин в среде, обладающей сложными физико-механическими свойствами. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Определитель матрицы-символа ядра системы интегральных уравнений при наличии трещин только между слоями с номером* p *и* $p+1$ *равен*

$$\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)=\det\mathbf{S}_{Np}^{-1}.$$

Теорема 2. *Определитель матрицы-символа ядра системы интегральных уравнений для трещин, расположенных на каждой границе раздела пакета N слоев, равен*

$$\det \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \prod_{i=1}^{N-1} \det \mathbf{S}^{-1}_{(N-i+1)1}.$$

Теорема 3. *Определитель матрицы-символа ядра системы интегральных уравнений при наличии трещин, расположенных на границах между p и $p+1$, i и $i+1$ слоями $(p < i)$ равен*

$$\det \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \det \mathbf{S}^{-1}_{Np} \det \mathbf{S}^{-1}_{(N-p)(i-p)},$$

$\mathbf{S}_{Np}$ *— матрица, описывающая положение первой (верхней) трещины в N-слойной среде, а $\mathbf{S}_{(N-p)(i-p)}$ — матрица, описывающая положение второй (нижней) трещины в пакете $(N-p)$ слоев*

$$\mathbf{S}_{(N-p)(i-p)}(h_{p+1}) = \mathbf{K}^{-}_{(i-p)}(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_i) - \mathbf{K}_{N-i}(h_{i+1}, h_{i+2}, \ldots, h_N).$$

Используя приведенные теоремы, можно построить определитель системы ИУ при произвольном количестве, сочетании и взаимном расположении трещин в слоистой среде. Отметим, что если трещина находится внутри какого-либо слоя, следует ввести условную границу раздела и параметры прилегающих к ней слоев положить равными. Для однородной среды, содержащей многоуровневые трещины, равными принимаются физико-механические параметры всех слоев. Дальнейшее преобразование выражений для определителей систем ИУ проводится при наличии симметрии свойств материалов слоев. Метод построения $\det \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ в виде отношения целых функций для изотропных и трансверсально изотропных упругих сред и примеры его использования приведены в [4].

Полученные выражения для $\det \mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ дают четкое представление о структуре его особых множеств (нулей и полюсов), что позволяет путем целенаправленного подбора геометрических и физико-механических параметров проектировать системы с заданными спектральными характеристиками.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68, вып. 3. С. 499–506.
3. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. №2. С. 3–10.
4. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Построение определителей матриц-символов Грина многослойных сред с дефектами на основе теории «вирусов» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №2. С. 44–53.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 527–527

УДК 539.375

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРЕЩИНЕ С ВОЗМОЖНЫМ КОНТАКТОМ БЕРЕГОВ

© Е. М. Рудой

rem@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается N-мерное тело ($N = 2, 3$), содержащее криволинейную ($N = 2$) или поверхностную ($N = 3$) трещину. На берегах трещины задается условие непроникания типа Синьорини [1]. Считается, что тело изготовлено из однородного анизотропного материала, для которого справедлив закон Гука. На внешней границе выполнены условия жесткого защемления.

Данная работа касается математических вопросов теории трещин, в которой широко используется критерий разрушения Гриффитса. В соответствии с этим критерием развитие трещины начинается тогда, когда производная функционала энергии по параметру возмущения области достигнет некоторой критической величины, зависящей только от свойств материала, из которого изготовлено тело [2, 3].

Рассмотрено общее возмущение области с разрезом, зависящее от малого параметра ε. В возмущенной области определяется функционал энергии. Используя метод из [4], выведена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения. С помощью этой формулы получены инвариантные интегралы для различных возмущений области. В частности, построен инвариантный интеграл типа Черепанова – Райса для криволинейных трещин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. WIT Press, Southampton-Boston. 2000. 408 p.
2. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974. 416 с.
3. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
4. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // Прикл. механика и тех. физика. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 528–528

УДК 539.3

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ТРЕЩИН С НАЛЕГАЮЩИМИ ОБЛАСТЯМИ

© А. Тани*, А. М. Хлуднев**

* tani@math.keio.ac.jp, ** khlud@hydro.nsc.ru

* *Keio University, Yokohama, Japan;*
** *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

В докладе рассматривается новый класс задач теории трещин с налегающими областями. Задачи такого рода возникают как при описании конструкций сложной геометрии, так и при моделировании некоторых естественных процессов, например, наползания льдин друг на друга. Получающиеся краевые задачи обобщают известные модели теории трещин с возможным контактом берегов, для которых характерно наличие нелинейных краевых условий на берегах трещин, обеспечивающих их взаимное непроникание (см. [1, 2]).

Доказано существование решений рассматриваемых задач и найдена формула для производной функционала энергии по длине трещины. Построены так называемые инвариантные интегралы по замкнутым кривым, окружающим вершину трещины. Как оказалось, для данного класса задач замкнутые кривые должны дважды обходить вершину трещины.

Исследованы асимптотические свойства решения. В частности, установлено, что при стремлении к бесконечности параметра, характеризующего жесткость упругого тела, предельная задача описывает равновесие упругого тела с тонким включением.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. WIT Press, Southampton-Boston. 2000. 408 p.
2. *Хлуднев А. М.* Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 4. С. 41–82.

УДК 539.3

О РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© И. Ю. Цвелодуб

itsvel@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Разномодульная теория упругости (РМТУ) берет свое начало с известных работ С. А. Амбарцумяна, А. А. Хачатряна, Г. С. Шапиро, Н. М. Матченко и Л. А. Толоконникова, относящихся к концу 60-х годов прошлого столетия и вызвавших поток публикаций, продолжающийся до настоящего времени. Для класса изотропных материалов основная проблема РМТУ сводится к обобщению классического упругого потенциала, содержащего две константы (сдвиговой и объемный модули) и соответствующего закону Гука, на среды, разносопротивляющиеся растяжению и сжатию. В упомянутых публикациях предлагались различные подходы, в которых число независимых упругих констант варьировалось от 3-х до максимально возможных 5-ти, т. е. E_+, E_-, ν_+, ν_- и G_o, где E_+, E_- — модули Юнга и ν_+, ν_- — коэффициенты Пуассона при растяжении и сжатии, а G_o — модуль сдвига при чистом сдвиге. В некоторых работах упругий потенциал помимо общепринятых в классическом варианте первого и второго инвариантов тензора напряжений содержит еще и третий инвариант , что приводит к тензорно-нелинейным связям между напряжениями и деформациями. В настоящее время наметилась тенденция к построению тензорно-линейных определяющих уравнений РМТУ, базирующихся на трехконстантных потенциалах, не зависящих от третьего инварианта. В данной работе предложен простейший вариант подобной теории, в которой модуль сдвига G_o является константой, а объемный модуль K зависит от знака первого инварианта тензора напряжений. Такой подход позволил свести плоские задачи в напряжениях к известным постановкам. Исследованы также задачи изгиба разномодульных пластин: для прогибов и функции мембранных усилий получена система уравнений. Рассмотрен пример изгиба защемленной эллиптической пластины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00673).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 530–531

УДК 514.86, 514.87

КИНЕМАТИКА, ДИНАМИКА И ТЕРМОДИНАМИКА ПЛАСТИЧНОСТИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМАЦИЙ

© Р. А. Шарипов

r-sharipov@mail.ru

Башкирский государственный университет, Уфа, Россия

Точное описание больших пластических деформаций возможно лишь в рамках нелинейной теории. В такой теории для аморфных материалов в работе [1] было предложено мультипликативное разложение тензора деформаций Коши – Грина на упругую и пластическую части:

$$G_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{q=1}^{3}\check{G}_i^k\,\hat{G}_{kq}\,\check{G}_j^q. \tag{1}$$

Компоненты пластического тензора деформаций $\check{\mathbf{G}}$ в (1) удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial\check{G}_i^k}{\partial t}+\sum_{r=1}^{3}v^r\,\nabla_r\check{G}_i^k=\sum_{r=1}^{3}\Bigl(\check{G}_i^r\,\nabla_r v^k-\nabla_i v^r\,\check{G}_r^k\Bigr)-\sum_{r=1}^{3}\theta_r^k\,\check{G}_i^r. \tag{2}$$

Компоненты упругого тензора деформаций $\hat{\mathbf{G}}$, который симметричен, удовлетворяют аналогичному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial\hat{G}_{kq}}{\partial t}+\sum_{r=1}^{3}v^r\,\nabla_r\hat{G}_{kq}=-\sum_{r=1}^{3}\nabla_k v^r\,\hat{G}_{rq}-\sum_{r=1}^{3}\hat{G}_{kr}\,\nabla_q v^r+\sum_{r=1}^{3}\theta_k^r\,\hat{G}_{rq}+\sum_{r=1}^{3}\hat{G}_{kr}\,\theta_q^r. \tag{3}$$

Здесь v^r и v^k — компоненты вектора скорости среды $\mathbf{v}$. Через θ_k^r и θ_q^r в (2) и (3) обозначены компоненты особого тензора $\boldsymbol{\theta}$. Он называется тензором *скорости пластической релаксации*. Разложение (1) и уравнения (2) и (3) описывают исключительно кинематику среды. В работе [2] было показано, что они остаются справедливыми и для кристаллических сред. В кристаллах тензор $\boldsymbol{\theta}$ выражается через тензоры $\mathbf{R}$ и $\mathbf{J}$, которые описывают плотность и плотность тока для суммарного вектора Бюргерса движущихся дислокаций (см. [3]). В работе [4] отслеживается аналогия между нелинейной теорией дислокаций в кристаллах и электродинамикой.

Симметричный и положительно определённый тензор упругих деформаций $\hat{\mathbf{G}}$ с компонентами $\hat{G}_{kq}$ в (1) может пониматься как метрика. В работе [5] показано, что это плоская метрика относительно несимметричной метрической связности, кручение которой задается тензором $\mathbf{R}$. Это свойство метрики сохраняется в динамике.

Термодинамика пластических деформаций описывается при помощи удельной свободной энергии среды f (т. е. отнесённой к единице массы). Она берется в вде функции:

$$f=f(t,p,T,\mathbf{g},\hat{\mathbf{G}},\rho)\qquad\text{для аморфной среды,} \tag{4}$$

$$f=f(t,p,T,\mathbf{g},\hat{\mathbf{G}},\mathbf{R},\rho)\qquad\text{для кристаллической среды.} \tag{5}$$

Здесь t — время, p — точка среды. Далее ρ — плотность и T — температура в точке p в момент времени t, $\mathbf{g}$ — метрический тензор стандартной евклидовой метрики. Отметим, что

функция $f = f(T, \hat{\mathbf{G}})$, использованная в [1], слишком ограничительна. Для различных специальных типов аморфных сред (пористых, зернистых, волокнистых и т. д.) список аргументов функции (4) может быть расширен.

В обоих случаях (4) и (5) функция f — это расширенное скалярное поле в смысле работы [7]. Она удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению первого порядка, которое выводится из соображений изотропности пространства (не среды). Любой уровень анизотропности самой среды может быть описан функциями (4) и (5).

Для пластических течений, как и для многих других, динамика среды описывается стандартными средствами через уравнения баланса (см. [1] и [6]), которые включают баланс **массы**, баланс **импульса** и баланс **энергии**. Весь фокус заключён в параметрах, которые входят в эти уравнения. Они делятся на две группы: **термодинамические** параметры и **кинетические** параметры.

Все термодинамические параметры выражаются через частные производные функции f. Кинетические параметры вводятся независимым образом. Но, тем не менее, они имеют тот же список аргументов, что и функция f.

Уравнение баланса энтропии выводится из перечисленных выше уравнений баланса массы, импульса и энергии при учёте кинематических уравнений (2) и (3). Для кристаллических сред оно имеет вид

$$\frac{\partial(\rho\, s)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3} \nabla_k \left(\rho\, s\, v^k + \ldots + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} P^{kij}\ \theta_{ij} \right) = \ldots + \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\mathfrak{S}^{ij}\, \theta_{ij}}{T}. \tag{6}$$

Точками обозначены слагаемые, которые отвечают за сопутствующие пластическому течению процессы — это вязкость, теплопроводность, диффузия и т. д. Сама пластичность в (6) описывается двумя членами, содержащими θ_{ij}, где θ_{ij} — ковариантные компоненты тензора скорости пластической релаксации $\boldsymbol{\theta}$. Они вычисляются по формуле

$$\theta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} g_{ik}\ \theta^k_j.$$

Отметим, что величины θ_{ij} — это кинетические параметры, а P^{kij} и $\mathfrak{S}^{ij}$ — это термодинамические параметры. Явные формулы для последних выведены в работе [6].

Несмотря на нелинейность теории, различные физические явления дают аддитивный вклад в обе части уравнения (6). Применительно к пластичности данный факт означает, что пластичность — это абсолютно отдельное физическое явление, отличное от вязкости. В частности, это значит, что всякие попытки описать пластический материал как очень вязкую жидкость противоречат природе вещей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lyuksyutov S., Sharipov R.* Note on kinematics, dynamics, and thermodynamics of plastic glassy media // E-print `cond-mat/0304190` in `http://arXiv.org`, 2003, C. 1–19.
2. *Comer J., Sharipov R.* A note on the kinematics of dislocations in crystals // E-print `math-ph/0410006` in `http://arXiv.org`, 2004, C. 1–15.
3. *Sharipov R.* Burgers space versus real space in the nonlinear theory of dislocations // E-print `cond-mat/0411148` in `http://arXiv.org`, 2004, C. 1–10.
4. *Sharipov R.* Gauge or not gauge? // E-print `cond-mat/0410552` in `http://arXiv.org`, 2004, C. 1–12.
5. *Comer J., Sharipov R.* On the geometry of a dislocated medium // E-print `math-ph/0502007` in `http://arXiv.org`, 2005, C. 1–17.
6. *Sharipov R.* A note on the dynamics and thermodynamics of dislocated crystals // E-print `cond-mat/0504180` in `http://arXiv.org`, 2005, C. 1–18.
7. *Sharipov R.* Tensor functions of tensors and the concept of extended tensor fields // E-print `math.DG/0503332` in `http://arXiv.org`, 2005, C. 1–43.

УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© А. А. Шваб

Schwab@ngs.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В работе рассматриваются переопределенные задачи теории упругости,когда на всей поверхности тела одновременно заданы вектора нагрузки $\mathbf{u}$ и вектор перемещения $\mathbf{p}$. Подобные задачи возникают в теории дефектоскопии, когда требуется выявить дефект в теле по дополнительным краевым условиям. В Механике горных пород при определении прочностных и упругих свойств или напряжений в массиве по натурным замерам и в ряде других задач при исследовании состояния объекта по натурным замерам. Для подобных проблем предложен интегральный критерий на основе представления решения в виде потенциалов простого и двойного слоев, позволяющий ответить на вопрос об однородности исследуемого тела. Данный критерий аналогичен теореме о граничных условиях аналитической функции, в которой определены условия непрерывного продолжения функции с контура в область. В работе доказана теорема единственности определения упругих модулей среды E, ν при существенно переопределенных условиях. Теорема доказана при выполнении определенных условия на $\operatorname{div}\mathbf{u}$. Показан, что интегральный критерий позволяет решать коэффициентную задачу об определении упругих постоянных среды. Введенный критерий позволяет сделать выводы о том, что вектора $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$ заданные на всей поверхности изотропного однородного тела, связаны определенным функциональным соотношением которое является необходимым и достаточным условием согласования векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{p}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00673).

УДК 539.3

SOME EFFECTS OF DEFORMATION OF LAMINATED MEDIUM

© Yu. A. Bogan [*], A. G. Kolpakov [**], S. I. Rakin [***]

algk@ngs.ru

[*] *Lavrentiev Institute of Hydrodynamics, Novosibirsk, Russia;*
[**] *Siberian State University of Telecommunications and Informatics, Novosibirsk, Russia;*
[***] *Siberian State University of Communications, Novosibirsk, Russia*

There are discussed two effects arising as results of homogenization of the elasticity problem for laminated materials found by the authors:

— transformation of nonlinearity of deformation into material nonlinearity;

— singularity of solution in composite with „laminated-circular“ microstructure subjected to antiplane deformation.

The first problem deals with a laminated composite under nonlinear deformations under condition the strain–stress relationship is given by linear (Hooke's) law. It is found that [1, 2] that the homogenized problem (i. e. material „in whole“) corresponds to material with a nonlinear strain-stress relationship. It is also found that, generally, the local stresses in the laminae are not proportional to the stiffness of the laminae if the deformation of the composite is not linear. This observation is important for correct prediction of the strength of composite material because often (by analogy with the linear case) the local stresses in laminated composite are assumed to be proportional to the stiffness of the laminae. The effects found clear manifest themselves starting at strains about 2%. It means that the zone of action of the effects found joints directly to the zone of linear (small) deformations.

The second problem deals with a composite with „laminated–circular“ microstructure (the laminae are curved as coaxial cylinders or as logarithmic spiral cylinders) subjected to antilpane deformation (in the direction of the axis of the cylinders). It is found that solution of the homogenized problem can have a singularity in the origin. The existence or absence of the singularity depends on the material and geometrical properties of the laminae.

REFERENCES

1. *Annin B. D., Kalamkarov A. L., Kolpakov A. G., Parton V. Z.* Analysis and design of composite materials and structural elements. Nauka: Novosibirsk, 1993 (in Russian).
2. *Kolpakov A. G., Rakin S. I.* Deformation characteristics of laminated composite under nonlinear strains // J. Appl. Mech. Tech. Physics. PMTF. 2004. V. 45, N 5. P. 747–755.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 534–535

УДК 517.9; 539.3

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS ON HYPERSURFACES AND THE SHELL THEORY

© Roland Duduchava

dudu@num.uni-sb.de

Razmadze Mathematical Institute, Tbilisi, Georgia

Consider a hypersurface $\mathcal{S}$ be given by a local diffeomorphism $\Theta : \Omega \to \mathcal{S}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$, which has the maximal rang $n-1$ and $\nu(\mathcal{X}) = (\nu_1(\mathcal{X}), \dots, \nu_j(\mathcal{X}))^\top$ be the outer unit normal vector to $\mathcal{S}$ at $\mathcal{X} \in \mathcal{S}$. We propose to write partial differential equations on hypersurface in cartesian coordinates of the ambient space instead of more customary local coordinates and Riemannian metric tensor of the underlying surface. This seemingly trivial idea simplifies the form of many classical differential equations on the surface. namely, the surface gradient, which maps a function $f \in \mathbb{C}^1(\mathcal{S})$ to the tangent vector fields to $\mathcal{S}$ is written in the form

$$\nabla_{\mathcal{S}} = \mathcal{D}_{\mathcal{S}} := (\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n)^\top, \tag{1}$$

while the formally adjoint operator-the surface divergence which maps a smooth tangent vector field $U = \sum_{j=1}^n U^j \partial/\partial x_j \in \mathcal{TS}$ to scalar function-in the form:

$$\mathrm{Div}_{\mathcal{S}} U = \sum_{j=1}^n \mathcal{D}_j \mathrm{U}^j, \tag{2}$$

Here $\mathcal{D}_j := \partial_j - \nu_j(\mathcal{X})\nabla_\nu$ denotes the covariant Günter's derivative, which is tangential to the surface and $\nabla_\nu := \sum_{j=1}^n \nu_j \partial_j$ is the normal derivative.

Respectively, the Laplace – Beltrami operator acquires the form

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathcal{S}}\, \varphi := \mathrm{Div}_{\mathcal{S}} \nabla_{\mathcal{S}} \varphi = \sum_{j=1}^n \mathcal{D}_j^2 \varphi = \sum_{1 \le j < k \le n} \mathcal{M}_{jk}^2 \varphi, \qquad \varphi \in \mathbb{C}^2(\mathcal{S}), \tag{3}$$

where $\mathcal{M}_{jk} := \nu_j \partial_k - \nu_k \partial_j$ are the Stoke's derivatives (natural entries of the Stoke's formulae).

Based on the principle that, at equilibrium, the displacement minimizes the total free (elastic) energy

$$\mathcal{E}[U] := -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} E(x, \nabla U(x))\, dS, \qquad U \in \mathcal{TS}, \tag{4}$$

we derive the following expression for the Lamé operator $\mathcal{L}$ on $\mathcal{S}$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}} = -2\mu\, \mathrm{Def}_{\mathcal{S}}^* \mathrm{Def}_{\mathcal{S}} + \lambda\, \nabla\, \mathrm{Div}_{\mathcal{S}}, \tag{5}$$

where $(\mathrm{Def}_{\mathcal{S}}\, U)(V, W) = \frac{1}{2}\Big\{ \langle \nabla_V^{\mathcal{S}} U, W \rangle + \langle \nabla_W^{\mathcal{S}} U, V \rangle \Big\}$ denotes the deformation tensor and $\nabla_W^{\mathcal{S}} U$ — the covariant derivative of tangent vector fields $V, W \in \mathcal{TS}$. Representation in terms of Günter's derivatives has the form

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}} U = \mu\, \pi_{\mathcal{S}}\, \mathrm{Div}_{\mathcal{S}}\, \nabla_{\mathcal{S}} U + (\lambda + \mu)\, \nabla_{\mathcal{S}} \mathrm{Div}_{\mathcal{S}} U - \mu\, (n-1) \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \mathcal{W}_{\mathcal{S}} \mathrm{U}. \tag{6}$$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ are the Lamé moduli, whereas $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} := (n-1)^{-1} \sum_{j=1}^n \mathcal{D}_j \nu_j$, $\mathcal{W}_{\mathcal{S}} = \big[\mathcal{D}_j \nu_k\big]_{n \times n}$ stand, respectivthe surface. $\pi_{\mathcal{S}} : \mathbb{R}^n \to \mathcal{TS}$ is the orthogonal projection onto the tangent hyperspace to $\mathcal{S}$.

A special accent is made on a thin flexural shell problems in elasticity. We suggest for their study the above Lamé equation which describe displacement of the mid-surface.

We dwell on the approach that considers flexural shells as two-dimensional deformable bodies in the spirit of Cosserat shell theories.

There exist a number of approaches proposed for modeling linearly elastic flexural shells. Started by the Cosserats pioneering work (1909), Goldenveiser (1961), Naghdi (1963), Vekua (1965), Novozhilov (1970), Koiter (1970) and many others contributed essentially the development of the shell theory. Ellipticity of the corresponding partial differential equations was proved much later by the different authors: Roug'e (1969), Coutris (1973), Gordeziani (1974), Shoikhet (1974), Ciarlet & Miara (cf. [1] for survey and further references).

Relatively simple form of operators recorded in terms of Günter's and Stoke's derivatives (1)–(6) enable simplified treatment of corresponding boundary value problems. For this purpose we apply the lax-Milgram lemma which require proofs of Korn's inequalities first without and later with boundary conditions. Solutions of the homogeneous equation $\mathrm{Def}_{\mathcal{S}}U = 0$, which are also solve the homogeneous Lamé equation $\mathcal{L}_{\mathcal{S}}U = 0$ and are known as the Killing's vector fields, are investigated. The investigation is based on the representation of the deformation tensor $\big[\mathfrak{D}_{jk}(U)\big]_{n\times n}$ in the terms of Günter's derivatives has the form

$$\mathfrak{D}_{jk}(U) = \frac{1}{2}\Big[\mathcal{D}_k U_j + \mathcal{D}_j U_k + \nabla_U\big(\nu_j\nu_k\big)\Big], \qquad U = \sum_{j=1}^{n} U^j \frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathcal{TS}.$$

The above results are partly published in the paper [2].

REFERENCES

1. *Ciarlet P. G.* Mathematical Elasticity. V. III: Theory of Shells // Studies in Mathematics and Applications. V. 29. Elsevier, North-Holland, Amsterdam, 2000.
2. *Duduchava R., Mitrea D., Mitrea M.* Differential operators and boundary value problems on surfaces // Mathematische Nachrichten. 2006. V. 9–10. P. 996–1023.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 536–537

УДК 517.9; 539.3

BOUNDARY HOMOGENIZATION AND REDUCTION OF DIMENSION IN THE KIRCHHOFF – LOVE PLATE

© A. Gaudiello

gaudiell@unina.it

Università degli Studi di Cassino, Cassino (FR), Italy

I present a joint work with Dominique Blanchard (Université de Rouen, France) and Taras A. Mel'nyk (Kyiv Nat. Taras Shevchenko University, Ukraine)

We investigate the asymptotic behavior, as $\varepsilon \to 0$, of the Kirchhoff – Love equation satisfied by the transverse displacement U_ε of the middle surface $\Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega_\varepsilon^-$ (contained in the (x_1, x_2)-coordinate plane) of a thin three-dimensional plate. The middle surface is composed of two domains. The first one Ω_ε^- is a thin strip with vanishing height h_ε (in direction x_2), as $\varepsilon \to 0$. The second one Ω_ε^+ is a comb with fine teeth having small cross section $\varepsilon\omega$ and constant height, ε-periodically distributed (in direction x_1) on the upper basis of the thin strip (see Figure 1). The middle surface is assumed clamped on the top of the teeth, with a free boundary elsewhere, and subjected to a transverse load.

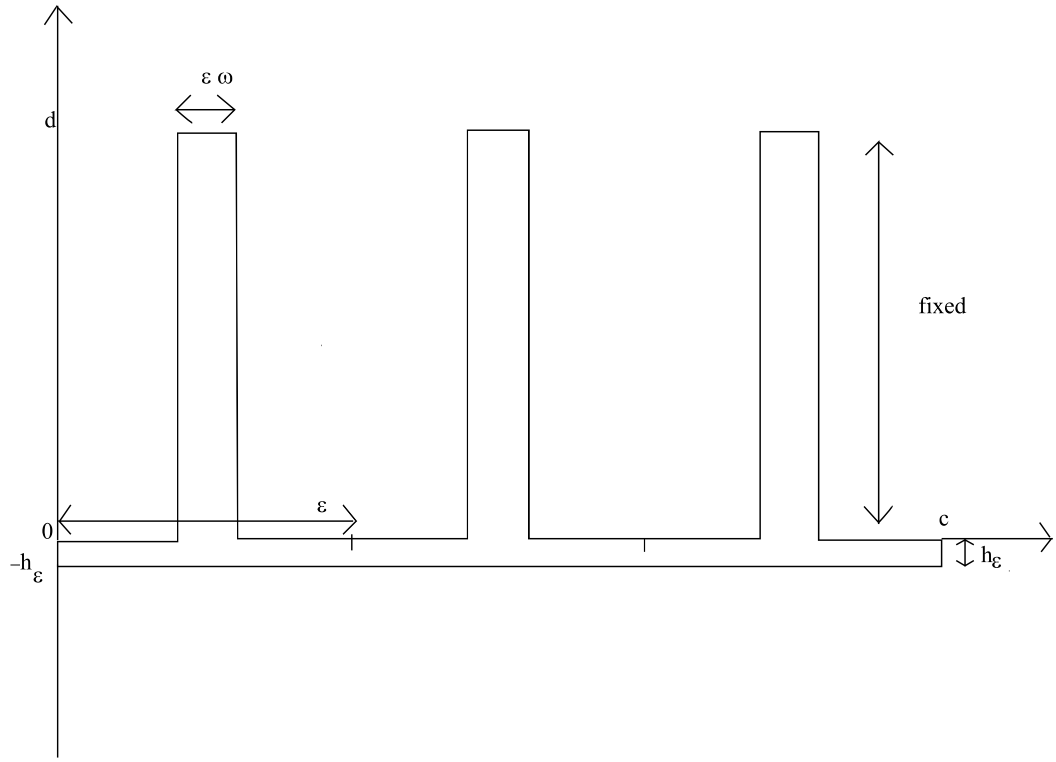


Fig. 1. The middle surface of our three-dimensional plate.

As $\varepsilon \to 0$, in the limit domain $\Omega^+ =]0, c[\times]0, d[$ of the comb, we obtain a continuum bending model of rods subjected to a force f, clamped on the upper side $\Gamma =]0, c[\times\{d\}$, and subjected on the lower side $\Sigma =]0, c[\times\{0\}$ to applied forces but without applied momentum. The forces on Σ depend on the limit density g of the transverse loads on the thin strip Ω_ε^-, and on the measure of the cross section ω of the reference tooth. The force f depends on the limit of the transverse loads on the teeth.

The limit displacement is independent of x_2 in the rescaled (with respect to h_ε) strip $\Omega^- =]0,c[\times]-1,0[$. The limit displacement meets a Dirichlet transmission condition between Ω^+ and Ω^-, if $h_\varepsilon \gg \varepsilon^4$, or if $h_\varepsilon \simeq \varepsilon^4$ and $\int_{-1}^0 g(x_1,x_2)dx_2 = 0$ a.e. in $]0,c[$. While, if the strip is thin enough and the transverse loads on the thin strip are strong enough, i.e. $h_\varepsilon \simeq \varepsilon^4$ and $\int_{-1}^0 g(x_1,x_2)dx_2 \neq 0$ in a subset of $]0,c[$ with positive measure, a discontinuity in the Dirichlet transmission condition appears. Roughly speaking, this means that the displacement in the strip oscillates between the teeth of Ω_ε^+ producing a limit average field different from that on the lower extremities of the teeth.

REFERENCES

1. *Allaire G.* Homogenization and Two-Scale Convergence // SIAM J. Math Anal. 1992. V. 23, N 6. P. 1482–1518.
2. *Amirat Y., Bodart O., De Maio U., Gaudiello A.* Asymptotic Approximation of the Solution of the Laplace Equation in a Domain with Highly Oscillating Boundary // SIAM J. Math Anal. 2004. V. 35, N 6. P. 1598–1616.
3. *Blanchard D., Carbone L., Gaudiello A.* Homogenization of a Monotone Problem in a Domain with Oscillating Boundary // M2AN Math. Model. Numer. Anal. 1999. V. 33, N 5. P. 1057–1070.
4. *Blanchard D., Gaudiello A.* Homogenization of Highly Oscillating Boundaries and Reduction of Dimension for a Monotone Problem // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2003. V. 9. P. 449–460.
5. *Blanchard D., Gaudiello A., Mossino J.* Highly Oscillating Boundaries and Reduction of Dimension: the Critical Case // Anal. Appl. (Singap.), to appear.
6. *Brizzi R., Chalot J. P.* Boundary Homogenization and Neumann Boundary Value Problem // Ricerche Mat. 1997. V. 46, N 2. P. 341–387.
7. *Gaudiello A., Zappale E.* Junction in a Thin Multidomain for a Fourth Order Problem // M ^{3} AS: Math. Models Methods Appl. Sci. 2006. V. 16, N 12. P. 1887–1918.
8. *Keller J. B., Nevard J.* Homogenization of Rough Boundary and Interfaces // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57, N 6. P. 1660–1686.
9. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Poisson Equations in a Thick Periodic Junction // Z. Anal. Anwendungen. 1999. V. 18, N 4. P. 953–975.
10. *Mel'nyk T. A., Nazarov S. A.* Asymptotics of the Neumann Spectral Problem Solution in a Domain of “Thick Comb” Type. // J. Math. Sci. 1997. V. 85, N 6. P. 2326–2346.
11. *Nguetseng G.* A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization // SIAM J. Math Anal. 1989. V. 20, N 3. P. 608–623.
12. *Tartar L.* Cours Peccot, Collège de France (March 1977). Partially written in Murat F. H-Convergence. Séminaire d'analyse fonctionnelle et numérique de l'Université d'Alger. 1977-78. English translation in Mathematical Modelling of Composite Materials, Cherkaev A. and Kohn R. V. ed., Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications. Birkhäuser, Verlag, 1997. P. 21–44.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 538–539

УДК 539.3

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR AN INFINITE ELASTIC STRIP WITH A SEMI-INFINITE CRACK

© Hiromichi Itou* and Atusi Tani**

* h-itou@math.sci.gunma-u.ac.jp, ** tani@math.keio.ac.jp

* *Gunma University, Kiryu, Japan;*
** *Keio University, Yokohama, Japan*

In this talk we study a boundary value problem in a two-dimensional infinite elastic strip with a semi-infinite crack (cf. [7] in References).

By $u = (u_i)_{i=1,2,3}$ and $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2,3}$ we denote the displacement vector and the stress tensor, respectively. Let

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}, -a < x_2 < a\} \ (a > 0)$$

be a strip in $\mathbb{R}^2$, representing a homogeneous isotropic elastic plate in the state of a plane strain. Then, the linearized elasticity equations for a homogeneous isotropic material consist of the constitutive law (Hooke's law) and the equilibrium conditions without any body forces. On the boundaries of the strip

$$\partial\Omega_+ = \{(x_1, a) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \quad \text{and} \quad \partial\Omega_- = \{(x_1, -a) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

Neumann and Dirichlet boundary conditions are imposed, respectively. We denote by

$$\Gamma = \{(x_1, 0) \mid -\infty < x_1 \leq 0\}$$

the crack in Ω. On the crack we assume the free traction condition.

Then, our problem is to find u satisfying

$$\text{(P)} \begin{cases} \sigma_{ij,j} \equiv Au = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus \Gamma, \\ \sigma_{ij}^{+}\nu_j = \sigma_{ij}^{-}\nu_j = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma^{\pm}, \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_-, \\ \sigma_{ij}\nu_j \equiv Tu = p \quad \text{on} \quad \partial\Omega_+. \end{cases}$$

Here and in what follows we use the summation convention. In the problem (P) $p = (p_1, p_2)^{\mathrm{T}}$ is a given vector of continuous functions on $\partial\Omega_+$ and $\nu = (\nu_1, \nu_2)^{\mathrm{T}}$ is the unit outward normal and

$$\begin{aligned} A &\equiv \begin{pmatrix} \mu\triangle + (\lambda+\mu)\partial_1^2 & (\lambda+\mu)\partial_1\partial_2 \\ (\lambda+\mu)\partial_1\partial_2 & \mu\triangle + (\lambda+\mu)\partial_2^2 \end{pmatrix}, \\ \triangle &\equiv \partial_1^2 + \partial_2^2, \\ T &\equiv \begin{pmatrix} (\lambda+2\mu)\nu_1\partial_1 + \mu\nu_2\partial_2 & \mu\nu_2\partial_1 + \lambda\nu_1\partial_2 \\ \lambda\nu_2\partial_1 + \mu\nu_1\partial_2 & \mu\nu_1\partial_1 + (\lambda+2\mu)\nu_2\partial_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

where λ and μ are *Lamé* constants satisfying that shearing strain $\mu > 0$, modulus of compression $3\lambda + 2\mu \geq 0$, in which case it is easy to see that the operator A is elliptic. And $\Gamma^{\pm}$ means both sides of Γ. Here for every $x \in \Gamma$, $\sigma_{ij}^{\pm}\nu_j = \sigma_{ij}^{\pm}(x)\nu_j(x)$ means the limit of $\sigma_{ij}^{\pm}(\bar{x})\nu_j(x)$ as $\bar{x} \in \Omega \setminus \Gamma$

tends to $x \in \Gamma$ along the normal $\nu(x)$. The limit values σ^+_{ij} and σ^-_{ij} may be different in general, therefore σ_{ij} may have a jump on Γ. At end-point of Γ (i. e. $(0,0)$) we assume

$$\lim_{x_1 \to 0} \sigma_{ij}\nu_j\big|_{x \in \Gamma^\pm \setminus \{(0,0)\}} = 0.$$

We introduce the class $\mathcal{K}$ of functions $u(x)$ with the properties (cf. [8]):

1. $u \in C^0(\overline{\Omega \setminus \Gamma}) \cap C^2(\Omega \setminus \Gamma)$,
2. $\nabla u \in C^0(\overline{\Omega \setminus \Gamma} \setminus \{(0,0)\})$,
3. in the neighborhood of $(0,0)$ there exist positive constant C and $\epsilon > -1$ such that
$$\mid \nabla u(x) \mid \leq C \mid x \mid^\epsilon \quad \text{as} \quad x \to 0,$$
4. for every $x \in \partial\Omega_\pm$ there exists a uniform limit of $\nabla_{\bar{x}} u(\bar{x})$ as $\bar{x} \in \Omega \setminus \Gamma$ tends to $x \in \partial\Omega_\pm$ along the normal ν_x.

Furthermore, the class $\mathcal{U}$ is defined by

$$\mathcal{U} = \{u \mid u \to 0 \text{ as } \mid x \mid \to \infty\}$$

and

$$C^{0,\alpha}_\gamma = \{f(x) \in C^{0,\alpha} \mid f(x) = O(\mid x \mid^{-\gamma}) \text{ as } \mid x \mid \to \infty\} \quad (1 < \gamma).$$

The usage of the plane elastic single and double layer potentials reduces the problem (P) to a system of singular integral equations. It is shown that this system is uniquely solvable in the appropriate H ö lder spaces by the Fredholm alternative (cf. [2, 10, 11]).

Theorem. *The problem* (P) *has a unique solution* $u \in \mathcal{K} \cap \mathcal{U}$ *for any* $p \in C^{0,\alpha}_\gamma(\partial\Omega_+)$ *with any* $\alpha \in (0,1)$ *and any* $\gamma > 1$.

REFERENCES

1. *Chudinovich I. and Constanda C.* Existence and integral representations of weak solutions for elastic plates with cracks // J. Elasticity. 1999. V. 55, N 3. P. 169–191.
2. *Constanda C.* A Mathematical Analysis of Bending of Plates with Transverse Shear Deformation. Longman, Harlow, 1990.
3. *Constanda C.* The boundary integral equation method in plane elasticity // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123, N 11. P. 3385–3396.
4. *Constanda C. (editor)* Integral Methods in Science and Engineering. Longman, Harlow, 1997.
5. *Fichera G.* Existence theorems in elasticity // Mechanics of Solids. 1984. V. 2, P. 347–389.
6. *Friedman A. and Liu Y.* Propagation of cracks in elastic media // Arch. Rational Mech. Anal. 1996. V. 136, N 3. P. 235–290.
7. *Itou H. and Tani A.* A boundary value problem for an infinite elastic strip with a semi-infinite crack // J. Elasticity. 2002. V. 66, N 3. P. 193–206.
8. *Krutitsukiĭ P. A.* The 2-D Neumann problem in a domain with cuts // Rendiconti di Mathematica. 1999. V. 19, N 1. P. 65–88.
9. *Landau L. D. and Lifshitz E. M.* Theory of Elasticity. Pergamon Press, 1986.
10. *Muskhelishvili N. I.* Singular Integral Equations. Noordhoff, Groningen, 1972.
11. *Vekua N. P.* Systems of Singular Integral Equations. Noordhoff, Groningen, 1967.

MSC (2000): 74K20, 74K25

ELASTIC CUSPED BEAM, PLATE, AND SHELL HIERARCHICAL MODELS AND THEIR RELATION TO THE 3D CLASSICAL LINEAR MODELS

© George V. Jaiani

jaiani@viam.sci.tsu.ge

I. Vekua Institute of Applied Mathematics
of Iv. Javakhishvili Tbilisi State University, Tbilisi, Georgia

The present paper gives an up-dated exploratory survey of investigations concerning elastic cusped beams (i. e., the areas of their cross-sections maybe equal to zero at their ends) [1, 2], cusped plates and shells (i. e., their thicknesses may vanish either on some parts of their projection boundaries or on the whole ones) [3–6]. The relation of such 2D classical and hierarchical mathematical models to physical models (i. e., objects under study) and to the 3D classical linear model is also studied. Along with the analysis of well-known results it contains some new and unpublished results as well.

REFERENCES

1. *Jaiani G. V.* On a mathematical model of bars with variable rectangular cross-section // ZAMM-Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. 2001. V. 81, N 3. P. 147–173.
2. *Jaiani G. V.* Theory of Cusped Euler – Bernoulli Beams and Kirchhoff – Love Plates. Lecture Notes of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), 3, 2002.
3. *Jaiani G. V.* Elastic bodies with non-smooth boundaries–cusped plates and shells // ZAMM-Zeitschrift fuer Angewandte Mathematik und Mechanik. 1996. V. 76, N 2. P. 117–120.
4. *Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W. L.* Hierarchical Models for Cusped Plates and Beams. Lecture Notes of TICMI (Tbilisi International Centre of Mathematics and Informatics), 4, 2003.
5. *Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W. L.* Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary // Journal of Elasticity. 2004. V. 77, N 2. P. 95–122.
6. *Vekua I. N.* Shell Theory: General Methods of Construction. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1985.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 541–542

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
MATHEMATICAL MODELING

УДК 519.676

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ, ЗАДАННОЙ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

© Т. А. Аверина

ata@osmf.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Рассмотрим процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$, где $s(t)$ — дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, S\}$, S — число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ — n-мерный непрерывный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) в форме Стратоновича [1]

$$d\mathbf{y}(t) = a^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \tag{1}$$

или в эквивалентной форме Ито

$$d\mathbf{y}(t) = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \tag{2}$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ – m-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $\mathbf{y}_0$; $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$, $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$ — вектор-функции размера n, связанные соотношением [1]

$$f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) = a_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{m} \frac{\partial \sigma_{ij_2}^{(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial y_{j_1}} \sigma_{j_1 j_2}^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ — матричная функция размера $n \times m$; l — номер структуры, $l = 1, 2, \ldots, S$.

Вероятность перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяет условию [1]

$$P\big(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}\big) = \nu_{lr}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), \quad l, r = 1, 2, \ldots, S, \quad l \neq r,$$

$$P\big(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l,\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}\big) = 1 - \nu_{ll}(t, \mathbf{y})\Delta t + o(\Delta t), s(t_0) = s_0, \tag{3}$$

где интенсивности перехода $\nu_{lr}(t, \mathbf{y}) \geq 0$, $\nu_{ll}(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1 \neq l}^{S} \nu_{lr}(t, \mathbf{y})$. Предполагается, что в моменты переключения траектории процесса $\mathbf{y}(t)$ остаются непрерывными, т.е. рассматривается случай точного восстановления реализаций.

Задача анализа систем со случайной структурой (1), (2) (*или* (2), (3)), состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния по заданным функциям $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ (или $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$), $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$, интенсивностям $\nu_{lr}(t, \mathbf{y})$ и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$; $l, r = 1, 2, \ldots, S$.

Наряду с нахождением функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности $p(x)$ и моментных характеристик вектора состояния (в

том числе взвешенных и условных) в любой момент времени $t \in [t_0, T]$, а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую [1].

Условная оптимизация статистического алгоритма. В работе [2] описан статистический алгоритм решения систем со случайной структурой, который использует численный метод решения СДУ, имеющий p-й порядок слабой сходимости. При решении данной задачи статистическим методом важной является проблема оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма: шага численного метода h, размера выборки N и числа узлов гистограммы n_g.

Теорема. *Пусть* $\pi^*(x)$ *- гистограмма маргинальной плотности* $p(x)$ $(x \in [a,b])$ *в момент времени* $t_{k_1} \in [t_0, T]$, *полученная статистическим алгоритмом [2] при решении систем со случайной структурой (1), (3) (или (2),(3)). Тогда минимум трудоемкости вычисления гистограммы достигается при* $n_{g,opt} \asymp \gamma^{-1}$, $N_{opt} \asymp \gamma^{-3}$, $h_{opt} \asymp \gamma^{1/p}$, *где* γ *- требуемая точность вычислений в норме пространства* $L_2\big([a,b]\big)$.

Доказательство. Функциональная оценка погрешности уклонения гистограммы $\pi^*(x)$ одномерной случайной величины $\hat{\xi} = y_{k_1}$, $a \le y_{k_1} \le b$ (с плотностью $\hat{p}(x)$), от графика плотности $p(x)$ случайной величины $y(t_{k_1})$ в норме пространства $L_2\big([a,b]\big)$:

$$B^2(p,\pi^*) = \Big(E\|p(x)-\pi^*(x)\|_{L_2([a,b])}\Big)^2 \le \Big(E\Big\{\int_a^b \Big[p(x)-\pi^*(x)\Big]^2 dx\Big\}^{1/2}\Big)^2$$

$$\le \int_a^b E\Big[p(x)-\pi^*(x)\Big]^2 dx = \int_a^b \mathbf{D}\pi^*(x)dx + \int_a^b \Big[p(x)-E\pi^*(x)\Big]^2 dx. \tag{4}$$

Будем считать шаг гистограммы постоянным, т.е. $h_g = (b-a)/n_g$. Тогда гистограмма $\pi^*(x)$ определяется

$$\pi^*(x) = \frac{m_k}{Nh_g}, \quad x \in I_k = [a+(k-1)h_g, a+kh_g],$$

где m_k — число наблюдений случайной величины $\hat{\xi} = y_{k_1}$, попавших в отрезок I_k. Заметим, что m_k является случайной величиной с биномиальным распределением и означает число успехов в N независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $\hat{p}_k = \int_{I_k} \hat{p}(x)dx$. Поэтому $\mathbf{D}m_k = N\hat{p}_k(1-\hat{p}_k)$ и первое слагаемое в (4) имеет вид:

$$\int_a^b \mathbf{D}\pi^*(x)dx = \sum_{k=1}^{n_g}\int_{I_k}\mathbf{D}\frac{m_k}{Nh_g}dx = \sum_{k=1}^{n_g}\int_{I_k}\frac{\hat{p}_k(1-\hat{p}_k)}{Nh_g^2}dx = \frac{C_1}{Nh_g} = \frac{C_1 n_g}{N}.$$

Если $\frac{d^2\hat{p}}{dx^2}$ ограничена, то для второго слагаемого в (4) имеем:

$$\|p(x)-E\pi^*(x)\| \le \|p(x)-\hat{p}(x)\| + \|\hat{p}(x)-E\pi^*(x)\| \le C_2 h^p + \frac{C_3}{n_g},$$

где учтено, что численный метод решения СДУ слабо сходится с порядком p.

Таким образом,

$$B^2(p,\pi^*) \le C_1 n_g/N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2}.$$

Для получения оптимальных параметров $n_{g,opt}$, N_{opt} и h_{opt} достаточно приравнять получившиеся погрешности и получить требуемый порядок из соотношения

$$C_1 n_g/N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2} = \gamma^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
2. *Аверина Т. А.* Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сиб. ЖВМ. 2002. Т. 5, № 1. С. 1–10

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 543–543

УДК 532.529

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВУХФАЗНОЙ ГАЗОКАПЕЛЬНОЙ СТРУИ СО СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

© Т. Р. Аманбаев

tulegen_amanbaev@mail.ru

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, Шымкент, Казахстан

В работе исследовано взаимодействие струи, содержащей диспергированные жидкие капли, со сверхзвуковым потоком газа. Считалось, что струя истекает из поперечной к основному потоку плоской щели со звуковой скоростью. Моделирование течения проводилось на основе допущений и уравнений механики многофазных сред [1]. В качестве граничных условий на твердой стенке для газа ставилось условие непротекания, а для капель — условие "свободного протекания" (исчезновения из потока). В качестве начальных данных использовались однородные потоки внутри щели и основной области, при этом время выступало как параметр установления.

Численное моделирование проводилось на основе метода крупных частиц [2] с использованием алгоритма, разработанного в среде MATLAB. Расчеты проводились до получения установившейся картины течения. Точность расчетов контролировалось путем двойного пересчета с уменьшенными в два раза шагами по времени и координатам. Оптимальный шаг счета устанавливался критериями устойчивости и необходимой точности расчета. Приведен пример расчета взаимодействия двухфазной струи воздуха с каплями воды, вытекающей из щели при звуковой скорости со сверхзвуковым потоком воздуха с числом Маха, равным 3.5. Интенсивность вдува (отношение давления торможения вдуваемой струи к давлению в набегающем потоке) была равна 16.55. Температура вдуваемого газа совпадала с температурой набегающего потока. Массовое содержание капель и их диаметр составляли соответственно 2 и 60 мкм. Считалось, что несущая и дисперсная фазы во вдуваемой струе находились в термодинамическом равновесии.

Расчеты показали, что перед струей основной поток резко поворачивает вверх, обтекая зону возмущенного струей течения. Поскольку струя представляет собой некую преграду для набегающего потока, перед ней формируется волна уплотнения с передним скачком. Причем вблизи стенки скачок почти прямой, а с удалением от стенки он заметно искривляется. Параметры течения за скачком вблизи нижней стенки практически совпадают со значениями, следующими из соотношений Ренкина – Гюгонио. За струей образуется обширная зона разрежения, центр которой расположен на расстоянии порядка $12\,h$ (h — ширина канала) от задней кромки щели. Плотность и давление в центре этой зоны примерно в три раза меньше, чем в набегающем потоке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987.
2. *Белоцерковский М. Ю., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 544–545

УДК 630.116:519.8

ВЫБОР МЕТОДА ОЦЕНКИ РЕПРЕЗЕНТАТИВНОСТИ ДАННЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

© Н. М. Андреева [*], Д. И. Назимова [**]

[*] and-n-m@mail.ru, [**] inpol@mail.ru

[*] *Сибирский федеральный университет, Красноярск;*
[**] *Институт леса СО РАН, Красноярск*

Информационная система “БИОМ” служит для анализа биоклиматических связей (лес – климат) и включает характеристики типов лесных массивов на территории Сибири: состав зональных формаций и групп типов леса, структуры почвенного покрова и уровень продуктивности лесов. Накопленные данные обеспечивают информационную поддержку статистического моделирования структуры лесного покрова на уровне территориальных единиц зонального ранга (зональных классов экосистем).

Для географического представления региональных биоклиматических параметров лесного покрова Сибири использовались данные о региональном климате, полученные из климатических справочников, и характеристики лесного покрова, полученные из материалов лесорастительного районирования, литературных и фондовых источников. Объектом предметной области (области учета) служит территориальная единица (экорегион) с однородным климатом и растительностью, с характеризующими ее показателями климата, фиксированными в многолетних данных реперной точки — метеостанции. К настоящему времени база данных включает характеристики 620 реперных точек и тестов-полигонов возле них.

Для каждого объекта наблюдения (метеостанции) формируется единица данных, в нее включаются атрибуты, которые определяют: географическое положение метеостанции, зональную принадлежность станции, климатические параметры (осадки в мм/год, среднюю температуру за год, сумму температур активного периода вегетации, индекс континентальности Конрада, и другие) и структуру лесного покрова.

Структура лесного покрова моделируется четверкой доминирующих видов-лесообразователей. Основными лесообразующими породами выступают: кедр, пихта сибирская, ель сибирская, четыре вида лиственниц (сибирская, Гмелина, Чекановского, Каяндера), кедровый стланик, сосна, два вида березы (повислая и обыкновенная), осина. Отдельную позицию занимает класс ерников (зарослей кустарников). Порядок следования лесообразователя в четверке отражает (ранжирует по убыванию) степень доминирования этой породы в структуре лесного покрова. В предлагаемой схеме не устанавливается числовая величина степени доминирования каждого лесообразователя, оценка степени доминирования определяется положением в четверке. Таким образом, “четверка” лесообразователей трактуется как новый обобщенный признак, который измеряется не по номинальной, а по порядковой шкале. Географические и климатические параметры — относительные переменные.

Информация базы данных “БИОМ” представлена в электронных таблицах MS Excel. Алгоритмы построения теоретической функции распределения, расчет критерия χ^2-Пирсона и оценка объема выборки, обеспечивающей заданную точность, выполнены в виде расчетных сценариев рабочего листа. У расчетного сценария два аргумента: наименование лесообразователя и наименование климатического параметра. По заданным значениям аргументов из базы данных выбирается ряд значений заданного климатического параметра для определенного лесообразователя. В этом ряду значения климатического параметра рассматриваются как реализации независимых, одинаково распределенных случайных величин, измеренных по относительной шкале, иными словами, это случайная выборка из некоторой генеральной совокупности значений климатического параметра для определенного лесообразователя.

Построение теоретической функции распределения для значений климатического параметра начинается с расчета параметров описательной статистики для выбранного ряда значений.

Определяется значение коэффициента вариации (показателя относительной колеблемости значений): $\nu = \sigma\bar{x}^{-1} \times 100\%$, σ — среднеквадратическое отклонение, $\bar{x}$ — среднее арифметическое.

Более точная проверка гипотезы о соответствии распределения нормальному закону проводится с помощью критерия χ^2- Пирсона. Диапазон значений параметра разбивается на интервалы (число интервалов k), ширина интервала рассчитывается по формуле Стэрджеса, для каждого интервала определяется наблюдаемая (f_i) и теоретическая частота ($\hat{f}_i$) распределения. Значение критерия Пирсона рассчитывается по формуле $\chi^2_{\text{факт}} = \sum_{i=1}^{k}(f_i - \hat{f}_i)/\hat{f}_i$.

В расчетном сценарии MS Excel полученное значение критерия $\chi^2_{\text{факт}}$ сравнивается с табличным значением критерия при принятом уровне значимости α (обычно $\alpha = 0,05$ или $\alpha = 0,01$) с числом степеней свободы, равном числу интервалов за минусом трех (по числу фиксированных параметров в формуле нормального закона распределения и с учетом равенства сумм теоретических и фактических частот). Если $\chi^2_{\text{факт}} \geq \chi^2_{\text{табл}}$, то нулевая гипотеза (о нормальности закона распределения) должна быть отвергнута при принятом уровне значимости с вычисленным числом степеней свободы. Результаты расчетов высвечиваются на рабочем листе.

Если гипотеза о нормальном распределении с заданным уровнем значимости не отвергнута, методом максимального правдоподобия по данным выборки рассчитываются оценки среднеквадратического отклонения (σ) и среднего арифметического генеральной совокупности.

Задав абсолютную величину предельной оценки ошибки выборки (Δ) и доверительной вероятности ($t = 1 - \alpha$), можно рассчитать объем выборки (n), обеспечивающий требуемую точность, при которой пределы возможной ошибки не превысят некоторой наперед заданной величины: $n = t^2\sigma^2/\Delta^2$.

Предлагаемый сценарий проверки гипотезы о нормальном распределении и оценки репрезентативности выборки включается в состав информационной системы “БИОМ”. Проверка корректности исходных данных необходима для построения и анализа статистических моделей в задачах экологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мангейм Дж. Б., Рич Р. К.* Политология. Методы исследования: Пер. с англ. М.: Издательство “Весь Мир”, 1997. 544 с.
2. *Назимова Д. И.* Графическая модель лесорастительных зон и биомов Северной Евразии на базе данных по климату // Ботанические исследования в Сибири. Красноярск: Красноярское отд. Российского ботанического общества РАН. 1994. Вып. 2. С. 61–72.
3. *Tchebakova N. M., Monserud R. A., Nazimova D. I.* Siberian Vegetation Model based on climatic parameters // Canad. J. of Forest Research. 1994. V. 24. P. 1597–1607.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 546–547

УДК 519.642

ФУНКЦИЯ ЛАМБЕРТА В ТЕОРИИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

© А. С. Апарцин

apartsyn@isem.sei.irk.ru

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, Иркутск

Одним из универсальных подходов к математическому моделированию нелинейных динамических систем типа черного ящика является представление отклика системы $y(t)$ на входное возмущение $x(t)$ в виде полинома Вольтерра:

$$y(t) = \sum_{m=1}^{N} \int_0^t \cdots \int_0^t K_m(t, s_1, \ldots, s_m) \prod_{i=1}^{m} x(s_i) ds_i, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Если ядра K_m, $m = \overline{1, N}$, уже идентифицированы каким-либо способом и требуется по заданному $y(t)$ определить соответствующий вход $x(t)$, то (1) является N-линейным относительно $x(t)$ интегральным уравнением Вольтерра I рода. Для приложений особый интерес представляют би- и трилинейные уравнения (в (1) $N = 2, 3$).

Хорошо известна роль экспоненциальной функции в теории линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода (в (1) $N = 1$). В частности, при условии $y(0) = 0$ и $K_1(t, t) \neq 0$ $\forall\, t \in [0, T]$, для достаточно гладких исходных данных с ее помощью устанавливаются корректность этой задачи на паре $(C_{[0,T]}, C^{(1)}_{[0,T]})$ $\forall\, T < \infty$, оценивается норма обратного оператора и т.д.

Оказывается, при исследовании полилинейных уравнений аналогичная роль принадлежит производной от функции Ламберта $W(z)$, являющейся обратной к функции $z = W \exp W$ (см., например, [1]). Так, с помощью двух вещественных ветвей функции Ламберта можно получить максимально широкую гарантированную область существования непрерывного решения (1) (такое решение существует, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности $t = 0$), а также неулучшаемые мажоранты для специальных классов нелинейных интеральных неравенств как точные решения соответствующих уравнений. Подобные уравнения названы в [4] мажорантными для (1).

В случае произвольного N вместо точного решения $x^*(t)$ мажорантного уравнения удается найти лишь его оценку сверху. Приведем одну из таких оценок, когда в (1) $K_1 = 1$, $K_i = \text{const}$, $|K_i| \leq \frac{1}{i!}$, $i = \overline{2, N}$, $F = \max\limits_{0 \leq t \leq T} |y'(t)|$. Мажорантное уравнение Вольтерра II рода имеет при этом вид

$$x(t) = F + \sum_{i=2}^{N} \frac{x(t)}{(i-1)!} \left(\int_0^t x(s) ds \right)^{(i-1)}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *При* $T < \dfrac{2 \ln 2 - 1}{F}$

$$x^*(t) \leq -\frac{F}{2} \left(\frac{W(-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{1-Ft}{2}})}{1 + W(-\frac{1}{2} \mathrm{e}^{-\frac{1-Ft}{2}})} - 1 \right), \quad t \in [0, T],$$

где W *— главная вещественная ветвь функции Ламберта.*

Результаты, изложенные в докладе, развивают исследования, начатые в [2–4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00336.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Corless R. M., Gonnet G. H., Hare D. E. G., and Jeffrey D. J.* Lambert's W function in Maple // The Maple Technical Newsletter. 1993. № 9.
2. *Апарцин А. С.* О билинейных уравнениях Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. 2004. № 2(8). С. 20–28.
3. *Апарцин А. С.* О полилинейных уравнениях Вольтерра I рода // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 118–125.
4. *Апарцин А. С.* К теории полилинейных уравнений Вольтерра I рода // Оптимизация, управление, интеллект. 2005. № 1(9). С. 5–27.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 548–549

УДК 517.958+532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

© Д. Ж. Ахмед-Заки*, Н. Т. Данаев

* darhan@mail.ru

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

С учетом процессов теплообмена на базе математической модели Бакли – Леверетта, описывающей движение несмешивающихся жидкостей, исследуется влияние температуры бурового раствора на основные характеристики подвижных флюидов

$$v_i = -\frac{k}{\mu_i} f_i(s) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rp),$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) = 0, \qquad -m\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_1) = 0$$

допускает, как известно [1], первый интеграл $r(v+v_1) = r_c V_0(t)$. С помощью замены переменных

$$\xi = (r/r_c)^2, \qquad \tau_0 = \frac{2}{mr_c}\int\limits_0^t V_0(t)\,dt,$$

где r_c — радиус скважины и τ_0 — суммарная скорость фаз, для искомой функции $s = s(r,t)$ получаем квазилинейное уравнение вида:

$$\frac{\partial s}{\partial \tau_0} + F'(s)\frac{\partial s}{\partial \xi} = 0.$$

Его решение в виде неявной функции $\xi = \xi(s, \tau_0)$, удовлетворяющей условию

$$t = 0\ (\tau = 0):\ \xi^0(s) = \xi(s,0) = 1,$$

определяется формулой:

$$\xi(s,\tau_0)\tau_0 F'(s) + \xi^0(s) = \tau_0 F'(s) + 1, \qquad (\tau_0 = 0 : s(-0) = 1;\ s(+0) = 0).$$

Считая насыщенный флюидами пласт гетерогенной структурой, теплообмен между элементами которой происходит достаточно быстро и который можно представить кинетикой вида $\alpha_T \dfrac{\partial T_p}{dt} = T_0 - T_p$ [2], где α_T малый параметр кинетики, T_p — температура скелета пористой среды, возможно, вместе со связанными с ним неподвижными жидкостями, T_0 — температура в подвижных флюидах. Теплоперенос, осуществляемый этими флюидами (водой и нефтью) описывается уравнением гиперболического типа

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rT_0(c_1\rho_1 v_1 + c\rho v)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[T_0 m(c_1\rho_1 v_1 + c\rho v)\right] + \frac{\partial}{\partial t}\left[T_p(1-m)c_c\rho_c\right] = 0.$$

Рассмотрим пласт, когда закачиваемая скважина находится в центре кольцевой батареи эксплуатационных скважин, радиус расположения которых равна R. В сечении $r = 0$ расположена галерея эксплуатационных скважин, а в сечении $r = R$ — нагнетательных. Движение предполагается радиально-симметричным, направленным противоположно оси r. Через сечение $r = R$ нагнетается вода с температурой $T_{\text{В}}$ в пласт температуры T_p. Здесь наблюдается процесс двойного вытеснения: нефти водой и инфильтрата бурового раствора нефтью, исследуя его проведены численные расчеты рассматриваемого процесса в зависимости от закачиваемой воды, температура которой отличается от пластовой. Также для данной задачи изучался характер распределения удельного электрического сопротивления пласта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данаев Н. Т., Корсакова Н. К., Пеньковский В. И.* Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пластов. Алматы: Эверо, 2005. 180 с.
2. *Ахмед-Заки Д. Ж., Данаев Н. Т., Корсакова Н. К., Пеньковский В. И.* Влияние температуры воды на вытеснение нефти // Сб. научн. тр. Международной научно-практической конференции <ВИТ-2006>. Павлодар, 2006. С. 161–164.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 550–551

УДК 519.6

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ ЗАДАЧ БЕЗОПАСНОСТИ

© В. В. Башуров *, Т. И. Филимоненкова **

* cetm@atlint.ru

* *Центр экологического и техногенного мониторинга, Трехгорный;*
** *Южно-Уральский государственный университет, Трехгорный*

Прежние модели системы безопасности охраняемого объекта намечают возможные пути движения нарушителя по охраняемой территории, разделенной на зоны (подобласти) и отмечают на этих возможных путях некие точки "ветвления" и точки преодоления неких рубежей охраны. Возникающий при этом граф они снабжают (вернее, его ребра) некими вероятностями обнаружения нарушителя. Считая события, заключающимися в обнаружении нарушителя на каждом ребре графа, независимыми, получаем цепь Маркова. И в такой модели вычисляют вероятности любых (имеющих отношение к этому графу) сложных событий, а наибольшую вероятность достижения цели (или целей) объявляют мерой неэффективности системы физической защиты. Это — первый этап, этап обнаружения, в модели "нарушитель-объект". Второй этап — решение задачи о пресечении действий уже обнаруженного нарушителя.

На наш взгляд, основными недостатками предлагаемых ранее моделей "нарушитель-объект" являются:

1. Сведение бесконечного множества стратегий (траекторий) к конечному числу маршрутов.

2. Неучет рельефа и топографии местности. Это недостаток приводит к тому, что перемещение из точки A в точку B происходит как бы по биллиардному полю по кратчайшему пути (хотя далеко не очевидно, что этот путь наиболее оптимален для нарушителя).

3. Стационарность системы физической защиты.

4. Отсутствие модели для группового нарушителя.

5. На стадии "уничтожение нарушителя" никак не учтена стратегия нарушителя, либо сведена к примитивному подсчету времени действия персонала и нарушителя.

Предлагаемая нами модель позволяет устранить указанные недостатки и, возможно, содержит еще какие-то достоинства. Вкратце суть нашей модели заключается, во-первых, в устранении главного недостатка прежних моделей — навязывания нарушителю стратегии. Другими словами, мы отказываемся от конечного множества путей возможного перемещения нарушителя, тем самым мы отказываемся от модели графа и Марковской цепи и переходим на вариационную модель "объект-нарушитель", сводящуюся к вычислению функционала, [1],

$$I(\Gamma) = \int_\Gamma \frac{p(M,t)ds}{v(M)} \tag{1}$$

Здесь Γ — траектория (любая!) нарушителя от внешнего периметра до одной или нескольких целей, расположенных на охраняемой территории; $v(M)$ — скорость перемещения, зависящая от точки местности (понятно, что она определяется как вооруженностью нарушителя, так и топографией местности, по которой передвигается нарушитель); $p(M,t)$ — функция риска. При данной вооруженности противника, расположении линий охраны, средств физической защиты, действий персонала функция риска вычисляется заранее. Вычисленная с учетом всего

этого, а также (это существенно, с учетом рельефа, растительности, застройки местности, расположения на охраняемых объектах дверей, окон и т. п.) функция риска (условно назовем её *функцией риска в штатном режиме*) используется для определения вероятности обнаружения. Под эффективностью средств обнаружения (но не пресечения) понимается минимальное значение функционала (1) на экстремали $\overline{\Gamma}$, соединяющей внешний периметр с целью.

Функционал

$$I(\Gamma) = \int_{\Gamma(M_0)} \frac{\overline{p}(M, t, M_0)ds}{v(M)} \tag{2}$$

на кривой, соединяющей точку M_0 и какую-либо выбранную цель, определяет вероятность уничтожения нарушителя, а экстремаль этого функционала определяет максимально (минимально) возможную вероятность, которую можно принять за меру эффективности средств уничтожения обнаруженного противника.

Предлагается универсальный способ решения экстремальной задачи (2), основанный на замеченной нами полной аналогии между задачей безопасности и задачами геометрической оптики [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башуров В. В.* Аналогия между оптикой и проблемой безопасности объекта // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13, вып. 4. С. 597–600.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 552–552

УДК 517.958

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЯВНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ

© П. Б. Бейсебай

beisebai@mail.ru

Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, Усть-Каменогорск, Казахстан

Работа посвящена исследованию известной разностной схемы расщепления для уравнений тепловой конвекции в переменных "скорость, давление" [1]

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}, \nabla\right) \vec{U} + \operatorname{grad} p = \Delta \vec{U} - \frac{Gr\, \vec{g}}{|\, \vec{g}\, |} \cdot \theta + \vec{f}\,(t, x)\,,$$

$$\operatorname{div} \vec{U} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\vec{U}, \nabla\right) \theta = \frac{1}{Pr} \cdot \Delta\theta + g\,(t, x)\,,$$

где Gr — число Грасгофа, Pr — число Прандтля, p — давление, $\vec{U} = (U_1, U_2, U_3)$ — вектор скорости, θ — температура. Предполагается, что уравнения тепловой конвекции рассматриваются в кубе $D = \{0 \le x_\alpha \le 1, \quad \alpha = 1, 3\}$ с однородными граничными условиями для скорости и температуры, заданы начальные распределения

$$\vec{u}\,(0, x_1, x_2, x_3) = \vec{u^0}\,(x_1, x_2, x_3)\,, \quad \vec{\theta}\,(0, x_1, x_2, x_3) = \vec{\theta^0}\,(x_1, x_2, x_3)\,.$$

Для аппроксимации уравнений тепловой конвекции рассмотрим сходящуюся разностную схему расщепления [2]

$$\frac{\vec{U}^{n+1/2} - \vec{U}^n}{\tau} + L_{h,\vec{U}} \vec{U}^{n+1/2} + \overline{\operatorname{grad}}_h p^n = \Delta_h \vec{U}^{n+1/2} - \frac{Gr\, \vec{g}}{|\, \vec{g}\, |} \theta^{n+1} + \vec{f}^n,$$

$$\frac{\vec{U}^{n+1} - \vec{U}^{n+1/2}}{\tau} + \overline{\operatorname{grad}}_h (p^{n+1} - p^n) = 0, \qquad \underline{\operatorname{div}}_h \vec{U}^{n+1} = 0,$$

$$\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\tau} + L_{h,\theta} \theta^{n+1} = \frac{1}{Pr} \cdot \theta^{n+1} + \vec{g}^n,$$

получаем априорные оценки, показывающие ограниченность решений выше указанной разностной схемы при малых значениях параметров сетки.

Автор вырожает благодарность Н. Т. Данаеву за полезные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Тарунин Е. Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркутского университета, 1990. С. 166–228.
2. *Белоцерковский О. М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Наука, 1984. С. 205–520.

УДК 519.6

ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ СВОБОДНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НА ТРАНСЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ

© А. Н. Богданов [*], **В. Н. Диесперов** [**]

[*] bogdanov@imec.msu.ru

[*] *НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва*
[**] *Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный*

Предложена модифицированная модель для описания свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях. В этой модели для описания течения в области невязкого свободного течения используется модифицированное уравнение Линя – Рейсснера – Цяня, что позволяет преодолеть недостатки описания нестационарного трансзвукового течения на основе традиционного трансзвукового разложения. На основе модифицированной модели решен ряд задач свободного нестационарного вязко-невязкого взаимодействия на трансзвуковых скоростях.

В задаче устойчивости взаимодействующего пограничного слоя применение модифицированной модели позволило учесть возмущения во внешнем течении, распространяющиеся вниз по потоку, что дало дополнительный корень дисперсионного соотношения.

Определено поле скоростей около колеблющейся стенки (задача о вибраторе) пограничном слое со взаимодействием, причем во внешнем трансзвуковом течении учтены нестационарные процессы. Показано, что нестационарность внешнего течения дает два дополнительных возмущения пограничного слоя, причем одно из них не описывается ранее использованными моделями.

Показано, что внешние акустические возмущения при учете распространяющихся во внешнем потоке нестационарных возмущений вниз по течению порождают дополнительный волновой пакет в пограничном слое. Показано, что при нестационарном взаимодействии дополнительное возмущение существует и над упругой поверхностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Богданов А. Н., Диесперов В. Н.* Моделирование нестационарного трансзвукового течения и устойчивость трансзвукового пограничного слоя // ПММ. 2005. Т. 69, вып. 3. С. 394–403.
2. *Богданов А. Н., Диесперов В. Н.* Волны Толлмина – Шлихтинга в трансзвуковом пограничном слое. Возбуждение извне и с обтекаемой поверхности // ПММ. 2007. Т. 71, вып. 2. С. 289–300.
3. *Богданов А. Н., Диесперов В. Н.* К моделированию возмущенного нестационарного трансзвукового пограничного слоя над упругой поверхностью // ПММ. 2007. (В печати).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 554–555

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ В КАНАЛАХ

© А. В. Бойко [*], Ю. М. Нечепуренко [**]

[*] boiko@itam.nsc.ru, [**] yumn@inm.ras.ru

[*] *Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск;*
[**] *Институт вычислительной математики РАН, Москва*

Линейные части u', v', w', p' возмущений компонент скорости и давления для течения $u = 0$, $v = 0$, $w = W$ вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном канале $\{(x,y,z) : (x,y) \in \Sigma, -\infty < z < \infty\}$ постоянного сечения Σ с кусочно гладкой границей удовлетворяют следующим линеаризованным уравнениям Навье – Стокса:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u'}{\partial t} + W\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta u' = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial t} + W\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial y} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta v' = 0,\\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x}u' + \frac{\partial W}{\partial y}v' + W\frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta w' = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0\end{gathered} \tag{1}$$

с нулевыми граничными условиями для u', v', w' на стенках канала.

Особый интерес представляют задачи об абсолютной и конвективной устойчивости [1], которые состоят в исследовании свойств решений двух следующих видов:

$$u' = u''e^{\mathbf{i}\alpha z},\ v' = v''e^{\mathbf{i}\alpha z},\ w' = w''e^{\mathbf{i}\alpha z},\ p'' = p''e^{\mathbf{i}\alpha z}, \tag{2}$$

где α заданная вещественная константа, а u'', v'', w'', p'' функции x, y и t, не зависящие от z, и

$$u' = u'''e^{\mathbf{i}\omega t},\ v' = v'''e^{\mathbf{i}\omega t},\ w' = w'''e^{\mathbf{i}\omega t},\ p'' = p'''e^{\mathbf{i}\omega t}, \tag{3}$$

где ω заданная вещественная константа, u''', v''', w''', p''' функции x, y и z, не зависящие от t. Предполагается, что $u'' = v'' = w'' = 0$ и $u''' = v''' = w''' = 0$ при $(x,y) \in \partial\Sigma$.

Подставляя (2) в (1) получим систему уравнений для u'', v'', w'', p'', которая после дискретизации по пространственным переменным может быть записана в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений:

$$d\mathbf{v}/dt = J\mathbf{v} + Gp, \quad F\mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{v}$ — n_v-компонентный вектор дискретных аналогов компонент скорости, p — n_p-компонентный вектор дискретного аналога давления ($n_p < n_v$), J — квадратная матрица порядка n_v, а G, F — матрицы полного ранга размеров $n_v \times n_p$ и $n_p \times n_v$, соответственно.

Подставляя (3) в (1), вводя две новые переменные: $u'''' = \partial u'''/\partial z$, $v'''' = \partial v'''/\partial z$, и выражая $\partial w'''/\partial z$ и $\partial^2 w'''/\partial z^2$ в третьем уравнении (1) через u'''' и v'''', используя четвертое уравнение, получим систему уравнений для u''', v''', p''', u'''', v'''' и w''', которая после дискретизации по пространственным переменным может быть записана в виде следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$d\chi/dz = C\chi, \tag{5}$$

где χ — $2n_v$-компонентный вектор дискретных аналогов u''', v''', p''', u'''', v'''' и w''', а C — квадратная матрица порядка $2n_v$.

Данный доклад посвящен постановке, обоснованию и численному исследованию двух следующих задач Коши для систем (4) и (5) соответственно.

Задача 1. Задан n_v-компонентный вектор $\mathbf{v}^0$, найти $\mathbf{v}(t)$ и $p(t)$, удовлетворяющие (4) при $t > 0$ и начальному условию $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^0$.

Задача 2. Задан $2n_v$-компонентный вектор χ^0. Найти $\chi(z)$, удовлетворяющий (5) при $z > 0$ и начальному условию $\chi(0) = \chi^0$.

Особое внимание уделяется редукциям, позволяющим существенно уменьшить алгебраическую размерность рассматриваемых задач. В качестве иллюстрации рассматривается течение Пуазейля в канале прямоугольного сечения.

Опишем для каждой из задач первые шаги предлагаемых редукций. Рассмотрим задачу 1. Пусть

$$G = U \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}, \quad F^* = V \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix}$$

— QR-разложения, т. е. U и V — унитарные матрицы порядка n_v, а R и S — верхние треугольные порядка n_p. Введем в рассмотрение матрицы $\tilde{J} = U^*JV$, $E = U^*V$. Разобьем матрицы на блоки следующим образом:

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11} & \tilde{J}_{12} \\ \tilde{J}_{21} & \tilde{J}_{22} \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}, \; U = [U_1, U_2], \; V = [V_1, V_2],$$

где блок (k, l) — матрица размера $n_k \times n_l$, блоки U_l и V_l — матрицы размера $n_v \times n_l$, а $n_1 = n_p$, $n_2 = n_v - n_p$.

Теорема 1. *Пусть матрица E_{22} невырожденная. Тогда для любого n_v-компонентного вектора $\mathbf{v}^0$, удовлетворяющего уравнению $F\mathbf{v}^0 = 0$, решение задачи 1 существует, единственно и представимо в виде*

$$\mathbf{v}(t) = V_2 \exp\{tE_{22}^{-1}\tilde{J}_{22}\}V_2^*\mathbf{v}^0, \quad p(t) = R^{-1}(E_{12}E_{22}^{-1}\tilde{J}_{22} - \tilde{J}_{12}) \exp\{tE_{22}^{-1}\tilde{J}_{22}\}V_2^*\mathbf{v}^0.$$

Задача 2 очевидно имеет единственное решение $\chi(z) = \exp\{z\,C\}\chi^0$. В частности, если χ^0 — собственный вектор, отвечающий некоторому собственному значению γ_0 матрицы C, то $\chi(z) = \exp\{z\gamma_0\}\chi^0$. Пусть для определенности $\omega \geq 0$. Нас будут интересовать только те решения системы (5), в которых не присутствуют собственные векторы, отвечающие собственным значениям γ с $\mathrm{Im}\gamma > 0$. Физически это означает отсутствие волн, отраженных от границы $z = \infty$, и отсутствие там источников.

Пусть X_1 и X_2 означают $2n_v \times m$ и $2n_v \times (2n_v - m)$ матрицы, столбцы которых образуют базисы в инвариантных подпространствах матрицы C, отвечающих ее собственным значениям γ, удовлетворяющим условиям а) $\mathrm{Im}\gamma \leq 0$ и б) $\mathrm{Im}\gamma > 0$, соответственно. Тогда матрица $X = [X_1, X_2]$ невырожденная и

$$C = [X_1, X_2]\,\mathrm{diag}(C_1, C_2)\,[Y_1, Y_2]^*, \quad [Y_1, Y_2]^* = [X_1, X_2]^{-1},$$

где C_1 и C_2 — квадратные матрицы порядков m и $2n_v - m$ с собственными значениями γ, удовлетворяющими условиям (а) и (б) соответственно.

В решении задачи 2 не будут присутствовать собственные векторы, отвечающие собственным значениям типа (б), в том и только том случае, если $Y_2^*\chi^0 = 0$. Когда это условие выполнено, решение задачи 2 представимо в виде

$$\chi(z) = X_1 \exp\{z\,C_1\}Y_1^*\chi^0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schmid P. J., Henningson D. S.* Stability and transition in shear flows. Berlin: Springer, 2000.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 556–557

УДК 519.6

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

© А. Н. Бондаренко*, Д. С. Иващенко**

* bondarenkoan1953@mail.ru, ** stanger@ngs.ru

* *Институт математки им. С. Л. Соболева, Новосибирск;*
** *Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск*

Постановка задачи. Процесс диффузии дробного порядка характеризуется нестационарным распределением частиц в пространстве, где расстояние x, которое прошла частица за время t из начальной точки, растет по закону $\langle x^2(t)\rangle \sim t^\alpha$, $\alpha \neq 1$. Процессы диффузии дробного порядка протекают, в частности, в пористых (фрактальных) средах [1]. В качестве математической модели такого процесса используется дифференциальное уравнение с дробной производной по времени.

Рассмотрим в области $\Omega = \{(x,t) : x \geq 0,\, t \geq 0\}$ краевую задачу следующего вида:

$$ {}_t\mathcal{D}^\alpha_{0+} u(x,t) = \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t), \quad 0 < \alpha < 1, $$

$$ u(x,0) = 0, \quad x \geq 0, \qquad u(0,t) = \varphi(t), \quad t > 0. $$

Здесь $\varphi(t)$ — периодическая функция, а оператор ${}_t\mathcal{D}^\alpha_{0+}$ — это оператор дробного дифференцирования Капуто, действующий по правилу

$$ {}_t\mathcal{D}^\alpha_{a+} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_a^t \frac{f'(\xi)}{(t-\xi)^\alpha}\, d\xi. $$

Решение краевой задачи представляется в виде [2]

$$ u(x,t) = \int\limits_0^t \mathcal{G}(x,\tau)\, \psi(t-\tau)\, d\tau, \qquad \mathcal{G}(x,t) = \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(-\beta n)} \frac{x^n}{\lambda^n t^{\beta n}}, $$

где $\mathcal{G}(x,t)$ — функция Грина данной краевой задачи.

Метод конечных разностей численного решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени. Для численного решения краевой задачи используется метод конечных разностей. Дифференциальное уравнение с дробной производной по времени аппроксимируется следующим образом. Введем сетку в Ω: $\widehat{\Omega} = \{(x_i, t_j) :\ x_i = ih$, $t_j = j\tau\}$ и обозначим через y_i^j значение в узле (x_i, t_j) сеточной функции y, определенной на $\widehat{\Omega}$. Заменяя производную ${}_t\mathcal{D}^\alpha_{0+}$ ее разностным аналогом — дробной производной Грюнвальда – Летникова

$$ y_t^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{j+1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} \frac{y_i^{j+1-k} - y_i^0}{\tau^\alpha}, $$

а $\partial^2 u/\partial x^2$ — второй разностной производной и вводя произвольный вещественный параметр σ, получим разностную схему с весами

$$ y_t^{(\alpha)} = \Lambda_\lambda \left(\sigma y_i^{j+1} + (1-\sigma) y_i^j\right), $$

где оператор Λ_λ действует по правилу

$$\Lambda_\lambda y_i^j = \frac{\lambda^2}{h^2}\left[y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j\right].$$

С помощью классической техники теории разностных схем, изложенной в [3], исследована устойчивость рассматриваемой разностной схемы с весами. Определим норму сеточной функции $y_i^j = y^j(x_i)$: $\left\|y^j\right\|_C = \max\limits_{x_i\in\widehat{\Omega}}\left|y^j(x_i)\right|$. Разностная схема с весами называется устойчивой в C, если выполнена оценка $\left\|y^{j+1}\right\|_C \le \left\|y^0\right\|_C$.

Теорема. *Если имеет место соотношение*

$$\tau^\alpha \le \frac{\alpha\, h^2}{2\,(1-\sigma)\,\lambda^2},$$

то разностная схема с весами устойчива в C.

Метод Монте-Карло численного решения краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка по времени. В работе R. Gorenflo и F. Mainardi [4] были рассмотрены дискретные модели случайного блуждания для немарковских диффузионных процессов. Основная идея состоит в замене уравнения диффузии дробного порядка разностным, полагая $\sigma = 0$. Получается так называемый универсальный закон перехода от t_j к t_{j+1}, справедливый для всех $j \ge 0$. Вводя обозначения

$$c_k = (-1)^{k+1}\binom{\alpha}{k} = \left|\binom{\alpha}{k}\right|, \quad k \ge 1; \qquad b_j = \sum_{k=0}^{j}(-1)^k\binom{\alpha}{k}, \quad j \ge 0; \qquad \rho = \frac{\tau^\alpha\lambda^2}{h^2},$$

получим

$$y_i(t_{j+1}) = \eta(t_j) + \zeta(t_j),$$

где

$$\eta(t_j) = \left(1 - \sum_{k=1}^{j} c_k\right) y_i(t_0) + c_j y_i(t_1) + c_{j-1} y_i(t_2) + \cdots + c_2 y_i(t_{j-1}) + (c_1 - 2\rho) y_i(t_j),$$

$$\zeta(t_j) = \rho\left[y_{i+1}(t_j) + y_{i-1}(t_j)\right].$$

Анализ данного выражения позволяет заключить, что в нем учитывается вся «история» частицы, то есть весь ее путь $\{x(t_0), x(t_1), \ldots, x(t_j)\}$.

Применительно к рассматриваемой краевой задаче случайное блуждание реализуется с учетом того, что всякий источник состоит из точечных источников, и, соответственно, всякую функцию можно разложить по δ-функциям. Поэтому при моделировании периодического источника в методе Монте-Карло используется периодическая функция, связывающая количество «испускаемых» источником частиц с дискретными моментами времени, а также амплитудой и частотой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кочубей А. Н.* Диффузия дробного порядка // Дифференциальные уравнения. 1990. Т. 26, № 4. С. 660–670.
2. *Mainardi F.* The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. 1996. V. 9. P. 23—28.
3. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
4. *Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D., Paradisi P.* Time fractional diffusion: a discrete random walk approach // Nonlinear Dynamics. 2002. V. 29, P. 129—143.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 558–559

УДК 519.6

АДАПТИРОВАННЫЙ РЕНЬЕ-АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ

© А. Н. Бондаренко *, А. В. Кацук **

* bondarenkoan1953@mail.ru, voice@ngs.ru **

* *Институт математки им. С. Л. Соболева, Новосибирск;*
** *Институт автоматизации энергетических систем, Новосибирск*

Введение. В настоящее время мультифрактальному анализу уделяется все больше внимания в отечественных исследованиях, однако, пока этот аппарат еще не получил широкого распространения. Тем не менее, появились работы, посвященные различным прикладным задачам [1].

Мультифрактальный анализ изображений. Пусть задано $\alpha \in R$, $\varepsilon > 0$ и $n \in N$, множество

$$A(\alpha,\varepsilon,n) = \left\{ x \in supp\ \mu | \alpha \leq \frac{\log\ \mu(B(x,r))}{\log\ r} \leq \alpha + \varepsilon,\ \text{для } r < \frac{1}{n} \right\}.$$

Пусть $N(\alpha,\varepsilon,n)$ наименьшее количество шаров радиуса менее, чем $\frac{1}{n}$, которые могут быть использованы, чтобы покрыть $A(\alpha,\varepsilon,n)$.

Далее определим

$$S(\alpha,\varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log N(\alpha,\varepsilon,n)}{n}$$

и

$$f(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} S(\alpha,\varepsilon),$$

где $f(\alpha)$ носит название спектр сингулярности.

Пусть $l \in R$ и $(E_i)_i$ части носителя μ, такие что $l_i = diamE_i < l$ и $p_i = \mu(E_i)$, тогда обобщенные размерности Реньи можно определить следующим образом.

$$D_q = \lim_{l\to 0} \left[\frac{1}{q-1} \frac{\log \chi(q)}{\log\ l} \right],$$

где $\chi(q) = \sum\limits_i p_i^q$.

Методы статистической механики позволяют дать вероятностную интерпретацию функций D_q. Рассмотрим физическую систему, которая может принимать следующее множество счетных состояний $1, 2, \ldots$ с энергией $E_1, E_2, \ldots$. Предположим, что вероятность того, что система находится в состоянии i с энергией E_i задается вероятностью p_i. Тогда полная энергия системы записывается следующим образом [2]:

$$U = \sum_i p_i E_i,$$

энтропия системы:

$$S = -\sum_i p_i \log p_i,$$

свободная энергия системы:

$$F = U - TS,$$

где T — температура системы.

Заключение. При $q \to +\infty$ основной вклад в обобщенную статистическую сумму $\chi(q)$ вносят ячейки, содержащие наибольшее число частиц n_i в них и, следовательно, характеризующиеся наибольшей вероятностью их заполнения p_i. Наоборот, при $q \to -\infty$ основной вклад в сумму $\chi(q)$ дают самые разреженные ячейки с малыми значениями чисел заполнения p_i. Таким образом, функция D_q показывает, насколько неоднородным является исследуемое изображение $f(x, y)$ [3, 4].

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (коды проектов 05-01-00559, 05-01-00171), междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 48.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колмаков А. Г., Бунин И. Ж.* Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. Москва – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2001.
2. *Cole J.* Graph Directed Self-Conformal Multifractals. Ph.D. Thesis. University of St. Andrews, Scotland, 2002.
3. *Bondarenko A. N., Katsuk A. V.* Cervical pre-cancer detection using multifractal and wavelet analysis // 2-d IASTED International Multi-Conference on Automation, Control and Information Technology, Novosibirsk, Russia, June 20 – 24, 2005. Materials. P. 240–245.
4. *Bondarenko A. N., Katsuk A. V.* Extracting feature vectors of biomedical images // 9th International Symposium on science and technology, Novosibirsk, June 26 – July 3, 2005. Materials. P. 52–57.

УДК 517.9, 519.6

МЕТОД ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ В РАСЧЕТАХ ПЛОСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА НА НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ

© А. М. Бубенчиков, В. С. Попонин*, Д. К. Фирсов

* posv@mail.tomsknet.ru

Томский государственный университет, Томск

В настоящей работе описан математический аппарат, позволяющий получить для плоских задач динамики вязкой жидкости решения высокого порядка точности в областях сложной геометрии. Высокий порядок аппроксимации достигается за счет использования вычислительной технологии построения решения методом спектральных элементов. Предложен универсальный способ аппроксимации неоднородных граничных условий Неймана и Дирихле. Представлены тестовые расчеты течений, имеющих аналитическое решение. Представлены также расчеты течений в прямоугольной каверне, произведен расчет стационарного потока за уступом. Предложен метод решения системы линейных алгебраических уравнений, а также структура предобуславливающей матрицы, что значительно повышает эффективность расчетов.

1. Глобальный спектральный метод. Принцип, лежащий в основе всех сеточных методов, заключается в сведении исходных дифференциальных уравнений в частных производных к системе алгебраических уравнений, которые могут быть решены известными методами. В спектральных методах [1] решение ищется путём разложения в ряд по некоторой системе ортогональных функций, называемых базисными функциями. Имея представления искомых функций в спектральном пространстве, т. е. определив их в виде разложения по базисным функциям, в глобальном спектральном методе строится система интегральных соотношений, получающихся умножением исходных или преобразованных дифференциальных уравнений на тестовую функцию и далее проводится интегрирование по всей области. Использование глобального спектрального метода ограничено областями простой геометрической формы, что существенно сужает его применимость к реальным физическим процессам.

2. Метод спектральных элементов. Метод спектральных элементов основан на принципах, аналогичных принципам глобального спектрального метода. Основное отличие метода спектральных элементов заключается в том, что интегрирование ведется по части пространства независимых переменных, которую отождествляют с конечным элементом. В таком случае для достижения необходимой точности расчетов нет необходимости использовать излишне большое число базисных функций на каждом элементе. Таким образом, достигается существенная экономия вычислительных ресурсов без потери точности, что дает возможность проводить вычисления в геометрически сложных областях реалистичной формы.

3. Результаты расчетов. Для оценки точности построенной аппроксимации, рассмотрим течение Коважного [2]. На рис. 1. представлены относительные погрешности для компонент скоростей, давления и невязка для уравнения неразрывности. Для расчета системы линейных алгебраических уравнений использовали итерационный метод GMRES [3], с предобуславливающей матрицей ILU(0). Выбор упомянутого метода позволил существенно ускорить расчеты.

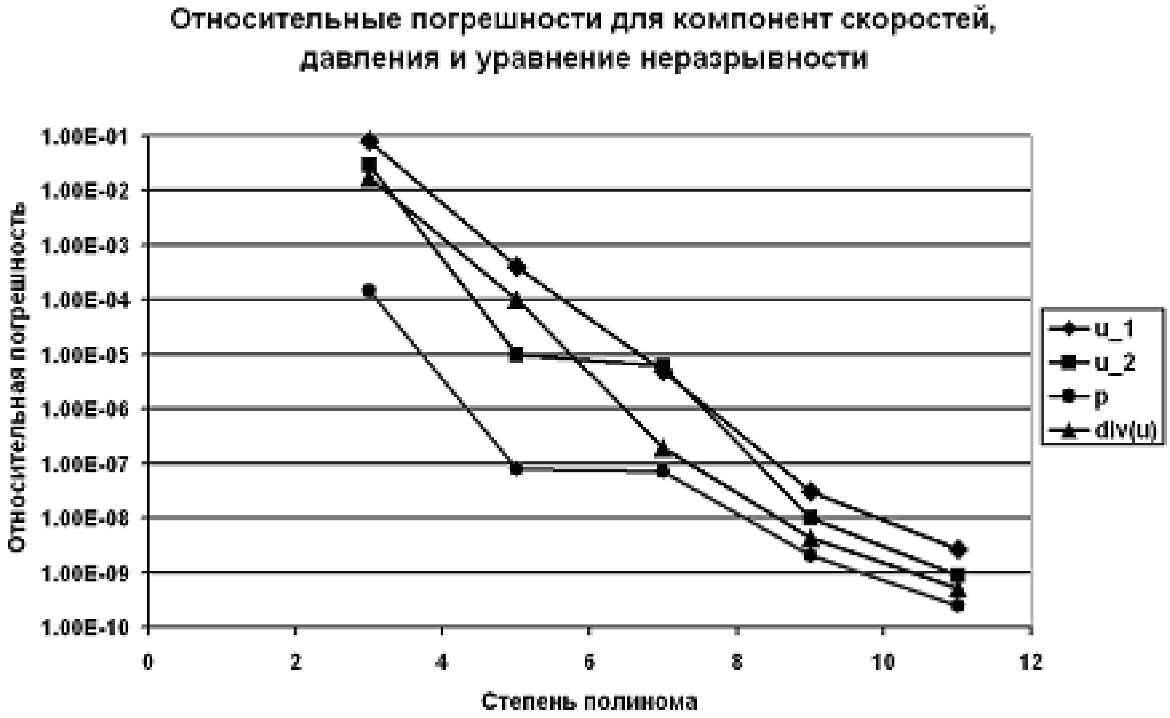


Рис. 1. Относительные погрешности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
2. *Helenbrook B. T.* A Two-Fluid Spectral Element Method. Department of Mechanical and Aeronautical Engineering, Clarkson University, Potsdam, NY.
3. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 2000.

УДК 519.6

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСЦЕНТРИКОВОЙ ЦИКЛОИДАЛЬНО-ЦЕВОЧНОЙ ПЕРЕДАЧИ

© **А. М. Бубенчиков** *, **Н. Р. Щербаков** *, **В. В. Становской** **, **С. М. Казакявичюс** **

nrs@math.tsu.ru

* *Томский государственный университет, Томск;*
** *Томская электронная компания, Томск*

В настоящее время в промышленно развитых странах эксцентриковые циклоидально-цевочные передачи завоевывают все большую долю рынка редукторов. Широкое их распространение обусловлено целым рядом преимуществ, к которым, прежде всего, следует отнести [1]: широкий диапазон передаточных отношений, способность нести высокие нагрузки, высокий коэффициент полезного действия (КПД), компактность устройств и т. д. Однако в [2] отмечается теоретическая непроработанность таких устройств и, прежде всего, отсутствие достоверных расчётов КПД. Таким образом, теоретическое исследование работы редукторов на циклоидально-цевочной основе является важной и актуальной задачей.

В работе строится математическая модель работы редуктора с колесом внутреннего зацепления, профиль которого образован вращающимися на цевках роликами, и сателлитом с циклоидальным профилем (эквидистанта эпициклоиды), планетарное движение которого задается с помощью вращающегося эксцентрика. Вращение сателлита вокруг собственной оси приводится к оси передачи цилиндрическими стержнями, обкатывающими отверстия в сателлите.

Основу предлагаемой расчётной модели составляет кинематически согласованное движение идеальных геометрических фигур, в данном случае плоских замкнутых кривых (эквидистант эпициклоиды) и эксцентрически перемещающихся окружностей. Все кривые, применяющиеся для моделирования зацепления, задаются параметрическими уравнениями, а точки контакта находятся смещением от центра ролика на радиус ролика по прямой полюс — центр ролика (Рис. 1).

Известные из практики эксплуатации таких устройств закономерности перемещения отдельных частей механизма проверяются на построенной кинематической схеме способом квазистатических состояний на различных углах поворота эксцентрика, а также кинематическим способом при заданном характере движения эксцентрика. Как показали вычисления, коэффициент полезного действия исследуемых систем является достаточно высоким и составляет величину порядка 98–99%.

В основе расчета усилий в точках контакта лежит принцип Даламбера – Лагранжа. Однако в данном конкретном случае, при расчёте нагрузки на каждом отдельном ролике мы исходили из гипотезы о локальном статистическом равновесии, пренебрегая возможными инерционными воздействиями на элементы системы, т. е., в сущности, из принципа виртуальных перемещений (принципа Лагранжа). В то же время нагрузка в точках контакта находится исходя из принципа распределения входного момента пропорционально квадратам синусов углов между направлениями усилий.

Рассчитаны величины локальных скольжений на роликах со стороны выходной детали и со стороны цилиндрического стержня, определены потери входной мощности на трение, коэффициент полезного действия системы, а также значения контактных напряжений на роликах.

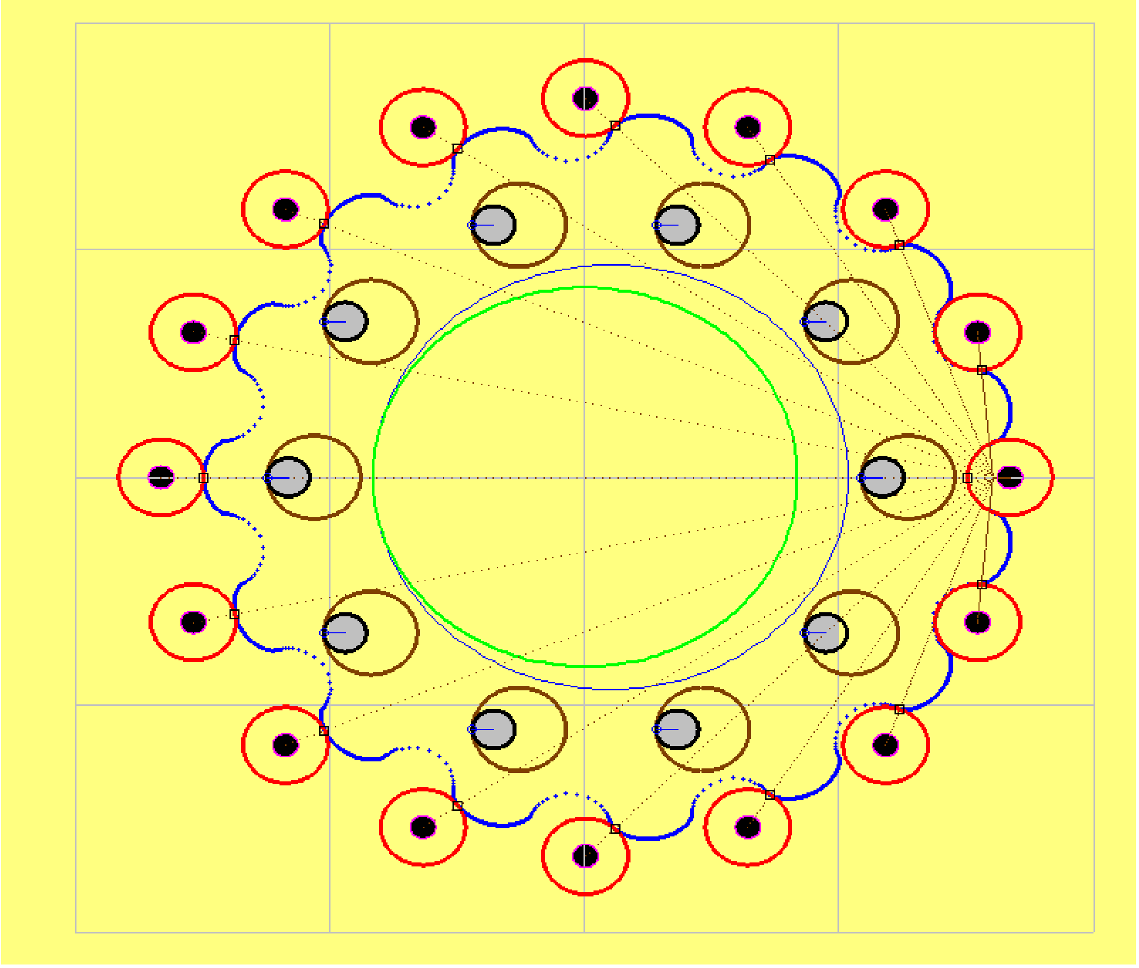


Рис. 1. Сечение зацепления, перпендикулярное оси вращения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Попов В. А., Кудрявцев И. А.* Редукторы на основе планетарно-цевочных передач // Рынок приводной техники. 2006. № 3(6). С. 24–25.
2. *Новичков А. А.* Эксцентриковые редукторы // Рынок приводной техники. 2006. № 2(5). С. 23–26.

УДК 519.63

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

© В. Д. Власенко

vlasenko@as.khb.ru

Вычислительный центр ДВО РАН, Хабаровск

Проблемы физики диэлектриков, находящиеся на границе с механикой сплошной среды, в последнее время интенсивно развиваются. Это связано с исследованием сопряженных электроупругих полей, возникающих при пьезоэффекте. Интерес к этим исследованиям связан с быстрым развитием ряда областей современной техники — электроакустики, микроэлектроники, радиотехники, автоматики, измерительной техники и др.

На основании свойства преобразовывать механическую энергию в электрическую и наоборот, пьезоэлектрические материалы находят самое разнообразное применение на практике. Они используются в преобразователях для излучения и приёма акустической энергии, в приборах для измерения давления и вибраций, в устройствах вычислительной техники для преобразования и задержки сигналов и т. д.

Нестанционарный режим работы, разнообразие форм пьезоэлементов и связность электрического и акустического полей приводят к большим математическим трудностям решения задачи электроупругости аналитическими методами или они даже вообще неразрешимы. Поэтому численные методы являются эффективными методами решения таких задач и позволяют заменить физический эксперимент математическим моделированием.

Полная система уравнений, описывающая связанные электроупругие процессы в пьезоэлектрических средах, состоит из уравнений движения сплошной среды и уравнений электростатики:

$$\rho\frac{\partial^2\xi_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i}=0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=-E_i, \tag{2}$$

а также уравнений состояния исследуемой среды, т. е. уравнений прямого и обратного пьезоэффекта

$$\sigma_{ik}=c_{iklm}S_{lm}-e_{lik}E_i, \tag{3}$$

$$D_i=\varepsilon_0\varepsilon_{ik}E_k+e_{ikl}S_{lm}, \tag{4}$$

где соотношения Коши (зависимости между деформациями и смещениями) имеют вид

$$S_{lm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_m}+\frac{\partial\xi_m}{\partial x_l}\right).$$

В формулах (1)–(4) σ_{ik}, S_{ik} — компоненты тензоров механических напряжений и деформаций; $\xi_i=\xi_i(x,t)$ — компоненты вектора смещений; x_k — декартовы координаты; t — время; ρ — плотность пьезоматериала; E_i и D_i — компоненты векторов напряженности электрического поля и электричексой индукции соответственно; φ — потенциал электрического поля; c_{iklm}, $\varepsilon_0\varepsilon_{ik}$, e_{lik} — компоненты тензоров упругих, электрических и пьезоэлектрических констант, характеризующих упругую среду; $i,k,l,m=1,2,3$.

Для системы (1)–(4) ставятся граничные условия импедансного вида

$$\sigma_{ik} \pm z_a \frac{\partial \xi_i}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

где z_a — сопротивления акустических нагрузок, приложенных к границам пьезоматериала.

Система (1)–(4) с граничными условиями (5) полностью описывает электроупругие процессы в пьезоматериалах в режиме излучения и приема.

Для одномерного и двумерного случаев построены устойчивые разностные схемы. Доказаны теоремы устойчивости и сходимости. Создана система программ для расчета амплитудно-частотных характеристик и численного моделирования переходных процессов в поляризованных пьезопреобразователях с пьезоэлементом из керамики. Математическое моделирование соответствует реальному физическому процессу для исследования электроакустических характеристик пьезоэлектрических преобразователей. Сравнение численных результатов, полученных по разработанному алгоритму с данными экспериментальных исследований позволяет сделать вывод об эффективности предложенного алгоритма.

УДК 519.635.8:532.516

МЕТОДЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СОСТАВНОГО ТИПА (ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ КОНВЕКЦИИ)

© А. Ф. Воеводин*, Т. В. Протопопова

* voevodin@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Системы уравнений составного типа (параболо-эллиптические) часто применяются для описания таких физических процессов как движение изотермической и теплопроводной вязкой несжимаемой жидкости (система уравнений Навье – Стокса и система уравнений конвекции в приближении Обербека – Буссинеска). Одной из особенностей этих систем уравнений является пространственно-эллиптический характер решений. Поэтому для решения используются типичные для эллиптических уравнений методы, при этом требуется постановка граничных условий на всех границах рассматриваемой области. При численном моделировании подобных задач одним из традиционных подходов является переход к новым переменным: функция тока — вихрь для плоских течений и вектор вихря — векторный потенциал для пространственных течений. При таком подходе уравнение неразрывности выполняется автоматически, что особенно важно в случае, когда нет оттока или притока жидкости в рассматриваемую область. Однако в этом случае возникает проблема постановки и корректной реализации граничных условий на твердых стенках.

В работах [1–3] предложен и достаточно строго теоретически обоснован эффективный численный метод решения систем уравнений конвекции в замкнутых областях. В основе метода лежит идея расщепления по физическим процессам. Процесс трансформации функции вихря представляется в виде двух этапов: конвективный перенос по траекториям при заданном поле скоростей на нижнем временном слое и диффузионный перенос, обусловленный вязкими членами и градиентом температуры. При этом на первом этапе рассматривается уравнение переноса, для которого в силу условий прилипания не требуется задания граничных условий, что позволяет построить энергетически нейтральные разностные схемы, сохраняющие норму типа L_2 для функции вихря. Хотя матрица системы разностных уравнений на данном этапе не обладает свойством диагонального преобладания, показано, что метод прогонки для неё устойчив. Реализация разностной начально-краевой задачи на этапе диффузии осуществляется на основе оригинального безытерационного двухполевого метода, позволяющего точно реализовать разностные граничные условия для вихря на твердой стенке. На этом этапе при решении уравнения Пуассона для функции тока методом дробных шагов на каждом итерационном шаге получается система разностных уравнений с матрицей, которая отличается от трехдиагональной наличием двух ненулевых столбцов. Возникновение такой неклассической задачи обусловлено отсутствием граничных условий для вихря и наличием двух граничных условий для функции тока на твердых стенках. Метод реализован как на основе использования схем второго порядка, так и с использованием схем повышенного порядка точности.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-5873.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Воеводин А. Ф.* Об устойчивости разностных граничных условий для функции вихря на твёрдой стенке // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т. 38, № 5. С. 855–859.
2. *Воеводин А. Ф., Юшкова Т. В.* Численный метод решения начально-краевых задач для уравнений Навье – Стокса в замкнутых областях на основе метода расщепления // Сиб. журн. вычисл. математики. 1999. Т. 2, № 4. С. 321–332.
3. *Voevodin A. F., Protopopova T. V.* The use of higher-order schemes to compute viscous incompressible flows // Proc. of the Int. Conf. on Computational Mathematics. Novosibirsk. 2002. P. 722–727.

УДК 517.9; 519.6

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ

© С. В. Гайдомак

gaidamak@icc.ru

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Рассматривается вырожденная система уравнений в частных производных

$$A\partial_t u + B\partial_x u + Cu = f, \quad \partial_t \equiv \partial/\partial t, \quad \partial_x \equiv \partial/\partial x, \tag{1}$$

где $A \equiv A(x,t)$, $B \equiv B(x,t)$, $C \equiv C(x,t)$ — заданные матрицы размера $(n \times n)$ с элементами, зависящими от переменных $x \in \mathbf{R}^1$ и $t \in \mathbf{R}^1$, $(x,t) \in \mathbf{U} = [x_0; X] \times [t_0; T]$; $f \equiv f(x,t)$ и $u \equiv u(x,t)$ — соответственно известная и искомая n-мерные вектор-функции. В системе (1) матрица A, либо матрица B, либо пучок матриц $\lambda A + \mu B$ тождественно вырождены в области $\mathbf{U}$ $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}^1$. Такие системы в литературе называются тождественно вырожденными, не разрешенными относительно старшей производной, системами Соболева, алгебро-дифференциальными уравнениями в частных производных, а также системами не относящимися к типу систем Коши – Ковалевской. Зададим для системы (1) начально-краевые условия:

$$u(x, t_0) = \phi(x), \quad u(x_0, t) = \psi(t). \tag{2}$$

Вопрос существования решения системы (1) с граничными условиями (2) был исследован в работе [1]. Получена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в начально-краевой задаче (1)–(2): пучок матриц $\lambda A + \mu B + C$ удовлетворяет двойному критерию "ранг-степень"; корни многочлена $\det(\lambda A + D)$, $D = B + (E - SS^-)C$ отрицательные, простые и возможно кратные нулевые для всех $(x,t) \in \mathbf{U}$, $S = (A\ B)$, S^- — любая полуобратная матрица к матрице S; входные данные достаточно гладкие в области $\mathbf{U}$; начальные и граничные данные удовлетворяют условиям: $A(x_0,t)u(x_0,t) = \psi(t)$, $B(x,t_0)u(x,t_0) = \phi(x)$ и предполагаются согласованными в точке (x_0,t_0) со своими производными. Тогда она имеет решение в области $\mathbf{U}$.*

Аналогичное утверждение справедливо для случая, когда система (1) имеет индекс (1,0). Отличие состоит лишь в том, что вместо пучка матриц $\lambda A + \mu B + C$ рассматривается пучок $\lambda A + B$ и требуется, чтобы он удовлетворял критерию "ранг-степень", а вместо многочлена $\det(\lambda A + D)$ — многочлен $\det(\lambda A + B)$.

Ставится следующая задача: необходимо найти численное решение системы (1) в области $\mathbf{U}$ с граничными условиями (2) методом сплайн-коллокации [2]. При этом предполагается, что система (1) гиперболическая индекса (1,1) или (1,0) и для начально-краевой задачи (1)–(2) в области $\mathbf{U}$ выполнены все условия теоремы [1], следовательно она разрешима в области $\mathbf{U}$.

В области $\mathbf{U}$ производится разбиение Δ прямыми: $x = x_0 + ih = x_i$, $t = t_0 + j\tau = t_j$, $i = \overline{0, \mathcal{N}_1}$, $j = \overline{0, \mathcal{N}_2}$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2 \in \mathbf{N}$, где h, τ — шаги полученной сетки, h, $\tau \in (0;1)$ и в каждой области $\mathbf{U}' = [x_i; x_i + m_1 h] \times [t_j; t_j + m_2 \tau] \in \mathbf{U}$ решение задачи (1)–(2) ищется в виде полинома $\mathcal{H}_{m_1,m_2}(x,t)$ со старшими степенями по x и по t равными соответственно m_1, m_2, с неопределенными коэффициентами, значения которого совпадают со значениями искомого решения в узлах коллокации: $\mathcal{H}_{m_1,m_2}(x_i,t_j) = u(x_i,t_j)$. Для случая, когда $m_1 = m_2 = 2$ такой

полином может иметь вид:

$$\mathcal{H}_{2,2}(x,t) = u(x_i,t_j)\prod_i(x)\prod_j(t) + u(x_{i+1},t_j)\prod_{i+1}(x)\prod_j(t) + u(x_{i+2},t_j)\prod_{i+2}(x)\prod_j(t) +$$
$$u(x_i,t_{j+1})\prod_i(x)\prod_{j+1}(t) + u(x_{i+1},t_{j+1})\prod_{i+1}(x)\prod_{j+1}(t) + u(x_{i+2},t_{j+1})\prod_{i+2}(x)\prod_{j+1}(t) +$$
$$u(x_i,t_{j+2})\prod_i(x)\prod_{j+2}(t) + u(x_{i+1},t_{j+2})\prod_{i+1}(x)\prod_{j+2}(t) + u(x_{i+2},t_{j+2})\prod_{i+2}(x)\prod_{j+2}(t), \quad (3)$$

где

$$\prod_i(x) = \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})}, \quad \prod_{i+1}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+2})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})},$$
$$\prod_{i+2}(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+2}-x_i)(x_{i+2}-x_{i+1})}.$$

Поскольку значения полинома в узлах коллокации совпадают со значениями искомого решения, то в этих узлах полином должен удовлетворять системе (1). Подставляя значения полинома, вычисленные в узлах коллокации (x_{k_1}, t_{k_2}), $k_1 = j+1, j+2$, $k_2 = j+1, j+2$ и значения его производных последовательно в каждом узле в систему (1), получаем систему конечно-разностных уравнений:

$$-1/(2\tau)A_{i+1,j+1}(u_{i+1,j} - u_{i+1,j+2}) -$$
$$1/(2h)B_{i+1,j+1}(u_{i,j+1} - u_{i+2,j+1}) + C_{i+1,j+1}u_{i+1,j+1} = f_{i+1,j+1},$$
$$-1/(2\tau)A_{i+2,j+1}(u_{i+2,j} - u_{i+1,j+2}) +$$
$$1/(2h)B_{i+2,j+1}(u_{i,j+1} - 4u_{i+1,j+1} + 3u_{i+2,j+1}) + C_{i+2,j+1}u_{i+2,j+1} = f_{i+2,j+1},$$
$$1/(2\tau)A_{i+1,j+2}(u_{i+1,j} - 4u_{i+1,j+1} + 3u_{i+1,j+2}) -$$
$$1/(2h)B_{i+1,j+2}(u_{i,j+2} - u_{i+2,j+2}) + C_{i+1,j+2}u_{i+1,j+2} = f_{i+1,j+2},$$
$$1/(2\tau)A_{i+2,j+2}(u_{i+2,j} - 4u_{i+2,j+1} + 3u_{i+2,j+2}) +$$
$$1/(2h)B_{i+2,j+2}(u_{i,j+2} - 4u_{i+1,j+2} + 3u_{i+2,j+2}) + C_{i+2,j+2}u_{i+2,j+2}z = f_{i+2,j+2}, \quad (4)$$

где $A_{i,j} \equiv A(x_i,t_j)$, $B_{i,j} \equiv B(x_i,t_j)$, $C_{i,j} \equiv C(x_i,t_j)$. При реализации итерационного процесса, в основе которого лежит решение в каждой точке сетки системы линейных алгебраических уравнений (4) на первом шаге $u_{i,0}$, $u_{0,j}$ определяют из начально-краевых условий (2): $u_{i,0} = \phi(x_i,t_0)$, $u_{0,j} = \psi(x_0,t_j)$, а на каждых последующих шагах берут результаты с предыдущего шага. Для обеспечения большей устойчивости численного решения, в процессе вычисления передвигаться по сетке в области $\mathbf{U}$ следует слева направо на шаг h и снизу вверх от слоя к слою на шаг τ.

Способ отыскания численного решения с помощью описанной выше схемы называется методом сплайн-коллокации. Сходимость численного процесса, организованного по методу сплайн-коллокации доказана в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть для начально-краевой задачи (1)–(2) выполнены все условия теоремы 1. Тогда найдутся такие* τ^*, $h^* \in (0;1)$, *что для всех* $\tau < \tau^*$, $h < h^*$, *удовлетворяющих условию* $\tau = h^2$, $|\lambda^*|h < \frac{1}{8}$, λ^* *— наибольшее из всех собственных чисел матрицы* $B(x,t)$, *вычисленных в узлах коллокации, метод сплайн-коллокации сходится и справедлива оценка* $||u(x_i,t_j) - u_{i,j}|| = O(h^2) + O(\tau)$ $\forall i,j$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гайдомак С. В., Чистяков В. Ф.* О системах не типа Коши – Ковалевской индекса $(1,k)$ // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 2. С. 45–59.
2. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн функций. М.: Наука, Главная редакция физико-математ. литературы, 1980.

УДК 519.6

ВЛИЯНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА КОНВЕКЦИЮ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© Ю. А. Гапоненко

yuag@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Горизонтальный слой жидкости со свободной границей при определенных условиях может находиться в состоянии механического равновесия. При этом существенное влияние на сохранение стабильности этого состояния оказывает температурное поле, формирование которого происходит за счет меняющихся во времени граничных условий. Основным направлением исследований в задачах такого рода является определение параметров возмущающих воздействий, образованных за счет модуляции колебаний температурного поля, изучение динамики их распространения, поскольку это может привести к потере положения равновесия жидкости и образованию конвекции. Практическое применение полученных результатов может быть связано с управлением движением жидкости в различных аппаратах и устройствах промышленности, технологическими процессами, а также механизмами, формирующими конвекцию в естественных водоемах.

В данной работе рассматривается задача о возникновении конвекции в слое вязкой жидкости со свободной границей, находящейся в равновесном положении, при колебаниях температуры на границах области. Такое периодическое со временем изменение температуры приводит к модуляции массовой (конвективной) силы лишь в некоторых областях слоя жидкости, толщина которых убывает пропорционально с увеличением частоты колебаний. Основной целью исследований является оценка воздействия колебательного процесса температуры на устойчивость. При этом главное внимание уделяется анализу влияния параметров, определяющих асинхронность колебательных режимов температуры на верхней и нижней границах слоя жидкости. В таких условиях рассогласованность колебаний температуры на верхней и нижней границах может быть использована как параметр, управляющий устойчивостью слоя жидкости, в тех случаях, когда один из колебательных режимов есть заданный технологический фактор либо естественное природное явление (сезонное или суточное).

Численное моделирование проводится для системы уравнений, описывающей распространение малых возмущений вдоль вертикальной координаты z:

$$H_t - \frac{\alpha^2}{\rho_0} P = \nu(H_{zz} - \alpha^2 H), \quad W_t + \frac{1}{\rho_0} P_z = \nu(W_{zz} - \alpha^2 W) + \beta g T,$$

$$H + W_z = 0, \quad T_t + \theta_z W = \chi(T_{zz} - \alpha^2 T),$$

где (H, W, P, T) - малые возмущения компонент вектора скорости (U, V, W), давления P и температуры T; θ - температура; величины H и α определяются как $H = i\alpha_1 U + i\alpha_2 V$, $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$.

Анализ решения уравнений проводится для слоев жидкости различной глубины, где исследуется влияние величины волнового числа и частоты колебаний температуры на амплитуду начальных возмущений.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-00836, гранта НШ 5873.2006.1 и комплексного интеграционного проекта № 2.15 СО РАН.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 571–571

УДК 517.211

СИНЕРГЕТИКА НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОНКОЙ СТРУНЫ

© С. О. Гладков*, Р. Г. Рабаданов

* Sglad@newmail.ru

Московский государственный областной университет, Москва

Целью сообщения является вывод динамических уравнений движения струны, почти закрепленной с одного конца. Под термином "почти закрепленная" подразумевается, что этот конец мгновенно вздрогнув, возвращается в исходную точку и, таким образом, придается некоторая начальная форма струне. Эта форма считается начальным условием. Дальнейшее движение, как всей струны, так и ее свободного конца предстоит описать во времени и в пространстве, считая, что движение происходит только в плоскости. Заметим, что случай растяжимой струны довольно сложен, поскольку при его решении необходимо принимать во внимание внутренние деформации, подчиняющиеся уравнениям теории упругости, в рамках которых величину смещения следует отождествить с вектором смещения внутренних точек струны $\boldsymbol{u}$. Рассмотрим случай нерастяжимой струны, когда смещение точек происходит лишь вдоль оси x, которое есть $\xi_x = \xi_x(t, y)$. Как было показано в работе [1], сила сопротивления среды определяется следующим интегралом $F_n^{fr} = \int_l f_n^{fr}\, dl = 2\pi\eta \int_l r(l) \frac{\partial}{\partial R}(\dot{\xi}_x \sqrt{1 + {\xi'_x}^2}) dl$, где $r(l)$ — радиус струны, изменяющийся в общем случае вдоль ее длины l, R — ее радиус кривизны в произвольной точке, η — динамическая вязкость среды, "точка" над смещением ξ_x означает производную по времени, а "штрих" — по координате. Для того, чтобы правильно учесть силу трения в динамическом уравнении движения струны, следует ввести в рассмотрение классическое действие S (см. [2]). С учетом F_n^{fr} оно будет вычисляться, как $\Delta S = 2\pi\eta r_0 \int_{t_0}^{t_1} \int_l \int dR \frac{\partial}{\partial R}\left(\dot{\xi}_x \sqrt{1 + {\xi'_x}^2}\right) = 2\pi\eta r_0 \int_{t_0}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} \dot{\xi}_x (1 + {\xi'_x}^2) dy$, где учтено, что элемент длины есть $dl = dy\sqrt{1 + {\xi'_x}^2}$. Если здесь отбросить член, пропорциональный производной по времени (общие свойства действия S), полное действие следует представить как $S = \frac{\rho}{2} \int_{t_*}^{t_1} \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + {\xi'_x}^2} \left[\left({\dot{\xi}_x}^2 - u_0^2 - 2gy\right) + \frac{4\pi\eta r_0}{\rho} \dot{\xi}_x {\xi'_x}^2\right]$, где соответствующее слагаемое учитывает влияющую на движение струны силу тяжести.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гладков С. О., Рабаданов Р. Г.* О сильных нелинейных колебаниях тонкой струны // Нелинейная динамика. 2007 (в печати).
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика. Т. 1. М.: Наука, 1973. 207 с.

УДК 517.9+533

МНОГОМЕРНЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© **А. И. Голод** *, **А. П. Чупахин** **

* lion18@list.ru, ** chupakhin@hydro.nsc.ru

* *Новосибирский государственный университет, Новосибирск;*
** *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск*

Автомодельные решения играют большую роль в газовой и гидродинамике. Классические автомодельные решения существенно использовались при построении задачи о сильном взрыве [1]. Между тем такие решения описывают, фактически, одномерные движения и не исчерпывают всего множества автомодельных решений. Такие решения являются инвариантными относительно групп растяжений, допускаемых уравнениями газовой динамики [2].

Уравнения газовой динамики с политропным уравнением состояния $p = S\rho^{\gamma}$ допускают, при общем показателе адиабаты γ, трехмерную алгебру растяжений $H_3 =< Y_1, Y_2, Y_3 >$, где $Y_1 = t\partial t + x\partial x + y\partial y + z\partial z, Y_2 = t\partial t - u\partial u - v\partial v - w\partial w + 2\rho\partial\rho, Y_3 = \rho\partial\rho + p\partial p$. Существует 10 инвариантных подмоделей, отвечающих подалгебрам алгебры H_3 [3]. Среди них пять подмоделей размерности 1 и пять размерности 2, которые порождают инвариантные решения ранга три и два соответственно.

В работе построены факторуравнения, отвечающие перечисленным инвариантным подмоделям. Они являются системами уравнений в частных производных с тремя и двумя независимыми переменными и описывают существенно трехмерные движения газа. Большой интерес для приложений имеют подмодели, порожденные подалгебрами алгебры H_3 и оператором вращения $S = y\partial z - z\partial y + v\partial w - w\partial v$. Такие подалгебры размерности 3 описывают подмодели ранга 1, для которых факторуравнения являются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Физически им отвечают вихревые движения газа, являющиеся обобщениями классических конически-инвариантных.

В работе построены факторуравнения, отвечающие трём подалгебрам такого типа, имеющим вид $< S + aY_1, bY_1 + Y_2, cY_1 + Y_3 >, < Y_1 S + aY_2, bY_2 + Y_3 >, < Y_1, Y_2, S + aY_3 >$. Подробно исследована подмодель отвечающая последней из этих подалгебр.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ № 05-01-00080 и СО РАН № 2.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
3. *Головин С. В.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Новосибирск, 1996 (Препринт / СО РАН, Ин-т Гидродинамики; № 5-96).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 572–572

УДК 531

ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СРЕД С ОДНОРОДНОЙ ДЕФОРМАЦИЕЙ

© А. Н. Голубятников

golubiat@mech.math.msu.su

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В рамках модели однородного несжимаемого жидкого кристалла, предложенной ранее Озеном, Франком и Лесли [1], рассматривается класс точных решений с однородными деформацией и ориентацией среды. При этом уравнения движения, из которых выпадает вязкость и упругость ориентации, сводятся к решению соответствующих уравнений для несжимаемой идеальной жидкости. Последние допускают интегрирование с точностью до восьми произвольных функций времени, которые, вообще говоря, надо определять из краевых условий. Уравнения, служащие для определения ориентации, сводятся к линейным уравнениям, которые полностью интегрируются в двух типичных случаях — нематиков и смектиков.

Данная конструкция с отделением уравнений движения и последующим решением уравнений ориентации в случае однородной деформации распространяется на общую теорию анизотропных сплошных сред, классификация которых, основанная на описании подгрупп Ли линейной унимодулярной группы, была дана автором [2].

В качестве первого примера специализации произвольных функций можно привести случай изотропного распределения давления при наличии неподвижной точки (особый вихрь Л. В. Овсянникова [3]), что позволяет полностью исследовать общее поведение закона движения и ориентации жидкого кристалла. Решение сводится к анализу четырех канонических случаев, в трех из которых частицы среды уходят на бесконечность за конечное время. Частично эти движения для изотропной жидкости были раннее исследованы Л. В. Овсянниковым [4] и А. П. Чупахиным [5, 6].

В качестве второго примера может служить задача о метании перепадом давления слоя ориентируемой идеальной жидкости, заключенного между двумя гиперболоидами вращения с одинаковым асимптотическим конусом.

Работа проводилась при финансовой поддержке РФФИ (проекты 05-01-00375 и 05-01-00839) и грантов Президента РФ (проекты НШ-4474.2006.1 и МК-9352.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жен П. Ж. де.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир. 1977. 400 с.
2. *Голубятников А. Н.* Симметрии сплошных сред // Успехи механики. 2003. Т. 2, № 1. С. 126–183.
3. *Овсянников Л. В.* Особый вихрь // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 45–52.
4. *Овсянников Л. В.* Общие уравнения и примеры // Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР. 1967. С. 5–75.
5. *Чупахин А. П.* Гидродинамика с квадратичным давлением. 1. Общие результаты // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 1. С. 27–35.
6. *Чупахин А. П.* Гидродинамика с квадратичным давлением. 2. Примеры // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 2. С. 22–28.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 573–574

УДК 532.5:532.517.4

ГЛОБАЛЬНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СВОБОДНЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОГО МОЛЕКУЛЯРНОГО ГАЗА

© Ю. Н. Григорьев *, И. В. Ершов **

* grigor@ict.nsc.ru, ** i_ershov@ngs.ru

* *Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск;*
** *Новосибирская государственная академия водного транспорта, Новосибирск*

Известно, что любые течения жидкостей и газов при достижении числом Рейнольдса некоторых критических значений теряют устойчивость и становятся турбулентными. Для течений типа пристенных пограничных слоев эти значения рассчитываются в рамках линейной теории устойчивости. Вместе с тем есть ряд примеров, для которых линейная теория не дает удовлетворительных результатов. В частности, течения Гагена – Пуазейля в трубах и плоское течение Куэтта в приближении линейной теории оказываются устойчивыми к любым малым возмущениям.

В подобных случаях альтернативой линейной теории является энергетическая теория глобальной гидродинамической устойчивости [1]. Здесь под глобальностью понимается неограниченность амплитуд рассматриваемых возмущений. В основе энергетического подхода к задаче устойчивости лежит уравнение энергетического баланса, которое приводит к вариационной задаче для некоторого функционала, характеризующего эволюцию энергии возмущений. Следует заметить, что полученные на ее основе значения критериев устойчивости далеко не всегда близки к экспериментальным данным. Однако этот подход дает в настоящее время единственную возможность хотя бы в обобщенном виде учесть нелинейную стадию потери устойчивости.

Наш интерес к нелинейной теории устойчивости связан с проблемой влияния релаксационных процессов на ламинарно-турбулентный переход (ЛТП) и генерацию турбулентности в сжимаемых течениях молекулярных газов. В рамках модели Навье – Стокса при небольших отклонениях от равновесия эффект релаксации учитывается коэффициентом объемной вязкости в дивергентной части тензора напряжений. В работах [2–4] на основе численных расчетов простой нелинейной модели было показано, что дополнительный диссипативный эффект, связанный с объемной вязкостью (релаксацией), может оказать заметное влияние на затухание энергии возмущений. Однако эти результаты не позволяют прямо оценить соответствующее изменение числа Рейнольдса ЛТП Re_c.

Вместе с тем надо констатировать, что энергетическая теория для сжимаемых жидкостей остается практически неразвитой, что связано с существенной нелинейностью полных уравнений Навье - Стокса сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Все известные результаты данной теории относятся к течениям несжимаемых и неоднородных жидкостей и опираются на соленоидальность допустимых полей скорости, которая отсутствует в сжимаемых течениях. Возникающие из-за этого трудности математического характера до настоящего времени преодолеть не удавалось.

В данной работе в рамках энергетической теории рассматривается устойчивость сжимаемого течения Куэтта с линейным профилем скорости. Ценой определенных упрощений для него удается до конца аналитически решить соответствующую вариационную задачу и найти явную зависимость Re_c от объемной вязкости. Получены асимптотические оценки устойчивости различных мод, содержащие в главном порядке характерную зависимость $\mathrm{Re}_c \sim (\alpha + 4/3)^{1/2}$. Это означает, что в реальном для двухатомных газов диапазоне отношений объемной вязкости к сдвиговой (параметра α) с ростом объемной вязкости критическое число Рейнольдса может заметно возрасти. Рассмотренные асимптотики являются длинноволновыми приближениями,

что позволяет отнести полученную зависимость к воздействию объемной вязкости на крупномасштабные вихревые структуры, характерные для развития неустойчивости Кельвина – Гельмгольца в свободных сдвиговых течениях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 05-01-00359).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Джозеф Д.* Устойчивость движений жидкости. М.: Мир, 1981.
2. *Григорьев Ю. Н., Ершов И. В.* Подавление вихревых возмущений релаксационным процессом в молекулярном газе // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 22–34.
3. *Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Ершова Е. Е.* Влияние колебательной релаксации на пульсационную активность в течениях возбужденного двухатомного газа // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 15–23.
4. *Григорьев Ю. Н., Ершов И. В., Зырянов К. И., Синяя А. В.* Численное моделирование эффекта объемной вязкости на последовательности вложенных сеток // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 3. С. 36–49.

УДК 519.63+519.68

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

© Я. Л. Гурьева, В. П. Ильин

yana@lapasrv.sscc.ru, ilin@sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются актуальные вопросы эффективного итерационного решения систем линейных алгебраических уравнений с разреженными матрицами высоких порядков, возникающих из сеточных аппроксимаций линейных дифференциальных уравнений теории упругости с широким диапазоном изменения коэффициентов Ламе. Проводится сравнительный экспериментальный анализ методов сопряжённых градиентов и сопряжённых невязок, как без предобуславливания, так и с предобуславливанием на основе неполной факторизации. Исследуются поточечные и блочные варианты алгоритмов. Приводятся результаты измерения производительности программных реализаций для различных матричных форматов хранения данных, при использовании специальных библиотечных функций разных компьютерных платформ. Обсуждаются вопросы эффективности распараллеливания рассматриваемых алгортмов на вычислительных системах с общей и распределённой памятью.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 576–577

УДК 517.9; 519.6

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДНЫХ ПО ПАРАМЕТРАМ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ НЕЙМАНА НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© С. А. Гусев

sag@osmf.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Рассматривается следующая краевая задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(t,x,p)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{d} a_i(t,x,p)\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$+c(t,x,p)u+f(t,x,p)=0, \quad t\in[0,T], \quad x\in G, \tag{1}$$

$$u(T,x,p)=\varphi(x,p), \qquad x\in G, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\eta(t,x,p)u+\gamma(t,x,p)=0, \qquad x\in\partial G, \tag{3}$$

где G — область в R^d с границей ∂G; n — единичный вектор внутренней нормали в точке $x\in\partial G$; p — вектор параметров из некоторого множества $U\subset R^m$.

Краевой задаче (1)–(3) ставится в соответствие диффузионный процесс с отражением от границы, который описывается системой стохастических дифференциальных уравнений (СДУ)

$$X_s = x+\int_t^s a(v,X_v,p)dv+\int_t^s \sigma(v,X_v,p)dW_v + k_s, \tag{4}$$

$$k_s=\int_t^s n(X_v)d|k_v|, \quad |k_s|=\int_t^s \chi_{\partial G}(X_v)d|k_v|, \tag{5}$$

где σ — $d\times d$-матрица такая, что $\sigma\sigma^T=B\equiv(b_{ij})$; χ_A — индикаторная функция множества A; $|k.|$ — скалярный возрастающий процесс, который растет только тогда, когда $X.\in\partial G$. Процесс $|k.|$ называется локальным временем процесса X на ∂G. В действительности $|k_s|$ представляет собой полную вариацию функции $k.$ на отрезке $[t,s]$.

Для моделирования траекторий системы (4)–(5) предлагается использовать схему Эйлера с ортогональным проектированием численного решения на $\bar{G}$.

Оценку решения задачи (1)–(3) будем рассматривать как приближенное значение функционала, полученное в результате моделирования траекторий системы (4)–(5)

$$u(t,x,p)=E_{t,x}\big(\varphi(X_T,p)Y_T(p)+Z_T(p)\big), \tag{6}$$

где $E_{t,x}$ обозначено математическое ожидание при условии $X_t=x$, а $Y_T(p)$, $Z_T(p)$ — значения при $s=T$ следующих функций

$$Y_s(p)=\exp(\int_t^s c_v dv+\int_t^s \eta_v d|k_v|), \qquad Z_s(p)=\int_t^s f_v Y_v dv+\int_t^s \gamma_v Y_v d|k_v|. \tag{7}$$

Оценки производных вида $\partial u/\partial p$ рассматриваются как результат приближенного определения значений функционала, полученного в результате дифференцирования по параметрам функционала (6)

$$\frac{\partial u}{\partial p}(t,x) = E_{t,x}\Big(\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(X_T)\partial_p X_T + \frac{\partial \varphi}{\partial p}(X_T)\Big)Y_T + \varphi(X_T)\partial_p Y_T + \partial_p Z_T\Big),$$

где $\partial_p X_\cdot$, $\partial_p Y_\cdot$, $\partial_p Z_\cdot$ обозначены производные по параметрам от $X_\cdot$, $Y_\cdot$, $Z_\cdot$. Причем значения этих производных находятся из уравнений, которые получаются в результате дифференцирования по параметрам уравнений (4), (5), (7)

$$\begin{aligned}
\partial_p X_s =& \int_t^s \Big(\frac{\partial a_v}{\partial x}\partial_p X_v + \frac{\partial a_v}{\partial p}\Big)dv + \int_t^s \Big(\frac{\partial \sigma_v}{\partial x}\partial_p X_v + \frac{\partial \sigma_v}{\partial p}\Big)dW_v + \\
& \int_t^s \frac{\partial n(X_v)}{\partial x}\partial_p X_v d|k_v| + \int_t^s n(X_v)d(\partial_p|k_v|), \\
\partial_p Y_s =& Y_s\Big[\int_t^s \left(\frac{\partial c_v}{\partial x}\partial_p X_v + \frac{\partial c_v}{\partial p}\right)dv + \\
& \int_t^s \left(\frac{\partial \eta_v}{\partial x}\partial_p X_v + \frac{\partial \eta_v}{\partial p}\right)d|k_v|\Big) + \int_t^s \eta_v d(\partial_p|k_v|)\Big], \\
\partial_p Z_s =& \int_t^s \left[\left(\frac{\partial f_v}{\partial x}\partial_p X_v + \frac{\partial f_v}{\partial p}\right)Y_v + f_v \partial_p Y_v\right]dv + \\
& \int_t^s \Big[\Big(\frac{\partial \gamma_v}{\partial x}\partial_p X_v + \frac{\partial \gamma_v}{\partial p}\Big)Y_v + \gamma_v \partial_p Y_v\Big]d|k_v| + \int_t^s \gamma_v Y_v d(\partial_p|k_v|), \\
|\partial_p k_s| =& \int_t^s \chi_{\partial G}(X_v)d(\partial_p|k_v|).
\end{aligned}$$

В докладе дано обоснование возможности такого дифференцирования. Также установлен порядок погрешности $O(h^{\frac{1}{2}})$ оценок для u и $\partial u/\partial p$ при моделировании траекторий диффузионного процесса методом Эйлера с шагом h и даны результаты численных экспериментов.

Работа поддержана научной программой “Ведущие научные школы” (НШ-4774.2006.1).

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 578–579

УДК 517.958:539.4

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧНОЙ ПРОСЛОЙКИ В СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

© Т. В. Ерошкина

tanya@math.susu.ac.ru

Южно-Уральский государственный университет, Челябинск

Введение. Осесимметричные задачи теории идеальной пластичности, как правило, не являются статически определимыми: два уравнения равновесия и уравнение пластичности содержат четыре неизвестных компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}_r\,, \tilde{\sigma}_\varphi\,, \tilde{\sigma}_z\,, \tilde{\tau}_{rz}\,,$ т. е. система уравнений в напряжениях не замкнута. В работе рассматривается напряженное состояние мягкой поперечной прослойки прямоугольного сечения круглого сплошного стержня под растягивающей осевой нагрузкой, когда поперечные сечения прослойки в процессе деформации остаются практически плоскими в силу сдерживающего влияния более прочной части стержня. Эта гипотеза (ГПС — гипотеза плоских сечений), как нетрудно показать, приводит к условию $\tilde{\sigma}_\varphi = \tilde{\sigma}_r$, где $\tilde{\sigma}_\varphi$, $\tilde{\sigma}_r$ — тангенциальное (кольцевое) и радиальное нормальные напряжения. В этом случае напряженное состояние (НС) прослойки описывается системой уравнений пластического равновесия, замкнутой в напряжениях, и имеющей вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau}{r} = 0, \tag{2}$$

$$f(\tilde{\sigma}_r,\ \tilde{\sigma}_z,\ \tilde{\tau}_{rz}) = k. \tag{3}$$

Здесь

$$\sigma_r = \tilde{\sigma}_r/k, \qquad \sigma_z = \tilde{\sigma}_z/k, \qquad \tau = \tilde{\tau}_{rz}/k$$

— безразмерные компоненты напряжений, (1) и (2) — уравнения равновесия, (3) — условие пластичности, k — предел текучести. Основной металл и металл прослойки предполагаются однородными и изотропными, с одинаковыми механическими характеристиками в упругой зоне, но с разными пределами текучести. Условие текучести (3) в безразмерных напряжениях в форме Мизеса можно представить приближенно в виде (плюс — при растяжении):

$$\sigma_z - \sigma_r = \pm\sqrt{3}(1 - \tau^2/2). \tag{4}$$

Носителем системы (1)–(3) является прямоугольная область, моделирующая осевое сечение прослойки. Из соображений симметрии достаточно рассматривать четверть сечения: $r \in [0;1]$, $z \in [0;\chi]$, где χ — относительная толщина прослойки (радиус сержня принят равным единице). Имеют место граничные условия

$$\tau(0,z) = 0, \quad \sigma_r(1,z) = 0, \quad \tau(1;z) = 0, \quad \tau(r;0) = 0. \tag{5}$$

Пусть в каждый момент нагружения известно наибольшее значение τ на контактной поверхности:

$$\tau(r_0,\chi) = \max \tau(r,\chi) = \alpha, \quad 0 < \alpha \le 1, \quad r \in [0;1].$$

Исключение из системы (1), (2), (4) нормальных напряжений приводит к уравнению

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\partial^2(\tau^2)}{\partial r\partial z}+\frac{\partial^2\tau}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\tau}{\partial r^2}-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau}{r}\right)=0. \tag{6}$$

Рассматриваются частные случаи напряженного состояния, допускающие гипотезу о разделении переменных (ГРП) для касательных напряжений: $\tau = R(r)Z(z)$. Целью сообщения является анализ математических моделей напряженного состояния прослойки, полученный при ГПС и ГРП, и вычисление в каждом случае напряжений в прослойке в произвольный момент нагружения. Следствием применения ГРП к (6) является уравнение

$$2\sqrt{3}\,R'Z'+Z''/Z-R''/R-(R/r)'/R=0, \tag{7}$$

которое противоречиво, за исключением следующих частных случаев.

Первый случай. Функция $Z(z)$ постоянна. Тогда из (7) следует, что $R(r)=m_1r+m_2/r$, где m_1 и m_2 — произвольные константы. Это известное решение [1].

Второй случай. $Z'(z)$ постоянна, $Z'(z)\neq 0$. Тогда $Z(z)=Cz$. Без ограничения общности можно считать $C=1$. Из (7) следует для некоторой константы A:

$$\sqrt{3}R^2-R'-R/r=-A, \tag{8}$$

причем, как видно из (5),

$$R(0)=0,\quad R'(0)=A,\quad \lim_{r\to 0}\frac{R(r)}{r}=A, \tag{9}$$

а постоянная A определяется параметром α из начального условия (5). Уравнение (8) имеет только нечетные решения при условии (7).

Решение системы (1)–(4) имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\tau=\tfrac{2z}{\sqrt{3}r}\ln\left(\tfrac{2}{2-\sqrt{3}Ar^2}\right),\ r\neq 0;\\
&\sigma_z=\tfrac{-2Az^2}{2-\sqrt{3}Ar^2}-\tfrac{1}{2}\left(Ar^2+\tfrac{\sqrt{3}}{4}\tfrac{1}{2}\left(Ar^2\right)^2+\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{3}\left(Ar^2\right)^3+...\right)+C+\sqrt{3};\\
&\sigma_r=-\tfrac{1}{2}\left(Ar^2+\tfrac{\sqrt{3}}{4}\tfrac{1}{2}\left(Ar^2\right)^2+\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{3}\left(Ar^2\right)^3+...\right)+A\left(\sqrt{3}-\tfrac{z^2}{2}\right)+C.
\end{aligned}$$

Параметр A вычисляется по формуле: $A=2\left(1-\exp(-\sqrt{3}\,r_0\alpha/(2\chi))\right)/\sqrt{3}\,r_0^2$. Существует несколько различных методик вычисления постоянной C. Наиболее простая, но наименее точная, приводящая к заметному завышению значений σ_z, основана на вычислении среднеинтегрального значения σ_r на свободной поверхности $r=1$. Другие методы связаны с исследованием поля характеристик в окрестности свободной границы [2].

Третий случай. $R'(r)$ постоянна. Без ограничения общности можно считать $R(r)=r$. Уравнение (7) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению $2\sqrt{3}\,Z'Z+Z''=0$, решение которого при условии $Z(0)=0$ имеет вид: $Z=A\mathrm{th}\left(\sqrt{3}\,Az\right)$ или $Z=-A\mathrm{tg}\left(\sqrt{3}\,Az\right)$. Решение системы (1)–(4) в этом случае:

$$\tau=Ar\mathrm{th}(\sqrt{3}Az)\quad\text{или}\quad\tau=-Ar\mathrm{tg}(\sqrt{3}Az)$$

(минус соответствуют сжатию). Выражения для вычисления нормальных напряжений (с точностью до постоянного слагаемого) получаются отсюда интегрированием.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 05-08-18179).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ивлев Д. Д.* Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 231 с.
2. *Дильман В. Л., Ерошкина Т. В.* Об одной модели, описывающей напряженное состояние в круглом стержне // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11, вып. 4. С. 793–794.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 580–581

УДК 519.6

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СРЕДНИХ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПРОЦЕССОВ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

© А. И. Зейфман*, Я. А. Сатин, Г. Н. Шилова

* zai@uni-vologda.ac.ru

Вологодский государственный педагогический университет и ВНКЦ ЦЭМИ РАН, Вологда

Марковские модели теории массового обслуживания, описываемые процессами рождения и гибели (далее ПРГ), исследуются и применяются очень давно, см., например, [1].

Более реалистические модели массового обслуживания, описываемые нестационарными марковскими цепями, активно изучаются, начиная с [2, 3]. Построение предельного режима и нахождение явных формул для вероятностей состояний таких моделей, как правило, невозможно, поэтому основной интерес, естественно, связан с вопросами аппроксимации различных характеристик таких систем, см. [5, 7, 8].

Интерес к изучению нестационарных марковских моделей систем обслуживания возрастает в последние годы в связи с появлением новых методов исследования, см., например, работы [4, 6].

Две важных характеристики — предельное среднее и двойное среднее — введены и изучены для процессов с периодическими интенсивностями в [9].

Пусть $X(t)$, $t \geq 0$ — "вспомогательный" неоднородный ПРГ с пространством состояний $E = \{0, 1, \ldots\}$, интенсивности рождения $\lambda_n(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_{n+1}(t)$, $t \geq 0$, $n \in E$, которого являются периодическими функциями от времени t с периодом 1.

Рассмотрим теперь основной ("возмущенный") ПРГ $X^*(t)$, $t \geq 0$, с тем же пространством состояний E и интенсивностями рождения $\lambda_n^*(t)$, $t \geq 0$, и гибели $\mu_{n+1}^*(t)$, $t \geq 0$, $n \in E$, для которого выполнены аналогичные стандартные условия, а вместо 1-периодичности предполагается, что $\lambda_n^*(t) - \lambda_n(t) = \hat{\lambda}_n(t)$, $\mu_n^*(t) - \mu_n(t) = \hat{\mu}_n(t)$, где "возмущения"интенсивностей $|\hat{\lambda}_n(t)| \leq \varepsilon((t)$, $|\hat{\mu}_n(t)| \leq \varepsilon(t)$, причем $\varepsilon(t)$ стремится к нулю при $t \to \infty$.

В [9] введены следующие определения: ПРГ $X(t)$ имеет предельное среднее $\phi(t)$, если $\lim_{t\to\infty} |E\{X(t)\,|X(0) = k\} - \phi(t)| = 0$ для любого $k \in E$. Здесь $E\{X(t)\,|X(0) = k\}$ — среднее для процесса в момент времени t при условии, что $X(0) = k$.

Двойным средним для $X(t)$ называется предел $\mathsf{E} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t E\{X(u)\,|X(0) = k\}\, du$, если он существует и не зависит от k.

Рассмотрим вспомогательную последовательность $1 = d_{-1} = d_0 \leq d_1 \leq \ldots$ и положим

$$\alpha_k(t) = \lambda_k(t) + \mu_{k+1}(t) - \frac{d_{k+1}}{d_k}\lambda_{k+1}(t) - \frac{d_{k-1}}{d_k}\mu_k(t), \quad k \geq 0,$$

а затем $\alpha(t) = \inf_{k\geq 0} \alpha_k(t)$ и $\alpha^* = \int_0^1 \alpha(t)\, dt$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть для "невозмущенного" ПРГ $X(t)$ найдется последовательность $\{d_j\}$ такая, что $\alpha^* > 0$. Пусть, кроме того, $\inf_{k\geq 1} \frac{d_{k-1}}{k} = \omega > 0$. Тогда возмущенный процесс $X^*(t)$ имеет те же предельные характеристики: предельное среднее $\phi(t)$, и двойное среднее E.*

Кроме того, получены оценки скорости сходимости и описан метод построения предельного и двойного среднего.

Далее изучается второй случай, относящийся к ситуации, когда "невозмущенны" ПРГ является сильно эргодичным, то есть имеет постоянное предельное распределение вероятностей состояний. Для этого достаточно, например, чтобы интенсивности рождения и гибели были

пропорциональны одной и той же локально интегрируемой неотрицательной функции. Доказывается, что в этом случае при выполнении тех же стандартных условий "возмущенный" ПРГ имеет постоянное предельное среднее, и строятся оценки погрешности аппроксимации предельных характеристик.

В качестве примера рассматривается система обслуживания $M(t)/M(t)/N$ с различными N.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00111.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н.* Введение в теорию массового обслуживания М.: Наука, 1987.
2. *Гнеденко Б. В., Макаров И. П.* Свойства решений задачи с потерями в случае периодических интенсивностей // Дифференциальные уравнения. 1971. Т. 7. С. 1696–1698.
3. *Гнеденко Б. В., Соловьев А. Д.* Об условиях существования финальных вероятностей марковского процесса // Math. Operationsforsh. Stat. 1973. P. 379–390.
4. *Abramov V., Liptser R.* On existence of limiting distribution for time-nonhomogeneous countable Markov process // Queueing Systems. V. 46. P. 353–361.
5. *Di Crescenzo A., Nobile A.G.* Diffusion approximation to a queueing system with time dependent arrival and service rates // Queueing Systems. 1995. V. 19. P. 41–62.
6. *Granovsky B., Zeifman, A.* Nonstationary Queues: Estimation of the Rate of Convergence // Queueing Systems. 2004. V. 46. P. 363–388.
7. *Margolius B.* Sample path analysis of the $M_t/M_t/c$ queue // Queueing Systems. 1999. V. 31. P. 59–93.
8. *Massey W. A., Whitt W.* On analysis of the modified offered-load approximation for the nonstationary Erlang loss model // Ann. Appl. Probab. 1994. V. 4. P. 1145–1160.
9. *Zeifman A., Leorato S., Orsingher E., Satin Ya., Shilova G.* Some universal limits for nonhomogeneous birth and death processes // Queueing systems. 2006. V. 52, P. 139–151.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 582–583

УДК 517.529

ОБЛАСТИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ГРУБЫХ СИСТЕМ

© Г. А. Зеленков

mathshell@mail.ru

Морская государственная академия им. Ф. Ф. Ушакова, Новороссийск

В настоящей работе ставится задача об исследовании областей неустойчивости полиномов в пространстве коэффициентов. Этому до сих пор уделялось мало внимания. Будем считать, по определению, что полиномы степени n с вещественными коэффициентами

$$\begin{array}{l}\varphi(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_n s^n \\ a_0 > 0, a_n \neq 0\end{array} \qquad (1)$$

находятся *в классе* (n,k)*-эквивалентности*, если они не имеют нулевых и чисто мнимых корней [1]. Кроме того, в правой полуплоскости находятся с учетом кратностей ровно k корней всех полиномов указанного семейства.

Имеет место следующий критерий.

Теорема 1. *Пусть полином*

$$\varphi(S,q) = a_0(q) + a_1(q)S + \cdots + a_n(q)S^n, q \in Q, Q \in R^m, a_n(q) \neq 0, a_0(q) > 0 \qquad (2)$$

принадлежит классу (n,k)*-эквивалентности при некотором* $q_0 \in Q$, Q *— связно. Тогда семейство* $\varphi(S,q), q \in R^m$ *принадлежит классу* (n,k)*-эквивалентности тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$0 \notin S(\omega) = \{\varphi(j\omega, q) : q \in Q, \omega \in (0, +\infty]\}. \qquad (3)$$

Условие (3) означает, что в R^3 ($S(\omega)$ — сечение) семейство годографов полиномов $\varphi(S,q)$ образует связную трехмерную область, которая при $\omega \to +\infty$ “движется” в направлении угла $\frac{\pi}{2}(n-2k)$, поворачиваясь вокруг оси 0ω и не пересекает эту ось. В отличие от принципа исключения нуля для семейства устойчивых полиномов [2] монотонности и последовательного прохождения октантов (квадрантов на плоскости) для $S(\omega)$ может не быть.

Назовем, по определению, интервальный полином с вещественными коэффициентами

$$\underset{n,k}{\tilde{P}}(s) = \{P(s) = a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n, \underline{a_i} \leq a_i \leq \overline{a_i}, i = \overline{1,n}\} \qquad (4)$$

интервальным полиномом класса (n,k)*-эквивалентности*, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n,k)-эквивалентности.

Пусть для определенности $\underline{a_0} > 0$, $\underline{a_n} > 0$.

Четыре полинома, коэффициенты, которых составлены из крайних значений их интервалов по аналогии с [2] назовем *угловыми полиномами* $\varphi_1(s)$, $\varphi_2(s)$, $\varphi_3(s)$, $\varphi_4(s)$ интервального полинома $\underset{n,k}{\tilde{P}}(s)$.

Точнее:

$$\begin{aligned}\varphi_1(s) &= \underline{a_0} + \underline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots \\ \varphi_2(s) &= \overline{a_0} + \underline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \overline{a_3}s^3 + \dots \\ \varphi_3(s) &= \overline{a_0} + \overline{a_1}s + \underline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \dots \\ \varphi_4(s) &= \underline{a_0} + \overline{a_1}s + \overline{a_2}s^2 + \underline{a_3}s^3 + \dots\end{aligned} \qquad (5)$$

Теорема 2. *Интервальный полином* $\underset{n,k}{\tilde{P}(s)}$ *принадлежит классу* (n,k) *-эквивалентности тогда и только тогда, когда:*

1. Угловые полиномы (5) находятся в классе (n,k) *-эквивалентности.*

2. Для всех вещественных корней полиномов $\underline{U}(\omega), \overline{U}(\omega), \underline{V}(\omega), \overline{V}(\omega)$ *выполняются следующие условия: если* $\underline{U}(\omega) = 0$ *или* $\overline{U}(\omega) = 0$ *, то* $\underline{V}(\omega)\overline{V}(\omega) > 0$; *если* $\underline{V}(\omega) = 0$ *или* $\overline{V}(\omega) = 0$ *, то* $\underline{U}(\omega)\overline{U}(\omega) > 0$, *где*

$$\begin{aligned} \underline{U}(\omega) =& \underline{a_0} - \overline{a_2}\omega^2 + \underline{a_4}\omega^4 - \ldots; \\ \overline{U}(\omega) =& \overline{a_0} - \underline{a_2}\omega^2 + \overline{a_4}\omega^4 - \ldots; \\ \underline{V}(\omega) =& \underline{a_1} - \overline{a_3}\omega^3 + \underline{a_5}\omega^5 - \ldots; \\ \overline{V}(\omega) =& \overline{a_1} - \underline{a_3}\omega^3 + \overline{a_5}\omega^5 - \ldots \end{aligned}$$

Напомним, что $U(\omega)$ и $V(\omega)$ — реальная и мнимая части годографа Михайлова. Доказательство опирается на теорему 1 и критерий Михайлова. Теорема 2 является обобщением известной теоремы Харитонова [2], которая является ее частным случаем при $k = 0$. Следует отметить, что в теореме Харитонова не нужно проверять второе условие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зеленков Г. А., Зубов Н. В., Неронов В. Ф.* Критерии существования выпуклых множеств неустойчивых многочленов // Труды ИСА РАН. 2005. Т. 17, № 1. С. 145–149.
2. *Поляк Б. Т., Щербаков П. С.* Робастная устойчивость и управление. М.: Наука, 2002.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 584–585

УДК 517.9; 519.6

ВЫВОД И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ МЕЛКОЙ ВОДЫ НА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СФЕРЕ

© А. В. Иванова*, А. П. Чупахин**

* njurka2001@ngs.ru, ** chupakhin@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Гидродинамические явления в атмосфере планет характеризуются многообразием их масштабов. При описании крупномасштабных явлений в атмосфере часто используется модель мелкой воды, предполагающая малую глубину слоя жидкости. Обычно при её выводе и использовании применяется приближение — плоскости, при котором часть поверхности сферы заменяется касательной к ней плоскостью. Однако, такое приближение не описывает движений на сфере в целом. Большой интерес к таким движениям в последнее время вызван обнаружением интересных вихревых явлений в атмосферах планет как Солнечной системы, так и расположенных за её пределами.

В работе предлагается вывод уравнений мелкой воды на вращающейся сфере из уравнений Эйлера, описывающих движения идеальной несжимаемой жидкости на вращающейся сфере в поле силы тяжести. Особенностью вывода является отсутствие характерного горизонтального масштаба движения. Малым параметром, по которому ведётся разложение решения, является $\varepsilon = \frac{H_0}{a_0}$, где H_0 — характерный вертикальный масштаб движения, a_0 — радиус сферы (планеты). Система уравнений модели мелкой воды на вращающейся сфере имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&v_t + vv_\theta + (\sin\theta)^{-1} wv_\varphi + F^{-2} h_\theta - w^2 \operatorname{ctg}\theta + 2R_0^{-1} w\cos\theta = 0,\\
&w_t + vw_\theta + (\sin\theta)^{-1} ww_\varphi + F^{-2}(\sin\theta)^{-1} h_\varphi + vw\operatorname{ctg}\theta - 2R_0^{-1} v\cos\theta = 0,\\
&h_t + vh_\theta + (\sin\theta)^{-1} wh_\varphi + (\sin\theta)^{-1} h(v\sin\theta)_\theta + w_\varphi = 0.
\end{aligned}
$$

Движение зависит от двух безразмерных параметров: чисел Россби и Фруда

$$
R_0 = \frac{V_0}{2a_0\Omega_0},\ F = \frac{V_0}{\sqrt{gH_0}},
$$

где V_0 — характерная горизонтальная скорость, g_0 — ускорение свободного падения, а Ω_0 — угловая скорость вращения сферы.

В системе уравнений, записанной в безразмерных переменных, v и w — широтная и долготная компоненты вектора скорости, $h > 0$ — глубина жидкости, $0 < \theta < \pi$ — широта, $0 \le \varphi \le 2\pi$ — долгота.

Особенностью модели является компактность многообразия, на котором определена система уравнений и наличие особенностей поля скоростей. Как и в случае уравнений мелкой воды на плоскости, имеет место газодинамическая аналогия. Уравнения модели совпадают с уравнениями изэнтропической газовой динамики при $\gamma = 2$. Они получаются из общих уравнений вследствие специального интеграла, имеющего вид $\vec{u}\cdot\vec{x} = 0$ и отвечающего отсутствию радиальной компоненты скорости. Найдены преобразования, отвечающие бесконечномерной группе Ли и преобразующие решение стационарных уравнений в другое решение.

Исследованы точные решения уравнений мелкой воды на вращающейся сфере. Важную роль играют стационарные движения вдоль параллелей, определённые с функциональным произволом. Они обобщают постоянные и сдвиговые течения для случая вращающейся сферы. Другой класс стационарных простых волн описывает течения с ненулевой меридиональной компонентой скорости на поверхности сферы в целом. Изучаются решения уравнений мелкой воды на вращающейся сфере под крышкой.

Полученные результаты являются первыми аналитическими исследованиями движений мелкой воды на вращающейся сфере в целом. Аналитические результаты сопровождаются компьютерными расчетами конкретных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05- 01-00080, СО РАН, грант № 2.15.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 586–586

УДК 517.9

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ РЕШЕНИЯ КУБИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА, ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРАМИ СИММЕТРИИ РАЗМЕРНОСТИ ТРИ

© К. К. Измайлова*, А. П. Чупахин**

* `k-iz@yandex.ru`, ** `chupakhin@hydro.nsc.ru`

* *Новосибирский государственный университет, Новосибирск;*
** *Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Нелинейное кубическое уравнение Шредингера (НУШ)

$$\imath\frac{\partial\psi}{\partial t}+\Delta\psi+|\psi|^2\psi=0, \tag{1}$$

где $\Delta=\partial_{xx}+\partial_{yy}+\partial_{zz}$, $\psi=\psi_1+\imath\psi_2$, $|\psi|=\sqrt{\psi_1^2+\psi_2^2}$, имеет многочисленные приложения в математической физике (нелинейная оптика, теория волн, конденсат Бозе – Эйнштейна и другие). Особый интерес представляют многомерные решения уравнения (1), поскольку в этом случае оно не интегрируется методом обратной задачи рассеяния. Такие решения строятся методами группового анализа дифференциальных уравнений [1].

После введения амплитуды A и фазы Φ, так что: $\psi=Ae^{\imath\Phi}$, и разделения мнимой и вещественной частей уравнение (1) приводится к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} -A\dfrac{\partial\Phi}{\partial t}+\Delta A-A|\nabla\Phi|^2+A^3=0,\\ \quad\dfrac{\partial A}{\partial t}+A\Delta\Phi+2(\nabla A,\nabla\Phi)=0. \end{cases} \tag{2}$$

Алгебра симметрии L_{12} и соответствующая ей оптимальная система подалгебр для уравнения Шредингера (1) построены в [2]. Она является центральным расширением алгебры Галилея L_{11}, допускаемой уравнениями газовой динамики [1].

Большой интерес представляют инвариантные подмодели ранга один, для которых фактор-уравнения сводятся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, и частично инвариантные подмодели.

На основе анализа унивессальных инвариантов подалгебр из ΘL_3 доказана

Теорема. *Трехмерные алгебры симметрии НУШ порождают 52 существенно различных подмодели. Среди них 30 инвариантных, из них 27 — ранга один и 3 — ранга два; 22 частично инвариантных, из них 21 — ранга два и 1 — ранга три. Лишней, не инвариантной функцией во всех подмоделях является фаза* Φ.

Несколько подмоделей ранга один рассматривались в работах Патеры и Винтерница, Фущича, Никитина. Большинство инвариантных и все частично инвариантные подмодели являются новыми и порождают точные решения НУШ. Особый интерес для приложений имеют решения, которым отвечают существенно многомерные физические структуры, описываемые НУШ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00080, и СО РАН, грант № 2.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Gagnon L., Winternitz P.* Lie symmetries of a generalised non-linear Schrodinger equation: I. The symmetry group and it subgroups // J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 1493–1511.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 587–588

УДК 550.334

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ 2D ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОРИСТЫХ СРЕД НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА ЛАГЕРРА

© Х. Х. Имомназаров*, А. А. Михайлов

* imom@omzg.sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Пусть полуплоскость $x_2 > 0$ заполнена пористой средой насыщенной жидкостью. Тогда распространение сейсмических волн в данной среде при отсутствии потери энергии описывается следующей начально-краевой задачей [1–3]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{0,s}}\frac{\partial h_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i,$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x_i} = f_i,$$

$$\frac{\partial h_{ik}}{\partial t} + \mu\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) + \left(\lambda - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\right)\delta_{ik} div\vec{u} - \frac{\rho_{0,s}}{\rho_0}K\delta_{ik} div\vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - (K - \alpha\rho_0\rho_{0,s})\, div\vec{u} + \alpha\rho_0\rho_{0,l} div\vec{v} = 0,$$

$$u_i|_{t=0} = v_i|_{t=0} = h_{ik}|_{t=0} = p|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$h_{22} + p|_{x_2=0} = h_{12}|_{x_2=0} = \left.\frac{\rho_{0,l}}{\rho_0}p\right|_{x_2=0} = 0, \tag{3}$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2)$ и $\vec{v} = (v_1, v_2)$ — вектора скорости упругого пористого тела с парциальной плотностью $\rho_{0,s}$ и жидкости с парциальной плотностью $\rho_{0,l}$ соответственно, p — поровое давление, h_{ik} — тензор напряжений, $\vec{f} = (f_1, f_2)$ — вектор массовых сил, $\rho_0 = \rho_{0,l} + \rho_{0,s}$, $\rho_{0,s} = \rho^f_{0,s}(1-d_0)$, $\rho_{0,s} = \rho^f_{0,l}d_0$, $\rho^f_{0,s}$ и $\rho^f_{0,l}$ — физические плотности упругого пористого тела и жидкости соответственно, d_0 — пористость, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ коэффициенты Ламе, $\alpha = \rho_0\alpha_3 + K/\rho_0^2$, $K = \lambda + 2\mu/3$, $\rho_0^3\alpha_3 > 0$ — модуль объемного сжатия жидкой компоненты гетерофазной среды, δ_{ik} — символ Кронекера.

Для решения поставленной задачи (1)–(3) применим интегральное преобразование Лагерра по времени:

$$\overrightarrow{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \overrightarrow{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\alpha/2} l_m^\alpha(ht)d(ht), \tag{4}$$

с формулой обращения

$$\overrightarrow{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\alpha/2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m!}{(m+\alpha)!}\overrightarrow{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht), \tag{5}$$

где $l_m^\alpha(ht)$ — функции Лагерра.

В результате преобразования исходная задача (1)–(3) сводится к двумерной пространственной дифференциальной задаче в спектральной области [4, 5]. Для решения данной задачи

применяется конечно-разностная аппроксимация производных по двум пространственным координатам на сдвинутых сетках с 4-ым порядком точности. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый метод решения можно рассматривать как аналог известного спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, только вместо частоты ω мы имеем параметр m — степень полиномов Лагерра. Однако, в отличие от Фурье, применение интегрального преобразования Лагерра по времени позволяет свести исходную задачу к решению системы уравнений, в которой параметр разделения m присутствует только в правой части уравнений и имеет рекуррентную зависимость. В результате, матрица системы сведённой задачи имеет хорошую обусловленность, что позволяет использовать быстрые методы решения систем линейных алгебраических уравнений на основе итерационных методов, типа сопряжённых градиентов, сходящиеся к решению с требуемой точностью всего за несколько итераций. На этом этапе проведения вычислений была реализована распараллеленная версия метода сопряженных градиентов. На уровне входных данных, при задании модели среды, это равносильно декомпозиции исходной области на множество подобластей, равных количеству процессоров. Это дает возможность распределения памяти, как при задании входных параметров модели, так и при дальнейшей численной реализации алгоритма в подобластях.

В докладе представлены численные результаты моделирования сейсмических волновых полей для тестовых моделей среды, полученные в результате проведённых расчётов на многопроцессорном вычислительном комплексе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 06-05-65110), проекты РАН № 16.12 и СО РАН № 1.6, 42, а также грантом Фонда содействия отечественной науке ("Доктора наук РАН").

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В., Роменский Е. И.* Волновые процессы в насыщенных пористых упругодеформируемых средах // Физика горения и взрыва. 1993. № 1. С. 100–111.
2. *Blokhin A. M., Dorovsky V. N.* Mathematical Modelling in the Theory of Multivelocity Continuum. Nova Science, New York, 1995.
3. *Imomnazarov Kh. Kh.* A Mathematical Model for the Movement of a Conducting Liquid Through a Conducting Porous Medium: I. Excitation of Oscilations of the Magnetic Field by the Surface Rayleigh Wave // Math. Comput. Modelling. 1996. V. 24, N 1. P. 79–84.
4. *Konyukh G. V., Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A.* Application of the integral Laguerre transforms for forward seismic modeling // Journal of Computational Acoustics. 2001. V. 9, N 4. P. 1523–1541.
5. *Михайлов А. А.* Моделирование сейсмических полей для 2.5D неоднородных вязкоупругих сред // Труды международной конференции Математические методы в геофизике – ММГ 2003. Новосибирск, 2003. Часть 1. С. 146–152.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 589–589

УДК 519.24

РЕШЕНИЕ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗРЫВНЫМ МЕТОДОМ ГАЛЕРКИНА

© Н. Б. Иткина

shurina@online.sinor.ru

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Прикладные задачи, в которых присутствует конвективный перенос, встречаются в таких областях как метеорология, океанография, нефтеразведка и т. д. Такое многообразие прикладных задач приводит к постоянному повышению требований к точности и эффективности численных методов, используемых при решении конвективно-диффузионных уравнений. Разработка устойчивых и эффективных численных методов — это нетривиальная задача по двум причинам: 1) точное решение нелинейной задачи конвекции может быть разрывным; 2) в окрестности разрывов структура решения достаточно сложная. Поэтому предлагаемые вычислительные методы должны быть адекватны данным проблемам, т. е. они должны гарантировать, что разрывы численного решения будут физически релевантны, и что в окрестности разрывов решения не будут появляться нефизичные осцилляции. Эти трудности достаточно успешно преодолеваются с помощью развивающихся устойчивых конечно разностных и конечно объемных схем высокого порядка. Поскольку разрывный метод Галеркина (DG-метод) позволяет получать аппроксимации разрывных решений, используя идею численных потоков и ограничителей крутизны, применяющихся в конечно разностных и конечно объемных схемах, то его можно рассматривать как некоторое обобщение конечно объемных методов. В данном случае численные потоки — это специальные операторы следа на границе конечного элемента, а ограничители крутизны — операторы, обеспечивающие повышение устойчивости метода. Именно эти дополнения призваны обеспечивать сходимость численного решения к физически релевантному решению без осцилляций вблизи разрывов. Благодаря своей конечно элементной структуре DG-метод имеет ряд преимуществ: 1) разрывный метод Галеркина хорошо приспособлен для локальных сгущений сетки и для локального повышения порядков базисных функций; 2) DG-метод удобен для работы со сложными и геометрически разнородными областями.

В настоящее время можно определить два основных подхода к построению DG-вычислительных схем для решения задач конвекции-диффузии. Первый подход основан на определении численного решения в пространстве кусочно-полиномиальных функций не выше заданной степени, при этом слабая вариационная постановка выписывается для исходного дифференциального уравнения второго порядка в соответствии с введенным в данном пространстве скалярным произведением. Роль численных потоков играют градиентные функции от решения [1]. Второй подход предусматривает переход от дифференциального уравнения второго порядка к системе дифференциальных уравнений первого порядка [2] и применение стандартного DG-метода для решения уравнений первого порядка.

Рассматриваются вариационные формулировки для первого и второго случаев, проводится сравнительный анализ полученных вычислительных схем на решении модельных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Cocburn B., Karniadakis G. E., and Shu C.-W.* Discontinuous Galerkin methods. Lecture notes in computational science and engineering. Springer Verlag, 2000.
2. *Bassi F., Rebay S.* High-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier – Stokes equations // Journal of Computational Physics. 1997. V. 131. P. 267–279.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 590–591

УДК 519.7

КРИТЕРИИ СВОЙСТВА ДОСТИЖИМОСТИ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© А. И. Кадченко

kadchenko@masu.ru

Магнитогорский государственный университет, Магнитогорск

Математическое моделирование динамических систем различной природы требует совершенствования и разработки новых средств анализа качественных характеристик процессов в исследуемых системах. В [1] предложен метод редукции, развивающий алгоритмы вывода теорем метода векторных функций Ляпунова. Он позволяет формализовать независимо от предметной области определенную технику получения гипотез. Для применимости метода к логическому уравнению

$$\mathcal{X} \,\&\, \left(\mathop{\&}_{i=1}^{k} A_i\right) \to B, \tag{1}$$

требуется лишь существование у A_i и B изоморфного надграфа. Одно из условий A_i есть условие связи.Оно может иметь разнообразный смысл, но обязательно связывает поведение некоторых отображений v типа векторных функций сравнения на процессах исходной и вспомогательных систем. Целесообразно выявление новых возможностей использования условий связи.

Пусть заданы непустые множества X (абстрактное пространство *состояний* x), $X_0 \subseteq X$ (X_0 — множество *начальных состояний* x_0), $X^* \subseteq X$ (X^* — множество *целевых состояний*), X^1 (X^1 — множество *фазовых ограничений*), T (множество *моментов времени* t, *частично упорядоченное* отношением нестрогого порядка $\geq$), $T_0 \subseteq T$ (T_0 — множество *начальных моментов времени* t_0), $H \subseteq T_0 \times X_0 \times \mathcal{U}$ (H — множество *исходных данных* h, $h \in H$, $h = (t_0, \mathrm{x}_0, u_0)$, $t_0 \in T_0$, $\mathrm{x}_0 \in X_0$, $u_0 \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U}$ -множество *допустимых управлений* u_0). Кроме того, обозначается $T_{t_i} =^{df} \{t \in T : t \geq t_i\}$.

Рассматривается множество $X^{(T)}$ всех частичных функций $x : (T) \to X$, именуемых *движениями* . *Системой движений* (СД) называется отношение $r \subset H \times X^{(T)}$ с аксиомой $\forall h \in H : h = (t_0, \mathrm{x}_0, \dots)\ \forall x \in rh \quad t_0 \in \operatorname{dom} x$. В *абстрактной управляемой системе* выполнена и аксиома: при каждом фиксированном h, $h = (t_0, \mathrm{x}_0, u_0)$, $\forall x \in rh \quad x(t_0) = \mathrm{x}_0.$

В системе движений r с управлениями рассмотрим некоторые свойство достижимости целевого множества X^* из любого начального состояния $\mathrm{x}_0 \in X_0$ с соблюдением фазовых ограничений $x(t, t_0, \mathrm{x}_0, u_0) \in X^1$ до момента попадания в X^*, а именно:

$$B =^{df} \forall t_0 \in T_0\ \exists u_0 \in \mathcal{U}\ \forall \mathrm{x}_0 \in X_0\ \forall x \in r(t_0, \mathrm{x}_0, u_0)\ \exists t \geq t_0\ \exists \mathrm{x} = x(t)$$

$$(\mathrm{x} \in X^* \,\&\, \forall t' \in T : t' \geq t_0 \,\&\, t \geq t'\ \forall \mathrm{x}' = x(t') \quad \mathrm{x}' \in X^1). \tag{2}$$

Исходной системе движений r поставим в соответствие вспомогательную систему движений r_c, по замыслу более простую для анализа, чем исходная система. Обозначения всех множеств СД r_c отличаются только наличием индекса “c” от обозначений множеств СД r. Будем считать $T_{0c} = T_0$, $T_c = T$, $H_c \subseteq T_0 \times X_{0c}$ (система движений r_c без управлений), а X_c частично упорядочено отношением $\leq$. Пусть в системе движений r_c имеется свойство диссипативности множества X_c^* с фазовыми ограничениями X_c^1:

$$A_1 =^{df} \forall t_0 \in T_0\ \forall \mathrm{x}_{0c} \in X_{0c}\ \forall x_c \in r_c(t_0, \mathrm{x}_{0c})\ \exists t_{1c} \in T :\ t_{1c} \geq t_0\ \forall t \geq t_{1c}$$

$$\forall \mathrm{x}_c = x_c(t_c)(\mathrm{x}_c \in X_c^* \,\&\, \forall t' \in T : t' \geq t_0 \,\&\, t \geq t'\ \forall \mathrm{x}_c' = x_c(t') \quad \mathrm{x}_c' \in X_c^1).$$

Условие связи систем СД r и СД r_c выберем двумя способами.

1. Введем функцию $v : T \times X \to X_c$, которую подчиним условию связи:

$$A_2 =^{df} \forall t_0 \in T_0\ \exists u_0 \in \mathcal{U}\ \forall \mathrm{x}_0 \in X_0\ \forall \mathrm{x}_{0c} \in X_{0c} : v(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_{0c}$$

$$\forall x \in r(t_0, \mathrm{x}_0, u_0)\ \exists x_c \in r_c(t_0, \mathrm{x}_{0c})\ \forall t \geq t_0\ \exists \mathrm{x}_c = x_c(t)\ \forall \mathrm{x} = x(t)$$

$$(v(t, \mathrm{x}) \leq \mathrm{x}_c\ \&\ \forall t' \in T : t' \geq t_0\ \&\ t \geq t' \quad \forall \mathrm{x}' = x(t')\ \forall \mathrm{x}'_c = x_c(t') v(t', \mathrm{x}') \leq \mathrm{x}'_c).$$

Пользуясь алгоритмом решения согласованного уравнения $\mathcal{X} \& A_1 \& A_2 \Rightarrow B$, в котором все члены уравнения имеют степень $N = 2$, найдем $\mathcal{X}$. Полученное решение $\mathcal{X}$ допускает расщепление на конъюнкцию более простых условий, что приводит к получению набора достаточных условий для B.

Теорема 1. *В управляемой СД r имеет место свойство B, если существуют СД r_c без управлений при наличии свойства A_1 и функция v такие, что удовлетворяется условие связи типа мажорирования A_2 и выполнены условия:*

1) $v(T_0 \times X_0) \subseteq X_{0c}$;
2) *для любых* $(t_0, \mathrm{x}_0) \in T_0 \times X_0,\ u_0 \in \mathcal{U}$ *решения* $x \in r(t_0, \mathrm{x}_0, u_0)$ *продолжимы на* T_{t_0};
3) $\inf\{v(t, x) : t \in \bigcup\limits_{t_0 \in T_0} T_{t_0}, \mathrm{x} \in X \backslash X^*\} \not\leq \sup\limits_{\mathrm{x}_c \in X^*_c} \mathrm{x}_c$;
4) *для любых* $t_0 \in T_0,\ \mathrm{x}_{0c} \in v(t_0, X_0)$ *решения* $x_c \in r_c(t_0, \mathrm{x}_{0c})$ *продолжимы на* T_{t_0};
5) $\inf\{v(t, x) : t \in \bigcup\limits_{t_0 \in T_0} T_{t_0}, \mathrm{x} \in X \backslash X^1\} \not\leq \sup\limits_{\mathrm{x}_c \in X^1_c} \mathrm{x}_c$.

2. Для функции $v : T \times X \to X_c$ введем новое условие связи A_3:

$$A_3 =^{df} \forall t_0 \in T_0\ \exists u_0 \in \mathcal{U}\ \forall \mathrm{x}_0 \in X_0\ \forall \mathrm{x}_{0c} \in X_{0c} : v(t_0, \mathrm{x}_0) = \mathrm{x}_{0c}$$

$$\forall x \in r(t_0, \mathrm{x}_0, u_0)\ \exists x_c \in r_c(t_0, \mathrm{x}_{0c})\ \forall t \geq t_0\ \exists \mathrm{x}_c = x_c(t)\ \forall \mathrm{x} = x(t)$$

$$(v(t, \mathrm{x}) = \mathrm{x}_c\ \&\ \forall t' \in T : t' \geq t_0\ \&\ t \geq t' \quad \forall \mathrm{x}' = x(t')\ \forall \mathrm{x}'_c = x_c(t') v(t', \mathrm{x}') = \mathrm{x}'_c).$$

Методом редукции, пользуясь согласованностью уравнения $\mathcal{X} \& A_1 \& A_3 \Rightarrow B$, получим утверждение.

Теорема 2. *В управляемой СД r имеет место свойство B, если существуют СД r_c без управлений при наличии свойства A_1 и функция v такие, что удовлетворяется условие связи типа траекторного гомоморфизма A_3 и выполнены условия:*

1) $v(T_0 \times X_0) \subseteq X_{0c}$;
2) *для любых* $(t_0, \mathrm{x}_0) \in T_0 \times X_0,\ u_0 \in \mathcal{U}$ *решения* $x \in r(t_0, \mathrm{x}_0, u_0)$ *продолжимы на* T_{t_0};
3) *для любых* $t \in T_{t_0}$ $v(t, X \backslash X^*) \subseteq X_c \backslash X^*_c$;
4) *для любых* $t_0 \in T_0,\ \mathrm{x}_{0c} \in v(t_0, X_0)$ *решения* $x_c \in r_c(t_0, \mathrm{x}_{0c})$ *продолжимы на* T_{t_0};
5) *для любых* $t \in T_{t_0}$ $v(t, X \backslash X^1) \subseteq X_c \backslash X^1_c$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев С. Н.* Метод редукции и качественный анализ динамических систем. I, II // Изв. РАН, сер. Теория и системы управления. 2006. № 1, 2.

УДК 517.957+514.752

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ УСЛОВИЯ ДЕЛОНЕ

© В. А. Клячин

klchnv@mail.ru

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Настоящая заметка посвящена попытке найти условие, аналогичное условию Делоне для постоения триангуляций поверхностей в евклидовом пространтсве, а так же триангуляции в пространствах Финслера. Классическое условие непустоты сферы гласит, что описанная сфера вокруг n-мерного симплекса не содержит вершин других симплексов из данного набора триангуляции [1]. В основе алгоритмов построения триангуляции с условем Делоне лежит теорема о непустоте сферы. Это теорема утверждает, что локальное выполнение условия Делоне влечет выполнение глобального условия. Другими словами, если для двух симплексов триангуляции, имеющих общую $(n-1)$-мерную грань, описанные сферы не содержат вершин, противолежащих данной $(n-1)$-мерной грани, то это справедливо и для произвольных двух симплексов триангуляции. В данной работе мы даем условие на семейство выпуклых множеств, для которых справедливо аналогичное утверждение, т. е. условие, при выполнении которого из локального свойства вытекает глобальное.

Рассмотрим в R^n семейство выпуклых множеств $F(x,r)$, $x \in R^n$, $r \in R$, и множество точек $\{P_i\}_{i=0}^N$, расположенных в некоторой области $D \subset R^n$.

Пусть S — произвольный невырожденный симплекс. Определим описанное множество (если оно существует) $F(S)$ из семейства $F(x,r)$ как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а, значит, $F(S)$ содержит весь симплекс в силу выпуклости $F(x,r)$).

Условие α. Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек $\{P_i\}$. Будем говорить, что триангуляция *равномерна относительно семейства* $F(x,r)$, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $F(S)$ не содержит вершин других симплексов.

Условие β. Рассмотрим произвольную триангуляцию множества точек $\{P_i\}$. Будем говорить, что триангуляция *локально равномерна относительно семейства* $F(x,r)$, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность множества $F(S)$ не содержит вершин других симплексов, имеющих общую $(n-1)$-мерную грань.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства выпуклых множеств $F(x,r)$ из локальной равномерности следовала глобальная равномерность достаточно, чтобы указанное семейство обладало свойством: для любого симплекса S существовало и было единственным описанное множество $F(S)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Делоне Б. П.* О пустой сфере. К мемуару Георгия Вороного. Перевод с фр. А. Ю. Игумнов // В сб. Записки семинара “Сверхмедленные процессы”. Изд-во ВолГУ, 2006. Выпуск 1. С. 147–153.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 593–594

УДК 532.546:550.820.7

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ИССЛЕДОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ПРОНИКНОВЕНИЯ И В МЕТОДАХ СКВАЖИННОГО ЗОНДИРОВАНИЯ ПЛАСТОВ

© Н. К. Корсакова[*]**, В. И. Пеньковский**

[*] kors@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Обсуждаются математические модели, описывающие влияние состояния пристводьной зоны эксплуатационных скважин на основные параметры нефте-газодобычи. В процессе бурения скважины на водном глинистом растворе под действием избыточного давления (репрессии) водный фильтрат проникает в продуктивный пласт, значительно изменяя водно-физические свойства зоны проникновения [1]. Водное "загрязнение" приствольной зоны приводит к существенному снижению ее проводимости в отношении притока полезного продукта. При вызове притока (депрессии) попавшая в пласт водная фаза вытесняется не полностью. Из-за концевого эффекта капиллярного запирания дебит скважины устанавливается на уровне гораздо ниже прогнозного. Отношение η дебита частично затампонированной скважины к максимально возможному дебиту выражается формулой

$$\eta = I(s_0)/[\varphi(s_0)f(s_0)]\,.$$

Здесь $I(s_0)=\int_0^{s_0} f(s)\,d\varphi(s)$, $f(s_0)$ — относительная фазовая проницаемость для нефти, s_0 — исходная нефтенасыщенность пласта. Аналогичный режим капиллярного запирания может устанавливаться естественным образом с течением времени эксплуатации скважины из-за депрессионного вовлечения в движение содержащейся в пласте природной воды. То же можно сказать относительно причин снижения эффективности притока полезного продукта к трещинам гидроразрыва пласта.

Для получения оценок кинетики коркообразования, проникновения фильтрата бурового раствора в нефтяной пласт, изменения насыщенности и минерализации водной фазы необходим анализ взаимосвязи гидравлических и фильтрационных процессов, протекающих при бурении в системе скважина-пласт. В построеннной математической модели система уравнений состоит из уравнения кинетики коркообразования, уравнений движений глинистого раствора в затрубном пространстве скважины, проникновения фильтрата в пласт, уравнения обмена солями в водных растворах. Результаты расчетов позволяют оценить изменение основных водно-физических характеристик зоны проникновения, примыкающей к скважине.

Имеющиеся оценки показывают, что некоторого улучшения фильтрационных свойств породы можно добиться очисткой приствольной зоны пласта от водной фазы путем ее гидрофобизации, кислотной обработки или импульсным вибровоздействием. Известно, что, благодаря вязкостной неустойчивости вытеснения несмешивающихся фаз, при добыче нефти с применением нагнетающих воду скважин в пласте возникают языки воды, опережающие некоторый средний фронт вытеснения. Как показывают эксперименты, прорыв таких языков происходит быстрее к уже частично затампонированных водой добывающим скважинам. Образующийся при этом своеобразный "водопровод" резко снижает эффективность работы скважины, и ее эксплуатация быстро становится нерентабельной.

Процесс "пальцеобразования" и обводнения эксплуатационной скважины может быть еще более значительным в случае, когда нефтяной пласт содержит некоторое количество свободного газа. В этом случае вода прорывается значительно быстрее из-за высокой подвижности

(произведения отношения вязкости воды к вязкости газа на относительную фазовую проницаемость пористой среды) газовой фазы.

Кроме этого, распространение языков воды в пласте происходит зачастую поперек основного направления потока фаз. Это приводит к образованию замкнутых областей невытесненой нефти — целикам. Такие замкнутые образования в определенных условиях, зависящих от их характерных размеров и действующих градиентов вытеснения, могут, благодаря так называемому эффекту внутреннего капиллярного запирания, как угодно долго находиться неподвижными в динамическом равновесии с общим фильтрационным потоком. По известным средним градиентам вытеснения можно оценить размеры вероятных замкнутых включений и величину нефтеотдачи пласта. В некоторых случаях критерий предельного динамического равновесия включения с потоком водной фазы имеет простой вид. Так в случае одномерного движения он выражается неравенством

$$\lambda \leq \lambda_{max},$$

где $\lambda = di_0/p_k^0$, d и p_k^0 — характерные величины целика и капиллярного давления (в м. столба воды), i_0 — градиент давления в набегающем потоке, $\lambda_{max} = 8/15$.

Методом конечных элементов решен ряд задач плоской фильтрации по обтеканию целиков нефти произвольной формы.

Подробное исследование перераспределения несмешивающихся фаз в прискважинной зоне позволяет установить пространственное поле удельного электрического сопротивления [2]. Эти результаты используются в предложенном методе интерпретации данных скважинного электрокаротажа пластов с помощью техники ВИКИЗ (высокочастотного индукционного каротажного изопараметрического зондирования).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данаев Н. Т., Корсакова Н. К., Пеньковский В. И.* Массоперенос в прискважинной зоне и электромагнитный каротаж пластов. Алматы: Казак. университетi, 2005. 180 с.
2. *Корсакова Н. К., Пеньковский В. И.* Электромагнитное зондирование пластов // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 6. С. 65–71.

УДК 517.4

ОБОБЩЕННЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

© М. В. Куркина

mavi@inbox.ru

Югорский государственный университет, Ханты-Мансийск

Метод динамического программирования решения многошаговых оптимизационных задач распадается на попятную и прямую процедуру. Попятная процедура состоит в последовательном вычислении (начиная с последнего шага) оптимизируемой функции и функций, определяющих оптимальное управление. Фактически попятная процедура сводится к построению траектории достаточно сложно определенной дискретной динамической системы в некотором бесконечномерном функциональном пространстве. Это построение, как правило, является трудоемкой вычислительной процедурой в связи с необходимостью хранения в процессе счета большого числа табулированных функций многих переменных. Для преодоления этих трудностей были предложены различные вычислительные методы позволяющие уменьшить объем вычислений и потребность в памяти. Другим способом преодоления этих трудностей является выделение таких классов задач, решение которых допускает редукцию к конечномерным пространствам, построение аналитических решений или хотя бы их аналитическое исследование. В известных монографиях Р. Беллмана "Динамическое программирование", Р. Беллмана и С. Дрейфуса "Прикладные задачи динамического программирования" приведены примеры подобных задач динамического программирования. В работах [1–5] были построены примеры задач динамического линейного распределения ресурсов, решение которых сводилось к исследованию траекторий некоторых, эффективно определяемых, дискретных динамических систем на прямой или конечномерном пространстве. Динамические системы определялась в результате решения функциональных уравнений Беллмана. Как следствие алгоритм решения таких задач динамического распределения ресурсов на ЭВМ существенно упрощается, возникает возможность аналитического исследования поведения решения.

Работа поддержана грантом НШ-8526.2006.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Славская М. В.* Многомерная линейная модель распределения ресурсов с ограничениями // Вестник БГПУ. Барнаул, 2001. № 1. С. 41–44.
2. *Славская М. В.* Бесконечномерный аналог многомерной линейной модели распределения ресурсов с ограничениями // Тр. рубцовского индустр. инст. Рубцовск, 2001. № 9. С. 11–19.
3. *Славская М. В.* Линейная модель распределения ресурсов с равномерным распределением параметров // Вестник БГПУ. Барнаул, 2002. № 2. С. 6.
4. *Славская М. В.* Динамическая линейная модель ресурсов с равномерным распределением параметров // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 34-й региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2003. С. 6
5. *Куркина М. В.* Динамическая система связанная с линейной задачей распределения ресурсов // Доклады РАН. 2005. Т. 401, № 3. С. 3.

УДК 539.5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВЫСОКОСКОРОСТНОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

© В. Т. Курохтин

vkt54@rambler.ru

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва

Результаты экспериментов [1] показывают наличие вихревых движений в зоне контакта, образующихся при соударении медных образцов при относительных скоростях соударения от 200 м/сек до 500 м/сек. Эти данные подтверждают гипотезу, сформулированную автором в [2], о появлении вихрей в процессе импульсного деформирования и делают актуальным построение математической модели данного процесса. Автором отмечалось также большое сходство феномена возникновения вихрей при высокоскоростном ударе с явлением турбулентности, описанным А. Н. Колмогоровым в [3]. Такой подход ведет к отказу от детерминизма, свойственного механике деформируемого твердого тела. Приходится также отказаться от представления вектора перемещения в виде непрерывной вектор-функции времени и начальных данных. Следуя Е.Оровану [4], автор предлагает отказаться от уравнения состояния в виде функции напряжения от деформации. Вместо такого уравнения предлагается использовать зависимость скорости деформации, поглощаемой в процессе деформирования. Поэтому начальное условие в математической постановке задачи логичнее задавать как некоторую известную функцию энергии, выделяемой в зоне контакта взаимодействующих тел, от времени. Подобный подход использовался Л. И. Седовым [5] при решении задачи о сильном взрыве. В работах А. Н. Колмогорова [3] и Л. Д. Ландау [6] отмечено,что энергия диссипации при турбулентности пропорциональна коэффициенту вязкости жидкости. Но ,в отличии от движения жидкости,процесс импульсного упругопластического деформирования обусловлен лавинообразным ростом дефектов кристаллической решетки. Данное явление ведет к образованию полос поверхностей скольжения и также требует энергетической подпитки. Поэтому при построении модели упругопластического деформирования предлагается ввести кроме параметра, аналогичного коэффициенту вязкости, второй параметр, характеризующий диссипацию энергии в связи с трансформацией кристаллической решетки. В качестве примера приводится математическая постановка задачи о распространении упругопластических волн сдвига в массивном стержне круглого сечения с учетом процесса диссипации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Meshcheryakov Yu. I., Zhigcyeva N. I., Divakov A. K., Makarevich I. P., Razorenov S. V.* Turbulizanijn of Danamic straining // International conference Shock waves in condenced matter. S. Peterburg, 2006. P. 196–201.
2. *Курохтин В. Т.* Некоторые концептуальные положения высокоскоростного упругопластического деформирования реального тела // V Международный научный симпозиум Современные проблемы прочности, пластичности и устойчивости. Тверь, 2000. С. 26–27.
3. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // ДАН СССР. 1941. Т. 30, № 4. С. 299–303.
4. *Orovan E.* Problems of Plastic gliding // Proceeding Phys. Society. 1940. V. 52. P. 8–22.
5. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М: Наука, 1977.
6. *Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Гидродинамика. М: Наука, 1988.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 597–598

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА РАЗРУШЕНИЯ ПОЛОСЫ С V-ОБРАЗНЫМИ ВЫРЕЗАМИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ

© А. Ю. Лошманов

loshmanov@kmscom.ru

Институт машиноведения и металлургии ДВО РАН, Комсомольск-на-Амуре

Растяжение полосы с разрушением в рамках теории идеального жесткопластического тела рассматривалось в работе [1]. При этом наибольшие деформации материала наблюдались в окрестности вершин вырезов, являющихся особенностью поля скоростей перемещений (центр веера линий скольжения). Ниже рассматривается задача о разрушении полосы с V-образными вырезами при растяжении, когда деформации материала, обуславливающие разрушение, накапливаются в материале в окрестности другой особенности поля скоростей перемещений — на линиях разрыва скоростей перемещений.

В качестве меры деформации в работе принято первое главное значение E_1 тензора конечных деформаций Альманси E_{ij} .

В работе принят критерий разрушения материала: *разрушение материала наступает, когда максимальная деформация в вершине трещины достигает предельной величины* E_* , и критерий выбора направления равзития трещины: $\mathbf{m} = \mathbf{e_2}$ или $\mathbf{m} \cdot \mathbf{e_1} = 0$, то есть *направление развития разрушения ортогонально первому главному направлению тензора конечных деформаций Альманси* [1].

Пусть в начальный момент времени поле линий скольжения и поле скоростей перемещений в пластической области соответствуют несимметричному решению задачи о растяжении полосы с V-образными вырезами без разрушения [1]. Предположим при этом, что деформации материала достигают своего критического значения E_* в окрестности точки E – точка пересечения линий разрыва. В этом случае трещина начинает развиваться из точки внутри материала.

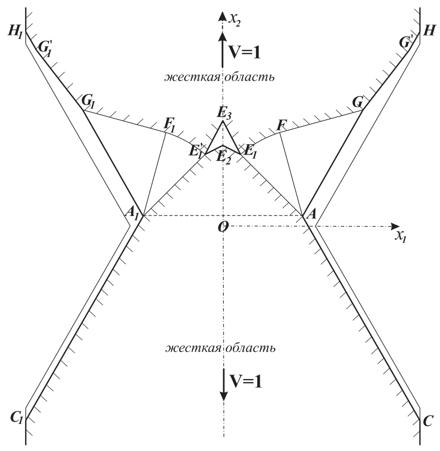


Рис. 1. АД31, профиль закаленный и искусственно состаренный, $E_* = 0.364$.

Следует отметить, что в данной постановке задачи максимальные деформации (E_1) ограничиваются определенной величиной E_* , являющейся константой разрушения материала [2], то есть учитываются механические свойства материала. На рис. 1, 2 показаны полосы из разных материалов, в которых в процессе растяжения зародились внутренние трещины различной формы.

Наибольшие деформации материал получает как на линиях разрыва поля скоростей перемещений внутри полосы, так и в окрестности угловых точек вырезов (центры вееров линий скольжения). Поэтому возможно построение других пластических течений процесса разрушения полосы с V-образными вырезами при растяжении [3].

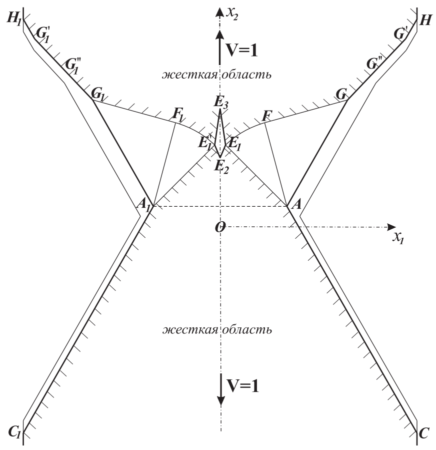


Рис. 2. АК8, профиль, $E_* = 0.129$.

Полученные поля деформаций и алгоритмы, моделирующие процессы разрушения полосы, могут быть использованы при анализе поведения элементов конструкций при больших пластических деформациях, а также в условиях экстремальных ситуаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хромов А. И., Буханько А. А., Степанов С. Л.* Концентраторы деформаций // Доклады РАН. 2006. Т. 407, № 6. С. 777–781.
2. *Хромов А. И., Буханько А. А., Козлова О. В., Степанов С. Л.* Пластические константы разрушения // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 2. С. 147–155.
3. *Лошманов А. Ю.* Математическое моделирование процесса распространения трещины в полосе с V-образными вырезами // Математическое моделирование в естественных науках: сборник тезисов 15-й Всероссийской конференции молодых ученых. Пермь, 2006. С. 56–57.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 599–599

УДК 533.72

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ МАКСВЕЛЛА О ТЕПЛОВОМ СКОЛЬЖЕНИИ ДЛЯ КВАНТОВЫХ БОЗЕ-ГАЗОВ

© Н. Н. Любимова

natlove@inbox.ru

Московский государственный областной университет, Москва

В настоящее время изучение влияния квантовых эффектов на кинетические процессы в нейтральных и разреженных газах является предметом растущего научного интереса. Имеется ряд исследований посвященных данной проблеме (см., например, работы [1, 2]).

В предлагаемой работе получено аналитическое решение граничной задачи для кинетического уравнения, описывающее поведение квантовых бозе-газов в задаче о тепловом скольжении вдоль плоской поверхности.

Задача о тепловом скольжении газа при условии полного диффузного отражения бозе-частиц от стенки состоит в решении уравнения

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\mu,\alpha)\psi(x,\mu,\alpha)d\mu,$$

где

$$K(\mu,\alpha)=\frac{\ln[1-\exp(\alpha-\mu^2)]}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln[1-\exp(\alpha-\mu^2)]d\mu}.$$

с граничными условиями:

$$\psi(0,\mu,\alpha)=0,\quad \mu>0,$$

$$\psi(x,\mu,\alpha)=2U_0(\alpha)-g_T(\mu^2-\frac{\delta(\alpha)}{2}),\quad x\to+\infty,\quad \mu<0,$$

g_T — относительный градиент температуры.

Точное решение задачи Максвелла о тепловом скольжении получается в виде разложения по собственным сингулярным обобщенным функциям соответствующего характеристического уравнения. Это разложение сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Последнее приводится к краевой задаче Римана теории функций комплексного переменного. Сначала решается соответствующая однородная краевая задача, затем — неоднородная. Решение последней находится в классе мероморфных функций. Условия разрешимости и формулы Сохоцкого позволяют найти все неизвестные коэффициенты разложения решения исходной граничной задачи и записать это решение в виде:

$$\frac{\psi(x,\mu,\alpha)}{g_T}=\frac{1}{2}V_1^2+V_2-\mu^2+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\exp(-\frac{x}{\eta})\frac{(V_1+\eta)\sin\tau(\mu)}{X(\mu)}\frac{d\eta}{\eta-\mu}+$$
$$+\frac{(V_1+\mu)cos\tau(\mu)}{X(\mu)}H_+(\mu)\exp(-\frac{x}{\eta}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Построение модельного уравнения переноса безмассового бозе-газа и его точное решение // Теор. и матем. физика. 1997. Т. 111, № 3. С. 462–472.
2. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Граничные задачи для квантового бозе-газа // Известия вузов. Сер. Физика. 2002. № 6. С. 51–56.

УДК 532.59

ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ В ВОЛНОВЫХ СПЕКТРАХ

© Н. И. Макаренко*, Ж. Л. Мальцева

* makarenko@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматривается задача о внутренних стационарных волнах в двухслойной слабостратифицированной жидкости. В работе охарактеризованы спектральные свойства уравнений малых возмущений однородного кусочно-постоянного течения. С помощью разложения по малому параметру Буссинеска получено нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее уединенные волны и плавные боры на границе раздела слоев.

Общепринятой моделью волновых движений в стратифицированной жидкости с тонким пикноклином является модель с плотностью, постоянной в каждом из слоев и имеющей скачок на поверхности раздела. Нелинейные возмущения типа внутренних уединенных волн конечной амплитуды на границе раздела приближенно описываются квадратурами обыкновенного дифференциального уравнения, в общем случае полученного Л. В. Овсянниковым ([1, гл. 1, формула (10.4)]), а в случае отсутствия скачка скорости на границе раздела в невозмущенном течении — М. Миятой [2]. Указанная приближенная модель имеет очень хорошую точность вплоть до волновых амплитуд, сравнимых с толщинами слоев.

В данной работе рассматривается ситуация, когда в одном из слоев дополнительно имеется экспоненциальная стратификация по плотности. Ее наличие приводит к ряду интересных особенностей, связанных с появлением пограничных слоев в длинноволновой части спектра вследствие сингулярного поведения дисперсионного соотношения в пределе слабой стратификации. Показано, что эти пограничные слои играют существенную роль в предельном переходе в нелинейной задаче от непрерывной стратификации к кусочно-постоянной. Используемый асимптотический метод сочетает в себе подход, предложенный Л. В. Овсянниковым для двухслойной жидкости, с методом разложения по малому параметру Буссинеска, развитым в [3] для задачи с непрерывной стратификацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-05-64460), Интеграционного проекта СО РАН № 2006-113 и программы “Ведущие научные школы” (грант НШ 5245.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.* Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 320 с.
2. *Miyata M.* An internal solitary wave of large amplitude // La Mer. 1985. V. 23, N 2. P. 43–48.
3. *Benney D. J., Ko D. R. S.* The propagation of long large amplitude internal waves // Stud. Appl. Math. 1978. V. 59. P. 187–199.

УДК 539.30

СОВМЕСТНОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОДНО- И МНОГОСЕТОЧНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

© А. Д. Матвеев

mtv@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

Как известно, при анализе композитов используются микро- и макроподходы. В основе макроподхода лежат гипотезы, накладывающие определенные ограничения на поля перемещений, деформаций и напряжений, что порождает неустранимую погрешность в решениях. Кроме того, возникают трудности при реализации макроподхода в случае исследования композитов сложной формы. Это связано с тем, что в окрестности границы сложной формы, частично или полностью закрепленной, гипотезы не выполняются. Микроподход дает возможность точно описывать поведение композитов сложной формы. Однако, анализ композитов с учетом их структуры сводится к построению дискретных базовых моделей высокого порядка, что создает проблемы в реализации метода конечных элементов.

В данной работе показано совместное применение одно- и многосеточного моделирования для двумерных упругих композитов сложной формы. Предлагаемое моделирование порождает дискретные модели, которые состоят из однородных известных односеточных квадратных конечных элементов (КЭ) первого порядка и многоугольных композитных многосеточных конечных элементов (КМнКЭ) [1]. Подобласть композита, включающая границу крепления или границу сложной формы, представляется односеточными КЭ первого порядка, которые учитывают форму области и композитную структуру, остальная часть области композита покрывается КМнКЭ [2]. Для построения композитного m - сеточного КЭ используются m вложенных узловых сеток. Самая мелкая сетка порождена базовым разбиением, которое учитывает структуру КМнКЭ, остальные $m-1$ сетки определяются на его границе. Построение КМнКЭ сводится к исключению всех узловых неизвестных внутри его области и большей части неизвестных на его границе. Данный алгоритм позволяет строить двумерные КМнКЭ, которые имеют нерегулярную структуру и отверстия сложной формы.

Достоинства совместного применения одно- и многосеточного моделирования для двумерных композитов заключаются в том, что такое моделирование учитывает сложную форму и структуру композитов, порождает дискретные модели, размерности которых на несколько порядков меньше размерностей базовых и сеточные напряжения которых отличаются от точных значений на заданную малую величину.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Матвеев А. Д.* Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов / Деп. в ВИНИТИ N2990-В00. Ин-т вычисл. моделир. СО РАН, Красноярск, 2000. 30 с.
2. *Матвеев А. Д.* Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом наполнения // ПМТФ. 2004. № 3. С. 161–171.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 602–603

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ РЕЖИМОВ С ОБОСТРЕНИЕМ

© В. А. Нахушева

niipma@mail333.com

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик

В настоящее время наблюдается большой интерес к экономическим, социальным, медико-биологическим и физическим процессам, протекающим в режимах с обострением. В качестве базовых уравнений математических моделей этих процессов выступают нелинейные или нелокальные дифференциальные уравнения, порядок и тип которых могут вырождаться в моменты обострения. Важной моделью таких уравнений является реактивно-диффузионное уравнение вида

$$D^{\alpha}_{t_*t}v(\xi,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}[(\alpha_1 v + \alpha_2)v] + f(v), \tag{1}$$

где $v = v(\xi,t)$ — скалярная функция точки $\xi \in \mathbb{R}$ и времени t; $D^{\alpha}_{t_*t}$ — оператор дробного (в смысле Римана – Лиувилля) интегродифференцирования порядка $|\alpha|$ с началом в момент обострения t_*; $f(v)$ — полином относительно v, α_1 и α_2 — постоянные величины.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $f(u) = \beta_1 v(1-v)$, $\beta_1 = \text{const} > 0$ известно в математической биологии как уравнение Фишера. В случае, когда v не зависит от пространственной координаты, $f(v) = \beta_1 v - \beta_2 v^2$, $\beta_2 = \text{const} \geq 0$ уравнение (1) совпадает с обобщенным логистическим уравнением [1, с. 149]:

$$D^{\alpha}_{t_*t}v(\tau) = \beta_1 v - \beta_2 v^2. \tag{2}$$

К классу уравнений вида (1) относится и уравнение Буссинеска [2, с. 126]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha_1 \frac{\partial^2 v^2}{\partial \xi^2}. \tag{3}$$

Рассмотрим уравнение (1) в случае, когда $f(v)$ меняется по закону

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} = 2\beta_3 v \frac{\partial v}{\partial t} + \beta_4 \frac{\partial v}{\partial \xi}, \quad 0 < \xi < r_0 \tag{4}$$

и соблюдено условие типа нелокального условия А. А. Самарского

$$\delta'(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{r_0} v(\xi,t)d\xi = \alpha_0(t-t_*)^2 \text{sign}\,(t_* - t), \tag{5}$$

где β_3, β_4, α_0 — постоянные величины.

С учетом (4) и (5) уравнение (1) можно аппроксимировать следующим уравнением:

$$\frac{\partial}{\partial t}D^{\alpha}_{t_*t}v(\xi,\tau) = 2\alpha_1\delta'(t)\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2} + 2\beta_3 v\delta'(t) + \beta_4\frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Отсюда при $\alpha = 1$, $\alpha_0\alpha_1 > 0$, $y = t - t_*$, $\xi = \sqrt{2\alpha_0\alpha_1}x$, $u(x,y) = v(\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}x, y + t_*)$ получаем уравнение

$$\text{sign}\,y \cdot y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda y^2 \text{sign}\,y \cdot u \tag{6}$$

с коэффициентами $a = \beta_4/\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}$, $\lambda = -2\alpha_0\beta_3$.

Уравнение (6) является уравнением смешанного типа. Оно эллиптично до момента обострения, то есть при $y < 0$, гиперболично после момента обострения, то есть при $y > 0$, и параболично в момент обострения $y = 0$.

Уравнение (6) в области его гиперболичности и при $\lambda = 0$ совпадает с уравнением Бицадзе – Лыкова [2, с. 39]

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{7}$$

Условие (5) для уравнения (6) записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^r u(x,y)dx = \alpha_3 y^2 \operatorname{sign} y, \tag{8}$$

где $r = r_0/\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}$, $\alpha_3 = \alpha_0/\sqrt{2\alpha_0\alpha_1}$.

При определенной идеализации процесс горения в среде с объемным источником тепла $f(v)$, меняющимся по закону (4), и коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры $v = v(\xi, t)$ по линейному закону, моделируется уравнением вида (1) с $\alpha = 1$ [3]. Если плотность среды ρ распределена по закону $\rho = a_0\xi^{-k}$, то тепловой процесс, протекающий в режиме с обострением, может быть описан уравнениями следующих видов:

$$x^k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot |y|^n\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \lambda u, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_0^r u(x,y)dx = \mu \operatorname{sign} y \cdot |y|^{-n}, \tag{10}$$

где k , n , b , μ — характеристики среды с нелинейной теплопроводностью.

Исключительным случаем модели (9) является уравнение

$$x^k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \operatorname{sign} y \cdot y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{11}$$

Основной целью работы является исследование качественных свойств решений уравнений (6), (7), (9) и (11) с соответствующими условиями Самарского (8), (10) и обоснование того, что уравнения смешанного типа могут выступать теоретической основой теории режимов с обострением.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-96627).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нахушев А. М., Кенетова Р. О.* Моделирование социально-исторических и этнических процессов. Нальчик: Эль-Фа, 1998. 171 с.
2. *Нахушева В. А.* Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с. ISBN-5-02-033720-X.
3. *Курдюмов С. П., Куркина Е. С.* Тепловые структуры в среде с нелинейной теплопроводностью // Нелинейный мир, 2005. Т. 3, № 5–6. С. 289–305.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 604–604

УДК 517.977.56: 629.764

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ РАКЕТОНОСИТЕЛЯМИ С УЧЕТОМ УПРУГИХ СВОЙСТВ

© В. С. Неронов*, Б. Е. Смагулов

* enu_neronov@mail.ru

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

В настоящей работе рассматривается задача оптимального управления изгибными колебаниями упругой ракеты-носителя. С единых позиций исследуются вопросы существования обобщенного решения уравнений движения летательного аппарата, разрешимости задачи оптимального управления и вывода необходимых условий оптимальности управления в форме принципа максимума.

Изгибные колебания упругого летательного аппарата (как балки переменного сечения) под действием сил упругости, веса и аэродинамических сил описываются дифференциальным уравнением [1–3]

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + a\frac{\partial y}{\partial t} + b\frac{\partial y}{\partial x} = F + ap(t),$$
$$(t,x) \in Q = (0,T) \times (0,L),$$

с начальными

$$y(0,x) = y_0(x), \quad \frac{\partial y(0,x)}{\partial t} = y_1(x), \quad x \in (0,L),$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x = 0;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0, \quad x = L,\ t \in (0,T),$$

где $y = y(t,x)$ — отклонение оси летательного аппарата от равнвесного состояния, остальные обозначения соответсвуют принятым в [1, с. 311, 312].

Управление $p = p(t)$ считается приложенным в некоторой точке корпуса ракеты или на некоторой части корпуса.

В качестве критерия оптимальности выбирается квадратический функционал

$$J = \int_0^T \int_0^L y^2(t,x)\,dx\,dt + \varepsilon \int_0^T p^2(t)\,dt,$$

где $\varepsilon > 0$ — весовой множитель.

Для численного решения поставленной задачи оптимального управления используется метод Фурье [2, 3] в сочетании с методом последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сиразетдинов Т. К.* Оптимизация систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1977. С. 480.
2. *Абгарян К. А., Калазин Э. Л., Мишин В. П., Рапопорт И. М.* Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1990. С. 464.
3. *Алифанов О. М., Андреев А. Н., Гущин В. Н. и др.: Под ред. Алифанова О. М.* Баллистические ракеты и ракеты-носители. М.: Дрофа, 2004. С. 512.

УДК 519.6: 622.692

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОГИДРАВЛИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В НЕФТЕПРОВОДАХ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНЫХ ФАКТОРОВ

© В. С. Неронов [*], Л. В. Топко [**]

[*] enu_neronov@mail.ru

[*] *Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;*
[**] *Инновационный Евразийский университет, Павлодар, Казахстан*

Рассмотрим процесс транспортировки нефти по магистральному трубопроводу постоянного диаметра D и длины L, описываемый системой дифференциальных уравнений [1–3]

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \upsilon\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{4k}{\rho c D}(\theta_e - \theta) + \frac{4W}{\rho c \pi D^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho g \gamma \frac{\upsilon^m(\theta)}{D^{m+1}}\left(\frac{\rho\upsilon}{4}\right)^{2-m} - \rho g \frac{dH_b}{dx}, \tag{2}$$

$$(t,x) \in Q = (0,T) \times (0,L),$$

с начальными

$$\theta(0,x) = \theta_0(x), \quad x \in (0,L), \tag{3}$$

и граничными условиями

$$\theta(t,0) = \alpha(t), \quad P(t,0) = \beta(t), \quad t \in (0,T), \tag{4}$$

где $\theta = \theta(t,x)$, $P = P(t,x)$ — температура и давление нефти в момент времени t в точке x. Остальные обозначения в (1)–(4) соответствуют принятым в [1–3].

Процессы транспортировки нефти по магистральным трубопроводам подвержены воздействию различных факторов случайного характера. Так, например, случайными величинами и функциями являются коэффициент теплоотдачи от нефти в окружающую среду $k(t,x)$, эмпирические коэффициенты γ и m в формуле потери напора на трение, температура окружающей среды $\theta_e(t,x)$, и т. д. В силу этого случайными функциями будут температура $\theta(t,x)$ и давление нефти $P(t,x)$.

Случайные величины и функции моделируются с применением метода Монте-Карло.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агапкин В. М., Кривошеин Б. Л., Юфин В. А.* Тепловой и гидравлический расчеты трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. М.: Недра, 1981. С. 256.
2. *Гусейнзаде М. А., Юфин В. А.* Неустановившееся движение нефти и газа в магистральных трубопроводах. М.: Недра, 1981. С. 232.
3. *Evseyeva A. V., Neronov V. S.* The mathematical model of the viscoplastic fluids flow through the pipelines // Modelling, Simulation & Control. Ser. B, AMSE Press. France, Paris, 1988. V. 18, № 1. P. 31–42.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 606–607

УДК 533.72

ПРИМЕНЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В КВАНТОВЫХ ФЕРМИ-ГАЗАХ

© А. Г. Нефедов

itbrains@gmail.com

Московский государственный областной университет, Москва

Получено точное решение полупространственной задачи о барнеттовском скольжении с диффузными граничными условиями. Приводится сравнение с аналитическим решением задачи о барнеттовском скольжении с полностью диффузным отражением молекул от границы полупространства [2].

Метод решения граничных задач кинетической теории развитый в [1] применен к решению задачи о барнеттовском скольжении с диффузными граничными условиями.

Построено релаксационное кинетическое уравнение, описывающее поведение ферми-газов в задаче о барнеттовском скольжении. Основная идея состоит в замене локально-равновесной функции Максвелла – Больцмана на локально-равновесную функцию Ферми – Дирака. Квантовый характер уравнения приводит к построению целого однопараметрического семейства уравнений переноса. Параметром семейства служит величина α — отношение химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру.

Построенное семейство уравнений в предельном случае при $\alpha \to -\infty$ содержит классическое БГК-уравнение для одноатомного газа с постоянной частотой столкновений. Получено аналитическое решение задачи о барнеттовском скольжении в виде разложения по собственным сингулярным обобщенным функциям соответствующего характеристического уравнения

$$\psi(x,\mu,\alpha) = 2U_0(\alpha) - 2B_T\mu(\mu^2 - \frac{\delta(\alpha)}{2}) + \int\limits_0^\infty \exp(-\frac{x}{\eta})\Phi(\eta,\mu,\alpha)a(\eta,\alpha)d\eta.$$

Это разложение сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши

$$2U_0(\alpha) + 2B_T\mu(\mu^2 - \frac{\delta(\alpha)}{2}) + \int\limits_0^\infty \frac{\eta a(\eta,\alpha)}{\eta-\mu}d\eta + \frac{\lambda(\mu,\alpha)}{K(\mu,\alpha)}a(\mu,\alpha) = 0, \quad \mu > 0.$$

Уравнение приводится к краевой задаче Римана теории функций комплексного переменного

$$\lambda^+(\mu,\alpha)[2U_0(\alpha) + 2B_T\mu(\mu^2 - \frac{\delta(\alpha)}{2}) + N^+(\mu,\alpha)] =$$
$$= \lambda^-(\mu,\alpha)[2U_0(\alpha) + 2B_T\mu(\mu^2 - \frac{\delta(\alpha)}{2}) + N^-(\mu,\alpha)], \quad \mu > 0.$$

Сначала решена соответствующая однородная краевая задача, затем — неоднородная. Решение последней находится в классе мероморфных функций. Условия разрешимости и формулы Сохоцкого позволили найти все неизвестные коэффициенты разложения решения исходной граничной задачи и записать это решение в виде:

$$\frac{\psi(x,\mu,\alpha)}{B_T} = D(\mu,\alpha) + \frac{A(\mu,\alpha)}{X(\mu,\alpha)}H_+(\mu)\exp(-\frac{x}{\mu}) + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \exp(-\frac{x}{\eta})\frac{\sin\zeta(\eta,\alpha)}{X(\eta,\alpha)}A(\eta,\alpha)\,d\eta.$$

где

$$A(\eta,\alpha) = 1 + 2V_1^2(\alpha) - 2V_1^*(\alpha) + 2V_1(\alpha)\eta + 2\eta^2,$$
$$D(\mu,\alpha) = -V_1(\alpha) - 2V_1^3(\alpha) + 4V_1(\alpha)V_1^*(\alpha) + 2V_2^*(\alpha) - 2B_T\mu^3.$$

Полученный результат необходим в теории термофореза при постановке граничных условий на поверхности аэрозольной частицы, обтекаемой потоком неоднородного по температуре разряженного газа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Метод сингулярных уравнений в граничных задачах математической физики // Теор. и матем. физика. 2005. Т. 143, № 4. С. 855–870.
2. *Гайдуков М. Н., Попов В. Н.* О зависимости коэффициента барнеттовского сколь жения от выбора модели интеграла столкновений // Вестник математического факультета. Архангельск, Изд-во Поморского государственного университета им. М. В. Ломоносова. 1997. Вып. 1. С. 26–31.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 608–608

УДК 519.621.64

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СХЕМЫ НА БАЗЕ ВЕКТОРНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

© О. В. Нечаев, Э. П. Шурина [*] **, М. И. Эпов**

[*] `shurina@online.sinor.ru`

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

В данной работе рассматривается многоуровневый предобусловливатель для решения векторного уравнения Гельмгольца, описывающего гармоническое (широкий диапазон частот) электрическое поле в неоднородных средах с контрастными свойствами электропроводности и диэлектрической проницаемости в отдельных фрагментах области моделирования. В частотной области — это дифференциальное уравнение второго порядка относительно комплексных векторных функций, определяющих электрическое поле со специальными условиями непрерывности на межфрагментарных границах. Специальные условия непрерывности на границах, разделяющих подобласти с различными коэффициентами электропроводности, определяются непрерывностью тангенциальных компонент и скачком нормальных компонент поля, зависящем от контрастности электрических свойств в подобластях. Последнее условие связано с выполнением условия слабой дивергенции для электрического поля. При конечноэлементной аппроксимации трехмерного векторного уравнения Гельмгольца на тетераэдральном разбиении с использованием edge-элементов Неделека точность вычисления скачка нормальной компоненты электрического поля определяется порядком и полнотой базисных функций. Вычислительные схемы на векторных элементах второго и третьего порядков второго типа (полный базис) исследованы на ряде модельных задач и применены для моделирования электрического поля в горизонтальной скважине, вмещающая среда содержит различно ориентированные относительно скважины пропластки.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 609–610

УДК 519.632.4+519.633.6

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В РАЗНОСТНЫХ МЕТОДАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

© В. И. Паасонен

paas@ict.nsc.ru

Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

Многие дифференциальные уравнение второго порядка в частных производных допускают компактную разностную аппроксимацию повышенного порядка точности относительно шагов сетки. Эти построения, выполненные к настоящему времени даже и для задач в криволинейных координатах, восходят к классическим результатам прошлого века, полученным представителем грузинской математической школы Микеладзе [1]. Однако для получения реальной точности высокого порядка при приближенном решении краевых задач необходимо аппроксимировать с адекватной точностью также и граничные условия. Исходя из ряда соображений, автору наиболее удобным представляется использовать для этой цели односторонние разностные аналоги потоков в граничных условиях. Высокий порядок аппроксимации граничных соотношений может быть всегда достигнут за счет того, что для односторонней аппроксимации потока берется достаточно большое число точек. Например, для достижения четвертого порядка аппроксимации первую производную следует аппроксимировать по пяти точкам. В результате такого подхода получаются хоть и “длинные”, но зато одномерные разностные граничные условия. При этом потоки во внешних и внутренних граничных условиях аппроксимируются одинаково и не зависят от вида дифференциального уравнения, а также выглядят единообразно для различных порядков точности, что в совокупности обеспечивает универсальность подхода к формулировке разностной краевой задачи. Таким образом, при такой постановке граничных условий компактные схемы становится возможным применять для решения неоднородных задач, когда область расчета составлена из подобластей, занятых различными материалами.

Одномерный характер граничных условий обеспечивает простую и естественную факторизацию сложной многомерной задачи на одномерные. После расщепления разностная задача распадается на последовательность одномерных задач с матрицами ленточной структуры специального вида. Они отличаются от трехдиагональных матриц наличием конечного числа изолированных “длинных” строк, соответствующих условиям для потоков на внешних и внутренних границах. Изолированность в данном случае означает, что шаблон (множество используемых узлов сетки) внешнего разностного граничного условия полностью лежит в однородном приграничном слое (т. е. в пределах одной подобласти) , а шаблон внутреннего граничного условия располагается в пределах двух соседних подобластей слева и справа от данного разреза.

Такой симбиоз компактных схем и многоточечных высокоточных аппроксимаций граничных условий предложен автором в работе [2]. Его характерной особенностью является возможность эквивалентной формулировки системы уравнений в форме параллельного алгоритма расчета по слоям, на границах которых поставлены условия равенства потоков. Алгоритм распараллеливания является обобщением метода параллельной реализации прогонки [3]. Суть алгоритма заключается в следующем. Вводится пока неопределенный вектор w значений решения исходной системы на разрезах — границах слоев. В каждом слое решается три вспомогательные задачи Дирихле — одна для неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями, и две задачи для однородного уравнения с нормированными граничными условиями (нуль на левой границе слоя и единица на правой, и наоборот). Эти группы задач являются взаимно независимыми для различных слоев и могут решаться параллельно. Решение

исходной задачи в любом слое формально выражается в виде линейной комбинации решений вспомогательных задач для данного слоя, коэффициенты которой суть значения вектора w на его границах.

Подстановка этих формальных выражений решения во все внешние и внутренние граничные условия дает замыкающую алгоритм линейную алгебраическую систему уравнений для определения значений вектора w. Система получается именно трехдиагональной благодаря тому, что строки матрицы, соответствующие граничным условиям, являются изолированными в указанном выше смысле. Исследование корректности всей задачи сводится тогда к доказательству устойчивости этой конечной системы разностных уравнений для определения решения на разрезах. При естественных требованиях к дифференциальной задаче (корректность) и к исходной разностной схеме (диагональное преобладание для соответствующей задачи Дирихле в любом слое) удается доказать диагональное преобладание в матрице названной замыкающей системы.

На основе развития данной технологии удается с единых позиций сформулировать и теоретически доказать устойчивость параллельных алгоритмов реализации для целого ряда различных классов задач:

1. Краевых задач для параболических и эллиптических уравнений в областях, составленных из конечного числа прямоугольных однородных подобластей с различными теплофизическими характеристиками [4];

2. Задач в сложных областях с применением декомпозиции области на непересекающиеся подобласти, с постановкой в качестве “мягких” граничных условий на границах раздела подобластей равенства односторонних нормальных производных [5];

3. Задач интерполяции обычными кубическими сплайнами и так называемыми сплайнами с натяжением на основе разностного подхода, при котором сплайн-функция строится как решение разностной краевой задачи с внутренними граничными условиями гладкого сопряжения производных [6].

Таким образом, универсальность и естественность формулировки разностных граничных условий по существу позволяет расширить область применения высокоточных компактных разностных схем от простых областей на краевые задачи для сложных конструкций, состоящих из различных материалов, на задачи в сложных областях, требующих декомпозиции области на простые части и на задачи построения по табличным данным кривых и поверхностей с регулируемыми геометрическими свойствами. При этом во всех случаях возможна как традиционная последовательная технология расчета, так и параллельная.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 05-01-00146-а и № 06-01-00030).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Микеладзе Ш. Е.* О численном интегрировании уравнений эллиптического и параболического типов // Известия АН СССР. Сер. матем. 1941. Т. 5, № 1. С. 57–74.
2. *Паасонен В. И.* Параллельный алгоритм для компактных схем в неоднородных областях // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8, № 3. С. 98–106.
3. *Яненко Н. Н., Коновалов А. Н., Бугров А. Н., Шустов Г. В.* Об организации параллельных вычислений и распараллеливании прогонки // Численные методы механики сплошной среды. 1978. Т. 9, № 7. С. 136–139.
4. *Паасонен В. И.* Сходимость параллельного алгоритма для компактных схем в неоднородных областях // Вычислительные технологии. 2005. Т. 10, № 3. С. 81–89.
5. *Паасонен В. И.* Параллельные алгоритмы на основе мягких внутренних граничных условий // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, ч. 2, специальный выпуск. С. 21–27.
6. *Паасонен В. И.* Параллельный алгоритм построения гиперболических сплайнов // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11, № 6. С. 87–95.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 611–611

УДК 519.6

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В ЛАЗЕРЕ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ

© А. Б. Пальцев

vlasov@ccas.ru

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва

Рассмотрена задача Дирихле для уравнения Лапласа, возникающая при моделировании электрического поля в газовых лазерах специальной конструкции. Для ее эффективного решения применен метод мультиполей [1], обеспечивший быстрое и высокоточное вычисление искомой функции (электрического потенциала) и ее градиента, в том числе вблизи сложных участков границы области (криволинейного дна электрода).

Изучаемая краевая задача для гармонической функции $\Phi(z)$, $z = x + iy$, ставится в (двумерной) односвязной области $g = \mathbb{H} \setminus \overline{\mathcal{D}}$, где $\mathbb{H} := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость, а область $\mathcal{D}$ представляет собой деформированную вертикальную полосу, граница которой состоит из трех звеньев: $\partial\mathcal{D} = \Gamma^- \cup \Gamma \cup \Gamma^+$; здесь $\Gamma^\pm := \{x = \pm a, y \in [b, \infty)\}$, а Γ — гладкая дуга, для точек которой выполняются соотношения $\operatorname{Im} z > 0$, $|\operatorname{Re} z| < a$. Таким образом, граница области g является объединением $\partial g = \mathbb{R} \cup \Gamma^+ \cup \Gamma \cup \Gamma^-$, где $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$. Краевые условия для функции $\Phi(z)$ следующие: $\Phi(z) = 0$, $z \in \mathbb{R}$; $\Phi(z) = \varphi_1$, $z \in \Gamma^-$; $\Phi(z) = \varphi_2$, $z \in \Gamma^+$; $\Phi(z) = \varphi(z)$, $z \in \Gamma$. Здесь φ_1 и φ_2 — постоянные величины, а функция $\varphi(z)$ непрерывна на Γ, причем $\varphi(-a + ib) = \varphi_1$ и $\varphi(a + ib) = \varphi_2$. Решение Φ поставленной задачи ищется в классе $C^2(g) \cap C(\overline{g} \setminus (A^+ \cup A^-)) \cap L_\infty(g)$, где через A^+ и A^- обозначены (бесконечные) точки пересечения $\mathbb{R}$ и, соответственно, Γ^+ и Γ^-.

Искомое решение $\Phi(z)$ найдено в виде суммы $\Phi(z) = U(z) + U_0(z)$. Здесь функция U_0 гармонична в области $G = \mathbb{H} \setminus \Gamma^\pm$, т. е. в полуплоскости с двумя выброшенными разрезами вдоль лучей $\Gamma^\pm$ (очевидно, $g \subset G$), и принимает следующие граничные значения: $U_0(z) = 0$, $z \in \mathbb{R}$; $U_0(z) = \varphi_1$, $z \in \Gamma^-$; $U_0(z) = \varphi_2$, $z \in \Gamma^+$. Функция U, следовательно, удовлетворяет уравнению Лапласа в g, а на ∂g подчинена условиям: $U(z) = 0$, $z \in \gamma$, $U(z) = \varphi(z) - U_0(z)$, $z \in \Gamma$; здесь $\gamma := \Gamma^- \cup \mathbb{R} \cup \Gamma^+$.

Подчиним конформное отображение $\zeta = \mathcal{F}(z)$ области G на $\mathbb{H}$ следующим условиям: $\mathcal{F}(A^\pm) = \pm 1$, $\mathcal{F}(M) = \infty$, где $M \in \partial G$ — бесконечно удаленная точка, достигаемая по путям, лежащим между разрезами по лучам Γ^- и Γ^+. Обратное к нему отображение обозначим $f(\zeta)$. Решение задачи относительно функции $u_0(\zeta) := U_0(f(\zeta))$ выписывается через элементарные функции, после чего функция U_0 находится по формуле $U_0(z) := u_0(\mathcal{F}(z))$. Для построения $U(z)$ применяем метод мультиполей [1], который дает $U(z)$ в виде предела последовательности $\{U_N(z)\}$ линейных комбинаций $U_N(z) = \sum_{k=1}^N a_k^N\, \Omega_k(z)$, где функции $\Omega_k(z)$ (мультиполи), определяются по формуле $\Omega_k(z) := \operatorname{Im}[\mathcal{F}(z)]^k$, $k = 1, 2, \ldots$, а коэффициенты a_k^N являются решениями системы линейных уравнений $\sum_{l=1}^N (\Omega_k, \Omega_l) a_l^N = (\Omega_k, h)$, $k = \overline{1, N}$; здесь $h(z) := \varphi(z) - U_0(z)$, а через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(\Gamma)$.

Численные эксперименты показали высокую эффективность метода при различных формах дуги Γ.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 07-01-00503).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Власов В. И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.

УДК 517.946

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ СМЕСИ

© **А. А. Папин**

papin@math.asu.ru

Алтайский государственный университет, Барнаул

Рассматривается одномерное движение двухфазной смеси вязких несжимаемых жидкостей с общей температурой и в отсутствие фазовых переходов. Уравнения сохранения массы, импульса и энергии имеют вид [1, 2]:

$$\rho_{it} + (\rho_i v_i)_x = 0, \quad \rho_i(v_{it} + v_i v_{ix}) = (s_i\sigma_i)_x + F_i, \quad \sum_{i=1}^{2} \rho_i c_i(\theta_t + v_i\theta_x) = (\lambda\theta_x)_x.$$

Здесь v_i — скорость i - й фазы ($i = 1, 2$); ρ_i — приведенная плотность, связанная с истинной плотностью ρ_i^o и объемной концентрацией s_i соотношениями $\rho_i = s_i\rho_i^o$, $s_1 + s_2 = 1$. Для тензора напряжений фазы σ_i принимается гипотеза [1]: $\sigma_i = -p_i + \mu_i\frac{\partial v_i}{\partial x}$, где p_i — давление, μ_i — коэффициент динамической вязкости фазы. Силы F_i имеют вид [1]: $F_i = p_i\frac{\partial s_i}{\partial x} + \varphi_i + \rho_i g$, где $\varphi_1 = K(v_2 - v_1)$, $\varphi_2 = -\varphi_1$, K — коэффициент взаимодействия фаз, g — ускорение силы тяжести; θ — температура, c_i — теплоемкость, λ — коэффициент теплопроводности смеси. Условия $p_1 - p_2 = p_c(s_1, \theta)$, $\rho_i^o = const$ приводят к замкнутой системе уравнений для s_i , v_i , p_i , θ .

В докладе излагаются результаты о разрешимости начально-краевых задач для указанной системы уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987. 464 с.
2. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. Word Scientific Publishing, 1995. 195 p.

УДК 533;517.92517.944

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В КРИВОЛИНЕЙНОМ КАНАЛЕ

© Д. В. Паршин, А. П. Чупахин

danilo.skiman@gmail.com, chupakhin@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Изучение пространственных движений газа представляет значительный интерес как с точки зрения многочисленных приложений, главным из которых является аэродинамика, так и с точки зрения теории нелинейных дифференциальных уравнений [1]. Известные на сегодняшний день точные решения многомерных уравнений газовой динамики (УГД) демонстрируют большое разнообразие и сложность возможных режимов течения. Теоретико-групповые методы позволяют эффективно строить и исследовать обширные классы точных решений УГД, имеющие интересные физичкские приложения [2, 3].

В данной работе исследуются частично-инвариантные решения УГД, описывающие установившееся движение газа в криволинейном канале переменного сечения. Такое решение обобщает на пространственный случай решение типа простой волны, описывающее поворот равномерного потока газа.

УГД на таком решении сводятся к динамической системе третьего порядка:

$$\begin{gathered} dR/d\theta = H\cos(\psi)(R^2-1)(R^2+1)^2/(2d), \\ d\phi/d\theta = (2Rd + H(1-R^2)(1+R^2)\sin(\psi))/(2Rd), \\ dH/d\theta = Hd(2R\sin(\psi) - H(R^2+1)). \end{gathered} \tag{1}$$

Величины R, ψ, H являются функциями полярного угла θ .

Термодинамические параметры течения имеют следующее представление через решение системы (1):

$$\rho = (Q/Q_0)^{2/\gamma-1}, p = S_0\rho^\gamma, \tag{2}$$

где $Q = (R^2-1)/(R^2+1)$. Компоненты вектора скорости и скорости звука в цилиндричских координатах выражаются формулами:

$$V = 2\sqrt{2b_0}\frac{R\sin(\psi)}{1+R^2}, W = 2\sqrt{2b_0}\frac{R\cos(\psi)}{1+R^2}, c = \sqrt{b_0(\gamma-1)}\frac{R^2-1}{1+R^2}, \tag{3}$$

$$u = \sqrt{2b_0}\frac{Hx}{r} + U(t,r,\theta), h = \sqrt{2b_0}H,$$

где V , W — радиальная и окружная компоненты скорости соответственно.

В работе [4] исследованы все особые точки и многобразия системы (1) и доказано, что они лежат на границе области определения решения системы.

В настоящей работе исследуются как непрерывные, так и разрывные решения системы (1). Исследованы поверхности, соответствующие специальным многообразиям (1) в фазовом пространстве $\mathbb{R}^3(R,\psi,H)$. При переходе через эти поверхности траектории системы меняют монотонность по какой-либо из переменных (R,ψ,H) .

Описаны области в фазовом пространстве в которых траектории системы (1) продолжаются до режимов типа покой и вакуум, представляющих значительный интерес с физической точки зрения.

Уравнение $d \equiv (R^2-1)^2 - (8/(\gamma-1))R^2\cos^2(\theta) = 0$ задает в пространстве $\mathbb{R}^3(R,\psi,H)$ звуковую характеристику УГД на данном решении. Решение системы (1) имеет на этой поверхности сильный разрыв. Доказано существование решений вида (1)–(3) из данного класса с сильным разрывом типа ударной волны. Для этого анализируются соотношения Ренкина – Гюгонио и доказывается возможность ударного перехода через поверхность $d=0$.

Доказано существование решений вида (1)–(3) с компактным разрывом. Аналитичуские доказательства сопровождаются численными расчетами, иллюстрирующими поведение интегральных кривых системы (1) и движение газа, описываемое данным решением.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ — грант № 05-01-00080, и СО РАН — грант № 2.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Программа ПОДМОДЕЛИ. Газовая динамика // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1978.
3. *Чупахин А. П.* Небарохронные подмодели типов (1, 2) и уравнений газовой динамики. Препринт ИГиЛ, 1999. № 1–99.
4. *Чупахин А. П., Шахметова Ж. А.* Пространственный аналог волн Прандтля–Майера // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 645–651.

УДК 517.97

ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ОХРАНЫ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

© В. В. Пененко

penenko@sscc.ru

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

В докладе представлен математический аппарат для построения численных моделей и методов их практической реализации при исследовании сложных нелинейных динамических систем, используемых для решения взаимосвязанных задач экологии и климата.

Проблемы качества атмосферного воздуха тесно связаны с качеством жизни и здоровьем населения и поэтому, безусловно, относятся к числу личных и общественных приоритетов. При выборе стратегий решения этих проблем в настоящее время существенную роль играют математические модели, описываемые нелинейными системами многомерных дифференциальных уравнений в частных производных. При использовании всей доступной фактической информации они являются эффективным инструментом для принятия решений, оценки экологических рисков и возможных последствий при различных воздействиях естественного и антропогенного характера.

При возрастающей сложности функционального содержания математических моделей, увеличения пространственно-временного разрешения и числа функций состояния удобный конструктивный аппарат предоставляют вариационные принципы. Они имеют гибкую структуру, которая может быть легко адаптирована к наиболее сложным математическим моделям, и обеспечить при этом согласованное описание совокупности физических процессов различных пространственно-временных масштабов. Они также удобно настраиваются на совокупность функционалов и ограничений, которые участвуют в задачах прогнозирования и управления. Сочетание вариационных принципов с методами декомпозиции и расщепления обеспечивает высокую эффективность алгоритмов реализации.

Предлагаемый подход базируется на методах классической теории вариационного исчисления, модифицированных для работы в конечномерных пространствах дискретных аппроксимаций моделей. Конкретно рассматриваются задачи гидродинамики, переноса и трансформации загрязняющих примесей естественного и антропогенного происхождения в атмосфере. Как следствие вариационного принципа возникают сопряженные задачи, позволяющие организовать по заданным целевым критериям прямые и обратные связи между моделями и фактической информацией.

Работа поддержана Программами 16 Президиума РАН и 1.3.2 ОМН РАН, а также контрактом № 013427 Европейской Комиссии.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 616–619

УДК 532.58:536.24

МОДЕЛИ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРЫВА ЖИДКОГО СЛОЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

© В. В. Пухначёв

pukhnachev@gmail.com

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

В докладе сообщаются результаты, полученные в работах [1–5], а также ряд новых результатов. Рассматривается поведение свободной невесомой пленки жидкости, которая подвержена действию термокапиллярных сил. Точная постановка задачи состоит в нахождении области $\Omega_t \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$, и решения $\vec{v}(\vec{x},t),\ p(\vec{x},t),\ \theta(\vec{x},t)$ системы уравнений Навье – Стокса и теплопроводности,

$$\vec{v}_t + \vec{v}\cdot\nabla\vec{v} = -\rho^{-1}\nabla p + v\Delta\vec{v},\ \nabla\cdot\vec{v} = 0, \tag{1}$$

$$\theta_t + \vec{v}\cdot\nabla\theta = \chi\Delta\theta \tag{2}$$

в этой области, удовлетворяющего начальным условиям

$$\Omega_0 \ \text{задано},\ \ \vec{v}(\vec{x},0) = 0,\ \theta(\vec{x},0) = 0,\ \vec{x} = \Omega_0, \tag{3}$$

условиям на свободной части границы Γ_t области Ω_t

$$\vec{v}\cdot\vec{n} = V_n,\ \vec{x}\in\Gamma_t,\ t > 0, \tag{4}$$

$$-p\vec{n} + 2\rho v D\cdot\vec{n} = -2K\sigma\vec{n} + \nabla_\Gamma\sigma, \tag{5}$$

$$\theta = \Theta(\vec{x},t) \ \text{или} \tag{6}$$

$$\partial\theta/\partial n = q(\vec{x},t), \tag{7}$$

а также некоторым условиям на заданной части Σ границы области Ω_t, если таковая имеется. Здесь $\vec{x} = (x,y,z)$ — координатный вектор, $\vec{v} = (u,v,w)$ — вектор скорости, p — давление, θ — температура,

$$\sigma = \sigma_0 - \kappa(\theta - \theta_0) \tag{8}$$

— коэффициент поверхностного натяжения. Величины v (коэффициент кинематической вязкости), ρ (плотность жидкости), χ (коэффициент температуропроводности) и параметры $\sigma_0, \kappa, \theta_0$, входящие в соотношение (8), предполагаются положительными постоянными. Символ V_n в равенстве (4) обозначает скорость перемещения поверхности Γ_t в направлении единичного вектора внешней нормали $\vec{n}$. В соотношении (5) $D = [\nabla\vec{v} + (\nabla\vec{v})^*]/2$ — тензор скоростей деформаций, K — средняя кривизна поверхности Γ, $\nabla_\Gamma = \nabla - \vec{n}(\vec{n}\cdot\nabla)$ — поверхностный градиент. Функции $\Theta(\vec{x},t),\ q(\vec{x},t)$ в равенствах (6), (7) считаются заданными. Будем называть задачу (1)–(6) несвязанной задачей, а (1)–(5), (7) — связанной задачей термокапиллярной конвекции. В работе [1] изучено семейство решений несвязанной задачи вида

$$u(f+g)x,\quad v = (f-g)y,\quad w = -2\int\limits_0^z f(\zeta,t)\,d\zeta, \tag{9}$$

$$p/\rho = vw_z(z,t) - \int\limits_0^z w_t(\zeta,t)\,d\zeta - 1/2w^2(\zeta,t) + \psi(t).$$

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 616–619

Вследствие (1), функции $f(z,t)$, $g(z,t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$f_t + f^2 + g^2 - 2f_z \int\limits_0^z f(\zeta,t)\,d\zeta = vf_{zz}, \quad g_t + 2fg - 2\int\limits_0^z f(\zeta,t)\,d\zeta = vg_{zz}. \tag{10}$$

Этому решению соответствует распределение температуры на свободной границе

$$2\Theta = l(t)x^2 + m(t)y^2 + \Theta_*(t), \tag{11}$$

где l, m, Θ_* — произвольные функции t, а начальная область Ω_0 является плоским слоем, $|z| < a$. Тогда оказывается, что в силу (4), (5), (9) область течения Ω_t останется плоским слоем $|z| < s(t)$, если на плоскостях $z = \pm s(t)$ выполняются краевые условия

$$f_z(s(t),t) = -k[l(t)+m(t)], \quad g_z(s(t),t) = -k[l(t)-m(t)], \tag{12}$$

$$ds/dt = -2\int\limits_0^{s(t)} f(z,t)\,dz, \quad t > 0, \tag{13}$$

где $k = \kappa/\rho v = \mathrm{const} > 0$. Для выполнения начальных условий (3) требуется, чтобы

$$s(0) = a > 0, \quad f(z,0) = g(z,0) = 0, \quad |z| \le a. \tag{14}$$

В зависимости от поведения функций $l(t)$, $m(t)$ возможны три ситуации: решение задачи (10), (12)–(14) существует и единственно при всех $t > 0$; ее решение существует лишь при $t \in [0, t_*)$, и при этом $s(t) \to \infty$, если $t \to t_*$; решение задачи существует только при $t \in [0, t^*)$, и при этом $s(t) \to 0$, если $t \to t^*$. В работе [1] в терминах функций $l(t)$, $m(t)$ сформулированы достаточные условия для реализации каждого из этих режимов. В работе [2] выполнены расчеты, иллюстрирующие каждый из описанных сценариев поведения решения несвязанной задачи, а также приведены результаты численного решения связанной задачи о деформации плоского слоя термокапиллярными силами. В этом решении $2\theta = \lambda(z,t)x^2 + \mu(z,t)y^2 + \varphi(z,t)$, а функции λ, μ, φ подлежат определению вместе с функциями f, g, s.

В работе [3] несвязанная задача термокапиллярной конвекции рассматривалась в приближении тонкого слоя. Оказалось, что в указанном приближении задача определения толщины пленки $h(x,y,t)$ и полей скорости и давления в ней разделяются и могут быть решены последовательно. Функция h удовлетворяет уравнению

$$h_{tt} + \sigma_0/\rho\,\nabla\cdot(h\nabla\Delta h) = \kappa/\rho\,\Delta\Theta \tag{15}$$

(здесь и далее ∇ и Δ обозначают градиент и лапласиан по переменным x, y). Для этого уравнения рассматривается начально-краевая задача

$$h = 2a, \quad h_t = 0, \quad (x,y) \in \omega, \quad t = 0, \tag{16}$$

$$\partial h/\partial N = 0, \quad \sigma_0 h\partial\Delta h/\partial N = \kappa\partial\Theta/\partial N, \quad (x,y) \in \partial\omega, \quad t > 0. \tag{17}$$

Здесь $a = \mathrm{const} > 0$, ω — ограниченная плоская область с гладкой границей $\partial\omega$, $\Theta(x,y,t)$ — заданная в полуцилиндре $\omega \times [0,\infty)$ гладкая функция, $\partial/\partial N$ — производная по направлению внешней нормали к кривой $\partial\omega$. Численные эксперименты позволяют сформулировать гипотезу о существовании в целом по времени положительного решения задачи (15)–(17) при условии малости соответствующей нормы функции Θ. Если же функция $\Delta\Theta$ отрицательна и норма ее велика, то численное решение непродолжимо за момент времени t^*. В этот момент в некоторой точке области ω толщина пленки обращается в нуль, что означает ее разрыв.

Стационарный аналог задачи (15)–(17) изучен более детально. В этом случае функция $h(x,y)$ удовлетворяет уравнению

$$\sigma_0\nabla\cdot(h\nabla\Delta h) = \kappa\Delta\Theta, \quad (x,y) \in \omega, \tag{18}$$

в котором функция Θ не зависит от t, условиям (17) и дополнительному условию

$$\int\limits_{\omega} h\,dx\,dy = S, \tag{19}$$

где S — заданная положительная постоянная. Сформулируем ряд полученных здесь результатов.

Предложение 1. *Предположим, что выполнены условия* $\partial\omega \in C^{4+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\Theta(x, y) \in C^{2+\alpha}(\bar{\omega})$. *Тогда найдется такое* $\kappa_* > 0$, *что при* $\kappa \in [0, \kappa_*]$ *задача (17)–(19) имеет, и притом единственное, решение* $h \in C^{4+\alpha}(\bar{\omega})$.

Предложение 2. *Пусть* ω *— круг* $x^2 + y^2 = r^2 < a^2$, *функция* $\Theta = -\gamma r^2 + \Theta_0$, *где* γ *и* Θ_0 *— постоянные, и решение задачи (17)–(19) зависит лишь от* r. *Существует такое* $\gamma^* > 0$, *что при* $\gamma > \gamma^*$ *задача (17)–(19) не имеет положительных осесимметричных решений.*

Рассмотрим связанную задачу о равновесии свободной неизотермической пленки с теплоизолированной свободной границей. В этом случае функция $\Theta(x, y)$ становится искомой, а задача (17)–(19) дополняется уравнением

$$\nabla(h\nabla\Theta) = 0, \quad (x, y) \in \omega, \tag{20}$$

и краевым условием

$$h\partial\Theta/\partial N = Q(x, y), \quad (x, y) \in \partial\omega, \tag{21}$$

в котором $Q(x, y) \in C^{1+\alpha}(\partial\omega)$ — заданная функция с нулевым средним значением по $\partial\omega$. Здесь имеет место аналог предложения 1 [4]. Вместе с тем, утверждение, аналогичное предложению 2, доказать не удается. Более того, в одномерном случае, когда ω есть отрезок $[0, a]$, а функции h, Θ зависят только от x (при этом $Q = \mathrm{const}$, удается доказать разрешимость задачи (17)–(21) при любом значении $|Q|$.

В заключение рассматриваются точные решения системы уравнений (15) и

$$(h\Theta)_t = \chi\nabla \cdot (h\nabla\Theta), \tag{22}$$

определенные для всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Один класс таких решений образуют бегущие волны,

$$h = H(x - ct), \quad \Theta = \Xi(x - ct),$$

где $c = \mathrm{const}$. Другой класс — автомодельные решения,

$$h = h_0 F(r^2/\chi t), \quad \Theta = qt^{-1}G(r^2/\chi t), \tag{23}$$

где h_0, q — положительные постоянные. Функции $H(\xi)$, $\Xi(\xi)$ и функции $F(\eta)$, $G(\eta)$ удовлетворяют системам квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка [5]. Замечательным является факт точной редукции каждой из этих систем к системам третьего порядка.

Предложение 3. *Пусть при прочих фиксированных параметрах системы (15), (22) величина достаточно мала. Тогда эта система имеет два четырехпараметрических семейства периодических бегущих волн. Одно из них вырождается в трехпараметрическое семейство солитонов, когда длина волны стремится к бесконечности.*

Предложение 4. *Система (15), (22) обладает трехпараметрическим семейством автомодельных решений вида (23). Условие непрерывности решения при* $t \to 0$ *выделяет двухпараметрическое семейство решений, параметризуемое значениями* h_0 *и* q *при достаточно малых* q.

Отметим, что в процессе доказательства предложения 4 возникает нётеров линейный оператор с индексом единица, что и приводит к появлению свободного параметра в решении (23). Упомянутое условие непрерывности решения в пределе $t \to 0$ позволяет устранить возникающий произвол и сделать решение (23) физически осмысленным.

Цикл работ [1–5] выполнен в рамках программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (номера грантов 00-15-96162, НШ-902.2003.1, НШ-5873.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pukhnachov V. V.* Model of a viscous layer deformation by thermocapillary forces // European J. of Applied Math. 2002. V. 13, №. 2, P. 205–224.
2. *Пухначёв В. В., Пухначёва Т. П.* Трехмерное нестационарное термокапиллярное движение вязкой жидкости // Известия Казахского национального университета. Серия "Математика, механика и информатика". 2002. № 2 (30). С. 96–104.
3. *Пухначёв В. В., Дубинкина С. Б.* Модель деформации и разрыва пленки под действием термокапиллярных сил // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 5. С. 89–107.
4. *Пухначёв В. В.* Задача о равновесии свободной неизотермической пленки жидкости // Журнал прикл. механики и техн. физики. 2007. Т. 48, № 3 (в печати).
5. *Meleshko S. V., Pukhnachev V. V., and Pukhnacheva T. P.* Traveling waves and self-similar solutions in the model of a free non-isothermal liquid film // Submitted for publication to "Advances in Mathematical Sciences and Applications".

УДК 681.5

РАЗРАБОТКА ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ЭКСПЕРТНЫХ ИНТЕРВАЛЬНО-ЗАДАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

© Г. А. Самигулина

galinasamigulina@mail.ru

Институт проблем информатики и управления, Алматы, Казахстан

Введение. Современное развитие сложных нелинейных динамических систем высокой размерности, когда переменные, характеризующие систему, задаются приближенно в рамках некоторого интервала, приводит к острой необходимости разработки новых интеллектуальных информационных технологий для управления данным классом систем.В связи с этим особый интерес представляют нетрадиционные методы. Актуальным является применение биологического подхода Искусственных Иммунных Систем (ИИС), который основан на принципах обработки информации молекулами белка.

Прототипом ИИС выступает иммунная система человека, высоко-параллельные механизмы функционирования которой поражают своим быстродействием, эффективностью и экономичностью. Привлекает способность естественных биологических систем решать многомерные задачи огромной вычислительной сложности в реальном масштабе времени.

1.Постановка задачи. Для исследования динамических свойств интервально-заданных систем управления используется метод квазирасщепления [1]. Данный метод позволяет с помощью алгебраических проекторов декомпозировать сложную систему управления на взаимосвязанные подсистемы меньшей размерности, но эквивалентные по динамических свойствам исходной системе.

Задача исследования формулируется следующим образом: разработать интеллектуальную технологию прогнозирования асимптотической устойчивости интервально-заданного объекта управления на основе метода квазирасщепления и биологического подхода Искусственных Иммунных Систем с целью прогнозирования поведения сложной системы и оперативного управления текущей ситуацией в реальном масштабе времени.

2.Алгоритм решения задачи. Для решения поставленной задачи используется следующий обобщенный алгоритм:

Шаг 1. Разработка алгебраических операторов проектирования для интервально-заданной системы управления.

Шаг 2. Процедура погружения интервального пространства в евклидово пространство, при котором сохраняются алгебраические и топологические структуры интервального пространства.

Шаг 3. С использованием операторов проектирования получение математической модели нелинейной интервально-заданной системы управления в виде квазирасщепленных подсистем.

Шаг 4. Классификация областей решений квазирасщепленных подсистем.

Шаг 5. Нормировка входных признаков. Выделение информативных признаков на основе методов факторного анализа и снижение размерности анализируемого пространства признаков.

Шаг 6. Создание оптимальной структуры иммунной сети по весовым коэффициентам информативных признаков.

Шаг 7.Создание с помощью экспертов временных рядов, состоящих из информативных признаков характеризующих каждый класс, которые рассматриваются как антигены. Для улучшения специфичности узнавания сворачивание временных рядов в матрицы управления, являющиеся эталонами для каждого класса. Сингулярное разложение данных эталонных матриц управления и определение правых и левых сингулярных векторов.

Шаг 8. Процедуры обучения иммунной сети с учителем или без учителя.

Шаг 9. Создание матриц управления - образов по временным рядам информативных признаков. Матрицы образов рассматриваются как антитела.

Шаг 10. Определение минимальной энергии связи между формальными пептидами (антителами и антигенами) и решение задачи распознавания образов.

Шаг 11. Оценка энергетических ошибок ИИС [2] при решении задачи распознавания образов на основе свойств гомологичных белков.

Шаг 12. Процедура расчета коэффициентов риска прогнозирования.

Шаг 13. Определение асимптотической устойчивости интервальной системы управления по квазирасщепленным подсистемам.

Шаг 14. Комплексное прогнозирование поведения сложных интервальных систем управления и оперативная корректировка управления в реальном масштабе времени.

При разработке данной интеллектуальной экспертной системы управления используется уникальная информационная технология, которая состоит из двух ключевых моментов. На первом этапе осуществляется предварительная обработка данных на основе методов факторного анализа, позволяющая создать эффективные алгоритмы обучения ИИС. Вторая особенность связана с устранением погрешностей энергетических оценок ИИС при решении задачи распознавания образов на основе свойств гомологичных белков. Погрешности ИИС возникают за счет неполноты данных, корреляции данных и ошибок измерения. Особенно эта проблема актуальна для схожихпо структуре пептидов, которые имеют примерно одинаковые параметры и находятся на границах классов. Из-за энергетических погрешностей они могут быть отнесены по ошибке не в свой класс, что существенно влияет на достоверность прогноза и может привести к аварийной ситуации.

Заключение. Полученные результаты имеют большие перспективы развития в самых различных областях техники, науки, медицины и образования: управление сложными современными производственными процессами, защита информации, виртуальное обучение в компьютерных сетях, прогноз природных и антропогенных катастроф.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самигулина Г. А* Исследование интервальных систем управления с применением подхода квазирасщепления // Математический журнал. Алматы: Институт математики, 2004. Т. 4, № 1(11). С. 155–160.
2. *Samigulina G. A., Chebeiko S. V.* Technology of elimination errors of the energy estimations of Artificial Immune Systems of the forecasting plague // Proceedings of the sixth International conference on Computational Intelligence and Natural Computation.Cary, North Carolina, USA. 2003. C. 1693–1696.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 622–623

УДК 532.517.4

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ

© М. А. Саттаров

msattarov@mail.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Излагается гидромеханическое представление автора об оценке осредненных характеристик потока на основе синтеза гипотез И. Буссинеска (J. Boussinesq, 1877) и О. Рейнольдса (O. Reynolds, 1895). В результате получена некоторая модификация уравнений среднего движения Навье – Стокса с новыми дифференциальными членами, коэффициенты которых выражают такие характеристики потока реальной несжимаемой жидкости как вихревая вязкость, длина пути смешения и частота турбулентности. При определенных упрощениях из этих уравнений вытекают феноменологические уравнения Буссинеска, Л. Прандтля (L. Prandtl, 1933), Т. Кармана (Th. v. Karman, 1934), М. Д. Миллионщикова (1969) [1, 2] и др.

В рамках предлагаемой теории, уравнение осредненного турбулентного течения в плоскости xOz запишем так [3]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}=X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\Big[(\mu+\varepsilon^0_{xz})u_z+\varepsilon'^0_{xz}u_z^2/2+...+\nu N(x,z)\Big],\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\end{aligned}\right\}$$

где u, w; u', w' — компоненты осредненной и пульсационной скорости, p, ρ и ν — давление, плотность и вязкость жидкости; X — проекция объёмных сил, $N(x,z)$ — напряжения, неучтенные при осреднениях; неизвестные $-\rho\overline{u'w'}$ и $-\rho\overline{w'u'}$ рейнольдсовы напряжения отражены в коэффициентах добавочных членов полученного уравнения:

$$\varepsilon^0_{xz}/\rho=\partial(-\overline{u'w'})/\partial(\partial u/\partial z)\Big|_0,\ \ \varepsilon'^0_{xz}/\rho=\partial^2(-\overline{u'w'})/\partial^2(\partial u/\partial z)\Big|_0\equiv L^2,$$

которые, имея размерности см^2/с и см^2, представляют собой вихревую вязкость Буссинеска и прототип длины пути перемешивания Прандтля – Кармана [1].

Для свободного равномерного турбулентного потока $(u_t=0)$, считая $w=u_x=0$ и $X=p_x=0$, получен первый интеграл уравнения двумерного движения:

$$\nu(1+\overline{\varepsilon}_{xz})u_z+\ldots+\nu N(x,z)-C_1=-L^2u_z^2/2\ ,\quad u(x,z)\equiv u(z)\ .$$

Отсюда, при определенных упрощениях непосредственно следуют известные уравнения полуэмпирических теорий турбулентности.

Первый интеграл уравнения установившегося турбулентного потока с градиентом давления в трубе $\big(\sigma=1,\ \xi^2=x^2+z^2\big)$ и в канале с параллельными стенками $(\sigma=0,\ \xi=z\le\pm R)$ имеет следующий вид:

$$u_\xi^2-2\theta(\xi)u_\xi+f(\xi)-I_*\xi=0\ ,$$

где $\theta(\xi)=(\nu+\varepsilon_b)/L^2$, $f(\xi)=(2\nu(N_{x\xi}-N_{x0}))/L^2$, $I_*=2gI/(1+\sigma)L^2$, $pgI=-\partial p/\partial x$, $\theta(\xi)\equiv\varepsilon_{xz}/L^2=1/\left[\partial(\ln\varepsilon_{xz})/\partial u_\xi\right]$ — частота турбулентности $\Big(\varepsilon_{xz}\equiv\partial(-\overline{u_i'u_j'})/\partial u_z>1\Big)$.

Решение нелинейного уравнения при граничном условии $u(R_e) = u_e$ дает закон распределения скоростей в напорных каналах:

$$u(\xi) - u_e = \int_{\xi}^{R_e} \left[\theta(\xi) \pm \sqrt{\theta^2(\xi) + I_*\xi - f(\xi)}\right] d\xi \ ,$$

где $u_e = \sqrt{\tau_0/\rho}$, τ_0 — касательное напряжение в точке $\xi = R_e$ на границе между тонким вязким подслоем и турбулентным потоком.

Далее, считая $\theta(\xi)$ и $f_0(\xi)$ в поле осредненных скоростей постоянными величинами, получим формулы осредненных характеристик турбулентного потока с градиентом давления. При этом, закон распределения скоростей имеет вид:

$$u = \theta R_e \left\{1 - \bar{\xi} - \frac{2}{3I_*\theta R_e}\left[\theta^3 - \sqrt{\left(\theta^2 + I_*\xi - f(\xi)\right)^3}\right]\right\} \ .$$

На оси потока $(\xi = 0)$ скорость достигает своего максимального значения:

$$u_{max} = \theta R_e \equiv \nu(1 + \bar{\varepsilon}_{xu})R_e/L^2.$$

Видно, что в формировании закона распределения скоростей вязкой несжимаемой жидкости, наряду с ньютоновской вязкостью решающую роль играют и вихревая вязкость ε_{xz} и длина L пути смешения, которые являются параметрами новых членов дифференциальных уравнений среднего движения. В частности, с учетом равенства $\bar{\varepsilon}_{xu} = 1 + \bar{\varepsilon}_{xz}$, при заданных значениях градиента скорости для вихревой вязкости имеем:

$$\varepsilon_{\bar{xz}} = \frac{N(\xi)(1+\sigma) + gI\xi/\nu}{(1+\sigma)\left|-du/d\xi\right|} - 1, \quad \bar{\varepsilon}_{xz} = \varepsilon_{xz}/\nu \ ,$$

а в поле средней скорости она определяется соотношением:

$$\bar{\varepsilon}_U = \frac{2^{\sigma} IRat_U}{4(1+\sigma)^2(3+\sigma)} - 1 \quad (Rat_U = Re_U/Fr_U) \ .$$

Показано, что вихревая вязкость $\bar{\varepsilon}_{bU}$ возникает при выполнении неравенств:

$$IRat_U > 2^{2-\sigma}(1+\sigma)^2(3+\sigma) \ \text{ или } \ Igd^2/U > 2^{2-\sigma}\nu(1+\sigma)^2(3+\sigma) \ ,$$

и, как реальная физическая характеристика турбулентного потока, является функцией отношения чисел Рейнольдса и Фруда $Rat_{cp} = Re_{cp}/Fr_{cp}$, которое можно считать обобщенным числом динамического подобия $Rat_{cp} = gd^2/\nu U$.

В рамках полученных здесь решений осредненных дифференциальных уравнений выполнен детальный анализ данных классических опытов И. Никурадзе (J. Nikuradze, 1932, 1933) [4] в гладких и шероховатых трубах, а также опытов автора в гладких трубах из различных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Проблемы турбулентности. Пер. статей Л. Прандтля, Т. Кармана, И. Никурадзе, О. Рейнольдса и др. с англ. под. ред. М. А. Великанова. М.: ОНТИ, 1936. 332 с.
2. *Миллионщиков М. Д.* Турбулентные течения в пограничном слое и в трубах. М.: Наука, 1969. 52 с.
3. *Саттаров М. А.* Гидромеханический метод оценки осредненных характеристик турбулентного потока // Доклады АН Республики Таджикистан. 2006. Т. 49, № 4. С. 321–327.
4. *Nikuradze J.* Stromungsgezetze in rauchen Rohren // VDJ Forschungsheft. 1933. № 361. P. 1–22.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 624–625

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ СВОБОДНОЙ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, $0<\alpha<1$

© Ш. С. Сахаев

dauyl@kazsu.kz

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Рассмотрим сосуд Ω, заполненный несжимаемой жидкостью, имеющий в начальный момент времени температуры. Пусть на поверхности $\partial\Omega \equiv S$ задана для $t>0$ распределение температуры и внутри $\Omega \subset R^3$ расположены источники тепла с данными удельным тепловым потоком. Температура жидкости в сосуде будет изменяться.

В силу неравномерной нагретости жидкости будет изменяться плотность (давление). Такой процесс называется свободной конвекцией.

Математическая постановка задачи. Ищутся вектор $\vec{v}(x,t)$ (скорость движения жидкости) и температура жидкости $\theta(x,t)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$\vec{v}_t - \nu\Delta\vec{v} + \sum_{k=1}^{3} \upsilon_k \vec{v}_{x_k} + \vec{\xi}\theta = \vec{f} - \nabla p, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \tag{2}$$

$$\theta_t - \Delta\theta + (\vec{v}, \nabla\theta) = g(x,t), \tag{3}$$

граничным

$$\vec{v}(x,t)\Big|_{x\in S} = 0, \qquad \theta(x,t)\Big|_{x\in S} = 0 \tag{4}$$

и начальным условиям

$$\vec{v}(x,t)\Big|_{t=0} = \vec{v}_0(x), \qquad \theta(x,t)\Big|_{t=0} = \theta_0(x). \tag{5}$$

Цель — доказательство однозначную разрешимость задачи (1)–(5) в классе Гельдера $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ с $0<\alpha<1$.

Если отбросить в уравнениях (1) и (3) нелинейные слагаемые, то задача (1)–(5) распадается на две линейные задачи. Эти линейные задачи в классе Гельдера изучены хорошо.

Сведем систему (1)–(5) в виде одного дифференциального уравнения. Пусть $\vec{f} \in \overset{0}{J}(\Omega)$, P — ортогональный (в $L_2(\Omega)$) проектор на $\overset{0}{J}(\Omega)$. Спроектируем обе части уравнения (1) на пространство $\overset{0}{J}(\Omega)$, чтобы исключить $\operatorname{grad} p(x,t)$. Полученные вместе с уравнением (3) можно записать в виде одного уравнения для вектора $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \theta \end{pmatrix}$ с четырьмя компонентами:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + A_0\vec{u} + K(\vec{u},\vec{u}) = \vec{F}, \tag{6}$$

где

$$A_0\vec{u} = \begin{pmatrix} \nu P\Delta\vec{v} - \vec{\xi}\theta \\ \Delta\theta \end{pmatrix}, \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ g \end{pmatrix},$$

$$K(\vec{u},\vec{u}) = \begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{3} v_k \vec{v}_{x_k} \\ \vec{v}\nabla\theta \end{pmatrix}.$$

Начальные условия (5) удобно свести к однородным, при этом в левой части (6) возникнут новые линейные члены. Пусть $\vec{u} = \begin{pmatrix} \vec{v}' \\ \theta' \end{pmatrix}$, где $\vec{v}'(x,t)$ и $\theta'(x,t)$ — какие-либо функции, удовлетворяющие условиям (4), (5) (их можно построить, например, решая линейные задачи).

Тогда для $\vec{U} \equiv \vec{u} - \vec{u}' = \begin{pmatrix} \vec{\omega} \\ \eta \end{pmatrix}$ получим уравнение

$$\frac{d\vec{U}}{dt} + A_0\vec{U} + 2K\left(\vec{u},\vec{U}\right) + K\left(\vec{U},\vec{U}\right) = \vec{F}_1,$$

где

$$K\left(\vec{u},\vec{U}'\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P\sum\limits_{k=1}^{3}\left(U_k\vec{U}'_{x_k} + U'_k\vec{U}_{x_k}\right) \\ \vec{U}\nabla\theta' + \vec{U}'\nabla\theta \end{pmatrix},$$

$\vec{F}_1 = \vec{F} - \vec{u}_t - A_0u' - K(\vec{u}',\vec{u}')|_{t=0} = K(\vec{u}',\vec{u}') = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ g_1 \end{pmatrix}$ принадлежат $\overset{0}{J}{}^{\alpha}(Q_T) \times \overset{0}{J}{}^{\alpha}(Q_T)$. Кроме того вектор-функция $\vec{U}(x,t)$ удовлетворяет начальному условию

$$\vec{U}(x,t)\Big|_{t=0} = 0, \tag{7}$$

а его компоненты $\vec{\omega}$ и η — нулевым краевым условиям.

Обозначим через $D^{2+\alpha}(Q_T)$ соленоидальных векторов из $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)\times C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$, удовлетворяющих нулевым краевым условиям и нулевым начальным.

Имеет место следующая (основная)

Теорема. *Пусть $S \in C^{3+\alpha}$. Если выполнены условие*

$$C_1^2C_2\min(1,T)\left|\vec{F}_1\right|_{Q_T}^{(\alpha)} \le \frac{1}{4}, \tag{8}$$

где C_1 — постоянная из оценки решения линейных задач, а C_2 — из оценки $|K(\vec{u},\vec{u})|_{Q_T}^{(\alpha)}$, то задача (6), (7) однозначно разрешима при $0 \le t \le T$ в классе $\underset{0}{D}{}^{2+\alpha}(Q_T)$ и для решения справедлива оценка

$$\left|\vec{U}\right|_{Q_T}^{(2+\alpha)} \le \frac{2C_1\left|\vec{F}_1\right|_{Q_T}^{(\alpha)}}{1 + \sqrt{1 - C_1^2C_2\min(1,T)\left|\vec{F}_1\right|_{Q_T}^{(\alpha)}}}. \tag{9}$$

Замечание. Условие (8) гарантирует разрешимость задачи (6), (7) при произвольном $\vec{F}_1(x,t) \in J^{\alpha}(Q_T)$ в цилиндре Q_T, высота T которого зависит от нормы $\vec{F}_1$ и неограниченно растет, когда эта норма стремится к нулю. Кроме того по любому $T > 0$ можно указать такое $M = M(T)$, что задача (6), (7) разрешима в $C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(Q_T)$ при любой $\vec{F}(x,t) \in J^{\alpha}(Q_T)$, норма которой меньше $M(T)$.

УДК 539.2+004.422.8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И КОМПЛЕКС ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

© М. Е. Семенов [*] **, С. Н. Колупаева**

[*] `isthis@yandex.ru`

Томский государственный архитектурно-строительный университет, Томск

Одним из подходов при создании математических моделей пластической деформации, учитывающих физические механизмы реализации пластичности, является использование систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) баланса деформационных дефектов. В этом случае, как правило, рассматривается однородная дефектная среда, а при записи явного вида дифференциальных уравнений рассматриваются физические, кристалло-геометрические, термодинамические и прочие свойства материала. По отношению к классическим моделям механики сплошной среды такого рода модели являются моделями, описывающими элемент среды. В работах [1–3] сформулированы математические модели, включающие уравнения баланса дислокаций и точечных дефектов различного типа для ГЦК металлов и дисперсно-упрочненных материалов с некогерентной второй фазой. Поскольку процессы генерации и аннигиляции деформационных дефектов являются существенно разноскоростными, переменные модели — разнопорядковыми и изменяющимися на интервале интегрирования на несколько порядков величины, системы ОДУ моделей [2, 3] являются жесткими. Для работы с моделями [1–3] создан комплекс прикладных программ Slip Plasticity of Face-Centered Cubic (SPFCC) [1, 4] с развитым интерфейсом пользователя (рис. 1).

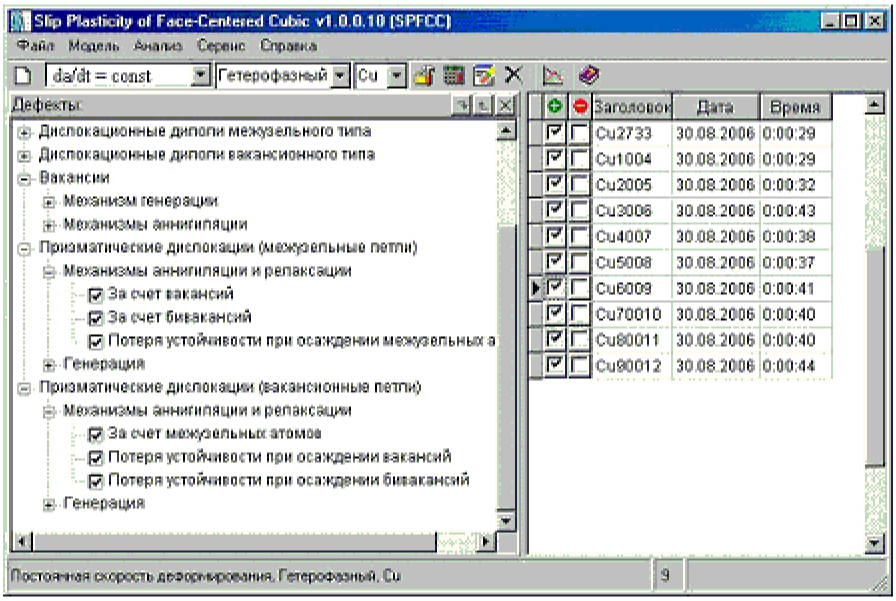


Рис. 1. Главное окно комплекса программ SPFCC.

Windows-подобный интерфейс пакета SPFCC позволяет исследовать процессы пластической деформации скольжения пользователю, не имеющему опыта программирования и работы с численными методами решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений [1, 4].

Пользователь может провести моделирование, используя как полную модель, так и сформировать редуцированную модель для различных внешних воздействий, в которой будут учтены дефекты и механизмы указанные им.

В качестве основного численного метода нахождения решения жестких систем ОДУ в комплексе программ используется неявный метод Гира переменного порядка [5]. Сложным обстоятельством при разработке алгоритма являлся тот факт, что правые части систем ОДУ могут быть кусочно-сшитыми, и их явных вид модифицируется в процессе вычислений при достижении определенных физических условий (соотношений между значениями переменных и параметров модели). Разработанные алгоритмы обеспечивают исследователю возможность работы с различным числом уравнений в одном сеансе работы с моделью (для различных деформирующих воздействий и материалов). Заметим, что метод Гира относится к классу неявных метолов, поэтому для старта потребовалось использование явного метода Адамса. В пакете реализовано хранение полученного решения с использованием вектора Нордсика. Это представление позволяет легко управлять как порядком метода, так и размером шага. Порядок метода Адамса может изменяться в программе с 1 по 12, а порядок метода Гира с 1 до 6.

Результаты тестирования расчетного блока на жестких задачах, аналитическое или табличное решения которых известны из литературы (задача Ван дер Поля, модель Робертсона, задача Крога) [6], свидетельствуют о надежности методов и алгоритмов, используемых в программе SPFCC.

Для каждого компьютерного эксперимента в базе данных кроме полного набора значений переменных системы с заданным пользователем шагом, хранятся значения параметров модели, описание типов дефектов и механизмов, учтенных пользователем при формировании модели, а также возможные комментарии.

В рамках сформулированной математической модели проведены расчёты, с использованием значений параметров, характерных для меди, никеля, алюминия. Кривые ползучести, полученные для постоянной нагрузки, существенно отличаются от кривых ползучести, полученных для постоянного напряжении. Кроме стадии I неустановившейся ползучести и следующей за ней стадии II с приблизительно постоянной скоростью деформации, которую можно условно отождествить со стадией установившейся ползучести, при постоянной нагрузке (растяжение) появляется еще и стадия III с катастрофически нарастающей скоростью.

Созданный программный комплекс может быть использован для численного описания физических процессов пластической деформации ГЦК материалов, возможно использование разработанных моделей совместно с моделями механики и моделями технологических процессов обработки материалов, а также для решения различных задач, требующих работы с жесткими системами дифференциальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Колупаева С. Н., Вихорь Н. А., Семенов М. Е.* Математическая модель и комплекс программ для исследования пластической деформации скольжения в ГЦК материалах // Материалы IX международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки"(23–27 октября 2006). Т. 2, часть 1. Под общей редакцией академика Садовничего В. А., профессора Кудрявцева В. В., профессора Михалева А. В. М.: Издательство МГУ, 2006. С. 150–153.
2. *Колупаева С. Н., Семенов М. Е., Пуспешева С. И.* Математическое моделирование температурной и скоростной зависимости деформационного упрочнения ГЦК-металлов // Деформация и разрушение материалов. 2006. № 4. С. 40–46.
3. *Ковалевская Т. А., Колупаева С. Н., Попов Л. Е.* Математическое моделирование пластической деформации скольжения в дисперсно-упрочненных материалах // Структурно-фазовые состояния и свойства металлических систем. Томск: Изд-во НТЛ, 2004. С. 135–163.
4. *Семенов М. Е. Колупаева С. Н.* Свидетельство об официальной регистрации программы SPFCC для ЭВМ № 20055612381. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 12.09.2005.
5. *Брайтон Р., Густавсон Ф.* Новый эффективный алгоритм для решения дифференциальных систем // Труды института электро- и радиоинженеров. 1972. Т. 60, № 1. С. 124.
6. *Gear C. W.* Numerical Initial Value Problem in Ordinary Differential Equations // Englewood Cliffs. N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1971. P. 253.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 628–630

УДК 167/168.0001.8+514.8:517.91/.93/.958:519.1/.6/.7+53

ТДИС В ОСМЫСЛЕНИИ И УСОВЕРШЕНСТВОВАНИИ АППАРАТА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

© В. П. Сизиков*, В. И. Разумов**

* sizikov@ofim.oscsbras.ru, ** V_I_Razumov@rambler.ru

* *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Омск;*
** *Омский государственный университет, Омск*

Многочисленные положения квантовой механики далеки от классических представлений, кажутся вымышленными и абсурдными. Это связано с тем, что классическая механика имеет дело с практически неизменной или медленно меняющейся системой, с изучением внешнего поведения системы при почти полном игнорировании ее внутреннего развития. А для квантовой механики характерны относительно быстро сменяющие друг друга сценарии поведения ансамблей частиц, когда внутренним развитием системы пренебрегать нельзя. Есть основания полагать, что язык квантовой механики требует работы с ассоциациями типа перераспределения некого ресурса, которые в классике являлись, в лучшем случае, лишь следствиями моделей на уровне их инвариантных характеристик. И здесь проблемы квантовой механики перекликаются с проблемой построения алгоритмических моделей на базе теории динамических информационных систем (ДИС, ТДИС) [1].

Алгоритмическая модель в лице ДИС D представляет орграф G с двумя типами ребер (ведущими d-ребрами, контролирующими c-ребрами) и с процессом PIF перераспределения некого фундаментального двухтипового (активного r, пассивного q) ресурса, именуемого информацией, по ребрам между вершинами орграфа G. При этом PIF есть последовательность компонентов по три независимых акта: A_c — сбор актива в пассив по c-ребрам, A_t — трансформация пассива в актив в некоторых вершинах, A_d — перераспределение актива по d-ребрам, а показатели проводимости ребер и условий трансформации могут меняться от компонента к компоненту. PIF не меняет общего количества информации, пока ДИС D не получит связь с ее внешним окружением, не явится частью более широкой ДИС.

То, что в квантовой механике толкуется как комбинация серии независимых состояний системы [2], соответствует постулату распределения ресурса по вершинам ДИС D как орграфа G. Комплексные множители в комбинации состояний есть аналоги пар (r, q) значений актива и пассива в вершинах ДИС D. Эволюция распределения ресурса по вершинам ДИС D вправе выступить как дискретный вариант описания эволюции состояния квантовой системы в соответствии с уравнением Шредингера.

Аналогичная картина складывается в сопряженном варианте описания эволюции квантовой системы, исходящего от пространства импульсов. В ДИС импульс представляется серией ребер, связывающих вершины. Независимые элементы в пространстве импульсов — это всевозможные пары противоположно направленных d- и c-ребер между произвольными фиксированными парами вершин ДИС, а их комплексные множители — пары $(f_d r_d, f_c r_c)$ величин проводимого этими реберами ресурса из соответствующей вершины за время фиксированного компонента PIF. Здесь f_d, f_c — значения относительных проводимостей указанной пары d- и c-ребер, а r_d, r_c — величины активного ресурса в вершине, из которой забирается этот ресурс, в начале соответственно актов A_d, A_c PIF ДИС [1]. Эволюция всех таких пар величин перераспределения ресурса по ребрам ДИС вправе рассматриваться как дискретный вариант описания эволюции импульса квантовой системы в соответствии с уравнением Шредингера.

Варианту классической механики для точечного тела соответствует случай вырождения ДИС в цепочку d-ребер, возможно, замкнутую, но без ветвлений. Здесь каждый компонент PIF сопровождается "чистыми" состоянием и импульсом. В общем же случае ветвления неизбежны, причем, согласно ТДИС, ветвления присутствуют практически всюду хотя бы из-за

наличия в ДИС двух типов ребер. А тогда всякой редукции на классический вариант с "чистыми" состоянием и импульсом не может хватить для однозначной определенности даже самих этих состояния и импульса в зоне ветвления. Необходимо достигать знания состояния ДИС в целом или идти обходными путями. Здесь следует добавить, что работа c- и d-ребер в ДИС происходит не одномоментно, а со сдвигом по фазе. Это делает возможным объяснить, почему при редукции величина измеренной амплитуды оказывается равной не сумме координат у представительной пары, а вычисляется согласно теореме Пифагора, модулю комплексного числа, как и величина амплитуды гармоники фиксированной частоты при представлении этой гармоники в виде суммы $\sin$- и $\cos$-компонентов.

Существенно новую ситуацию приносит учет феномена вращения, тесно переплетающийся также с проблемой учета формы или конфигурации тела. Общий случай такой ситуации не прост из-за эффектов нелинейности и бифуркации [3], поэтому он часто игнорируется даже в рамках классической механики, а в рамках квантовой механики сведен к эффекту спина с парадоксальными свойствами, когда нетривиальные состояния могут быть сразу и противоположными и ортогональными [2].

В случае относительной стабильности вращения его влияние на внешнее поведение системы все равно что отсутствует. Но даже при косвенном нарушении такой стабильности вращение активно проявляет себя и может спровоцировать бифуркацию, перестройку в более широкой системе. В переводе на язык ТДИС это означает, что феномен вращения работает через пассив q, заимствуя c-ребра и акты A_c, A_t PIF. Классическая механика этого не предусматривает, вынуждая формировать взамен новые теории чуть ли не под каждую систему отдельно.

Далее, при отсутствии стабильности вращения уместно само "точечное" тело дифференцировать на более мелкие составляющие и рассмотреть получаюшуюся модель тела с позиций квантовой механики и ТДИС. Но и квантовая механика, несмотря на использование комплексных множителей, не предусматривает аналогов актов A_c, A_t в ДИС, оттого учет эффекта спина тоже успел породить серию различных теорий. В переводе на язык ТДИС эффект спина характеризует работу актов A_c, A_t в PIF системы как ДИС. Двухполюсность спина есть лишь отражение двух условно противоположных явлений притока и оттока ресурса по отношению к любому локальному месту при актах A_c. Кроме того, акты A_t выступают аналогами внутренней редукции в системе, не имея прямого отношения к процедурам измерения, производимым внешним субъектом. Не предусматривая аналогов актов A_c, A_t в ДИС, квантовая механика оказывается в неопределенности с механизмами внутренней редукции в системе [2].

Вполне вероятно, что аппарат ТДИС и разработка на его базе алгоритмических моделей в ранге ДИС могут помочь в осмыслении и усовершенствовании аппарата квантовой механики. Серии примеров PIF ДИС дают много сходного с поведением квантовой системы. Но не удается определиться, какую модель в ранге ДИС можно счесть достаточной для описания некой реальной квантовой системы. Здесь важен встречный вектор взаимодействия со стороны специалистов по квантовой механике. А пока приходится продвигаться, исходя из общих соображений и понятий [4].

В рамках сказанного уместно [2] также поставить вопрос о применении в серии задач классической механики, прежде всего, механики сплошных сред сформированного в квантовой механике подхода к работе со сценариями поведения ансамблей частиц. Осмысление и усовершенствование аппарата квантовой механики с помощью аппарата ТДИС может сделать эффективными также обсчеты процессов, на изучение которых направлены усилия классической механики. Определенное обоснование последнему давалось в [3] и в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Разумов В. И., Сизиков В. П.* Основы теории динамических информационных систем. Омск: ОмГУ, 2005. 212 с. newasp.omskreg.ru/tdis/.
2. *Пенроуз Р.* Новый ум короля: о компьютерах, мышлении и законах физики. Пер. с англ. / Общ. ред. В. О. Малышенко. Предисл. Г. Г. Малинецкого. Изд. 2-е. М.: Едиториал УРСС, 2005. 400 с.
3. *Сизиков В. П.* Конфигурация приоткрывает завесы в физике // Омский научный вестник. 2003. № 4(25). С. 74–78.
4. *Razumov V. I., Sizikov V. P., Sizikova L. G.* The genetically caused logic structures // The 9th Asian logic conference: Abstracts. Novosibirsk, Russia. 2005. P. 120–121.
5. *Сизиков В. П., Разумов В. И.* Алгоритмические модели систем – новый инструментарий прикладной математики // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12, вып. 2. С. 512.

УДК 536.46

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ПРЕВРАЩЕНИЯ В ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЕ

© С. Н. Сорокова*, А. Г. Князева

* s_sorokova@mail.ru

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Рассматривается задача о распространении стационарного фронта превращения в вязкоупругой среде. Предполагается, что поток тепла удовлетворяет закону Фурье, а компоненты тензоров напряжений и деформаций связаны обобщенными соотношениями Максвелла, включающими коэффициент динамической вязкости [1]. Система уравнений имеет две особые стационарные точки: холодную и горячую. Тип точек меняется при варьировании параметров модели (устойчивый или неустойчивый узел и седло). Так как единый алгоритм, пригодный для численного решения задачи во всей области изменения параметров, построить не удается, для построения алгоритма численного решения систему уравнений раскладываем в ряд по малому параметру в двух предельных случаях (большого и малого времен релаксации вязких напряжений). Далее численно решаем полученные системы уравнений для двух предельных случаев методом стрельбы из области продуктов в область реагентов, варьируя значения температуры продуктов и скорости. Сами системы уравнений решаются явным методом Рунге-Кутта – Мерсона 5 порядка точности. Первое приближение для температуры продуктов и скорости определяется из асимптотического решения полученного ранее [2]. Результатом численного решения являются распределения температуры, степени превращения и компонентов напряжений и деформаций, отличных от нуля, а также зависимости скорости фронта и температуры продуктов от параметров модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Князева А. Г., Дюкарев Е. А.* Модель распространения стационарного фронта превращения в вязкоупругой среде // Физика горения и взрыва. 2000. Т. 36, № 4. С. 41–51.
2. *Князева А. Г., Сорокова С. Н.* Стационарные режимы превращения в вязкоупругой среде // Физика горения и взрыва. 2006. Т. 42, № 5. С. 63–73.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 632–633

УДК 519.86 : 53.072

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДВУХПУЧКОВОГО ЛАЗЕРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

© В. Н. Старков*, А. С. Политыло

* vjachnikstar@svitonline.com

Институт физики НАН Украины, Киев, Украина

Важнейшим физическим результатом последних лет в динамической голографии явилось экспериментальное обнаружение и теоретическое обоснование существования оптической бистабильности, которое позволяет исследовать физические процессы в условиях, далеких от равновесных состояний [1, 2]. Оптическая бистабильность привлекает внимание исследователей перспективами создания новой технологии конструирования и производства различных элементов оптических систем обработки информации.

Математическая модель стационарного четырехпучкового обращения волнового фронта световых пучков в электрооптических кристаллах с диффузионной нелинейностью при условии, что волна $v_2(x)$ некогерентна к волнам $v_1(x)$ и $v_3(x)$, может быть представлена краевой задачей относительно интенсивностей $v_i(x) \in C^{(1)}(0,a) \cap C[0,a]$ и разности фаз $\Phi(x) \in C^{(1)}(0,a) \cap C[0,a]$ [2]:

$$v_1' = -v_3' = v_0^{-1}\left[v_1 v_3 + \mu(v)\cos\Phi\right], \quad v_2' = -v_4' = v_0^{-1}\left[v_2 v_4 + \mu(v)\cos\Phi\right],$$

$$\Phi' = \delta + (2v_0)^{-1}\left(v_3^{-1} + v_4^{-1} - v_1^{-1} - v_2^{-1}\right)\mu(v)\sin\Phi, \quad x \in (0,a), \tag{1}$$

где $x = 2x'k_0\,\Delta\chi/\cos\vartheta -$ безразмерная координата по толщине кристалла, x' — размерная координата, $\delta = \chi\sin 2\vartheta/(4\,\Delta\chi)$ — параметр рассогласования, $k_0 = 2\pi/\lambda$ — волновое число, $\Delta\chi$ — амплитуда модуляции показателя преломления диффузионным полем, $\mu(v) \equiv \left(\prod_{i=1}^{4} v_i\right)^{1/2}$, $v_0 \equiv \sum_{i=1}^{4} v_i(x)$ — суммарная интенсивность, 2ϑ — угол схождения $v_1(x=0) = v_{12}$ — опорной и $v_3(x=0) = v_{32}$ — сигнальной волн; $v_2(x=a) = v_{21}$ — встречная опорная волна; $v_4(x=a) = 0$; $\Phi(x=a) = \Phi_0$. В работе [3] доказана

Теорема. *Введение искомой функции $z(x)$ такой, что*

$$v_1(x) = \alpha\sin^2\left[(z(x)+\eta)/2\right], \quad v_2(x) = \beta\cos^2(z(x)/2), \quad \alpha = v_{12}+v_{32}, \quad \beta = v_{21}+v_{41},$$

$$v_3(x) = \alpha\cos^2\left[(z(x)+\eta)/2\right], \quad v_4(x) = \beta\sin^2(z(x)/2), \tag{2}$$

позволяет свести краевую задачу для системы (1) к решению трансцедентного уравнения:

$$[1 + \cos(z_1+\theta)]\,[1 - \cos(z_2+\theta)] - e^{-ar}[1 - \cos(z_1+\theta)]\,[1 + \cos(z_2+\theta)] = 0,$$

где $z(x) = 2\,\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\left((z_1+\theta)/2\right)\exp\left(r(x-a)/2\right)\right] - \theta$, $z_1 = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{v_{41}/v_{21}}$,

$$\theta = \mathrm{arctg}\left[\alpha\sin B\,(\alpha\cos B - \beta)^{-1}\right], r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos B}, z_2 = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{v_{12}/v_{32}} - B. \tag{3}$$

Одним из следствий теоремы является возможность анализа условий появления многозначного (S-образного) характера зависимости интенсивности обращенной волны $v_4(0)$ от интенсивности сигнальной волны $v_3(0)$.

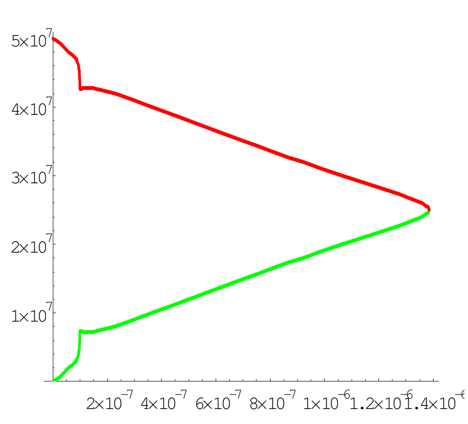


Рис. 1.

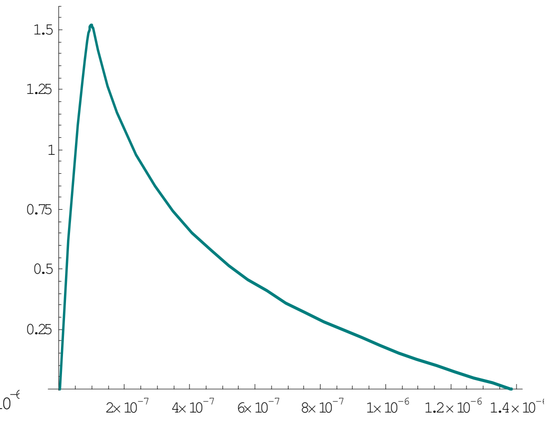


Рис. 2.

Разработчиков оптических систем обработки информации интересуют вопросы поведения бистабильных состояний во времени, проблемы устойчивости стационарных состояний. Возникает задача исследования нестационарных эффектов при четырехпучковом обращении волнового фронта. Первым этапом на пути ее решения является исследование математической модели нестационарного двухпучкового энергообмена при записи просветных динамических голограмм. Рассматривается модель, суть которой состоит в описании нелинейным интегральным уравнением Вольтерра нестационарного энергообмена между двумя попутными волнами в среде с локальным нелинейным откликом при учете времени его релаксации относительно комплексной функции $w\,(x,t)$ [4, 5]

$$w\,(x,t) = -ik\eta \int\limits_0^x \int\limits_0^t v_0\,(\tau)\,\sqrt{1-|w\,(z,t)|^2}\,w\,(z,\tau)\exp\left[(\tau-t)\,/T\right]\,d\tau\,d\,z + w_0\,(t), \qquad (4)$$

где $w_0\,(t) = w\,(x=0,t)$. Наряду с компактностью и четкой физической интерпретацией такая модель позволяет достаточно просто получить приближенное решение задачи. Через $w\,(x,t)$ можно определить разность фаз $\Phi\,(x,t)$, интенсивности $v_{1,2}\,(x,t)$ и амплитуду решетки диэлектрической проницаемости $\Delta\varepsilon\,(x,t)$.

При разработке алгоритма численного решения уравнения (4) необходимым условием проверки достоверности его программной реализации является наличие тестового примера нахождения искомой функции. В работе подробно обсуждаются результаты вычислительного эксперимента с предложенной математической моделью. В качестве примера приближенного решения уравнения (4) в аналитической форме построена вторая итерация $w_2\,(x,t)$, когда за нулевое приближение принимается функция

$$w_0\,(x,t) = w_0\,(t) = 2\sqrt{y\,(1-y)}, \quad y = \exp\,(-t/2T)\,.$$

Распределение интенсивностей $v_{1,2}^{(2)}\,(0.2,\ t)$ и разность фаз $\Phi^{(2)}\,(0.2,\ t)$ показаны на рис. 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гиббс Х.* Оптическая бистабильность: Пер. с анг. М.: Мир, 1988. 520 с.
2. *Кухтарев Н. В., Старков В. Н.* Оптическая бистабильность при обращении волнового фронта световых пучков в электрооптических кристаллах с диффузионной нелинейностью // Письма в ЖТФ. 1981. Т. 7, вып. 11. С. 692–695.
3. *Старков В. Н.* О многозначности решения задачи обращения волнового фронта лазерных пучков в электрооптических кристаллах. Препр. АН СССР. ВЦ СО, "Вычислит. математика"; № 2. Красноярск: 1982. С. 41–42.
4. *Старков В. Н.* Нелинейные интегральные уравнения в задачах динамической голографии // Тез. доп. Мiжнар. конф. "Асимптотичнi та якiснi методи в теорiї нелiнiйних коливань". К.: Iн-т математики НАН України, 1997. С. 165–166.
5. *Старков В. Н.* Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев: Наук. думка, 2002. 264 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 634–635

УДК 519.1

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСПОЗНАВАНИЯ ПРЕДФРАКТАЛЬНОГО ГРАФА

© И. Х. Утакаева

utakaev@yandex.ru

Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, Черкесск

Задачи распознавания объектов и явлений в настоящее время получают все большее распространение, и трудно назвать такую отрасль науки или сферу производства, где они не используются или не будут использоваться в ближайшие годы, в связи с этим вызывает интерес ее постановка и исследование.

В данной работе рассматривается задача распознавания предфрактального графа [1, 2] $G=(V,E)$ с непересекающимися старыми ребрами, когда имеются две полные затравки [2] $H_1=(W_1,Q_1)$ и $H_2=(W_2,Q_2)$, где мощности множеств вершин $\mid W_1\mid = n$, $\mid W_2\mid = n+1$. Количество ребер затравок соответственно вычисляется по формулам $q_1 = \mid Q_1 \mid = \frac{n(n-1)}{2}$, $q_2 = \mid Q_2 \mid = \frac{n(n+1)}{2}$. Затравки H_1 и H_2 являются однородными графами степени $degH_1 = n-1$ и $degH_2 = n$. Причем процедура замещения вершины затравкой [2] производится на нечетных этапах затравкой $H_1=(W_1,Q_1)$, а на четных $H_2=(W_2,Q_2)$. Исходя из определения предфрактального графа и принципа построения $G=(V,E)$, получаем формулу для вычисления количества вершин на ранге L:

$$\mid V_L \mid = \begin{cases} n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}}, & \text{при } L \text{ — четном,} \\ n^{\frac{L+1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}}, & \text{при } L \text{ — нечетном,} \end{cases} \tag{1}$$

Найдем количество ребер данного предфрактального графа

$$\mid E_L \mid = \begin{cases} (q_1+q_2n)\frac{n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}}-1}{n(n+1)-1}, & \text{если } L \text{ — четное,} \\ (q_1+q_2n)\frac{n^{\frac{L-1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}}-1}{n(n+1)-1} + n^{\frac{L-1}{2}}(n+1)^{\frac{L-1}{2}}q_1, & \text{если } L \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

Справедливы следующие

Теорема 1. *Пусть $G=(V,E)$ — предфрактальный граф четного ранга L, тогда его множество вершин V разбивается на два подмножества V_1 и V_2, где V_1 составляют вершины, степень которых равна $(n+1)$, а V_2 составляют вершины, степень которых равна n. При этом мощности этих множеств определяются соотношениям:*

$$\mid V_1 \mid = 2(q_1+q_2n)\frac{n^{\frac{L-2}{2}}(n+1)^{\frac{L-2}{2}}-1}{n(n+1)-1} + 2n^{\frac{L-2}{2}}(n+1)^{\frac{L-2}{2}}q_1,$$

$$\mid V_2 \mid = n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}} - 2(q_1+q_2n)\frac{n^{\frac{L-2}{2}}(n+1)^{\frac{L-2}{2}}-1}{n(n+1)-1} - 2n^{\frac{L-2}{2}}(n+1)^{\frac{L-2}{2}}q_1;$$

где $q_1 = \mid Q_1 \mid$, $q_2 = \mid Q_2 \mid$ — количества ребер затравок H_1 и H_2.

Теорема 2. *Пусть $G=(V,E)$ — предфрактальный граф нечетного ранга L, тогда его множество вершин V разбивается на два подмножества V_1 и V_2, где V_1 составляют вершины, степень которых равна $n+1$, а V_1 составляют вершины, степень которых равна n. При этом мощности этих множеств определяются соотношениями:*

$$\mid V_1 \mid = 2(q_1+q_2n)\frac{n^{\frac{L-3}{2}}(n+1)^{\frac{L-3}{2}}-1}{n(n+1)-1} + 2n^{\frac{L-3}{2}}(n+1)^{\frac{L-3}{2}}q_1,$$

$$| V_2 |= n^{\frac{L}{2}}(n+1)^{\frac{L}{2}} - 2(q_1+q_2n)\frac{n^{\frac{L-3}{2}}(n+1)^{\frac{L-3}{2}}-1}{n(n+1)-1} - 2n^{\frac{L-3}{2}}(n+1)^{\frac{L-3}{2}}q_1.$$

Лемма. *Пусть в предфрактальном графе* $G_n^{n+1}=(V,E)$ *две вершины* v_1 *и* v_2 *, принадлежат одной затравке* $H=(W,Q)(v_1,v_2\in W)$ *, и имеют смежность с некоторой вершиной* $v\in V$ *, тогда вершина* v *, также принадлежит этой затравке.*

Для решения поставленной задачи распознавания предфрактального графа с непересекающимися старыми ребрами предлагается алгоритм α_1 , состоящий из этапов $p=1,2,\ldots,L-1$, которые взаимнооднозначно соответствуют текущим графам G_l, $l=2,\ldots,L$, траектории [2]. На входе этапа p рассматривается граф G_l , где $l=L-p+1$ и выделяются затравки, состоящие из ребер ранга l . Затем, каждая из этих затравок стягивается в вершину. Полученный в результате текущий граф G_l , представляется на вход этапа $l-1$.

Этап $p=1$ начинает свою работу с проверки выполнения равенства (1). Если это равенство не выполняется, то алгоритм α_1 заканчивает работу безрезультатно. В противном случае, в графе G выделяются множества V_1 , состоящее из вершин степени $n+1$, и V_2 , состоящее из вершин степени n . Если разность $V\setminus(V_1\cup V_2)\neq\Theta$, то алгоритм заканчивает работу безрезультатно. В противном случае, V_1 и V_2 образуют разбиение множества V и, дальнейшая работа этапа $p=1$ состоит из m_0 шагов, где m_0 — число таких затравок, каждая из которых состоит из новых ребер.

Результатом каждого такого шага является выделенная в графе G очередная затравка. Процедуру выделения затравки $H_1=(W_1,Q_1)$ $(H_2=(W_2,Q_2))$ обозначим через β_1 (β_2) . Исходя из принципа построения предфрактального графа G , будем применять ту или иную процедуру: если длина траектории заданного предфрактального графа L — четная, то на последнем шаге было замещение затравкой , поэтому на первом этапе следует воспользоваться процедурой β_1 , — в противном случае процедурой β_2 . На последующих этапах процедуры будут чередоваться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емеличев В. А. и др.* Лекции по теории графов. М., 1990. 384 с.
2. *Кочкаров А. М.* Распознавание фрактальных графов: Алгоритмический подход. Нижний Архыз: РАН САО, 1998. 170 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 636–637

УДК 536.212.2

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ФЕРМЫ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ГАЗОВОЙ РЕЗКИ

© А. Г. Хакимов

hakimov@anrb.ru

Институт механики УНЦ РАН, Уфа

Введение. Проведение монтажных и демонтажных работ с помощью газовой резки на работающих силовых элементах конструкции сопряжено с нагревом и перераспределением напряжений в них, что может повлечь нарушение условий их прочности.

Например, выполнение технологической операции газовой резки несиловых элементов конструкции, контактирующих с важными силовыми стержнями стропильной фермы сопряжено с нагревом этих элементов и уменьшением их несущей способности, что может привести к обвальному разрушению кровли производственного корпуса комбината. Поэтому необходимо моделирование этого технологического процесса с учетом действующих сил, температурного поля и напряженно-деформированного состояния конструкции. При выполнении демонтажа приходится проводить газовую резку элементов силовых конструкций. При газовой резке двутавровых элементов на максимально близком расстоянии δ от силового элемента фермы происходит нагрев этих элементов. Поэтому моделируется нестационарное температурное поле в пластинке, подвергающейся газовой резке [1–3].

Постановка задачи. В двумерной постановке рассматривается нестационарное тепловое состояние пластинки, подвергающейся газовой резке, с целью определения температурного поля для дальнейшего нахождения термонапряженного состояния пластинки. Стальная пластинка толщиной h имеет теплоизолированные границы и поверхности. Такое допущение о теплоизолированных поверхностях позволяет получить результаты с завышением значений температуры в отдельных точках пластинки, что пойдет в запас прочности рассматриваемой реальной фермы.

Уравнение теплопроводности имеет вид

$$\rho C\frac{\partial T}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)+\frac{W}{\Delta x\Delta y h}-\frac{\alpha_1\left(T-T_b\right)+\sigma_0\psi a_r\left(T^4-T_b^4\right)}{h},$$

где T, T_b — температура элемента пластинки и окружающего воздуха, ρ, C, λ — плотность, удельная теплоемкость и коэффициент теплопроводности материала пластинки; W — мощность пламени установки газовой резки, x, y — прямоугольные декартовые координаты, t — время, Δx, Δy — приращения координат x, y, $\sigma_0 = 5,67032\cdot 10^{-8}$ вт/(м^2 · К^4) — постоянная Стефана – Больцмана, ψ — коэффициент эффективности радиационных поверхностей зоны, a_r — степень черноты поверхности, α_1 — коэффициент конвективного теплообмена между пластинкой и воздухом. Вне зоны резки $W=0$. На границе пластинки выполняется условие

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial n}=0\,,$$

где n — внешняя нормаль к границе.

Начальные условия. В начальный момент времени известно поле температур, равное 20^0 С.

В пластинке происходят следующие тепловые процессы: подвод тепловой энергии мощностью W к ячейке пластинки площадью $\Delta x\Delta y$, передача тепла за счет теплопроводности, конвективный теплообмен и теплообмен излучением между поверхностью пластинки и окружающей средой (воздухом). Задача решается численно. По заданному полю температур в

момент времени t_i и шагу по времени Δt определяется поле температур в момент времени t_{i+1}. В данном примере задается мощность установки газовой резки W. Коэффициент теплообмена пластинки и воздуха α_1 принят равным нулю. Удельная теплоемкость материала пластинки равна 450 Дж/кг$\cdot$K, плотность материала пластинки 7800 кг/м^3, коэффициент теплопроводности пластинки λ = 51,1 Вт/м $\cdot$K. Температура окружающего воздуха [2] на большом удалении от стенки T_b = 20^{0}C. Коэффициент эффективности радиационных поверхностей пластинки $\psi = 0.1$, степень черноты поверхности пластинки $a_r = 0.15$. Толщина пластинки $h = 10$ мм, $\Delta x = $ 10 мм, $\Delta y = $ 10 мм. Начальные температуры всех элементов системы равны 20^{0}C. При достижении температуры ячейки 1500^{0}C начинается нагрев следующей ячейки. С увеличением полезной мощности газовой горелки увеличивается скорость резки. Расчеты показывают, что при полезной мощности газовой горелки 3 кВт за десять секунд горелка прорезала пластинку на 3 см. При данной полезной мощности установки газовой резки безопасное расстояние от силовых элементов может быть принято равным 20 мм. С учетом запаса безопасное расстояние от силовых элементов может быть принято равным 30 мм. Причем на расстоянии 20 мм температура пластинки не превышает 200^{0}C. При таком распределении температур в пластинке при газовой резке несущая способность металла стропильной фермы практически не изменяется.

На рис. 1 приводится поле температур в пластинке через двенадцать секунд резки при полезной мощности газовой горелки 2 кВт и ширине прорези 5 мм.

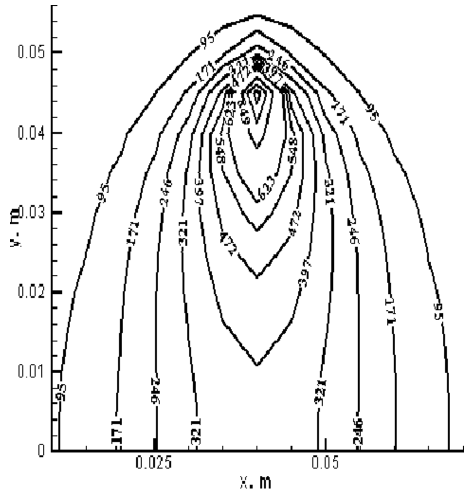


Рис. 1. Поле температур в пластинке через двенадцать секунд резки.

Выводы. На основе проведенных исследований даются выводы о напряженно-деформированном состоянии конструкции при выполнении этой технологической операции газовой резкой. Проведенные расчеты позволяют сделать вывод о том, что уменьшение ширины прорези в два раза скорость резки увеличилась примерно в два раза, а поле температур на расстоянии 27,5 мм от линии резки практически одинаковы и равны 90^{0}C. Моделирование нестационарного теплового поля в пластинке позволяет сделать следующие выводы: с учетом запаса безопасное расстояние от силовых элементов может быть принято равным 30 мм или равным трем толщинам листового материала; при таком распределении температур в пластинке при газовой резке несущая способность металла стропильной фермы практически не изменяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Блох А. Г., Журавлев Ю. А, Рыжков Л. Н.* Теплообмен излучением. Справочник. М.: Энергоатомиздат, 1991. 432 с.
2. *Варгафтик Н. Б.* Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
3. *Кулинченко В. Р.* Справочник по теплообменным расчетам. К.: Тэхника, 1990. 165 с.

УДК 621.6.03

МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИКИ УСТАНОВКИ ДЛЯ ОЧИСТКИ ЖИДКОСТИ ЦЕНТРОБЕЖНОГО ПРИНЦИПА ДЕЙСТВИЯ

© И. Ю. Хасанов [*], И. А. Калиев [**], М. Ф. Мугафаров [***], Г. С. Сабитова [**], Н. Х. Файзуллин [*], Г. И. Хасанова [**]

[**] mmf@mail.rb.ru

[*] *ООО НПЦ «Шэрыкъ», Салават;*
[**] *Стерлитамакская государственная педагогическая академия, Стерлитамак;*
[***] *Уфимский государственный авиационный технический университет, Ишимбай*

В настоящее время отсутствует эффективная техника и технология отделения механических примесей в потоке нефти и нефтепродуктов. Присутствие примесей, таких как песок, глина, частицы породы, окалины, ржавчина осложняет работу технологического оборудования при транспортировке и хранении. В целях улучшения работы нефтеперекачивающих станций нами предлагается модель установки, позволяющей улавливать примеси в потоке нефти.

В предлагаемом устройстве жидкость течет в канале, образованном витками неподвижно закрепленного шнека и внешней цилиндрической поверхностью, где поток закручивается. Под действием центробежного поля происходит разделение потока с выделением твердых частиц в пристеночную область с целью их последующего удаления [1, 2]. В отличие от известных шнековых и роторных центрифуг в данном устройстве шнек проектируется неподвижно закрепленным. Закручивание жидкости происходит за счет энергии самого набегающего потока.

В силу вязкости среды и значительной площади поверхности канала поток описывается полной стационарной неоднородной системой уравнений Навье – Стокса. В качестве граничных условий во «входном» сечении задается полная скорость; на «выходе» – значение тензора напряжения на векторах внешней нормали. На всех остальных границах области, таких как поверхность шнека, стенка фильтра, задается условие прилипания. В качестве объемной силы учитывается сила тяжести. Приближенные методы интегрирования подобных задач в областях простейшей геометрии рассмотрены многими авторами, однако гидродинамика потоков в шнековых каналах остается сложным и малоизученным вопросом.

На первом этапе проводится дискретизация задачи с помощью метода конечного элемента с использованием адаптивной сетки. После этого полученная система алгебраических уравнений с разреженной матрицей решается итерационным методом. Результатом расчетов являются значения компонент вектора скорости и давления в вершинах элементарных пирамид. На заключительном этапе полученное дискретное решение интерполируется на всю расчетную область.

Проводимое моделирование имеет целью установить зависимость между характерными размерами шнековой установки, «входного» потока, полной скорости потока на «выходе» и крупности разделения твердых частиц. Путем варьирования величины шага шнековой линии и числа витков требуется придать угловой скорости потока на выходе значение, обеспечивающее заданную крупность разделения d_k. Это означает, что все частицы диаметром более d_k будут осаждены, что в свою очередь существенно повысит износоустойчивость агрегатов магистральных трубопроводов. Расчеты проводились в случаях горизонтального и вертикального расположения устройства. В результате серии численных экспериментов получены параметры устройства с крупностью разделения 0.5 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хасанов И. Ю., Файзуллин Н. Х., Гималетдинов И. М., Черных Ю. А., Гареев М.М., Нагаев Р. З.* Патент 2263531 Россия, МПК B01D29/11. Фильтр поточный для очистки жидкостей от механических примесей // Опубл. 10.11.2005. БИ т 31.
2. *Файзуллин Н. Х., Хасанов И. Ю., Калиев И. А, Мугафаров М. Ф.* Фильтр для очистки жидкостей от механических примесей центробежного принципа действия // Материалы конференции «Нефтегазопереработка и нефтехимия – 2006», Уфа. 2006. С. 302–303.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 640–641

УДК 533.6.011 + 517.948.34

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СДВИГОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

© А. К. Хе

alekhe@hydro.nsc.ru

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

Рассматриваются стационарные трехмерные течения тяжелой идеальной жидкости над ровным дном со свободной поверхностью. Система уравнений, описывающая стационарные длинные волны, не приводится к дивергентному виду. Было замечено (В. М. Тешуков, А. К. Хе), что уравнения течения можно привести к виду, в котором недивергентные слагаемые будут регулярными (ограниченными) функциями, что позволяет вывести из них соотношения на гидравлическом прыжке. Доказано, что при известном положении разрыва параметры течения за гидравлическим прыжком определяются однозначно. В частном классе решений построены ударная поляра и примеры течений с гидравлическим прыжком.

Система уравнений длинноволнового приближения, описывающая стационарные пространственные течения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести, имеет вид

$$uu_x + vu_y + wu_z + p_x/\rho = 0, \qquad uv_x + vv_y + wv_z + p_y/\rho = 0,$$
$$p_z = -\rho g, \qquad u_x + v_y + w_z = 0.$$

Здесь u, v, w — компоненты вектора скорости жидкости; p — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность; x, y, z — декартовы координаты в пространстве. Течение жидкости рассматривается в слое $0 \leqslant z \leqslant h(x,y)$ со свободной границей. Граничные условия: $w = 0$ при $z = 0$; $w = uh_x + vh_y$ и $p = p_0$ при $z = h$.

Вводя лагранжеву координату $\lambda \in [0,1]$, параметризующую материальные поверхности от дна $z = 0$ при $\lambda = 0$ до свободной поверхности $z = h(x,y)$ при $\lambda = 1$, система уравнений в эйлерово-лагранжевых координатах принимает вид

$$uu_x + vu_y + g\left(\int_0^1 H\,d\lambda\right)_x = 0, \quad uv_x + vv_y + g\left(\int_0^1 H\,d\lambda\right)_y = 0, \quad (uH)_x + (vH)_y = 0. \tag{1}$$

Искомыми являются функции u, v, H зависящие от x, y, λ. Функция H введена по формуле $H(x,y,\lambda) = \Phi_\lambda(x,y,\lambda)$, где Φ — функция перехода к лагранжевой переменной λ: $z = \Phi(x,y,\lambda)$.

Система (1) рассматривается как система дифференциальных уравнений с независимыми переменными x, y и операторными (интегральными) коэффициентами в банаховом пространстве функций от λ.

Рассмотрены течения с сильным разрывом, определенным некоторой кривой на плоскости x, y. Система уравнений (1) не приводится к дивергентному виду. В предположении, что функция $v_x - u_y$ является ограниченной функцией, были найдены соотношения на сильном разрыве.

Доказано, что при известном положении линии гидравлического прыжка, зная параметры течения набегающего потока, мы можем однозначно определить параметры течения за прыжком.

Известно (В. М. Тешуков, 2004), что система уравнений (1) имеет класс частных решений, удовлетворяющих условиям

$$q_\lambda = 0, \qquad \vartheta_\lambda/H = A \quad (A = \mathrm{const}). \tag{2}$$

Здесь $q(x,y,\lambda)$, $\vartheta(x,y,\lambda)$ — модуль и угол относительно оси абсцисс вектора (u,v). Равенство $\vartheta_\lambda/H = A$ означает, что угол ϑ линейно меняется от эйлеровой переменной z: $\vartheta(z) = \vartheta^0 + Az$.

В классе течений (2) найдено аналитическое представление для зависимости положения скачка от угла вектора скорости на дне за скачком. Построены ударные диаграммы в переменных $(\vartheta^0, gh^2/2)$, являющиеся аналогом (ϑ, p)-поляр в газовой динамике. Показано, что при переходе через гидравлический прыжок константа A сохраняется и построено решение задачи о взаимодействии гидравлических прыжков.

УДК 514.75

ЛИСТ МЕБИУСА

© М. А. Чешкова

cheshkov@ab.ru

Алтайский государственный университет, Барнаул

В евклидовом пространстве E^3 рассмотрим линейчатую поверхность ([1, с. 40]) M:

$$r(u,v) = e(v) + ul(v),$$

где $e(v) = (\cos(v), \sin(v), 0)$ — направляющая окружность, $l(v)$ — орт образующей прямой.

Будем предполагать, что прямые ортогонально пересекают окружность. Обозначим через $\varphi(v)$ — угол между плоскостью окружности и прямой. Тогда

$$l(v) = \cos(\varphi)e(v) + \sin(\varphi)a,$$

где $a = (0,0,1))$,

$$r(u,v) = (1 + u\cos(\varphi))e(v) + u\sin(\varphi)a.$$

Если при этом $\varphi = kv/2$, $k \neq 0$ — целое число, то прямые $r(u,0), r(u,2\pi)$ "склеиваются". Имеем лист Мебиуса ([2, с. 167]), перекрученный k раз (рис. 1–3).

Гауссова кривизна поверхности равна

$$K(u,v,k) = -\frac{k^2}{4((1+u\cos(kv/2)^2 + (uk/2)^2)^2}$$

Откуда следует, что $K(u,v,k) < 0$ — все точки листа Мебиуса гиперболические.

В частности, рассмотрим гауссову кривизну $K(0,v,k)$ вдоль средней окружности $S : r = r(0,v)$ и гауссову кривизну $K(u,0,k)$ вдоль образующей L, ортогональной плоскости средней окружности.

Имеем $K(0,v,k) = -\frac{k^2}{4}, K(u,0,k) = -\frac{k^2}{4((1+u)^2+(uk/2)^2)^2}$. Замечаем, что гауссова кривизна постоянна вдоль средней окружности

Исследуем, как меняется гауссова кривизна при закручивании. Для этого рассмотрим график функции

$$f(u,v) = K(u,v,k+1) - K(u,v,k) =$$

$$-\frac{(k+1)^2}{4((1+u\cos((k+1)v/2)^2 + (uk/2)^2)^2} + \frac{k^2}{4((1+u\cos(kv/2)^2 + (uk/2)^2)^2}.$$

Картину изменения гауссовой кривизны при закручивании дают рис. 4–6.

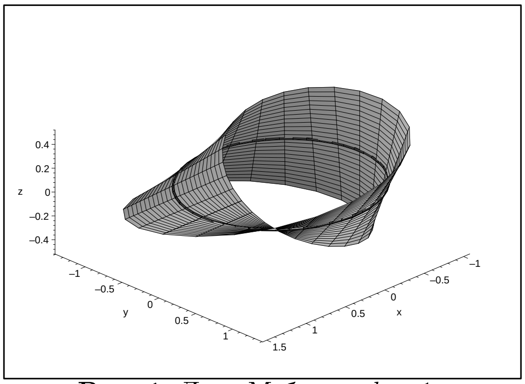


Рис. 1. Лист Мебиуса, $k = 1$.

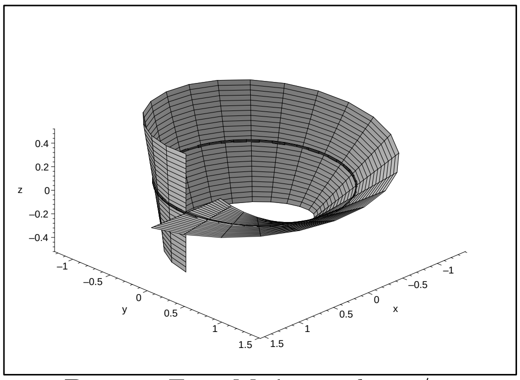


Рис. 2. Лист Мебиуса, $k = 1/2$.

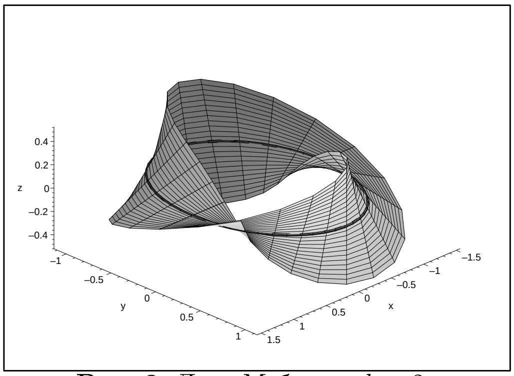


Рис. 3. Лист Мебиуса, $k = 2$.

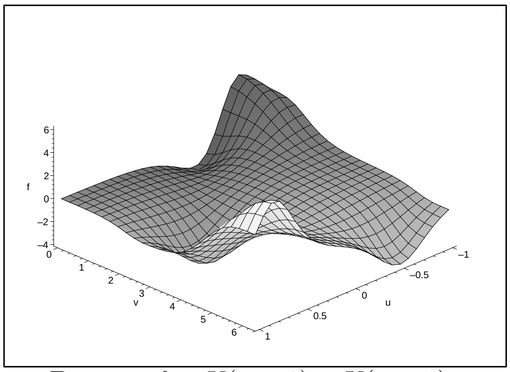


Рис. 4. $f = K(u, v, 2) - K(u, v, 1)$.

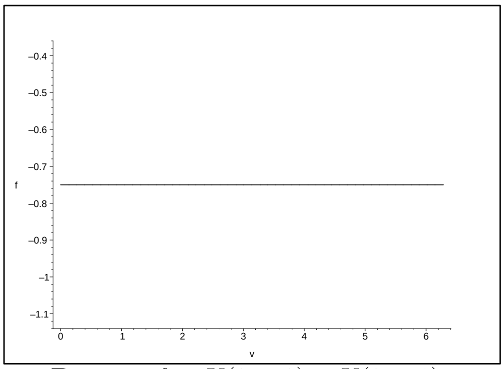


Рис. 5. $f = K(0, v, 2) - K(0, v, 1)$.

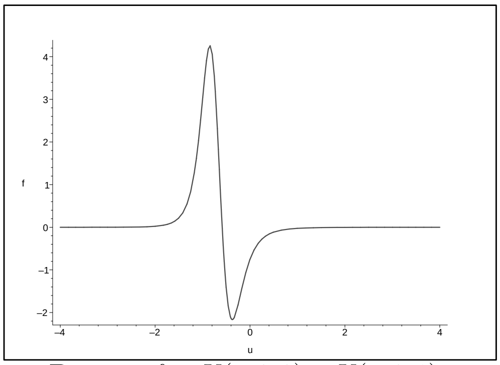


Рис. 6. $f = K(u, 0, 2) - K(u, 0, 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М., 1969. 167 с.

2. *Торп Дж.* Начальные главы дифференциальной геометрии. М., 1962. 360 с.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 644–645

УДК 536.46

АЛГОРИТМЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ СТАЦИОНАРНОЙ МОДЕЛИ СЖИГАНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ ГОРЕЛКЕ

© Ю. А. Чумаков*, А. Г. Князева

* yura014@rambler.ru

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

Для оптимизации работы существующих горелок требуется исследовать возможные режимы горения газа при варьировании технологических параметров. В экспериментальных исследованиях варьирование параметров в широкой области их изменения весьма затруднительно. Поэтому для изучения режимов горения прибегают к математическому моделированию.

В работе предложена и исследуется модель горения газа в пористой цилиндрической горелке, геометрия и свойства которой соответствуют [1].

Горелка, представляющая собой полый цилиндр, изготовленный из материала с заданной пористостью ε, большие размеры: заданные внутренний R_1 и внешний R_2 радиусы. Во внутреннюю область цилиндра поступает горючий газ, который затем перераспределяется с помощью специальных устройств так, чтобы скорость его поступления в пористое тело по всей длине горелки (вдоль цилиндра) была приблизительно одинаковой. В соответствии с законом Дарси, имеем

$$V_g = -k_f \nabla P \tag{1}$$

где k_f — коэффициент фильтрации, P — давление. При заданном перепаде давления ∇P на входе газа в пористое тело и на выходе его из пористого тела в простейшем приближении скорость газа V_g можно считать постоянной. Давление газа в порах и его температура однозначно связаны уравнением состояния

$$P = \frac{\rho_g R T_g}{m_r \eta + m_g (1-\eta)} \tag{2}$$

здесь ρ_g — плотность газа, m_r, m_g — молярная масса реагентов и продуктов реакции соответственно.

Общая постановка задачи в цилиндрической системе координат включает уравнение теплопроводности для газа и твердого каркаса, уравнение для расчета концентрации реагирующего компонента, а также уравнение неразрывности. С практической точки зрения интерес представляют стационарные режимы горения в горелочном устройстве конечного размера. Такие режимы реализуются при выходе горелочного устройства на стационарный режим работы.

В соответствии с уравнением неразрывности

$$\nabla \cdot \rho_g V_g = 0$$

плотность газа уменьшается от внутреннего радиуса горелки к внешнему радиусу

$$\rho_g \sim \frac{R_1 \rho_{g,1}}{r} = 0$$

где $\rho_{g,1}$ — плотность газа на входе в пористое тело.

С учетом принятых предположений математическая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda_g r \frac{dT_g}{dr}\right) - \frac{c_g R_1 \rho_{g,1} V_g}{r}\frac{dT_g}{dr} - \frac{\alpha}{\varepsilon}(T_g - T_s) + Q\frac{\rho_{g,1} R_1}{r} k \eta^n \exp\left(-\frac{E_a}{R T_g}\right) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda_s r\frac{dT_s}{dr}\right)+\frac{\alpha}{1-\varepsilon}\big(T_g-T_s\big)=0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dr}\left(D\rho_{g,1}\frac{d\eta}{dr}\right)-\rho_{g,1}V_g\frac{d\eta}{dr}-k\rho_{g,1}\eta^n\exp\left(-\frac{E_a}{RT_g}\right)=0 \tag{5}$$

где T_g — температура газовой смеси, T_s — температура пористого каркаса, r — пространственная координата, λ_g, λ_s — эффективный коэффициент теплопроводности газа (g) и твердого тела (s), α — коэффициент теплообмена между фазами, c_g — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме, Q — тепловой эффект реакции, k — константа скорости, n — порядок реакции, E_a — энергия активации, R — универсальная газовая постоянная, η — концентрация реагентов реакции или степень превращения, $D=D_0(T/273)^a\exp(-S/T)$ — коэффициент диффузии, который считаем в общем случае отличным от коэффициента температуропроводности $\text{æ}_g=\lambda_g/(c_g\rho_g)$.

Система уравнений (1)–(6) замыкается граничными условиями на внутренней $(r=R_1)$ и внешней $(r=R_2)$ поверхностях горелки. В качестве граничного условия на внутренней поверхности используем условие постоянной температуры, равной температуре холодного газа T_0, и концентрации реагента, равной единице. На внешней поверхности задана температура T_b, доля оставшегося реагента η_b и условие теплообмена твердого каркаса с горячим газом по конвективному механизму и с теплообменником излучением:

$$r=R_1: \qquad \rho_g=\rho_{g,1} \quad (\text{или } P=P_0); \quad T_g=T_s=T_0, \quad \eta=1 \tag{6}$$

$$r=R_1: \qquad T_g=T_b, \quad -\lambda\frac{dT_s}{dr}=\alpha_l(T_s-T_b)-\varepsilon_0\sigma(T_s^4-T_t^4), \quad \eta=\eta_b \tag{7}$$

В (6), (7) P_0 — начальное давление (рассчитанное из (2)), ε_0 — показатель черноты, T_b — температура горения газа, σ — постоянная Стефана – Больцмана, T_t — температура теплообменника, α_l — коэффициент внешнего теплообмена ($\alpha_l\gg\alpha$).

Дифференциальные уравнения, входящие в систему (1)–(7), аппроксимированы разностными уравнениями; полученная система линейных уравнений решалась методом прогонки с итерациями. Использованы несколько различных алгоритмов, каждый из которых удобен в своей области изменения параметров модели. В частности, в случае узкой реакционной зоны, которая типична для больших скоростей подачи газа, для исследования ее структуры использовали замену переменных

$$r=\left(1-e^{\beta(x-x_1)}\right)^{-1}$$

где параметры x_1, β подбирались таким образом, чтобы на зону прогрева и реакции приходилась число точек, достаточное для исследования физических “тонкостей” процесса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант т 05-03-98000, и программы [[Энергосбережение СО РАН-06]].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кирдяшкин А. И., Максимов Ю. М.* Инфракрасная горелка на основе пористой керамики // Материалы докладов. VIII Международная выставка-конгресс “Энергосбережение и энергоэффективность”, 16–17 ноября 2005 г., Томск. С. 24–25.

УДК 533.6.011

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕПЛОВЫХ ИМПУЛЬСОВ В ВЯЗКОМ ГАЗЕ

© В. В. Шайдуров, Г. И. Щепановская *

* gi@icm.krasn.ru

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

В последние годы значительный интерес проявляется к исследованию влияния неравномерностей распределения газодинамических параметров в потоке на сопротивление тел при их движении со сверх- и гиперзвуковыми скоростями. Этот интерес связан с тем, что иногда с помощью относительно небольших затрат энергии или вещества можно изменять структуру течения. В экспериментальных и теоретических исследованиях показана глобальная перестройка газодинамического течения под действием возмущения плотности, локализованного в тонком канале. Снижение плотности в канале лишь на 10–15% по сравнению с плотностью окружающей среды приводило к уменьшению давления на торце препятствия. В работе [1], где рассматривалась нагретая область, созданная с помощью теплового импульса, расположенного на некотором расстоянии от обтекаемого тела. В зависимости от расположения теплоподвода вблизи обтекаемого тела можно снижать волновое сопротивление, создавать тягу [2, 3].

В настоящее время особое внимание уделяется решению задачи активного управления обтеканием тела посредством энергетического и силового воздействия на набегающий поток, в частности, посредством локального воздействия на сверхзвуковые течения перед телом. Для технической реализации предлагается использование лазерного и СВЧ-излучения, электрического разряда. Уменьшение аэродинамического сопротивления связывается также с уменьшением плотности газа в набегающем потоке, что подтверждается расчетами и непосредственными измерениями [2, 3]. Экспериментально найдено, что при использовании мощного импульсного оптического разряда перед телом (конусом, сферой), обтекаемым сверхзвуковым потоком, его аэродинамическое сопротивление уменьшается до двух раз при определенной частоте импульсов лазерного излучения. Дополнительные эффекты возможны из-за изменения режима обтекания вследствие уменьшения числа Маха, изменения числа Рейнольдса, ионизации потока.

В перечисленных работах рассматриваются нестационарные явления, возникающие в объеме газа при мгновенном локальном подводе энергии, как правило, на основе решения уравнений Эйлера. Для численного расчета двумерных нестационарных течений разрабатывается развитие метода Годунова, основанное на TVD и ENO схемах. Показано значительное влияние воздействий, связанных с нелинейной природой явлений. Отмечается, что невязкий механизм перестройки сверхзвукового течения отличает “бесконечная” длина разреженного канала [3].

Настоящая работа посвящена вычислительному моделированию нестационарного распространения сильных неоднородностей в вязком теплопроводном газе. В этом случае рассматривается полная система уравнений Навье-Стокса вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Для получения вариационно-разностных уравнений был построен алгоритм на основе метода конечных элементов. Изучается характер эволюции тепловых пятен в набегающем потоке.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект т 05-07-90201), программы т 16 Президиума РАН (проект т 9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бергельсон Т. А., Медведюк С. А., Немчинов И. В. и др.* Аэродинамические характеристики обтекаемого тела при различной локализации “тепловой иглы” // Математическое моделирование. 1996. Т. 8, т 1. С. 3–9.
2. *Борзов В. Ю., Михайлов В. М., Рыбка И. В., Савищенко Н. П., Юрьев А. С.* Экспериментальное исследование сверхзвукового обтекания препятствия при энергоподводе в невозмущенный поток // Инженерно-физический журнал. 1994. Т. 66, т 5. С. 515–520.
3. *Коротаева Т. А., Фомин В. М., Шашкин А. П.* Пространственное сверхзвуковое обтекание заостренного тела при подводе энергии перед ним // ПМТФ. 1998. Т. 39, т 5. С. 116–121.
4. *Щепановский В. А., Щепановская Г. И.* Вычислительное моделирование воздушно-космических систем. Т. 1. Модели, методы, технологии. Новосибирск: Сибирская издательская фирма “Наука” РАН. 2000. 232 с.
5. *Малышев В. А., Шайдуров В. В., Щепановская Г. И.* Математическое и численное моделирование на многопроцессорной вычислительной системе сверхзвукового взаимодействия тепловых импульсов // Вестник КрасГУ. 2006. т 4. С. 109–116.
6. *Ушакова О. А., Шайдуров В. В., Щепановская Г. И.* Метод конечных элементов для уравнений Навье-Стокса в сферической системе координат // Вестник КрасГУ. 2006. т 4. С. 151–156.

УДК 532.5

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ВОЛНЫ НА ВОДЕ

© Р. В. Шамин

roman@shamin.ru

Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва

В работе рассматриваются уравнения, описывающие нестационарное течение идеальной жидкости со свободной поверхностью. Задачи, описывающие поверхностные волны идеальной жидкости, рассматривались многими авторами. Первые результаты о разрешимости этих задач были получены в работах Л. В. Овсянникова и В. И. Налимова, см. [1–3]. В частности, в этих и последующих работах многих авторов разрешимость полных уравнений была установлена лишь на достаточно малом временном интервал.

В настоящей работе исследуется вопрос об конструктивной оценке времени существования решений уравнений, описывающих динамику идеальной жидкости со свободной поверхностью. Предложен коструктивный метод, позволяющий получать доказательную оценку времени существования решений этих уравенений.

Автор выражает благодарность академику РАН В. Е. Захарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов НШ-7550.2006.2 и INTAS Ref. Nr 05-1000008-8014.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Овсянников Л. В.* Нелинейная задача Коши в шкале банаховых пространств // Докл. АН СССР. 1971. Т. 200, т 4. С. 789–792.
2. *Налимов В. И.* Априорные оценкирешений эллиптических уравнений в классе аналитических функций и их приложения к задаче Коши – Пуассона // Докл. АН СССР. 1969. Т. 189, т 1, С. 45–49.
3. *Налимов В.И.* Нестационарные вихревые волны // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, т 6. С. 1356–1366.
4. *Шамин Р. В.* О существовании гладких решений уравнений Дьяченко, описывающих неустановившиеся течения идеальной жидкости со свободной поверхностью // Доклады Российской академии наук. 2006. Т. 406, т 5. С. 112–113.
5. *Шамин Р. В.* К вопросу об оценке времени существования решений системы Коши – Ковалевской с примерами в гидродинамике со свободной поверхностью // Современная математика. Фундаментальные направления. 2007. Т. 21. С. 133–148.
6. *Шамин Р. В.* Об одном численном методе в задаче о движении идеальной жидкости со свободной поверхностью // Сибирский журнал вычислительной математики. 2006. Т. 9, т 4. С. 325–340.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 649–650

УДК 514.86, 514.87

БАЗОВЫЕ ПОЛЯ СТАНДАРТНОЙ МОДЕЛИ В ПРИСУТСТВИИ НЕКВАНТОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ

© Р. А. Шарипов

r-sharipov@mail.ru

Башкирский государственный университет, Уфа

Стандартная Модель (СМ) на сегодняшний день является общепризнанной и в достаточной степени экспериментально проверенной теорией, описывающей сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия. Для описания частиц в Стандартной Модели вводятся лептонные поля $\overset{\circ}{\psi}{}^{a}_{111111}[i]$ и $\overset{\bullet}{\psi}{}^{a\alpha}_{111}[i]$, а также кварковые поля $\overset{\bullet}{\psi}{}^{a1\alpha\beta}[i]$, $\overset{\circ}{\psi}{}^{a1111\beta}[i]$ и $\overset{\circ}{\psi}{}^{a\beta}_{11}[i]$. Точка над ψ-функцией — это признак киральных (левых) компонент, а кружочек — признак антикиральных (правых) компонент. Буквой $a = 1, \ldots, 4$ помечен спинорный индекс; через $\beta = 1, \ldots, 3$ обозначен цветной индекс, он есть только у кварковых волновых функций. Индекс $\alpha = 1, 2$ — это дублетный индекс. Те ψ-функции, у которых он есть, составляют дублеты. Остальные ψ-функции — это синглеты. Индекс $i = 1, \ldots, 3$ заключен в квадратные скобки. Он нумерует три генерации лептонов и три генерации кварков. И наконец, у всех ψ-функций есть определённое количество индексов, принимающих одно единственное значение $\gamma = 1$.

Помимо перечисленных выше, в Стандартной Модели вводятся калибровочные поля. Они проявляют себя как компоненты связности в ковариантных производных, например:

$$\begin{aligned}\nabla_q\, \overset{\bullet}{\psi}{}^{a1\alpha\beta}[i] = \nabla_q[vac]\, \overset{\bullet}{\psi}{}^{a1\alpha\beta}[i] - \frac{i\,e\,g_1}{\hbar\,c}\,\mathcal{A}^1_{q1}\; \overset{\bullet}{\psi}{}^{a1\alpha\beta}[i] - \\ - \frac{i\,e\,g_2}{\hbar\,c}\sum_{\theta=1}^{2}\mathcal{A}^{\alpha}_{q\theta}\; \overset{\bullet}{\psi}{}^{a1\theta\beta}[i] - \frac{i\,e\,g_3}{\hbar\,c}\sum_{\theta=1}^{3}\mathcal{A}^{\beta}_{q\theta}\; \overset{\bullet}{\psi}{}^{a1\alpha\theta}[i].\end{aligned} \tag{1}$$

Величины $\mathcal{A}^{\beta}_{q\theta}$ соответствуют глюонному полю. Величины $\mathcal{A}^1_{q1}$ и $\mathcal{A}^{\alpha}_{q\theta}$ отвечают электромагнитному и слабому полям соответственно; в результате применения механизма Хиггса они перемешиваются, формируя 4-потенциал электромагнитного поля A_q и поля массивных бозонов Z_q и $W^{\pm}_{q111111}$. Здесь $q = 0, \ldots, 3$ — ковекторный индекс. Природа индекса θ в формуле (1) ясна из самой формулы, достаточно посмотреть на диапазон изменения этого индекса в суммах. Через g_1, g_2 и g_3 обозначены безразмерные константы, это параметры Стандартной Модели. Наконец, e, $\hbar$ и c в формуле (1) — это заряд электрона, постоянная Планка и скорость света соответственно:

$$\begin{aligned}&e \approx 4.80420440 \cdot 10^{-10}\; \textit{г}^{1/2} \cdot \textit{см}^{3/2} \cdot \textit{сек}^{-1},\\ &\hbar \approx 1.05457168 \cdot 10^{-27}\; \textit{г} \cdot \textit{см}^{2} \cdot \textit{сек}^{-1},\\ &c \approx 2.99792458 \cdot 10^{10}\; \textit{см} \cdot \textit{сек}^{-1}.\end{aligned}$$

Числовые данные взяты с сайта **http://physics.nist.gov/cuu/Constants** Национального Института Стандартизации США (NIST).

Наиболее загадочным полем в Стандартной Модели является поле Хиггса $\varphi^{\alpha111}$, в котором α — дублетный индекс. Соответствующая ему элементарная частица до сих пор не найдена.

Все перечисленные выше поля в явном виде присутствуют в Стандартной Модели. Наличие или отсутствие гравитационного поля мало сказывается на них. Однако, в Стандартной Модели есть целый ряд неявно присутствующих полей. Эти поля не ассоциированы с материей и о них обычно не упоминают. Эти поля определяют геометрию пространства-времени и накладывают ограничения на структуру материальных полей. Обозначим через M пространственно-временное многообразие и приведём список таких полей:

1) метрический тензор $\mathbf{g}$ пространства-времени M;
2) метрическая связность Γ пространства-времени M;
3) кососимметричная спиновая метрика $\mathbf{d}$ в расслоении DM дираковских спиноров над прстранством-временем;
4) оператор киральности $\mathbf{H}$ в расслоении дираковских спиноров;
5) эрмитовская метрика $\mathbf{D}$ сигнатуры $(+\,+\,-\,-)$ в расслоении дираковских спиноров;
6) дираковское $\boldsymbol{\gamma}$-поле;
7) спинорная связность A в расслоении дираковских спиноров;
8) эрмитовская метрика $\mathbf{D}$ в расслоении UM над прстранством-временем;
9) кососимметричная метрика $\mathbf{d}$ в расслоении SUM над прстранством-временем;
10) эрмитовская метрика $\mathbf{D}$ в расслоении SUM над прстранством-временем;
11) кососимметричная 3-форма $\mathbf{d}$ в расслоении SUM над прстранством-временем;
12) эрмитовская метрика $\mathbf{D}$ в расслоении SUM над прстранством-временем.

Поля 1) и 2) хорошо известны в контексте общей теории относительности (ОТО), поля 3)–7) добавляются к ним при включении спиноров в ОТО (см. подробности в [1–5]). Их можно в определённом смысле считать атрибутами метрики $\mathbf{g}$. Поля 8)–12) уже не связаны с метрикой. Они определяют калибровочную симметрию материальных полей Стандартной Модели, редуцируя структурную группу соответствующих расслоений к $\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)\times\mathrm{SU}(3)$. Одна из целей работ [1–8] и цель данного доклада состоит в том, чтобы подчеркнуть наличие перечисленных полей 1)–12, которое в физической литературе часто затушёвывается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sharipov R.* Spinor functions of spinors and the concept of extended spinor fields // E-print `math.DG/0511350` in `http://arXiv.org`, 2005, C. 1–56.
2. *Sharipov R.* Commutation relationships and curvature spin-tensors for extended spinor connections // E-print `math.DG/0512396` in `http://arXiv.org`, 2005, C. 1–22.
3. *Sharipov R.* A note on Dirac spinors in a non-flat space-time of general relativity // E-print `math.DG/0601262` in `http://arXiv.org`, 2006, C. 1–22.
4. *Sharipov R.* A note on metric connections for chiral and Dirac spinors // E-print `math.DG/0602359` in `http://arXiv.org`, 2006, C. 1–40.
5. *Sharipov R.* On the Dirac equation in a gravitation field and the secondary quantization // E-print `math.DG/0603367` in `http://arXiv.org`, 2006, C. 1–10.
6. *Sharipov R.* The electro-weak and color bundles for the Standard Model in a gravitation field // E-print `math.DG/0603611` in `http://arXiv.org`, 2006, C. 1–8.
7. *Sharipov R.* A note on connections of the Standard Model in a gravitation field // E-print `math.DG/0604145` in `http://arXiv.org`, 2006, C. 1–11.
8. *Sharipov R.* A note on the Standard Model in a gravitation field // E-print `math.DG/0605709` in `http://arXiv.org`, 2006, C. 1–36.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 651–652

УДК 517.977.58

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

© Г. В. Шевченко

shevch@lmath.nsc.ru

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В настоящей статье рассматриваются нелинейные системы со стационарной правой частью, т. е. независящей явно от времени. Для задач оптимального быстродействия с такими системами предлагается итерационный метод решения. Он основан на построении конечных последовательностей смежных симплексов с вершинами на границах областей достижимости. При предположении об управляемости системы доказано, что за конечное число итераций минимизирующая последовательность сходится к ε-оптимальному решению. Следуя [1], пару $\{T, u(\cdot)\}$ назовём *ε-оптимальным решением*, где $T \leqslant T_{opt}$, T_{opt} — время оптимального по быстродействию перевода системы из начального состояния в ε-окрестность начала координат, u — допустимое управление, под действием которого система переходит в ε-окрестность начала координат за время T.

Пусть управляемый объект описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений вида
$$\dot{x}(t) = f(x, u), \tag{1}$$
где x — n-мерный вектор фазового состояния объекта; $x(0) = x^0$ — заданное начальное состояние объекта; $f(x,u)$ — непрерывная по x и по u и непрерывно дифференцируемая по x вектор-функция, $f(x,u)\Big|_{x\neq 0,\, u\neq 0} \neq 0$, $f(0,u)\Big|_{u\neq 0} \neq 0$ и $f(0,0) = 0$; u — s-мерный вектор управляющих воздействий, компоненты которого являются измеримыми функциями и стеснены ограничением
$$u(t) \in U; \tag{2}$$
U — компактное выпуклое тело из $\mathbb{R}^s$, причём 0 является внутренней точкой множества U.

Предполагается, что система (1) полностью управляема, т. е. управляема из любой начальной точки x^0 из $\mathbb{R}^n$ в любую точку из $\mathbb{R}^n$.

Задача. Требуется найти допустимое управление $u^0(t)$ $(t \in [0,T])$, переводящее систему (1) из начального состояния $x(0) = x^0$ в начало координат за минимально возможное время $T = T_{opt}$.

Эта задача эквивалентна следующей задаче: найти минимальное время $T = T_{opt}$ такое, что начало координат принадлежит границе области достижимости $\mathfrak{R}(T)$, где $\mathfrak{R}(T)$ — множество конечных состояний системы (1), в которые допустимыми управлениями можно перевести систему (1) из начального состояния x^0 за время T. Область достижимости $\mathfrak{R}(T)$ является компактным телом в $\mathbb{R}^n$.

Введём ряд понятий (см. [1]). Пусть $z^1, \ldots, z^{n+1} \in \mathbb{R}^n$ такие различные точки, что линейная выпуклая оболочка $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$ этих точек является телом в $\mathbb{R}^n$. Множество σ называется *n-мерным симплексом* с вершинами $z^1, \ldots, z^{n+1}$. Два n-мерных симплекса σ^1 и σ^2 называются *смежными,* если их пересечение является общей гранью максимальной размерности этих симплексов.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — компактное тело и пусть $\sigma^0 = [z_0^1, \ldots, z_0^{n+1}]$ — n-мерный симплекс с вершинами на границе множества Ω. По каждой его грани максимальной размерности мы построим смежный симплекс, «новая» вершина которого является граничной точкой Ω и лежит по другую сторону точки симплекса, не принадлежащей этой грани, относительно гиперплоскости, содержащей эту грань. Построенные симплексы являются смежными к симплексу σ^0 и называются симплексами первого слоя. Симплекс σ^0 считается симплексом 0-го слоя.

Аналогично строим смежные симплексы для каждого симплекса первого слоя за исключением граней, общих с $(n-1)$-мерными гранями симплекса σ^0. Построенные симплексы составляют второй слой. По такой же схеме строятся смежные симплексы $(k+1)$-го слоя для каждого симплекса из k-го слоя $(k \geqslant 2)$.

Через $\mathfrak{S}_k$ обозначим объединение всех симплексов k-го слоя. По построению в силу компактности множества Ω имеет место соотношение $\mathrm{co}\,(\Omega) = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{S}_k \doteq \Pi_\Omega$, где $\mathrm{co}\,(\Omega)$ — выпуклая оболочка внутренности множества Ω. Тем самым доказана следующая

Теорема (о симплексном покрытии). *Внутренность любого компактного тела Ω в $\mathbb{R}^n$ можно покрыть n-мерными симплексами с вершинами на границе множества Ω.*

Из теоремы 1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть Ω — компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и точка $z^0 \in \mathrm{co}(\Omega)$. Тогда для любого ее симплексного покрытия Π_Ω найдутся конечное $k_0 \geqslant 0$ и n-мерный симплекс $\sigma \in \mathfrak{S}_{k_0}$ такой, что $z^0 \in \sigma$.*

Следствие 2. *Пусть Ω — компактное тело в $\mathbb{R}^n$ и точка $z^0 \notin \mathrm{co}(\Omega)$. Тогда для любого ее симплексного покрытия Π_Ω найдутся конечное $k_0 \geqslant 0$ и по меньшей мере один n-мерный симплекс $\sigma \in \mathfrak{S}_{k_0}$ такой, что опорная к Ω в некоторой вершине σ гиперплоскость строго отделяет Ω от точки z^0.*

Пусть $T > 0$ фиксировано. Тогда найдутся такое конечное $\ell \geqslant 1$ и такой симплекс симплекс $\sigma' \subset \Pi_{\mathfrak{R}(T)}$, что либо 1) опорная гиперплоскость к некоторой вершине σ' отделяет $\mathrm{co}\,\mathfrak{R}(T)$ от начала координат; либо 2) $0 \in \sigma'$. В первом случае $T < T_{opt}$. Во втором случае возможны две ситуации: $0 \in \mathfrak{R}(T)$ или $0 \notin \mathfrak{R}(T)$. Проверить, что имеет место, далеко не просто, поскольку в общем случае невозможно построить область достижимости. Поэтому разработана итерационная процедура проверки принадлежности начала координат множеству $\mathfrak{R}(T)$, которая используется в предлагаемом методе решения задачи оптимального быстродействия. Он состоит из двух этапов.

На *первом* этапе строятся монотонно возрастающая последовательность времён $\{T_k\}$ и последовательность симплексов $\{\sigma^k\}$ с вершинами на границе области достижимости $\mathfrak{R}(T_k)$. Построение заканчивается, когда очередной построенный симплекс поглотит начало координат. Следует отметить, что построение ведётся так, что если $T_k = T_{k+1}$, то симплексы σ^k и σ^{k+1} являются смежными и $\rho(\sigma^k) \geqslant \rho(\sigma^{k+1})$, где $\rho(\sigma)$ — расстояние от начала координат до симплекса $\sigma = [z^1, \ldots, z^{n+1}]$, т. е. $\rho(\sigma) = \min\limits_{\sum_{i=1}^{n+1} \zeta_i = 1,\ \zeta_i \geqslant 0} \left\| \sum\limits_{i=1}^{n+1} \zeta_i z^i \right\|^2$.

На *втором* этапе для уточнения оптимального времени используется описанная процедура проверки принадлежности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00776).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шевченко Г. В.* Численный алгоритм решения линейной задачи оптимального быстродействия // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2002. Т. 42, т 8. С. 1184–1196.
2. *Шевченко Г. В.* Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида // Автометрия. 2006. Т. 42, т 2. С. 49–67.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 653–653

УДК 517.91.1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ РОБАСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© Г. Н. Яковенко

Yakovenko_G@mtu-net.ru

Московский физико-технический институт, Долгопрудный

Объектом исследования является система обыкновенных дифференциальных уравнений. В правой части системы присутствуют переменные, вместо которых могут оказаться достаточно произвольные функции независимой переменной (в этом смысле понимается робастность системы) — вход в систему. В качестве выхода понимается общее решение при фиксированном входе. Фиксация интервала изменения независимой переменной позволяет сопоставить каждому входу преобразование пространства состояний — сдвиг вдоль решений. По причине произвольности входа для системы "в общем положении" множество сдвигов выходит за рамки любой конечно-параметрической группы. Вводится класс групповых систем, у которых совокупность сдвигов вдоль решений — конечно-параметрическая группа. Показывается, что редукцией — уменьшением размерности — или "антиредукцией" — добавлением уравнений — групповой системе можно адекватно сопоставить систему (L-систему), которая дополнительно к группе сдвигов допускает группу симметрий по состоянию [1 — 3]. Обе группы конечно-мерны с совпадающим количеством параметров, и это количество равно размерности пространства состояний. Уравнения L-систем с точностью до преобразования переменных состояния моделируется набором чисел — структурными постоянными двух вышеупомянутых групп [4]. Совпадающая алгебраическая структура групп сдвигов и симметрий — подгруппы, нормальные делители и т.д. — позволяет целенаправленно строить замены переменных, декомпозирующие L-систему [5]. Структурные постоянные возможно выявить экспериментально, подавая на вход "пробные" воздействия и наблюдая выходы [6, 7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00940).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Яковенко Г. Н.* Симметрии по состоянию в системах с управлением // Прикладная механика и математика: Межвед. сб. науч. тр. М.: МФТИ, 1992. С. 155–176.
2. *Яковенко Г. Н.* Дифференциальные уравнения с фундаментальными решениями: Софус Ли и другие. М.: Физматкнига, 2006. 112 с.
3. *Данилов Н. Ю., Павловский Ю. Н., Соколов В. И., Яковенко Г. Н.* Геометрические и алгебраические методы в теории управления. М.: МФТИ, 1999. 156 с.
4. *Яковенко Г. Н.* Теоретико-групповое моделирование систем типа "вход-выход" // В кн. Математические модели и методы их исследования. Труды международной конференции. Под редакцией В. К. Андреева и Ю. В. Шанько. Т. 2. Красноярск: Институт математического моделирования СО РАН, 2001. С. 302–307.
5. *Яковенко Г.Н.* Декомпозиция нелинейных управляемых систем с группой симметрий // Механика гироскопических систем / Киев: Вища школа, 1986. Вып. 5. С.131–137.
6. *Яковенко Г. Н.* Идентификация структуры инвариантных моделей систем с управлением // Некоторые проблемы фундаментальной и прикладной математики: межвед. сб. науч. тр. М.: МФТИ, 1997. С. 164–171.
7. *Яковенко Г. Н.* Идентификация алгебраической структуры управляемых систем // Труды IV Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'05. Москва, 25 — 28 января 2005. С. 422–429.

УДК 519.632.4

ESTIMATING THE DERIVATIVES OF A SOLUTION TO THE ELLIPTIC BVP BY STATISTICAL MODELLING METHOD

© Alexander V. Burmistrov

burm@osmf.sscc.ru

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Differential problem. Let us consider the problem of estimating the solution and the solution gradient at an arbitrary point r for the following BVP:

$$\Delta u(r) - c(r)u(r) + \big(v(r), \nabla u(r)\big) = -g(r), \;\; r \in \Omega \subset \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

$$u(y) = \psi_1(y), \;\; y \in \Gamma_1, \;\; (\nabla u(y), \gamma(y)) + \alpha(y)u(y) = \psi_2(y), \;\; y \in \Gamma_2, \;\; \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \partial\Omega \tag{2}$$

Suppose that there exists the unique and smooth enough solution u to the problem (1)–(2). We suggest to reduce the initial differential problem (1) to the integral equation of the second kind $U = KU + G$ for unknown function

$$U(\mathbf{w}) \equiv U(r,j) = \begin{cases} u(r), & j = 0; \\ R(r)u'_v(r)/3, & j = 1; \end{cases}$$

here $\mathbf{w} = (r,j) \in \mathbb{R}^3 \times \{0,1\}$ is a point of extended phase space, $u'_v = (v/|v|, \nabla u)$ and function $R(r)$ is the distance from the point r to the boundary.

Equivalent integral equation. We offer to rewrite equation (1) isolating diffusion operator $\mathcal{D}_\kappa \equiv \Delta - \kappa^2$ (for some positive constant κ^2) on the left-hand side:

$$\Delta u(r) - \kappa^2 u(r) = -\big(\kappa^2 - c(r)\big)u(r) - \big(v(r), \nabla u(r)\big) - g(r).$$

Integral equations for the function $u(r)$ and its spatial derivative $u'_v(r)$ can be obtained using the mean-value theorem. We suggest to use non-central Green's functions $\mathcal{G}^\kappa_{r_0}(r,r')$ for the diffusion operator $\mathcal{D}_\kappa$ in the ball $B(r_0, R(r_0))$ which is the largest one centered at r_0 and contained in $\overline{\Omega}$:

$$\mathcal{G}^\kappa_{r_0}(r,r') = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sinh\{\kappa(R-|V|)\}}{\sinh\{\kappa R\}\,|V|} - \frac{\sinh\{\kappa\,(R-|W|)\}}{\sinh\{\kappa R\}\,|W|}\right], \;\; V = r' - r; \;\; W = \varrho(r'-r_0) - \frac{r-r_0}{\varrho}.$$

here $\varrho = R(r)/|r'-r_0|$. Let Γ_ε be the ε-strip of the boundary Γ and $R_{\max} = \max\limits_{r\in\Omega} R(r)$.

To construct statistical algorithms, integral equations for $u(r)$ and $u'_v(r)$ are combined below into a unified integro-algebraic equation with $r_0 = r$. We choose the parameter c_0 such that $c_0 R^2_{\max} < 6$ and use the variable $p(r) = (1 - c_0R^2(r)/6)$ for randomization of the unified equation:

$$U(r,j) = p(r)\int\limits_{S(r,R)} F_S(r,r')U(r',0)Q_{j0}(r,r')\mathrm{d}S_{r'} + G(r,j) + \tag{3}$$

$$+(1-p(r))\int\limits_{B(r,R)} F_j(r,r')\left[p^c_1 Q^c_{j1}(r,r')U(r',1) + p^c_0 Q^c_{j0}(r,r')U(r',0)\right]\mathrm{d}r',$$

here $S(r,R) = \partial B(r,R)$, $Q^{(c)}_{jj'}$ are weights, $p^c_0 = p^c_0(r,r')$ and $p^c_1 = 1 - p^c_0$ are some probabilities. Having the equation (3), we construct the *Random Walk on Spheres and Balls Algorithm* which

enables us to estimate both the solution $u(r)$ and its gradient. The statistical estimator $\zeta(\mathbf{w}_0)$ for $U(\mathbf{w}_0)$ is derived according to (3) by standard Monte Carlo procedure.

During the random walk on spheres and balls simulation, when the path falls into Γ_ε at a step with a random number N, the chain terminates and the estimator for $U(\mathbf{w}_N)$ multiplied by the weight Q^N is added to the counter. As a result, the following estimator for $U(\mathbf{w}_0)$ is obtained:

$$\zeta(\mathbf{w}_0) = \sum_{n=0}^{N-1} Q^n G(\mathbf{w}_n) + Q^N U(\mathbf{w}_N), \;\; Q^{n+1} = Q^n \cdot Q^{(c)}_{j_n j_{n+1}}, \;\; Q^0 = 1.$$

Theorem 1. *If $-c^*$ is the first eigenvalue of the Laplace operator in Ω and for any $r \in \Omega$ the following assumptions hold: $|\kappa^2 - c(r)| + 3|v(r)|/R(r) \leqslant 2c_0/3$, $c_0 < 6c^*/\pi^2 \simeq 0.6079c^*$, then there exists a unique bounded solution to the equation (3) that admits a representation by a Neumann series and equals the solution to the BVP (1)–(2): $U(r,0) = u(r)$, $U(r,1) = R(r)u'_v(r)/3$.*

Boundary condition. Since the values of $U(\mathbf{w})$ in Γ_ε are indeterminate, the corresponding estimators are obtained as follows. For $j_N = 0$ and $r \in \Gamma_{1\varepsilon}$ one can set $U(r,0) = \psi_1(r^*)$, where $r^* \in \Gamma_1$, $|r - r^*| = R(r)$. For $r \in \Gamma_{2\varepsilon}$ the following representation holds:

$$U(r,0) = \frac{1 + \alpha \cdot d_\gamma(r)}{1 + \alpha \cdot (d_\gamma(r) + \varepsilon)} U(r - \varepsilon\gamma, 0) + \frac{\varepsilon}{1 + \alpha \cdot (d_\gamma(r) + \varepsilon)} \psi(\pi(r)) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

here $d_\gamma(r)$ is the distance between r and Γ_2 along the vector field γ, and $\pi(r)$ is the projection of the point $r \in \Gamma_{2\varepsilon}$ onto Γ_2 along the vector field γ. According to the latter representation the algorithm with reflection should be applied. Assuming that the first derivatives of the solution are bounded in Ω, and therefore $R(r)u'_v(r) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ for $r \in \Gamma_\varepsilon$, one can approximately set $U(r,1) = 0$ for $j_N = 1$. As a result, the realizable but biased estimator $\zeta_\varepsilon(\mathbf{w}_0)$ is obtained for $U(\mathbf{w}_0)$.

Theorem 2. *If the first derivatives of $u(r)$ are bounded in Ω, then there exists $\mathbf{E}\zeta_\varepsilon(r,0) = u_\varepsilon(r)$ and $|u(r) - u_\varepsilon(r)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $r \in \Omega$. Moreover, there exists $\mathbf{E}\zeta_\varepsilon(r,1) = f_\varepsilon(r)$ and $|R(r)u'_v(r)/3 - f_\varepsilon(r)| = \mathcal{O}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $r \in \Omega$.*

Simulation of the probability densities in (3). The function F_S is the probability density of uniform distribution on the sphere: $F_S(\varphi,\theta)\mathrm{d}S = \mathrm{d}\varphi \sin(\theta)\mathrm{d}\theta/4\pi$, here $\theta \in (0,\pi)$, $\varphi \in (0,2\pi)$, $\rho = |r' - r| \in (0,R)$ are coordinates of the local (with the origin at the point r) spherical coordinate system. The probability densities F_0 and F_1 are factorable in this coordinate system: $F_j(r,r')\mathrm{d}r' = F_S(\varphi,\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta \cdot F_j^\rho(\rho)\mathrm{d}\rho$, $j = 0,1$; and the factors $F_j^\rho(\rho)$ have the following form:

$$F_0^\rho(\rho) = \frac{6C_{01}^{-1}(\kappa R)}{R^2 \sinh\{\kappa R\}} \rho \sinh\{\rho_\kappa\}, \;\; F_1^\rho(\rho) = \frac{4C_{11}^{-1}(\kappa R)}{R^2 \sinh\{\kappa R\}} \left[\kappa\rho\cosh\{\rho_\kappa\} + \sinh\{\rho_\kappa\} - \frac{\kappa\rho^3}{R^2}\right],$$

here $\rho_\kappa \equiv \kappa(R - \rho)$. We can use the von Neumann rejection method for sampling the probability density $F_0^\rho(\rho)$. A majorant function can be chosen in two ways:

$$g_0(\rho) \equiv \rho \sinh\{\rho_\kappa\} / \sinh\{\kappa R\} \leqslant \rho \exp(-\kappa\rho) \equiv g_1(\rho) \leqslant R \exp(-\kappa\rho) \equiv g_2(\rho).$$

If the function g_1, which is proportional to the gamma distribution with parameters $(2,\kappa)$, is also sampled by the rejection method (i. e. rejecting the values of ρ which is greater than R), then the ratio of the corresponding computational costs is the following: $S_2/S_1 = \kappa R(1 - e^{-\kappa R})$. Therefore, if $S_2 < S_1$ (it holds when $\kappa R < 1.35$) then we use the majorant function g_2 or else we use g_1.

For the probability density $F_1^\rho(\rho)$ we have $\kappa\rho\cosh\{\rho_\kappa\} + \sinh\{\rho_\kappa\} - \kappa\rho^3/R^2 \leqslant (\kappa R + 1)\cosh\{\rho_\kappa\}$. If α is a uniform random variable on $(0,1)$ and variable η is the solution to the equation $\sinh\{\kappa(R - \eta)\} = \alpha \sinh\{\kappa R\}$ then η has the probability density $A_{\kappa,R}\cosh\{\rho_\kappa\}$ on $(0,R)$.

The similar technique with Green's function for Laplace operator Δ is described in [1].

This work was partly supported by Russian Science Support Foundation, RFBR (grant 05-01-00268), program “Leading Scientific Schools” (grant SS-4774.2006.1) and Lavrentiev SB RAS Youth Grant No. 1.

REFERENCES

1. *Burmistrov A. V. and Mikhailov G. A.* Monte Carlo Computation of Derivatives of a Solution to the Stationary Diffusion Equation // Comp. Math. Math. Phys. 2003 V. 43, N 10. P. 1459–1471.

УДК 532.517.4

NUMERICAL MODELING OF SWIRLING TURBULENT WAKES

© G. G. Chernykh [*], A. G. Demenkov [**], V. A. Kostomakha [***]

[*] chernykh@ict.nsc.ru, [**] demenkov@itp.nsc.ru, [***] kostomakha@hydro.nsc.ru

[*] *Institute of Computational Technologies of SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[**] *Kutateladze Institute of Thermophysics of SB RAS, Novosibirsk, Russia;*
[***] *Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of SB RAS, Novosibirsk, Russia*

The longitudinal component of excess momentum J and angular momentum M are the most important integral characteristics of the hydrodynamic wake past a body moving in unbounded fluid. The laws of turbulent motion in the wake essentially depend on these parameters. The nonswirling wake past a towed body is one of the best-studied cases. In such a wake, the excess momentum is equal to the hydrodynamic resistance of a body and the angular momentum is zero. If the propulsor does not impart any swirling to the stream than the angular momentum is zero. The momentumless wake of this kind has been studied experimentally and theoretically or numerically in many works. These studies reveal that the laws governing the development of the wake past the towed and self-propelled bodies are quite different.

The present study deals with the numerical simulation of the wake when both the momentum and the angular momentum take zero values. The flow pattern is calculated within the framework of the thin shear layer approximation for nonclosed system of the motion and continuity equations. The closed system of equations is written for two different formulations of the closure relations. In the first Model the normal components of the Reynolds stress tensor and the tangential stresses $< u'v' >$, $< v'w' >$ are determined from the corresponding differential transport equations. The turbulent shear stress $< u'w' >$ is derived from the algebraic approximation suggested by W. Rodi. In the second Model the differential equations are formulated only for the normal components of the Reynolds stresses. The shear stresses are evaluated from the algebraic relations of W. Rodi. Both of the above-mentioned mathematical models include the transport equation for the rate of dissipation.

The numerical solution of the problem is performed with the use of the finite-difference algorithm realized on moving grids. The algorithm is conservative with respect to the laws of conservation of the momentum and the angular momentum.

The experimentally measured distributions are used as the initial conditions. Both the models described agree well with the experimental data of Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS. However, the second model shows better agreement. It is demonstrated that at the large distances downstream from the body the solution of the problem approaches the self-similar one. Simplified models of far turbulent wake behind self-propelled body have been constructed. The numerical simulation of passive scalar dynamics in turbulent wake was carried out. A numerical analysis of the evolution of swirling turbulent wake in a passively stratified fluid has been carried out. The case of the wake flow with a zero value of total excess momentum and a nonzero value of angular momentum was considered.

This work was partially supported by RFBR (04-01-00209).

УДК 514.745.82

ON NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS AS MODELS OF THE GENE NETWORKS

© Yu. A. Gaidov, V. P. Golubyatnikov *

* glbtn@math.nsc.ru

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

The main aim of our work is to give mathematical explanation of numerical experiments with limit cycles oscillations in gene networks models, see [1–3]. These experiments are performed in collaboration of Sobolev Institute of Mathematics and Institute of Cytology and Genetics of SB RAS. We consider here the following dynamical systems as models of the gene networks with negative feedbacks

$$\dot{x} = \Phi_1(z, x), \quad \dot{y} = \Phi_2(x, y), \quad \dot{z} = \Phi_3(y, z). \tag{1}$$

Here Φ_i are sufficiently smooth and monotonically decreasing with respect to both their arguments so, that $x,\, y,\, z \in [0, \infty)$. We assume that $\Phi_i(x_{i-1}, 0) > 0$ and $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x_{i-1}, x_i) \leqslant \delta_i < 0$. The system (1) and each of its odd-dimensional analogues has a unique stationary point M_*.

Lemma. *Topological index of the stationary point M_* in odd-dimensional dynamical system of the type (1) equals -1.*

Let $\alpha_i = \Phi_i(0, 0)$ be the maximal value of the function Φ_i. For large values of t all trajectories of the system (1) enter some parallelepiped $\Pi = [\varepsilon_1, \mathrm{A}_1] \times [\varepsilon_2, \mathrm{A}_2] \times [\varepsilon_3, \mathrm{A}_3]$. Here, one can take for the beginning $\varepsilon_i = 0$ and $\mathrm{A}_i = \alpha_i/\delta_i$. Hence, Π is a positively invariant domain of (1). The best values of ε_i and A_i satisfy the system

$$\Phi_i(\mathrm{A}_{i-1}, \varepsilon_i) = 0,\ \Phi_i(\varepsilon_{i-1}, \mathrm{A}_i) = 0.$$

Consider the planes parallel to the coordinate ones and containing the point $M_* = (x_*, y_*, z_*)$. They compose the subdivision $\Pi = \bigcup Q_{abc}$, where

$$Q_{abc} = \{\boldsymbol{x} \in \Pi \mid x \gtrless_a x_*,\ y \gtrless_b y_*,\ z \gtrless_c z_*\},$$

$a,\, b,\, c \in \{0, 1\}$, the symbol $\gtrless_0$ denotes $\leqslant$, and $\gtrless_1$ denotes $\geqslant$. One can verify that the parallelepipeds Q_{000} and Q_{111} can be excluded from the invariant domain. The union of remaining 6 parallelepipeds $\widetilde{\Pi} \subset \Pi$ is again a positively invariant domain of the system (1). Denote their common faces as follows: $F_{001} = Q_{001} \cap Q_{011}$, $F_{011} = Q_{011} \cap Q_{010}$, $F_{010} = Q_{010} \cap Q_{110}$ etc. The shifts along the trajectories of the system (1) define a sequence of smooth mappings

$$\ldots \to F_{001} \to F_{011} \to F_{010} \to F_{110} \to F_{100} \to F_{101} \to F_{001} \to \ldots \tag{2}$$

Similar diagram was constructed in [4] for quite different class of dynamical systems.

The characteristic equation of linearization of (1) near the point M_* has one negative eigenvalue $\lambda_1 < 0$ corresponding to an eigenvector e_1 with positive coordinates. Let λ_2, λ_3 be its other eigenvalues. If $\operatorname{Re}\lambda_2$, $\operatorname{Re}\lambda_3 < 0$, then the point M_* is stable and attracts all trajectories of the system (1). The previous lemma implies that the signs of $\operatorname{Re}\lambda_2$, $\operatorname{Re}\lambda_3$ coincide.

Let $\operatorname{Re}\lambda_2$, $\operatorname{Re}\lambda_3 > 0$. In this case the stationary point M_* is unstable. Since the vectors $\pm e_1$ are directed from M_* into Q_{000} or Q_{111}, the invariant domain of our system can be reduced to $(\widetilde{\Pi} \setminus U)$ where U is some neighborhood of the point M_*. Consider the intersection $F' = (\widetilde{\Pi} \setminus U) \cap F_{001}$ and composition φ_6 of 6 consecutive shifts $\varphi_6 : F_{001} \to F_{001}$ in (2) which maps the compact contractible set F' into itself $\varphi_6 : F' \to F'$. According to the well-known torus

principle, Brouwer's fixed point theorem implies existence of at least one point $M_0 \in F'$ such that $\varphi_6(M_0) = M_0$. So, trajectory of this point is a closed cycle, and we have proved

Theorem 1. *If* $\mathrm{Re}\,\lambda_2$, $\mathrm{Re}\,\lambda_3 > 0$, *then the dynamical system (1) has at least one periodic trajectory in the invariant domain.*

If $\Phi_i(u,w) = f_i(u) - w$, then this invariant domain $\widetilde{\Pi}$ can be reduced to the union of 6 trihedral prisms $P_{abc} \subset Q_{abc}$, $1 \leqslant a+b+c \leqslant 2$ spanned on the intersections listed in (2). Each of these prisms P_{abc} is obtained by excising from Q_{abc} along one of its diagonal planes, see [2]. Further reductions of this invariant domain can be realized as well. Note that in this case $\mathrm{Re}\,\lambda_2$ and $\mathrm{Re}\,\lambda_3$ are complex conjugate.

Brouwer's fixed point theorem does not guarantee uniqueness and stability of this cycle. Numerical experiments show that the trajectories of the systems of the type (1) do not approach to the cycles monotonically, so, their stability can not be proved with the help of elementary estimates. In some particular cases, for small positive values of $\mathrm{Re}\,\lambda_2$, $\mathrm{Re}\,\lambda_3$, uniqueness and stability of this cycle in a small neighborhood of M_* can be obtained by methods of Andronov – Hopf bifurcation theory. An explicit formula for the first Lyapunov parameter ν_1 was obtained in [3] in the case of symmetric systems (1) with

$$\Phi_1(z,x) = f(z) - x; \quad \Phi_2(x,y) = f(x) - y; \quad \Phi_3(y,z) = f(y) - z. \tag{3}$$

There, a domain of parameters corresponding to $\nu_1 < 0$ was described, and this inequality implies stability the bifurcation cycle, see also [1]. In the case of asymmetric dynamical system of a general type the explicit analytic expression for ν_1 is too cumbersome, but it can be easily used in analysis of the numerical experiments.

Similar results on existence of periodic trajectories and their bifurcations can be obtained for other odd-dimensional asymmetric dynamical systems of the type (1). The even-dimensional dynamical systems of this type have usually several stationary points, so their analysis is much more difficult.

Using extended Poincaré-Benedixon theorem estimates of the norm of the transfer matrix and the amenable stability approach elaborated by R.A.Smith ([5], see also [6]), we obtain

Theorem 2. *If the functions* Φ_i *have the form (3) and satisfy the conditions of the theorem 1, and* $-3/2 < f'(x) < -1/2$ *for all points in the invariant domain, then the system (1) has at least one periodic trajectory which is orbitally stable in the invariant domain.*

The work was supported by the leading scientific schools grant 8526.2006.1 and the interdisciplinary grant 46 of SB RAS. The authors are indebted to E. P. Volokitin for discussions.

REFERENCES

1. *Golubyatnikov V. P., Likhoshvai V. A., Ratushny A. V.* Existence of Closed Trajectories in 3-D Gene Networks // Journal of three-dimensional images 3-D Forum. 2004. V. 18, N 4. P. 96–101.
2. *Golubyatnikov V. P., Gaidov Yu. A., Kleshchev A. G.* Mathematical Modeling of Asymmetric Gene Networks with Different Types of Regulation Mechanisms // Proc. 9-th International conf. "Human and Computers University of Aizu, Japan. 2006. P. 1–6.
3. *Volokitin E. P., Treskov S. A.* Andronov – Hopf Bifurcation in Model of Hypothetical Gene Networks // Siberian Journ. Industrial Mathematics. 2005. V. 8, N 1. P. 30–40. (Russian)
4. *Hastings S., Tyson J., Webster D.* Existence of Periodic Solutions for Negative Feedback Cellular Control Systems // Journ. of Diff. Equations. 1977. V. 25, N 1. P. 39–64.
5. *Smith R. A.* Orbital stability for Ordinary Differential Equations// Journ. of Diff. Equations. 1987. V. 69, N 2. P. 265–287.
6. *Moulay M. S., Berboucha A.* Sur les Solutions Périodiques d'un Système Différentiel de R^3 // Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége. 2005. V. 74. P. 239–248.

УДК 514.763.85

METRIC PROPERTIES OF A MANIFOLD WHICH DEFINED BY THE TWO-POINT CORRELATION TENSOR

© V. N. Grebenev *, M. Oberlack **

* vngrebenev@gmail.com

* *Institute of Computational Technologies, Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia;*
** *Technical University of Darmstadt, Germany*

Turbulence is outstanding unsolved multi-scale nonlinear problem of hydrodynamics. Turbulence is convenient name for the phenomenon which is observed in a very large number of flows the properties of which (velocity vector, pressure, vorticity, density, etc ...) undergo random fluctuations created by the presence of numerous eddies of various sizes and, as a result, very extremely irregular in space in time, with broad frequency ranges. Fluctuations of instantaneous flow characteristics (pressure, velocity, vorticity) depend both of space and time; they occur over a very wide range of scales. The smaller scales are settled by the fluid viscosity while the largest are the most often limited by the space available to the flows. For large Reynolds numbers the statistical properties of small scale fluctuations are due to dynamical instability occurring on many scales. These instabilities are responsible for an energy flux from large to small scales, where eventually the energy is dissipated. The Richardson cascade is a simple physical picture which suggests that many statistical properties of small scale fluctuations in turbulence, for large Reynolds numbers, should not depend on the details of forcing and dissipation. Such a supposed independence is known as universality hypothesis an it is one of the major open challenges to be under understood from the Navier – Stokes equations. The Kolmogorov theory implies that the statistical properties of turbulence, at small scales, are universal, if this is the case, the nonlinear term of the Navier-Stokes equations are playing the major role in the determining of such properties. The Navier – Stokes correctly predict how the cascade of turbulent kinetic energy and vorticity accelerates and how the sinews of turbulence stretch themselves into finer and finer scales.

In this talk, the mathematical treatment will be oriented on the metric nature of the so-called scale motions of a turbulent fluid. We primarily deal with isotropic turbulence, emphasis is placed on the study of metric properties and geometric structures of a turbulized domain determined by the two-point correlation tensor $B_{ij}(\vec{x}, \vec{x}'; t)$ with refereing to Riemannian manifolds and studying the Laplace – Beltrami operator on the so-called crossed product of Riemannian maniflods. In the following we restrict ourselves to isotropic and homogeneous turbulence since only in this case $B_{ij}(\vec{x}, \vec{x}'; t^*)$ is a symmetric tensor field given on the product $R^3 \times R^3 \simeq R^6$ for a each fixed time t^* (the functional form of this tensor field can be found in any manual on the statistical turbulence) which enables us to introduce into consideration a family of the Riemannian metrics for $t \in R_+$. We give a geometric interpretation of the structural function D_{LL} in the context of studying solutions to a closed model for the von Kármán – Howarth equation in the framework of the theory of geometric evolution equations. This equation is used to investigate the deformation of geometric quantities as this family of metrics evolve under the above-mentioned equation. We show that the behavior of the metrics may still to tell us much about turbulent fluctuations at correlation distances for both small and large scales covering, in particular, the region of the Kolmogorov inertial sub-range. Our aim is to rewrite the closed model for the von Kármán – Howarth equation under consideration in the form of an evolution equation which includes a Laplace – Beltrami type operator defined on a Riemannian manifold. The Laplace – Beltrami operator contains the metric tensor of a Riemannian manifold where this operator is defined. This is a peculiarity of the operator that enables to study an evolution of some geometric and metric quantities which characterizes scaling properties of a turbulent motion. In particular, these investigations gives a mathematical ground to describe the Richardson scenario of the cascade process.

This work was supported by DFG Foundation and by Award 1.8 (2006) for the Integration Projects SB RAS.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 660–661

УДК 519.634

ASYMPTOTIC OF POTENTIALS OF INCLUSIONS IN HIGH-CONTRAST HIGH-FILLED MEDIUM

© A. G. Kolpakov

algk@ngs.ru

Siberian State University of Telecommunications and Informatics, Novosibirsk, Russia

Denote $P = [-1,1]^n \subset R^n$ ($n=2$, 3) domain containing a system of not torching domains $\{D_i, i = 1,\ldots,N\}$ called inclusions and consider the following boundary value problem

$$\begin{aligned} &\Delta\varphi = 0 \quad \text{in} \quad Q;\\ &\varphi(\mathbf{x}) = t_i \quad \text{in} \quad D_i, \quad i = 1,\ldots,N;\\ &\int_{\partial D_i} \mathbf{vn}\, d\mathbf{x} = 0, \quad i = 1,\ldots,N;\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{on} \quad \partial Q_{lat};\\ &\varphi(\mathbf{x}) = -1 \quad \text{on} \quad \partial D^-, \quad \varphi(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{on} \quad \partial D^+; \end{aligned} \tag{1}$$

∂D^- and ∂D^+ mean the top and bottom boundaries of P, ∂Q_{lat} mean the right and left boundaries of P.

The unknowns in (1) are the function $\varphi(\mathbf{x})$ in domain Q and numbers $\{t_i, i = 1,\ldots,N\}$ (potentials of inclusions $\{D_i, i = 1,\ldots,N\}$).

The problem goes back to works by Maxwell and Rayleigh. In 1960–2000, the it was investigated asymptotic behavior of the problem under condition that characteristic distance δ between inclusions is small [1]. The modern stage of the analysis of the problem is related to the method of network approximation for high-contrast boundary value problems [2].

The network approximation for the problem (1) is constructed under assumption the inclusion interacts with its neighbors only and flux between i-th and j-th inclusions is equal to $C^{(2)}_{ij}(t_i - t_j)$, where $C^{(2)}_{ij}$ is capacity of these two inclusions R^n. The network approximation has the form

$$\sum_{j\in N_i} C^{(2)}_{ij}(t_i - t_j) = 0, \quad t_i = \pm 1 \quad \text{on} \quad S^{\pm}, \tag{2}$$

where S^+ and S^- are ind ices of quasi inclusions [3, 4] (portions of top and bottom boundaries corresponding to the near-boundary inclusions).

Let us denote solution of the boundary value problem (2) by $\{t^{net}_i, i = 1,\ldots,N\}$.

The object of interest was asymptotic of total flux (it is equal to effective conductivity, total energy or capacity of the system of inclusions) as $\delta \to 0$.

The complete proof of asymptotic equivalentness of the total flux corresponding to the problems (1) and (2) as $\delta \to 0$ for disordered (not periodic) inclusions was given not long ago ([3] for a system of planar disks and [4] for general case). It was found that the phenomenon of the network approximation is not an independent problem but a special case of I. E. Tamm asymptotic shielding effect [5, 6].

In [7] (first, to the best knowledge of the author) it was formulated the problem of relationship of potentials $\{t_i, i = 1,\ldots,N\}$ and $\{t^{net}_i, i = 1,\ldots,N\}$ of inclusions determined from the boundary value problem problem (1) and network problem (2) and it was proved convergence of the potentials of inclusion as $\delta \to 0$ for the the inclusions in the shape of planar circular disks.

In the present paper it is proved that $|t_i - t^{net}_i| \to 0, i = 1,\ldots,N$ as $\delta \to 0$ for the inclusions, which shapes satisfy the condition of existence of I. E. Tamm asymptotic shielding effect (in particular, for inclusions with smooth boundaries) [5].

REFERENCES

1. *Keller J. B.* Conductivity of a medium containing a dense array of ideal conducting bodies or cylinders or nonconducting cylinders // J. Appl. Phys. 1963. V. 34, N 4. P. 991–993.
2. *Borcea L., Papanicolaou G.* Network approximation for conducting properties of high contrast materials // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58, N 2. P. 501–539.
3. *Berleand L. V., Kolpakov A. G.* Network approximation in the limit of small interparticle distance of effective properties of a high contrast random dispersed composite // Arch. Rational Mech. Anal. 2001. V. 3. P. 179-227.
4. *Kolpakov A. G.* Asymptotic of conducting properties of high–contrast media // Appl. Mech. Tech. Phys. PMTF. 2005. T. 46, N 3. P. 128–140.
5. *Kolpakov A. A.* Numerical verification of existence of the energy concentration effect in high-contrast densely–filled composite material // J. Engng Phys. Thermophys. IFZ (in print).
6. *Kolpakov A. A., Kolpakov A. G.* Asymptotic of capacity of a system of closely-placed bodies. I. E. Tamm shielding effect and network models // Doklady Phys. Doklady AN (in print).
7. *Kolpakov A. G.* Convergence of solutions for a network approximation of the two-dimensional Laplace equation in a domain with a system of absolutely conducting disks // J. Comp. Math. Math. Phys. ZVMiMF. 2006. V. 46, N 9. P. 1681–1690.

Международная конференция "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения", 2007, с. 662–662

УДК 517.9

HOMOGENIZED EQUATIONS FOR SHORT-TIME FILTRATION PROCESSES AND ACOUSTIC WAVE PROPAGATION IN ELASTIC POROUS MEDIA

© A. M. Meirmanov

meirmanov@bsu.edu.ru

Belgorod State University, Belgorod, Russia

We consider a problem of a joint motion of a deformable solid, perforated by a system of channels (pores) and a fluid occupying a porous space. In dimensionless variables differential equations of the problem for the dimensionless displacement vector $\mathbf{w}^\varepsilon$ of the continuum medium have a form:

$$\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \mathrm{div}_x\{\chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}^\varepsilon) - (q^\varepsilon + \pi^\varepsilon)\mathbb{I}\} + \rho^\varepsilon \mathbf{F},$$

$$q^\varepsilon = -\chi^\varepsilon \alpha_p^\varepsilon \mathrm{div}_x \mathbf{w}^\varepsilon, \quad \pi^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_\eta \mathrm{div}_x \mathbf{w}^\varepsilon = 0.$$

In this model the characteristic function of the porous space χ^ε, coefficient $\rho^\varepsilon = \rho_f \chi^\varepsilon + \rho_s(1-\chi^\varepsilon)$ and a dimensionless vector $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ of distributed mass forces are known functions. Dimensionless parameters α_i $(i = \tau, \nu, \ldots)$ depend on the small parameter $\varepsilon = l/L$, where l is a characteristic size of pores and L is a characteristic size of the entire porous body. Although the problem is linear, it is very hard to tackle due to the fact that its main differential equations involve non-smooth oscillatory coefficients under the differentiation operators. We suggest the rigorous justification for homogenization procedures as ε tends to zero, while the porous body is geometrically periodic and a characteristic time of processes is small enough. Such kind of models may describe, for example, hydraulic fracturing or acoustic wave propagation. As the results we derive different types of homogenized equations involving non-isotropic Stokes system for fluid velocity coupled with acoustic equations for the solid component, or non-isotropic Stokes system for one-velocity continuum media, or different types of acoustic equations for one- or two-velocity continuum media, depending on ratios between physical parameters. The proofs are based on Nguetseng's two-scale convergence method of homogenization in periodic structures.