РАСЧЕТ ФУНКЦИЙ НАДЕЖНОСТИ И
ВОССТАНОВИМОСТИ ОДНОРОДНЫХ УНИВЕРСАЛЬНЫХ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

З.А. Хорошевская

В работе рассчитываются функции надежности и функция восстановимости однородной универсальной вычислительной системы при произвольных начальных условиях и произвольном числе восстанавливаемых устройств.

Приводится программа для расчета функции надежности, записанная на АЛГОЛе. Результаты иллюстрируются примерами вычислительных систем.

Имеется однородная универсальная вычислительная система (УВС), состоящая из \( N \) элементарных машин (ЭМ) \([1]\). Систему обслуживают \( m \) восстанавливаемых устройств, \( 1 \leq m \leq N \). Время безотказной работы ЭМ и время восстановления отказавшей ЭМ определяется по экспоненциальным законам с параметрами \( \lambda \) и \( \mu \), соответственно \([2]\).

Множество всех состояний системы \( E = \{0, 1, 2, \ldots, N\} \), разобьем на два подмножества: \( E_1 \) и \( E_2 \), \( E_1 \cup E_2 = E \). Если система находится в состоянии \( i \in E_1 \), то система исправна, если \( i \in E_2 \), система неисправна.

Производимость в момент времени \( t \) однородной УВС является функция

\[
Q(t) = \begin{cases} \lambda_1 t \omega, & \text{если в момент времени } t > 0 \text{ система находится в состоянии } i \in E, \\ 0, & \text{если } t > 0 \text{ или } i \in E_2, \end{cases}
\]

где \( \omega \) — производительность элементарной машины.

Путем выбора \( \lambda_1 \) может быть выбрана любая зависимость произ-
уравнение (1) на \( e^{-st} \) и пронтегрируем его по \( \varepsilon \). Применим преобразование Лапласа

\[
\alpha_k(s) = \int_0^\infty e^{-st} p_k(t) \, dt, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1,
\]

получим алгебраическую систему уравнений:

\[
\begin{aligned}
\alpha_k(s) &= (N-k+1)\alpha_{k+1}(s) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(s) \delta_{k-j}, \\
\alpha_k(s) &= (N-k)\alpha_k(s) + \sum_{j=k+1}^{N-1} \alpha_j(s) \delta_{k-j}, \\
\alpha_k(s) &= (N-k+1)\alpha_{k+1}(s) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(s) \delta_{k-j}, \\
\end{aligned}
\]

множители которых позволяют вычислить корни \( \Delta_{N-1}(s) \), например, с помощью метода пологого деления [6]. Если \( \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N-1} \) — корни \( \Delta_{N-1}(s) \), то

\[
\frac{\Delta_j(s)}{s} = \frac{\Delta_j(s)}{\Delta_{N-1}(s)} = \frac{\alpha_{N-j}}{s + \alpha_{N-j}},
\]

где

\[
\alpha_{N-j}/s = \frac{\Delta_j(s)}{\Delta_{N-1}(s)} = \frac{\Delta_j(s)}{\Delta_{N-1}(s) - \alpha_j \Delta_{N-1}(s) - \alpha_j}.
\]

(5)

Решая (2) по правилу Крамера, найдем

\[
\alpha_{N-1-j}(s) = \frac{(N-j)!}{(N-j)!} \frac{\Delta_j(s)}{\Delta_{N-1}(s)},
\]

где \( \Delta_j(s) \) и \( \Delta_{N-1-j}(s) \) определяются по рекуррентным соотношениям:

\[
\Delta_k(s) = (N-k+1)\alpha_{k+1}(s) + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j(s) \delta_{k-j}, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1,
\]

(3)

После обращения преобразования Лапласа вероятность

\[
P_{N-1-j}(t) = \int_0^\infty \alpha_{N-1-j}(s) e^{-st} \, ds,
\]

где \( c \) — контур, охватывающий нули знаменателя.

Корни \( \Delta_{N-1-j}(s) \) легко найти, как система многочленов \( \Delta_k(s) \), \( k = 0, 1, \ldots, N - 1 \), удовлетворяющая соотношению (1), обладает свойствами [3, 5]:

1) все корни \( \Delta_k(s) \) различны и отрицательны;
2) корни соседних многочленов \( \Delta_{N-j}(s) \) и \( \Delta_j(s) \) чередуются.

3) сумма корней многочленов \( \Delta_k(s) \) равна

\[
-\alpha_j = \frac{(2N-k-1)}{2} \frac{k}{k}, \quad \text{если } k \leq N,
\]

\[
-\alpha_j = \frac{(2N-k-1)}{2} \frac{k}{N-k+1}, \quad \text{если } k > N,
\]

(6)

Учитывая (4) — (6), получим

\[
P_{N-1-j}(t) = \frac{(N-j)!}{(N-j)!} \left[ \frac{\Delta_j(0)}{\Delta_{N-1-j}(0)} + \sum_{k=0}^{N-j} \Delta_j(-\alpha_k) e^{-\alpha_k t} \right].
\]

(7)

Используя (3), легко доказать, что

\[
\Delta_j(0) = \frac{N!}{(N-j)!} \lambda^j
\]

(8)

Подставляя (8) в (7), получим

\[
P_{N-1-j}(t) = \frac{(N-j)!}{(N-j)!} \sum_{k=0}^{N-j} \Delta_j(-\alpha_k) e^{-\alpha_k t}.
\]

(9)

Таким образом, нестандартная функция надежности будет равна

\[
R(t) = \frac{(N-j)!}{(N-j)!} \sum_{k=0}^{N-j} \Delta_j(-\alpha_k) e^{-\alpha_k t}.
\]

(9)
Функция восстановимости

Функция восстановимости [2]

\[ U(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_j e^{-\beta_j t}}{j!}, \]

где \( \alpha_j \) — число исправных ЭМ при \( t = 0, \ j \in E_j \);

\( \beta_j \), \( j = 1, 2, \ldots, \tau_j \) — корни полинома \( \Delta_j(S) \);

\( \Delta_j(S) \) и \( \Delta_j'(S) \) определяются рекуррентным соотношением:

\[ \Delta_j(S) = S \Delta_{j+1}(S) - \sum_{k=1}^{j} \frac{j!}{k!} \Delta_k(S) \Delta_{j-k+1}(S), \quad 0 \leq k \leq \tau_j, \]

\[ \Delta_j'(S) = \frac{S}{\Delta_0(S)} \Delta_j(S) - \frac{S}{\Delta_1(S)} \Delta_j'(S), \quad \Delta_0(S) = 1, \quad \Delta_1(S) = S + \mu \tau_j. \]

Полученные результаты позволяют рассчитать нестационарную функцию надежности \( R(t) \) и нестационарную функцию восстановимости \( U(t) \) для однородных универсальных вычислительных систем любой производительности.

Приведем несколько примеров таких систем.

В качестве ЭМ возьмём "Минск-22" [7].

На рис.1-4 изображена функция \( R(t) \) в зависимости от числа \( \tau_j \) основных машин в системе для \( N = 100, \tau_j = 1, \mu = 0,7 \) I/час, \( \tau_j = 0 \) при различных \( \lambda \); на рис. 1 \( \lambda = 0,01 \) I/час; на рис. 2 \( \lambda = 0,02 \) I/час; на рис. 3 \( \lambda = 0,03 \) I/час; на рис. 4 \( \lambda = 0,05 \) I/час.

На рис. 5 представлена функция \( U(t) \) для \( \tau_j = 1, 2, \ldots, 6, \)
Рис. 8

Рис. 9
Выводы

Для того, чтобы надежность системы, состоящей из 100 ЭМ и имеющей одно восстанавливаемое устройство с интенсивностью восстановления 0,7 1/час при условии, что в начальный момент все ЭМ исправны, была достаточно высокой, желательно, чтобы интенсивность отказов ЭМ была не более 0,001 1/час. В противном случае зависимость надежности от числа основных машин в системе значительно повышается. Хотя надежность и остается достаточно высокой, тем не менее при дальнейшем увеличении интенсивности отказов надежность системы резко падает.

Кроме того, дальнейшее увеличение числа восстанавливающих устройств повышает надежность системы несущественно (рис. 5), по-этому более целесообразно иметь одно восстанавливающее устройство с большей интенсивностью восстановления (рис. 9).

Функция надежности УУС будет решено подать, если в начальный момент все ЭМ, составляющие структурную избыточность, исправны; необходимо иметь некоторый запас (рис. 6), но функция восстановления увеличивается равномерно с ростом числа исправных машин в системе (рис. 7).

Функция надежности сильно зависит от числа основных машин в системе лишь тогда в том случае, когда λ велико (рис. 1-3), при малых же λ, например λ = 0,001 1/час (рис. 4), орать число основных машин в системе менее 50 не имеет смысла. Функция восстановления при изменении числа основных ЭМ практически меняется на одну и ту же величину (рис. 6).

Таким образом, однородные УУС высокой производительности и высокой надежности могут быть построены на существующей физико-технологической базе.

Приложение

Приведем программу для расчета нестационарной функции надежности, записанную на АЛГОЛе [8]. По этой программе можно рассчитать надежность любой однородной системы на начальном периоде ее функционирования. Для этого необходимо задать следующие значения:

1. N - число ЭМ в системе;
2. λ - число основных ЭМ в системе;
3. μ - число восстанавливающих устройств;
4. λ - интенсивность отказов в ЭМ;
5. μ - интенсивность восстановлений;
6. f - число исправных ЭМ в системе при t = 0;
7. s - степень точности счета корней A(5);
8. c0 - степень приближения R(τ) к нулю;
9. τ - начальное время;
10. Δ - шаг изменения времени.

На печать выводится значение:

\[ R(T) = \frac{T^0}{T^+ Δ, R(T+Δ)} \]  

где τ - время, начиная с которого R(τ) < δ .

begin integer N, n, m, k, i, j, p; real λ, μ, c1, c2, σ, φ1, φ2, f, s, b, x, α, ρ, t, c, Δ, R; ω;

тущ (N, m, λ, μ, c1, c2, σ, ω, ω, λ, Δ);

begin real array P1 [0: N-n-1], P2 [0: N-n], P3 [0: N-n+1], α [0: N-n+1], 1 [0: 1], Δ [1: N-n+1];


for i := 2 step 1 until (N-n+1) do P3 [i] := 0; S := -N - λ;

for i := 0 step 1 until (N-n+1) do

G [0] := 1; H := k + 1; if k = k then for i := 0 step 1 until j do

J [i] := P2 [i]; if k < k then c1 := (k+1) × m + μ else

c1 := (N-k+1) × m + μ; if k < k then c2 := (N-k+1) × k × μ else c2 := (N-k) × m + μ × μ; for i := 0 step 1 until k do P3 [i+1] := P3 [i+1] + c2 × P2 [i]; if k < k then \[ S := \sum \] (N-k)x × k × μ else \[ S := \sum \] (N-k)x × k × μ × μ; S := 0; φ1 := P3 [k+1]; for i := 0 step 1 until (k-1) do begin α := c [i]; b := c [i+1];
\[ \varphi_2 := P_2[0] \] for \( r = 1 \) step 1 until \((k+1)\) do \( \varphi_2 := \varphi_2 \times b + P_2[r] \); \[ d := \varphi_2; \quad D := (a+b)/2; \quad f := P_2[0]; \]
for \( r = 1 \) step 1 until \((k+1)\) do \( f := f \times x + P_2[r] \); if abs \((t) \leq \delta \) then begin \[
\begin{align*}
[k+1] := x; \\
\varphi_1 := S + x; \quad \varphi_2 := f; \quad \varphi_1 := d
\end{align*}
\] end else if sign \((\varphi_1) =\) \(\text{sign}(f)\) then begin \(a := x; \quad \varphi_1 := f; \quad \text{go to D end end; \quad } \beta[k+1] := \sum S; \quad \text{for } i := 1 \text{ step 1 until } (k+1) \text{ do } \varphi[i] := \beta[i]; \text{ if } k < N-n \text{ then begin for } i := 0 \text{ step 1 until } k \text{ do } P[i] := P[i+1]; \text{ for } i := 0 \text{ step 1 until } (k+1) \text{ do } \varphi[i] := P[i]; \text{ go to E end; \quad } i := 0 \text{ step 1 until } (N-n-1) \text{ do } P[i] := P[i+1] \times (N-n+1-i); \text{ for } r := 1 \text{ step 1 until } (N-n+1) \text{ do begin } x := \varphi[r]; \quad f := P_5[0]; \quad \text{for } i := 1 \text{ step 1 until } (N-n+1) \text{ do begin } x := \varphi[r]; \quad f := J[0]; \quad \text{for } i := 1 \text{ step 1 until } j \text{ do } f := f \times x + J[i]; \quad G[r] := f \text{ end; } \rho := 1; \quad \text{for } i := 0 \text{ step 1 until } (N-j-n) \text{ do } \rho := \rho \times (N-j-i); \quad \text{for } i := 1 \text{ step 1 until } (N-n+1) \text{ do } R := R + \exp(\alpha[i] \times t) / \alpha[i] \times G[i] / \beta[i]; \quad R := R \times \rho \quad \text{выход } (t, R); \quad \text{if abs}(\rho) > \omega \text{ then begin } t := t + \Delta \quad \text{go to T end end end}
\]

Литература

1. Э.В. Щелевинов, В.Г. Косарев. Одинодонные универсальные вычислительные системы высокой производительности. Новосибирск, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, 1966.

Поступила в редакцию 10.11.1969 г.