

УДК 519.688:519.644.2

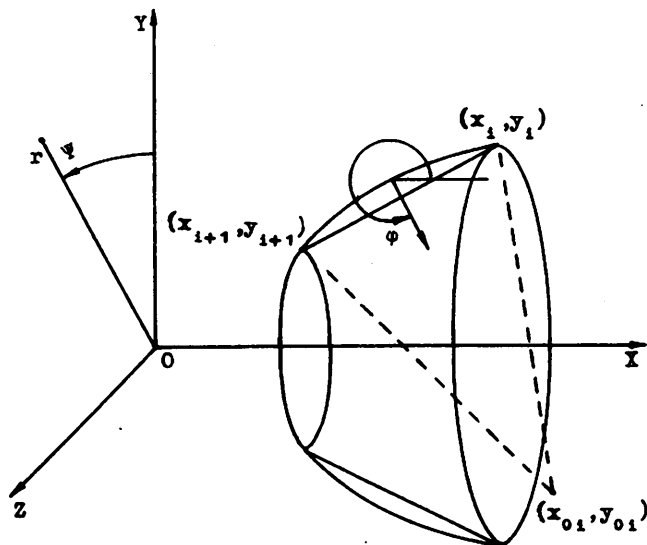
ОБ АЛГОРИТМИЗАЦИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ НЕКОТОРЫХ
ИНТЕГРАЛОВ В ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В.К.Королев

Задачи вычислительной математики составляют класс легко формализуемых задач. Обычно при их программировании основное внимание уделяется вопросам сходимости алгоритмов, оценки их точности, причем, как правило, не учитывающей разрядности ЭВМ при изображении числовой информации. Архитектуре алгоритма если и придается какое-то значение, то опять-таки - с точки зрения "реликтовых" [1] критериев: быстродействия и объема памяти. Между тем с увеличением мощности ЭВМ и снижением их стоимости существенно смещаются акценты при оценке качества программного продукта, предназначенного в основном "конечным" пользователям. На протяжении своего жизненного цикла программа неизбежно подвергается модификации и модернизации. С учетом этого ранее недостаточно оцениваемого этапа продолжающейся разработки или сопровождения, одним из основных достоинств программы становится ее простота: простота организации (читабельность), простота проверки (верифицируемость), простота изменения (гибкость) [2]. Об этих качествах программы необходимо заботиться уже на этапе разработки алгоритма или проектирования программы.

В данной работе, во-первых, решается вполне конкретная практическая задача из инженерной геометрии - вычисление некоторых определенных интегралов. Во-вторых, на примере этой задачи делается попытка показать, как, отходя от "реликтовых" критериев эффективности, можно было бы организовать алгоритм, чтобы получить наглядную, легко проверяемую и удобную для последующей модификации программу. И в-третьих, предлагается некая ревизия справочников, содержащих вычислительные формулы, аналогичные рассматриваемым.

Итак, пусть задано тело, образованное вращением около оси OX фигуры, расположенной в плоскости XY и ограниченной контуром, состоящим из конечного числа прямолинейных отрезков и дуг окружностей (на рисунке показан один из элементов этого тела). Требуется



вычислить: S - площадь поверхности тела, V - его объем, W_y - статический момент относительно оси OY , I_x и I_y - моменты инерции тела относительно осей OX и OY .

Обычно в инженерной практике поставленную задачу решают путем разбиения тела на стандартные элементы (цилиндры, конусы, усеченные конусы, куски торов) и применения готовых формул из справочников. С точки зрения машинных вычислений такой способ не вполне приемлем, так как а) он не обладает универсальностью; б) как правило, не все нужные формулы можно найти в справочнике; в) не все из приводимых формул можно применять непосредственно (см. пример ниже); г) нередко требуется некоторая предварительная переработка имеющейся в машине информации. Возможно, и сам способ организации справочников - большой набор простых формул для различных частных случаев - устарел и нуждается в пересмотре.

Проиллюстрируем высказанные замечания на примере формулы для вычисления момента инерции усеченного конуса, приведенной в [3, с.74]:

$$I_x = \frac{3m}{10} \cdot \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}.$$

Здесь m - масса тела; нетрудно найти, что $m = \rho \frac{\pi H}{3} \frac{R_2^3 - R_1^3}{R_2 - R_1}$, где ρ - плотность тела.

Из-за особенности в знаменателе эту формулу нельзя непосредственно применять для цилиндра ($R_2 = R_1$). Правда, для цилиндра приводится своя формула, впрочем, так же как и для конуса, хотя это - два частных случая усеченного конуса. Кроме того, отдельно рассматриваются полые и сплошные тела. С нашей точки зрения, для описания всех этих случаев достаточно одной формулы, к которой очевидным образом приводится выписанная выше (обозначения даны на рисунке):

$$I_x = \rho \frac{\pi}{10} (x_1 - x_{i+1}) (y_1^4 + y_{i+1}^3 y_1 + y_1^2 y_{i+1}^2 + y_{i+1} y_1^3 + y_{i+1}^4). \quad (1)$$

Эта формула не содержит особенностей и записана в координатах, так что охватывает общий случай тела, образованного вращением фигуры, ограниченной отрезком, произвольно расположенным в плоскости XY .

Для линейного случая формулы, аналогичные (1), получены для всех пяти перечисленных выше величин. Соответствующая программа уже в течение ряда лет используется для решения практических задач.

Наша ближайшая задача - получить формулы для вычисления указанных величин в случае, когда тело образовано вращением около оси OX фигуры, ограниченной дугой окружности, произвольно расположенной в плоскости XY (нелинейный случай). Приводя в качестве примера формулу (1), мы не выписываем все остальные, довольно громоздкие формулы для линейного случая. В нелинейном случае вид расчетных формул должен еще более усложниться. Тем не менее, наряду с задачей непосредственного вычисления требуемых величин, мы преследуем и другую цель - навести некий "глянец" на все эти формулы, сделав их единообразными (для отрезка и дуги), наглядны-

ми, легко проверяемыми. При их реализации возможно некоторое снижение эффективности программы, но мы считаем это позволительным — по приведенным выше соображениям.

Вывод формул будем вести параллельно — для отрезка и для дуги. Можно было бы рассматривать отрезок как частный случай дуги и построить соответствующим образом вычислительные формулы, но мы считаем более целесообразным формально объединить оба эти случая общим видом записи, а специфику формул выявить лишь на конечном этапе их вывода.

Итак, если i -й отрезок задан координатами его начальной точки (x_i, y_i) и углом φ_i внутренней нормали, то, параметризуя отрезок с помощью длины l , можно записать его параметрические уравнения в виде:

$$\begin{cases} x = x_i + l \sin \varphi_i, \\ y = y_i - l \cos \varphi_i. \end{cases}$$

Для i -й дуги, заданной координатами начальной точки (x_i, y_i) и центра (x_{o_i}, y_{o_i}) и радиусом R_i , параметризуя дугу с помощью угла φ внутренней нормали, мы имеем следующие параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = x_{o_i} - R_i \cos \varphi, \\ y = y_{o_i} - R_i \sin \varphi. \end{cases}$$

В обобщенном виде эти две пары уравнений для i -го элемента контура можно записать так:

$$\begin{cases} x = x_i^k - \kappa_i^k(\omega^k), \\ y = y_i^k - \sigma_i^k(\omega^k). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь k — признак типа элемента: для отрезка $k = c$, для дуги $k = a$; ω^k — параметр элемента: $\omega^c = l$, $\omega^a = \varphi$.

Далее

$$x_i^c = x_i, y_i^c = y_i, x_i^a = x_{o_i}, y_i^a = y_{o_i}; \quad (3)$$

и, наконец,

$$\kappa_i^c(\omega^c) = \kappa_i^c l, \quad \sigma_i^c(\omega^c) = \sigma_i^c l,$$

$$\kappa_1^a(\omega^a) = R_1 \cos \varphi, \quad \sigma_1^a(\omega^a) = R_1 \sin \varphi,$$

где $\kappa_1 = -\sin \varphi_1$, $\sigma_1 = \cos \varphi_1$.

Требуется вычислить следующие пять интегралов:

$$S_1 = \int_{(S_1)} dS, \quad V_1 = \int_{(V_1)} dV, \quad W_{y_1} = \int_{(V_1)} x dV,$$

$$I_{x_1} = \rho \int_{(V_1)} (y^2 + z^2) dV, \quad I_{y_1} = \rho \int_{(V_1)} (x^2 + z^2) dV.$$

Введем (см. рисунок) цилиндрические координаты (r, φ, x) . Имеем: элемент площади $dS = y \cdot d\varphi \cdot d\tau$, где элемент длины

$$d\tau = d\tau(\omega^k) = \begin{cases} dl & \text{для } k=c; \\ R_1 d\varphi & \text{для } k=a; \end{cases}$$

элемент объема $dV = -dx \cdot r d\varphi \cdot dr$, где

$$dx = dx(\omega^k) = \begin{cases} -\kappa_1 dl & \text{для } k=c, \\ R_1 \sin \varphi d\varphi & \text{для } k=a \end{cases}$$

(знак "-" перед dx соответствует направлению обхода контура против часовой стрелки).

Пределы интегрирования:

по φ от 0 до 2π ,

по r от 0 до

$$y = y(\omega^k) = \begin{cases} y_1 - \sigma_1 l & \text{для } k=c, \\ y_{01} - R_1 \sin \varphi & \text{для } k=a, \end{cases}$$

по l от 0 до $l_{1+1} = \sqrt{(x_1 - x_{1+1})^2 + (y_1 - y_{1+1})^2}$,

по φ от φ_1 до φ_{1+1} .

В переменных ω^k пределы интегрирования $(0, l_{1+1})$ и $(\varphi_1, \varphi_{1+1})$ будем записывать в виде $(\omega_1^k, \omega_{1+1}^k)$.

Подставляя все это в выражения для S_1, \dots, I_{y_1} , можно было бы для каждого из интегралов аккуратно проделать все - довольно громоздкие - выкладки и вывести окончательный вид формул. Получились бы длинные, разнородные и не слишком наглядные выражения, не очень приятные для программирования и, что особенно важно, трудные для проверки и модификации. Мы поступим иначе. Не будем пока

определять до конца все промежуточные интегралы, а займемся алгебраическими преобразованиями формул.

Интегрирование по ϕ во всех интегралах, кроме последнего, а по r во всех интегралах, за исключением первого, выполняется явно. Имеем:

$$S_1^k = 2\pi \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} y d\tau(\omega^k);$$

$$V_1^k = -2\pi \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} dx(\omega^k) \int_0^{y(\omega^k)} r dr = -\pi \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} y^2(\omega^k) dx(\omega^k);$$

$$W_{y_1}^k = -2\pi \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} dx(\omega^k) \int_0^{y(\omega^k)} x(\omega^k) r dr = -\pi \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} x(\omega^k) y^2(\omega^k) dx(\omega^k);$$

$$I_{x_1}^k = -2\pi\rho \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} dx(\omega^k) \int_0^{y(\omega^k)} r^3 dr = -\frac{\pi}{2}\rho \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} y^4(\omega^k) dx(\omega^k);$$

$$I_{y_1}^k = -\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} dx(\omega^k) \int_0^{y(\omega^k)} [x^2(\omega^k) - r^2 \sin^2 \phi] r dr =$$

$$= -\pi\rho \int_{\omega_1^k}^{\omega_{1+1}^k} [x^2(\omega^k) y^2(\omega^k) + \frac{1}{4} y^4(\omega^k)] dx(\omega^k).$$

Различия между отрезком и дугой в этих формулах пока никак не проявляются. Раскроем выражения для интегралов дальше, учитывая

(2) и вводя для сохранения единообразия обозначения:

$$\nu^k = \begin{cases} 1 & \text{для } k=c; \\ R_1 & \text{для } k=a; \end{cases} \quad \mu^k = \begin{cases} -\kappa_1 & \text{для } k=c; \\ R_1 & \text{для } k=a. \end{cases}$$

Получим:

$$S_1^k = 2\pi\nu^k(J_0^k)^{\frac{\omega^k}{\omega_1^k} i+1},$$

$$V_1^k = -\pi\mu^k(J_1^k)^{\frac{\omega^k}{\omega_1^k} i+1},$$

$$W_{y1}^k = -\pi\mu^k(J_2^k)^{\frac{\omega^k}{\omega_1^k} i+1},$$

$$I_{x1}^k = -\frac{\pi}{2} \rho\mu^k(J_3^k)^{\frac{\omega^k}{\omega_1^k} i+1},$$

$$I_{y1}^k = -\pi\rho\mu^k(J_4^k + \frac{1}{4} J_3^k)^{\frac{\omega^k}{\omega_1^k} i+1}.$$

Здесь через J_0^k, \dots, J_4^k обозначены соответствующие неопределенные интегралы.

Распишем подробно, например, выражение для J_2^k . Для отрезка имеем

$$\begin{aligned} J_2^c &= \int (x_1 - \kappa_1 l)(y_1 - \sigma_1 l)^2 dl = \\ &= x_1(y_1^2 \int dl - 2y_1 \sigma_1 \int l dl + \sigma_1^2 \int l^2 dl) - \\ &- \kappa_1(y_1^2 \int l dl - 2y_1 \sigma_1 \int l^2 dl + \sigma_1^2 \int l^3 dl). \end{aligned}$$

Очевидно, что это выражение можно свернуть, записав его в матричной форме:

$$J_2^C = (x_1, -u_1) \begin{pmatrix} T_0, T_1, T_2 \\ T_1, T_2, T_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^2 \\ -2y_1 \sigma_1 \\ \sigma_1^2 \end{pmatrix},$$

где $T_n = \int l^n dl$.

Аналогично - для дуги:

$$\begin{aligned} J_2^a &= \int (x_{01} - R_1 \cos \varphi)(y_{01} - R_1 \sin \varphi)^2 \sin \varphi d\varphi = \\ &= x_{01}(y_{01}^2 \int \sin \varphi d\varphi - 2y_{01}R_1 \int \sin^2 \varphi d\varphi + R_1^2 \int \sin^3 \varphi d\varphi) - \\ &- R_1(y_{01}^2 \int \sin \varphi \cos \varphi d\varphi - 2y_{01}R_1 \int \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi + R_1^2 \int \sin^3 \varphi \cos \varphi d\varphi) = \\ &= (x_{01}, -R_1) \begin{pmatrix} G_{10}, G_{20}, G_{30} \\ G_{11}, G_{21}, G_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{01}^2 \\ -2y_{01}R_1 \\ R_1^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $G_{nm} = \int \sin^n \varphi \cos^m \varphi d\varphi$.

Подобным же образом нетрудно привести и все остальные выражения к матричному виду.

Введем следующие обозначения для матриц:

$$\begin{aligned} T_0^C &= (T_0, T_1), & T_0^a &= (G_{00}, G_{10}), \\ T_1^C &= (T_0, T_1, T_2), & T_1^a &= (G_{10}, G_{20}, G_{30}), \\ T_2^C &= \begin{pmatrix} T_0, T_1, T_2 \\ T_1, T_2, T_3 \end{pmatrix}, & T_2^a &= \begin{pmatrix} G_{10}, G_{20}, G_{30} \\ G_{11}, G_{21}, G_{31} \end{pmatrix}, \\ T_3^C &= T_4^C = \begin{pmatrix} T_0, T_1, T_2 \\ T_1, T_2, T_3 \\ T_2, T_3, T_4 \end{pmatrix}, & T_3^a &= \begin{pmatrix} G_{10}, G_{20}, G_{30} \\ G_{20}, G_{30}, G_{40} \\ G_{30}, G_{40}, G_{50} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$T_4^a = \begin{pmatrix} G_{10}, G_{20}, G_{30} \\ G_{11}, G_{21}, G_{31} \\ G_{12}, G_{22}, G_{32} \end{pmatrix}.$$

Далее положим:

$$Y_0^k = \begin{pmatrix} y_1^k \\ -v^k \end{pmatrix}, \quad Y_1^k = (Y_3^k)^T = \begin{pmatrix} (y_1^k)^2 \\ -2y_1^k v^k \\ (v^k)^2 \end{pmatrix},$$

где y_1^k определяется с помощью (3), а $v^k = \begin{cases} \sigma_1 & \text{для } k=c; \\ R_1 & \text{для } k=a. \end{cases}$

Наконец, обозначим:

$$X_2^k = (x_1^k, -u^k), \quad X_4^k = ((x_1^k)^2, -2x_1^k u^k, (u^k)^2),$$

где x_1^k определяется с помощью (3), а $u^k = \begin{cases} \kappa_1 & \text{для } k=c; \\ R_1 & \text{для } k=a. \end{cases}$

В этих обозначениях выражения для неопределенных интегралов принимают следующий вид:

$$J_0^k = T_0^k \cdot Y_0^k,$$

$$J_1^k = T_1^k \cdot Y_1^k,$$

$$J_2^k = X_2^k \cdot T_2^k \cdot Y_1^k,$$

$$J_3^k = Y_3^k \cdot T_3^k \cdot Y_1^k,$$

$$J_4^k = X_4^k \cdot T_4^k \cdot Y_1^k.$$

Таким образом, в обоих случаях (отрезок, дуга) формулы для интегралов выглядят единообразно и достаточно просто; они легко программируются и анализируются.

Вид матриц Y_0 , Y_1 , X_2 и X_4 с точностью до обозначений одинаков для отрезка и дуги. Различия этих двух случаев проявляются при вычислении матриц T_0, T_1, T_2, T_3 и T_4 .

Для окончательного вычисления интегралов S_1, \dots, I_{y_1} остается найти первообразные T_n и G_{nn} . Величины T_n находятся непосред-

ственно: $T_n = 1^{n+1}/(n+1)$. Для вычисления величин G_{nm} удобно использовать рекуррентные соотношения, которые нетрудно вывести с помощью интегрирования по частям:

$$G_{nm} = \begin{cases} -\frac{\sin^{n-1}\varphi \cos^{n+1}\varphi}{n+m} + \frac{n-1}{n+m} G_{n-2,m}, & n \geq 2, m \geq 0; \\ \frac{\sin^{n+1}\varphi \cos^{m-1}\varphi}{n+m} + \frac{m-1}{n+m} G_{n,m-2}, & n \geq 0, m \geq 2. \end{cases}$$

Сначала непосредственно из определения находим:

$$G_{00} = \varphi; \quad G_{11} = \frac{\sin^2 \varphi}{2};$$

$$G_{10} = -\cos \varphi; \quad G_{21} = \frac{\sin^3 \varphi}{3};$$

$$G_{31} = \frac{\sin^4 \varphi}{4}.$$

Затем последовательно, применяя рекуррентные соотношения, получаем:

$$G_{20} = -\frac{\sin \varphi \cos \varphi}{2} + \frac{1}{2} G_{00};$$

$$G_{30} = -\frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{3} + \frac{2}{3} G_{10}; \quad G_{12} = \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{3} + \frac{1}{3} G_{10};$$

$$G_{40} = -\frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi}{4} + \frac{3}{4} G_{20}; \quad G_{22} = \frac{\sin^3 \varphi \cos \varphi}{4} + \frac{1}{4} G_{20};$$

$$G_{50} = -\frac{\sin^4 \varphi \cos \varphi}{5} + \frac{4}{5} G_{30}; \quad G_{32} = \frac{\sin^4 \varphi \cos \varphi}{5} + \frac{1}{5} G_{30}.$$

Численные значения соответствующих определенных интегралов получаются при подстановке пределов: $(0, 1_{i+1})$ - для отрезка и $(\varphi_1, \varphi_{i+1})$ - для дуги.

Таким образом, предлагаемый алгоритм вычисления указанных пяти интегралов хотя и выглядит, быть может, несколько "размазанным", зато сразу охватывает оба случая разнородных элементов, геометрические характеристики которых входят в состав введенных матриц симметрично и довольно наглядно, что облегчает проверку фор-

мул при возможных модификациях алгоритма и программы. После формирования этих матриц весь последующий процесс вычислений стандартизован и сводится к выполнению матричных перемножений.

По описанному алгоритму составлена программа на языке PL/1 ОС ЕС ЭВМ. Программа отлажена на тестовых примерах и прошла опытную проверку на реальных задачах.

Приведем несколько примеров для иллюстрации предложенных формул.

1. Площадь поверхности. Очевидно, что

$$(T_0)_0^{1+1} = 1_{1+1}, \quad (T_1)_0^{1+1} = \frac{1^2_{1+1}}{2}.$$

Поэтому

$$(J_0^C)_0^{1+1} = 1_{1+1} \left(y_1 - \frac{y_1 - y_{1+1}}{2} \right) = 1_{1+1} \frac{y_1 + y_{1+1}}{2}.$$

Получаем для отрезка $\bar{S} = \pi 1_{1+1} (y_1 + y_{1+1})$. Аналогично

$$(G_{00})_{\varphi_1}^{\varphi_{1+1}} = \varphi_{1+1} - \varphi_1, \quad (G_{10})_{\varphi_1}^{\varphi_{1+1}} = -\cos \varphi_{1+1} + \cos \varphi_1.$$

Поэтому

$$(J_0^S)_{\varphi_1}^{\varphi_{1+1}} = y_{01} (\varphi_{1+1} - \varphi_1) + R_1 (\cos \varphi_{1+1} - \cos \varphi_1).$$

В результате для дуги получаем

$$\tilde{S} = 2\pi R_1 [y_{01} (\varphi_{1+1} - \varphi_1) + R_1 (\cos \varphi_{1+1} - \cos \varphi_1)].$$

Обе эти формулы для площади поверхности хорошо известны.

2. Объем шара. Пусть в частном случае $y_0 = 0$. Имеем

$$V = -\pi R(G_{30})_{\pi}^{2\pi} R^2 = -\pi R^3 \cdot \frac{2}{3} (-\cos \varphi)_{\pi}^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

3. Центр тяжести однородного шара. Положим снова $y_0 = 0$. Находим

$$J_2^S = (x_0, R) \begin{pmatrix} \dots, \dots, G_{30} \\ \dots, \dots, G_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \end{pmatrix} = R^2 (x_0 G_{30} - R G_{31}).$$

далее имеем:

$$(G_{30})_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{3} (-\cos \varphi)_{\pi}^{2\pi} = -\frac{4}{3}, (G_{31})_{\pi}^{2\pi} = 0,$$

Поэтому

$$(J_2^a)_{\pi}^{2\pi} = R^2 \cdot x_0 \left(-\frac{4}{3}\right), W_y = -\pi R \cdot R^2 \cdot x_0 \left(-\frac{4}{3}\right) = x_0 \cdot V.$$

Откуда абсцисса центра тяжести

$$x_c = \frac{W_y}{V} = x_0.$$

4. Момент инерции усеченного конуса. Имеем

$$(J_3^c)_0^{1+1} = y_1^4 (T_0)_0^{1+1} - 4 y_1^3 \sigma_1 (T_1)_0^{1+1} + 6 y_1^2 \sigma_1^2 (T_2)_0^{1+1} - \\ - 4 y_1 \sigma_1^3 (T_3)_0^{1+1} + \sigma_1^4 (T_4)_0^{1+1}.$$

Учитывая, что $y_1 l_{1+1} = x_{1+1} - x_1$, $\sigma_1 l_{1+1} = y_{1+1} - y_1$, и проводя дальнейшие выкладки, нетрудно получить формулу (I).

5. Момент инерции однородного шара. Пусть снова $y_0 = 0$. Тогда $J_a^a = R^5 - G_{32}$. Поскольку

$$(G_{30})_{\pi}^{2\pi} = \frac{4}{5} \left(\frac{2}{3} (-\cos \varphi) \right)_{\pi}^{2\pi} = \frac{16}{15},$$

то $I_x = \rho \frac{8\pi}{15} R^5$ или $I_x = \frac{2}{5} m R^2$, где $m = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$. Формула для I_x совпадает с приведенной в справочнике [3].

Возвращаясь снова к вопросу об организации справочников, можно было бы предложить, например, для решения поставленной задачи привести по две соответствующие формулы для каждого из вычисляемых интегралов и этим исчерпать все многочисленные частные случаи. Правда, формулы (или цепочки формул - алгоритм) получились бы более сложными, но зато универсальными.

Когда-нибудь в будущем, возможно, вообще отпадет надобность в подобного рода справочниках с вычислительными формулами, а вся

работа будет вестись с широким набором готовых программ типа "черный ящик" со спецификациями на входные и выходные параметры. В таком случае справочники, содержащие вычислительные алгоритмы (как обобщения формул) можно было бы рассматривать в качестве паллиативного средства, хотя не исключено, что таким справочникам могла бы быть суждена долгая жизнь.

Л и т е р а т у р а

1. ГРОМОВ Г.Р. Национальные информационные ресурсы. - М.: Наука, 1985. - 237 с.
2. ИОДАН Э. Структурное проектирование и конструирование программ /Пер. с англ. под ред. Л.Н.Королева. - М.: Мир, 1979. - 415 с.
3. ЯВОРСКИЙ Б.М., ДЕТЛАФ А.А. Справочник по физике. - М.: Наука, 1977. - 942 с.

Поступила в ред.-изд.отд.

14 апреля 1986 года