

АКСИОМАТИЧЕСКАЯ СЕМАНТИКА ПРОГРАММ,  
НЕ ДОПУСКАЮЩАЯ ПОБОЧНЫХ ЭФФЕКТОВ

И.А. Ломазова

В [1] определена аксиоматическая семантика  $A\mathcal{X}$  для циклических программ, которые задаются над спецификацией абстрактных типов данных. Семантика  $A\mathcal{X}$  является расширением обычной операционной семантики программ над моделями спецификаций абстрактных типов данных. Логика Хоара полна относительно семантики  $A\mathcal{X}$ , в то время как относительно операционной семантики логика Хоара полна только в случае выразительности базового логического языка [2]. Однако, в отличие от операционной семантики, семантика  $A\mathcal{X}$  допускает побочные эффекты: в соответствии с семантикой  $A\mathcal{X}$  в ходе выполнения программы могут меняться значения переменных, не входящих в программу, и изменение начального значения переменной, не входящей в программу, может изменить результат работы программы. Последнее свойство семантики  $A\mathcal{X}$  свидетельствует о некоторой неадекватности ее содержательному представлению о том, как выполняется программа.

В настоящей работе строится и исследуется устойчивая аксиоматическая семантика  $STA\mathcal{X}$  такая, что

- логика Хоара полна относительно  $STA\mathcal{X}$ ,
- семантика  $STA\mathcal{X}$  не допускает побочных эффектов на классе всех моделей спецификаций абстрактных типов данных.

Тем самым дается ответ на сформулированный в [1] вопрос о существовании основанной на логике Хоара семантики программ, которая не допускала бы побочных эффектов. В работе приводится также решение еще одного вопроса, сформулированного в [1], о побочных эффектах семантики  $A\mathcal{X}$  на классе термально-порожденных моделей спецификаций абстрактных типов данных.

## I. Основные определения

Пусть  $\Sigma$  – многосортная сигнатура,  $\text{Var}$  – множество переменных с приписанными им сортами из  $\Sigma$ . Через  $L(\Sigma)$  обозначим язык логических формул первого порядка с равенством над сигнатурой  $\Sigma$  и множеством  $\text{Var}$ , через  $\text{WP}(\Sigma)$  – язык программы с циклами в сигнатуре  $\Sigma$ :

$$\text{WP}(\Sigma) \ni S ::= x := e \mid S_1; S_2 \mid \text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi} \mid \\ \text{while } b \text{ do } S \text{ od},$$

где  $x \in \text{Var}$ ,  $b \in L(\Sigma)$ ,  $e$  – терм в сигнатуре  $\Sigma$  со свободными переменными из  $\text{Var}$ . Для программы  $S \in \text{WP}(\Sigma)$  через  $\text{Var}(S)$  будем обозначать множество переменных, входящих в  $S$ .

Пусть  $T$  – множество замкнутых формул из  $L(\Sigma)$ . Пара  $(\Sigma, T)$  образует спецификацию абстрактных типов данных [3]. Семантика спецификации  $(\Sigma, T)$  определяется как множество  $\text{Mod}(\Sigma, T)$  всех  $\Sigma$ -моделей, удовлетворяющих аксиомам  $T$ .  $\Sigma$ -модель  $A$  называется термально-порожденной, если для любого элемента  $a$  модели  $A$  существует такой  $\Sigma$ -терм  $t$  без свободных переменных, что значение  $t$  в  $A$  совпадает с  $a$ . Через  $\text{TMod}(\Sigma, T)$  обозначим множество всех термально-порожденных  $\Sigma$ -моделей, удовлетворяющих  $T$ .

Пусть  $A \in \text{Mod}(\Sigma, T)$ . Состоянием в  $A$  назовем функцию, сопоставляющую каждой переменной из  $\text{Var}$  элемент модели  $A$  того же сорта, что и переменная. Множество всех состояний в модели  $A$  обозначим через  $\text{State}(A)$ .

Пусть  $K$  – класс  $\Sigma$ -моделей. Семантика  $M$  программы  $S \in \text{WP}(\Sigma)$  на классе моделей  $K$  определяется как семейство  $M = M[K] = \{M(A) : A \in K\}$ , где  $M(A)(S) \subseteq \text{State}(A) \times \text{State}(A)$ . Программа  $S \in \text{WP}(\Sigma)$  частично-корректна с предусловием  $p \in L(\Sigma)$  и постусловием  $q \in L(\Sigma)$  относительно семантики  $M(A)$  (обозначается  $M(A) \models p\{S\}q$ ), если для любой пары состояний  $(\sigma, \tau) \in M(A)(S)$  из  $A \models p(\sigma)$  следует, что  $A \models q(\tau)$ . Полагаем  $M[K] \models p\{S\}q \leftrightarrow (\forall A \in K) M(A) \models p\{S\}q$ .

Примером семантики языка  $\text{WP}(\Sigma)$  на классе моделей  $\text{Mod}(\Sigma, T)$  может служить операционная семантика  $OP$ , которая определяется обычным образом:  $(\sigma, \tau) \in OP(A)(S)$ , если выполнение программы  $S \in \text{WP}(\Sigma)$  в соответствии со стандартным пониманием программных конструкций, начатое в состоянии  $\sigma \in \text{State}(A)$ , завершается в состоянии  $\tau \in \text{State}(A)$ .

Пусть  $A$  –  $\Sigma$ -модель. Будем говорить, что язык  $L(\Sigma)$  выразителен для модели  $A$  (относительно операционной семантики), если для

любой формулы  $p \in L(\Sigma)$  и любой программы  $S \in WP(\Sigma)$  в  $L(\Sigma)$  вырази-  
мо сильнейшее постусловие  $sp_A(p, S) = \{\sigma \in \text{State}(A) : (\exists \tau \in \text{State}(A)) \cdot$   
 $\ast OP(A)(S)(\tau, \sigma) \ \& \ A \models p(\tau)\}$ .

Аксиоматическая семантика программ будет определена на осно-  
ве логики Хоара [4] для вывода утверждений о частичной корректно-  
сти программ. Пусть  $(\Sigma, T)$  - спецификация. Логика Хоара  $HL(\Sigma, T)$  со-  
стоит из следующих аксиом и правил вывода.

Аксиомы:

1.  $p$ , где  $p \in L(\Sigma)$  и  $T \vdash p$ ;
2.  $p[e/x]\{x := e\} p$ , где  $p[e/x]$  - результат замены в  $p$  всех  
свободных вхождений переменной  $x$  на терм  $e$ .

Правила вывода:

1. 
$$\frac{p(S_1)q, p(S_2)q}{p(S_1; S_2)q};$$
2. 
$$\frac{p \ \& \ b(S_1)q, p \ \& \ \neg b(S_2)q}{p(\text{if } b \text{ then } S_1 \text{ else } S_2 \text{ fi})q};$$
3. 
$$\frac{p \ \& \ b\{S\}p}{p(\text{while } b \text{ do } S \text{ od})p \ \& \ \neg b};$$
4. 
$$\frac{p \supset p_1, p_1\{S\}q_1, q_1 \supset q}{p\{S\}q}.$$

Запись  $HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q$  будем использовать для обозначения то-  
го, что утверждение  $p\{S\}q$  выводимо в логике  $HL(\Sigma, T)$ .

Будем говорить, что семантика  $M = M[K]$  не допускает побочных  
эффектов первого рода, если для любых  $A \in K$ ,  $S \in WP(\Sigma)$ ,  $(\sigma, \tau) \in$   
 $\ast M(A)(S)$ ; если  $\forall v \notin \text{Var}(S)$ , то  $\sigma(v) = \tau(v)$ .

Будем говорить, что семантика  $M = M[K]$  не допускает побочных  
эффектов второго рода, если для любых  $A \in K$ ,  $S \in WP(\Sigma)$ ,  $(\sigma, \tau) \in$   
 $\ast M(A)(S)$ ;  $\sigma' \in \text{State}(A)$ , если состояние  $\sigma'$  совпадает с  $\sigma$  на  $\text{Var}(S)$ ,  
то найдется состояние  $\tau'$ , совпадающее с  $\tau$  на  $\text{Var}(S)$ , такое что  
 $(\sigma', \tau') \in M(A)(S)$ .

## 2. Устойчивая аксиоматическая семантика программ

Устойчивую аксиоматическую семантику  $STAX$  определим следую-  
щим образом: пусть  $A$  - модель спецификации  $(\Sigma, T)$ ,  $S \in WP(\Sigma)$ .

Пусть  $\text{Var}(S) = x = x_1 x_2 \dots x_n$ . Полагаем  $STAX(\Sigma, T)(A)(S) =$   
 $= \{(\sigma, \tau) \in \text{State}(A) \times \text{State}(A) : \text{ для любых } v \in \text{Var} \setminus \text{Var}(S);$

$p, q \in L(\Sigma)$ ,  $\alpha(v) = \tau(v)$ , и если  $HL(\Sigma, T) \vdash p(x, z)\{S\}q(x, z)$ , где  $z = z_1 z_2 \dots z_k$ , причем  $z_1 \notin \text{Var}(S)$ , то  $A \models (\forall z)(p(x(\sigma), z) \supset q(x(\tau), z))$ . Соответственно  $STAX(\Sigma, T) = STAX(\Sigma, T)[\text{Mod}(\Sigma, T)]$ .

Непосредственно из определения видно, что семантика STAX не допускает побочных эффектов как первого, так и второго рода.

В определении семантики STAX для модели A присутствует множество T аксиом спецификации этой модели. Можно показать, что на самом деле семантика STAX на конкретной модели не зависит от спецификации этой модели.

Пусть A —  $\Sigma$ -модель. Через  $\text{Th}(A)$  обозначим множество всех формул из  $L(\Sigma)$ , истинных в A. Определим  $STAX(A)(S) = STAX(\Sigma, \text{Th}(A))(S)$ .

**ТЕОРЕМА I (единственности).** Пусть  $(\Sigma, T)$  — спецификация. Для любой программы  $S \in \text{WP}(\Sigma)$  и любой модели  $A \in \text{Mod}(\Sigma, T)$

$$STAX(\Sigma, T)(A)(S) = STAX(A)(S).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Включение  $STAX(A)(S) \subseteq STAX(\Sigma, T)(A)(S)$  следует непосредственно из определения семантики. Докажем, что  $STAX(\Sigma, T)(A)(S) \subseteq STAX(A)(S)$ .

Пусть  $(\sigma, \tau) \in STAX(\Sigma, T)(A)(S)$  и пусть  $HL(\Sigma, \text{Th}(A)) \vdash p\{S\}q$ . Нужно доказать, что  $A \models (\forall z)(p(x(\sigma), z) \supset q(x(\tau), z))$ . Поскольку  $HL(\Sigma, \text{Th}(A)) \vdash p\{S\}q$ , то, очевидно, найдется такая замкнутая формула  $\phi \in L(\Sigma)$ , что  $A \models \phi$  и  $HL(\Sigma, T \cup \{\phi\}) \vdash p\{S\}q$ . Тогда  $HL(\Sigma, T) \vdash (p \wedge \phi)\{S\}q \wedge \phi$ ; и, следовательно,  $A \models (\forall z)(p(x(\sigma), z) \wedge \phi \supset q(x(\tau), z))$ . Далее получаем  $A \models \phi \supset (\forall z)(p(x(\sigma), z) \supset q(x(\tau), z))$ , и поскольку  $A \models \phi$ , то  $A \models (\forall z)(p(x(\sigma), z) \supset q(x(\tau), z))$ .

Для доказательства теоремы о полноте логики Хоара относительно семантики STAX нам потребуется

**ЛЕММА I.** Пусть  $S \in \text{WP}(\Sigma)$ ;  $\text{Var}(S) = x = x_1 x_2 \dots x_n$ ;  $p(x, z)$ ,  $q(x, z) \in L(\Sigma)$ . Расширим сигнатуру  $\Sigma$ , добавив к ней константы  $c = c_1 c_2 \dots c_n$ . Полагаем  $\Sigma_c = \Sigma \cup \{c\}$ . Тогда

$$HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q \Leftrightarrow HL(\Sigma_c, T) \vdash (x=c)\{S\}(\forall z)(p(c, z) \supset q(x, z)),$$

где  $x = c$  означает  $(x_1 = c_1) \& (x_2 = c_2) \& \dots \& (x_n = c_n)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** а) Пусть  $HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q$ . Применяя основные и допустимые правила логики Хоара, последовательно получаем:

$$\begin{aligned}
HL(\Sigma_c, T) &\vdash p(x, z) \vee \neg p(c, z) \{S\} q(x, z) \vee \neg p(c, z), \\
HL(\Sigma_c, T) &\vdash (x=c) \& (p(x, z) \vee \neg p(c, z)) \{S\} p(c, z) \supset q(x, z), \\
HL(\Sigma_c, T) &\vdash (x=c) \{S\} p(c, z) \supset q(x, z), \\
HL(\Sigma_c, T) &\vdash (x=c) \{S\} (\forall z) (p(c, z) \supset q(x, z)).
\end{aligned}$$

б) Пусть  $HL(\Sigma_c, T) \vdash (x=c) \{S\} (\forall z) (p(c, z) \supset q(x, z))$ . Получаем:

$$\begin{aligned}
HL(\Sigma_c, T) &\vdash (x=c) \& p(c, z) \{S\} (\forall z) (p(c, z) \supset q(x, z)) \& p(c, z), \\
HL(\Sigma_c, T) &\vdash (x=c) \& p(c, z) \{S\} q(x, z).
\end{aligned}$$

По лемме о константе [I] отсюда следует, что

$$HL(\Sigma, T) \vdash (x=y) \& p(y, z) \{S\} q(x, z),$$

где  $y = y_1, y_2, \dots, y_n$  - переменные, отличные от  $x$  и  $z$ . Тогда

$$HL(\Sigma, T) \vdash (\exists y) (x=y \& p(y, z)) \{S\} q(x, z),$$

и поскольку  $T \vdash p(x, z) \supset (\exists y) (x=y \& p(y, z))$ , то

$$HL(\Sigma, T) \vdash p(x, z) \{S\} q(x, z).$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2 (о полноте).

$$HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q \Leftrightarrow STAX(\Sigma, T) \models p\{S\}q.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация  $\Rightarrow$  следует непосредственно из определения семантики STAX.

Обратная импликация доказывается методом от противного. Пусть  $HL(\Sigma, T) \not\vdash p\{S\}q$ . Нужно доказать, что  $STAX(\Sigma, T) \not\models p\{S\}q$ , т.е., что найдутся модель  $A \in \text{Mod}(\Sigma, T)$  и состояния  $(\sigma, \tau) \in STAX(\Sigma, T)$   $(A)(S)$  такие, что  $A \models p(\sigma)$ , но  $A \not\models q(\tau)$ .

Пусть  $\text{Var}(S) = x = x_1, x_2, \dots, x_n, c = c_1, c_2, \dots, c_n$  - новые константы и пусть  $\{(r_i, s_i) : i \in \omega\}$  - перечисление всех пар  $\Sigma_c$ -формул, таких что  $HL(\Sigma_c, T) \vdash r_i \{S\} s_i$ . Пусть  $r_i = r_i(x, y_1)$ ,  $s_i = s_i(x, y_1)$ . Обозначим  $\Phi_i(x) = (\forall y_1) (r_i(c, y_1) \supset s_i(x, y_1))$  и  $\Psi(x) = (\forall z) (p(c, z) \supset q(x, z))$ . Покажем, что для всех  $n \in \omega$   $T \vdash (\bigwedge_{i=1}^n \Phi_i(x)) \supset \Psi(x)$ . В самом деле, пусть для некоторого  $n$   $T \vdash (\bigwedge_{i=1}^n \Phi_i(x)) \supset \Psi(x)$ . В силу леммы I для всех  $i \in \omega$   $HL(\Sigma_c, T) \vdash (x=c) \{S\} \Phi_i(x)$  и, следовательно,  $HL(\Sigma_c, T) \vdash (x=c) \{S\} \bigwedge_{i=1}^n \Phi_i(x)$ , но тогда  $HL(\Sigma_c, T) \vdash (x=c) \{S\} \Psi(x)$ .

Отсюда в силу леммы I получаем  $HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q$ , что противоречит первоначальному предположению.

Тогда найдутся такая модель  $B \in \text{Mod}(\Sigma_c, T)$  и такие элементы  $b = b_1, b_2, \dots, b_n$  модели  $B$ , что для всех  $i \in \omega$   $B \models \Phi_i(b)$ , но  $B \not\models \Psi(b)$ , т.е., поскольку  $\Psi(b) = (\forall z)(p(c, z) \supset q(b, z))$ , найдутся такие элементы  $a = a_1, a_2, \dots, a_k$  модели  $B$ , что  $B \models p(c, a)$ , но  $B \not\models q(b, a)$ .

Состояния  $\sigma, \tau \in \text{State}(B)$  определим следующим образом:  $\sigma(z_j) = \tau(z_j) = a_j$  ( $j = \overline{1, k}$ );  $\sigma(x_j) = d_j$ , где  $d_j$  — значение константы  $c_j$  в модели  $B$  ( $j = \overline{1, n}$ );  $\tau(x_j) = b_j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) и  $\sigma(v) = \tau(v)$  для остальных переменных  $v \in \text{Var}$ . Покажем, что  $(\sigma, \tau) \in \text{STAX}(\Sigma_c, T)(B)(S)$ . Имеем  $\sigma = \tau$  вне  $\text{Var}(S)$ . Пусть  $r, s \in L(\Sigma_c)$  и  $HL(\Sigma_c, T) \vdash r\{S\}s$ . Тогда  $r = x_i$ ,  $s = x_i$  для некоторого  $i \in \omega$  и  $B \models \Phi_i(b)$ , т.е.  $B \models (\forall y_1)(r(c, y_1) \supset s_i(b_1, y_1))$  или  $B \models (\forall y_1)(\tau(x(\sigma), y_1) \supset s(x(\tau), y_1))$ , что и требовалось доказать.

Искомую модель  $A \in \text{Mod}(\Sigma, T)$  построим как сужение модели  $B$  на  $\Sigma$ . Заметим, что состояния в модели  $B$  являются также состояниями в модели  $A$  и что непосредственно из определения семантики следует:  $\text{STAX}(\Sigma, T)(A)(S) \subseteq \text{STAX}(\Sigma_c, T)(B)(S)$  для любой программы  $S \in \text{WP}(\Sigma)$ . Поэтому  $(\sigma, \tau) \in \text{STAX}(\Sigma, T)(A)(S)$ . Имеем  $A \models p(x, z)(\sigma)$ , ибо  $B \models p(c, a)$  и  $A \not\models q(x, z)(\tau)$ , ибо  $B \not\models q(b, a)$ . Таким образом,  $\text{STAX}(\Sigma, T)(A) \not\models p\{S\}q$ . Теорема доказана.

### 3. Семантика STAX и операционная семантика программ

Пусть  $S \in \text{WP}(\Sigma)$  и  $x = \text{Var}(S)$ . Графиком программы  $S$  в модели  $A \in \text{Mod}(\Sigma, T)$  назовем предикат  $gr_A(S)(x, y)$  (где  $y$  — переменные, количество которых совпадает с количеством переменных  $x$ ), такой что

$$(\sigma, \tau) \in \text{OP}(A)(S) \Leftrightarrow (\sigma = \tau \text{ вне } x) \& A \models gr_A(S)(x(\sigma), x(\tau)).$$

Это определение корректно, так как операционная семантика не допускает побочных эффектов.

Нетрудно заметить, что  $gr_A(S)(x_0, x)$  является сильнейшим пост-условием для программы  $S$  и предусловия  $x = x_0$  в модели  $A$  относительно операционной семантики, и, следовательно, если язык  $L(\Sigma)$  выразителен для модели  $A$ , то в  $L(\Sigma)$  выразим  $gr_A(S)(x_0, x)$ .

Соотношение между аксиоматической семантикой STAX и операционной семантикой программ устанавливает следующая

**ТЕОРЕМА 3.** Пусть  $A$  —  $\Sigma$ -модель,  $S \in WP(\Sigma)$ . Тогда  $OP(A)(S) \subseteq STAX(A)(S)$ , и если язык  $L(\Sigma)$  выразителен для модели  $A$ , то  $OP(A)(S) = STAX(A)(S)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Включение  $OP(A)(S) \subseteq STAX(A)(S)$  является прямым следствием корректности логики Хоара относительно операционной семантики.

Пусть язык  $L(\Sigma)$  выразителен для модели  $A$ . По определению графика программы  $OP(A) \models (x=x_0) \{S\} gr_A(S)(x_0, x)$ . В силу выразительности логического языка  $L(\Sigma)$  логика Хоара полна для операционной семантики, и, следовательно,  $HL(\Sigma, Th(A)) \vdash (x=x_0) \times \{S\} gr_A(S)(x_0, x)$ . Пусть  $(\sigma, \tau) \in STAX(A)(S)$ . Тогда по определению семантики  $STAX$   $\sigma = \tau$  вне  $Var(S)$  и  $A \models (\forall x_0)(\sigma(x) = x_0 \supset \supset gr_A(S)(x_0, \tau(x))$ , т.е.  $A \models gr_A(S)(x(\sigma), x(\tau))$  и, следовательно,  $(\sigma, \tau) \in OP(A)(S)$ . Теорема доказана.

Заметим, что в случае невыразительности базового логического языка операционная семантика и семантика  $STAX$  могут не совпадать. В качестве примеров такого несовпадения можно использовать примеры неполноты логики Хоара [5].

#### 4. Семантика $AX$ и побочные эффекты

Аксиоматическая семантика  $AX$  была определена в [1] следующим образом. Пусть  $A \in Mod(\Sigma, T)$ ,  $S \in WP(\Sigma)$  и  $AX(\Sigma, T)(A)(S) = \{(\sigma, \tau) \in State(A) \times State(A) : \text{для любых } p, q \in L(\Sigma), \text{ если } HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q, \text{ то из } A \models p(\sigma) \text{ следует, что } A \models q(\tau)\}$ .

Логика Хоара полна относительно семантики  $AX$ , однако семантика  $AX$  допускает побочные эффекты на классе всех моделей  $Mod(\Sigma, T)$ .

В [1] было показано, что семантика  $AX$  не допускает побочных эффектов первого рода на классе термально-порожденных моделей  $TMod(\Sigma, T)$ , и был сформулирован вопрос относительно побочных эффектов второго рода для семантики  $AX$  на классе моделей  $TMod(\Sigma, T)$ . Ответ на этот вопрос дает

**УТВЕРЖДЕНИЕ.** Семантика  $AX$  не допускает побочных эффектов второго рода на классе термально-порожденных моделей  $TMod(\Sigma, T)$ .

Для доказательства нам потребуется

ЛЕММА 2. Пусть  $S \in WP(\Sigma)$ ,  $p, q \in L(\Sigma)$ ,  $x \in \text{Var} \setminus \text{Var}(S)$ ,  $t$  —  $\Sigma$ -терм без свободных переменных. Тогда если  $HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q$ , то  $HL(\Sigma, T) \vdash p[t/x] \times \{S\}q[t/x]$ , где  $p[t/x]$ ,  $q[t/x]$  — формулы, полученные из  $p$  и  $q$  соответственно заменой всех свободных вхождений  $x$  на  $t$ .

Доказательство леммы проводится непосредственно индукцией по длине вывода утверждения  $p\{S\}q$  в аксиоматике Хоара и сводится к очевидному разбору случаев и здесь приводиться не будет.

Перейдем к непосредственному доказательству утверждения. Пусть  $A \in \text{TMod}(\Sigma, T)$ ,  $(\sigma, \tau) \in AX(\Sigma, T)(A)(S)$  и состояние  $\sigma'$  совпадает с  $\sigma$  на  $\text{Var}(S)$ . Состояние  $\tau'$  определим следующим образом:  $\tau'(x) = \sigma(x)$  для  $x \in \text{Var}(S)$  и  $\tau'(x) = \sigma'(x)$  для  $x \notin \text{Var}(S)$ . Докажем, что  $(\sigma', \tau') \in AX(\Sigma, T)(A)(S)$ .

Пусть для некоторых  $p, q \in L(\Sigma)$   $HL(\Sigma, T) \vdash p\{S\}q$  и  $A \models p(\sigma')$ . Нужно доказать, что  $A \models q(\tau')$ . Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_k$  — все переменные из  $p$  и  $q$ , не входящие в  $\text{Var}(S)$ . В силу термальной порожденности модели  $A$  найдутся такие  $\Sigma$ -термы  $t_1, t_2, \dots, t_k$ , что  $\sigma'(x_1) = t_1$ ,  $\sigma'(x_2) = t_2, \dots, \sigma'(x_k) = t_k$  в модели  $A$ . Полагаем  $p' = p[t_1/x_1][t_2/x_2] \dots [t_k/x_k]$ ,  $q' = q[t_1/x_1][t_2/x_2] \dots [t_k/x_k]$ . Тогда, в силу леммы 2,  $HL(\Sigma, T) \vdash p'\{S\}q'$ . По построению  $p'$ , имеем  $A \models p'(\sigma')$ , но  $p'$  не зависит от переменных, не принадлежащих  $\text{Var}(S)$ , и, следовательно,  $A \models p'(\sigma)$ . Тогда из того, что  $(\sigma, \tau) \in AX(\Sigma, T)(A)(S)$ , следует, что  $A \models q'(\tau)$  и, поскольку все свободные переменные  $q'$  содержатся в  $\text{Var}(S)$ ,  $A \models q'(\tau')$ . По построению  $q'$  отсюда следует, что  $A \models q(\tau')$ . Утверждение доказано.

Заметим, что согласно [1] семантика  $AX(\Sigma, T)(A)$  совпадает с операционной семантикой  $OP(A)$  только при выполнении условий выразительности базового логического языка  $L(\Sigma)$  и термальной порожденности модели  $A$ . Доказанное выше утверждение показывает, что условие термальной порожденности обеспечивает отсутствие побочных эффектов для семантики  $AX$ . Семантика  $STAX$ , не допускающая побочных эффектов, совпадает с операционной семантикой при единственном условии выразительности базового логического языка.

## Л и т е р а т у р а

1. BERGSTRA J.A., TUCKER J.V. The axiomatic semantics of programs based on Hoare's logic. - Acta Inf., 1984, v.21, N 3, p.293-320.
2. COOK S.A. Soundness and completeness of an axiomatic system for program verification. - SIAM J. Comput., 1978, v.7, p.70-90.
3. GOGUEN J.A., THATCHER J.W., WAGNER E.G. An initial algebra approach to the specification, correctness and implementation of abstract data types. - In: Current trends in programming methodology IV; Data structuring, R.T.Yeh (ed), Englewood Cliffs, New Jersey; Prentice-Hall, 1978, p.80-149.
4. HOARE C.A.R. An axiomatic basis for computer programming. - Commun.ACM, 1969, v.12, N 10, p.576-583.
5. ЛОМАЗОВА И.А. О сложности индуктивных условий для верификации арифметических программ. - В кн.: Материалы Всесоюз. студенческой конф. "Студент и научно-технический прогресс". - Новосибирск, 1978, с.85-94.

Поступила в ред.-изд.отд.  
26 мая 1986 года