

УДК 519.65

ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕЯВНО ЗАДАНЫМИ
КВАДРАТИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Б.М.Шумилов

Пусть в пространстве R^3 определена конечная триангуляционная сеть, каждой вершине которой $P_1(x_1, y_1, z_1)$ отвечает вектор $\vec{A}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$. Задача эрмитовой интерполяции состоит в построении непрерывной поверхности, проходящей через точки P_1 , нормаль к которой в каждой точке P_1 параллельна вектору \vec{A}_1 . В работах [1,2] и других исследовалась эрмитова интерполяция поверхностью, склеенной из треугольных кусков параметрически заданных многочленов третьей степени. Ниже предлагается решение на основе кусков поверхностей второго порядка, высеченных плоскостями. Ранее такое решение было получено для лагранжевой интерполяции по опорным точкам в вершинах триангуляции и по одной на каждой стороне [3]. Важность изучения новых подходов к построению кусочных алгебраических поверхностей невысоких порядков подчеркивалась в [4].

1. Определяющие соотношения

Возьмем уравнение произвольной поверхности второго порядка, проходящей через точку P_1 , нормаль к которой в точке P_1 параллельна вектору \vec{A}_1 .

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) = & a_{11}(x-x_1)^2 + a_{22}(y-y_1)^2 + a_{33}(z-z_1)^2 + \\
 & + a_{12}(x-x_1)(y-y_1) + a_{13}(x-x_1)(z-z_1) + \\
 & + a_{23}(y-y_1)(z-z_1) + 2\alpha_1(x-x_1) + \\
 & + 2\beta_1(y-y_1) + 2\gamma_1(z-z_1) = 0,
 \end{aligned}$$

и выберем коэффициенты a_{11}, a_{22}, \dots таким образом, чтобы результирующая поверхность проходила через точки P_2, P_3 и нормаль к ней в точках P_2, P_3 была параллельна векторам \vec{A}_2, \vec{A}_3 . Для этого достаточно выполнения равенств [5]:

$$F(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad i = 2, 3; \quad (1)$$

$$\frac{F'_x(x_i, y_i, z_i)}{\alpha_i} = \frac{F'_y(x_i, y_i, z_i)}{\beta_i} = \frac{F'_z(x_i, y_i, z_i)}{\gamma_i} = 2q_i. \quad (2)$$

Если

$$(x_i - x_1)(y_i - y_1)(z_i - z_1) \neq 0, \quad (3)$$

то система уравнений (2) влечет

$$\begin{aligned}
 a_{12} = & \frac{r_i^1 - a_{11}(x_i - x_1)}{y_i - y_1} + \frac{r_i^2 - a_{22}(y_i - y_1)}{x_i - x_1} - \\
 & - \frac{r_i^3(z_i - z_1) - a_{33}(z_i - z_1)^2}{(x_i - x_1)(y_i - y_1)}, \\
 a_{13} = & \frac{r_i^3 - a_{33}(z_i - z_1)}{x_i - x_1} + \frac{r_i^1 - a_{11}(x_i - x_1)}{z_i - z_1} - \\
 & - \frac{r_i^2(y_i - y_1) - a_{22}(y_i - y_1)^2}{(x_i - x_1)(z_i - z_1)},
 \end{aligned}$$

$$a_{23} = \frac{r_1^2 - a_{22}(y_1 - y_1)}{z_1 - z_1} + \frac{r_1^3 - a_{33}(z_1 - z_1)}{y_1 - y_1} - \\ - \frac{r_1^1(x_1 - x_1) - a_{11}(x_1 - x_1)^2}{(y_1 - y_1)(z_1 - z_1)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} r_1^1 &= q_1 \alpha_1 - \alpha_1, \\ r_1^2 &= q_1 \beta_1 - \beta_1, \\ r_1^3 &= q_1 \gamma_1 - \gamma_1, \quad i = 2, 3. \end{aligned}$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно коэф-
фициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} , приходим к системе уравнений (1)
относительно переменных q_1, q_2 , успешное решение которой
обеспечивает решение локальной задачи эрмитовой интерполяции.

Другой вариант решения локальной задачи эрмитовой интер-
поляции вытекает из представления поверхности второго порядка,
проходящей через девять точек P_1, P_2, \dots, P_9 , через равенство
нулю определителя [6]:

$$G(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & xz & z^2 & yz & x & y & z & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 z_1 & z_1^2 & y_1 z_1 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_9^2 & x_9 y_9 & y_9^2 & x_9 z_9 & z_9^2 & y_9 z_9 & x_9 & y_9 & z_9 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Выбирая точки P_4, P_5 принадлежащими касательной плоско-
сти к эрмитовой поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке P_1 , $x_1 =$
 $= x_1 + l_1 t$, $y_1 = y_1 + m_1 t$, $z_1 = z_1 + n_1 t$, $i = 4, 5$; точки $P_6,$
 P_7 - касательной плоскости в точке P_2 и точки P_8, P_9 - в
точке P_3 , после элементарных преобразований и деления на

t^6 при $t \rightarrow 0$ имеем;

$$G(x, y, z) = \begin{vmatrix} x^2 & xy & \dots & z & 1 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & \dots & z_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_1 l_4 & y_1 l_4 + x_1 m_4 & \dots & n_4 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Выполнение условий эрмитовой интерполяции при этом проверяется аналитически. Так, $G(x_i, y_i, z_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, вследствие равенства в определителе элементов первой и одной из последующих строк. Далее, разлагая определитель по элементам первой строки и вычисляя частные производные, находим

$$\begin{aligned} G'_x(x_i, y_i, z_i) l_j + \\ + G'_y(x_i, y_i, z_i) m_j + G'_z(x_i, y_i, z_i) n_j = \\ = \begin{vmatrix} 2x_i l_j & y_i l_j + x_i m_j & \dots & n_j & 0 \\ x_1^2 & x_1 y_1 & \dots & z_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2x_3 l_9 & y_3 l_9 + x_3 m_9 & \dots & n_9 & 0 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

как определитель с совпадающими первой и одной из последующих строк.

В частности, если точка P_4 лежит в плоскости, определяемой точками P_1, P_2 и направлением \vec{A}_1 , то

$$l_4 = \frac{(\beta_1^2 + \gamma_1^2)(x_2 - x_1) - \alpha_1[\beta_1(y_2 - y_1) + \gamma_1(z_2 - z_1)]}{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}$$

и т.д. Если же вектор $\{l_4, m_4, n_4\}$ параллелен координатной плоскости xOz , то $l_4 = \gamma_1$, $m_4 = 0$, $n_4 = -\alpha_1$ и т.д.

После того, как решены эрмитовы задачи для каждой трех вершин триангуляционной сети, производится склеивание получен-

ных поверхностей второго порядка в непрерывную сплайновую поверхность. Для этого отыскивается точка пересечения каждой двух соседних поверхностей, например, лежащая в плоскости, проходящей через две противоположные вершины и перпендикулярной прямой, соединяющей две общие вершины триангуляционной сети. Поскольку нормали к поверхностям в общих вершинах триангуляции параллельны, кривые второго порядка, получаемые при пересечении обеих поверхностей плоскостью, проходящей через найденную точку и две общие вершины, совпадают. Это означает, что кусочно-квадратические элементы, высеченные указанными плоскостями, склеиваются непрерывно. Вопросы моделирования из построенных элементов единых поверхностей и визуализации последних рассматривались в [3].

2. Числовой пример

Пусть вершины триангуляции и соответствующие им векторы заданы таблицей. Проверка условия (3) для первых трех точек

Т а б л и ц а

i	x_i	y_i	z_i	α_i	β_i	γ_i
1	1	1	1	1	1	-1
2	-1	1	1	-2	2	-1
3	1	-1	1	2	-2	-1
4	-1	-1	1	-3	-3	-1

показывает, что в данном случае определение единственной эрмитовой поверхности невозможно. Обращаясь к исходным равенствам (1), (2), приходим к неопреде-

ленной системе уравнений, решение которой дает числа $a_{11} = a_{22} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{12} = a_{23} = -1/4$. Параметр a_{33} при этом остается неопределенным. Таким образом, решение задачи эрмитовой интерполяции для первого треугольника доставляется функцией

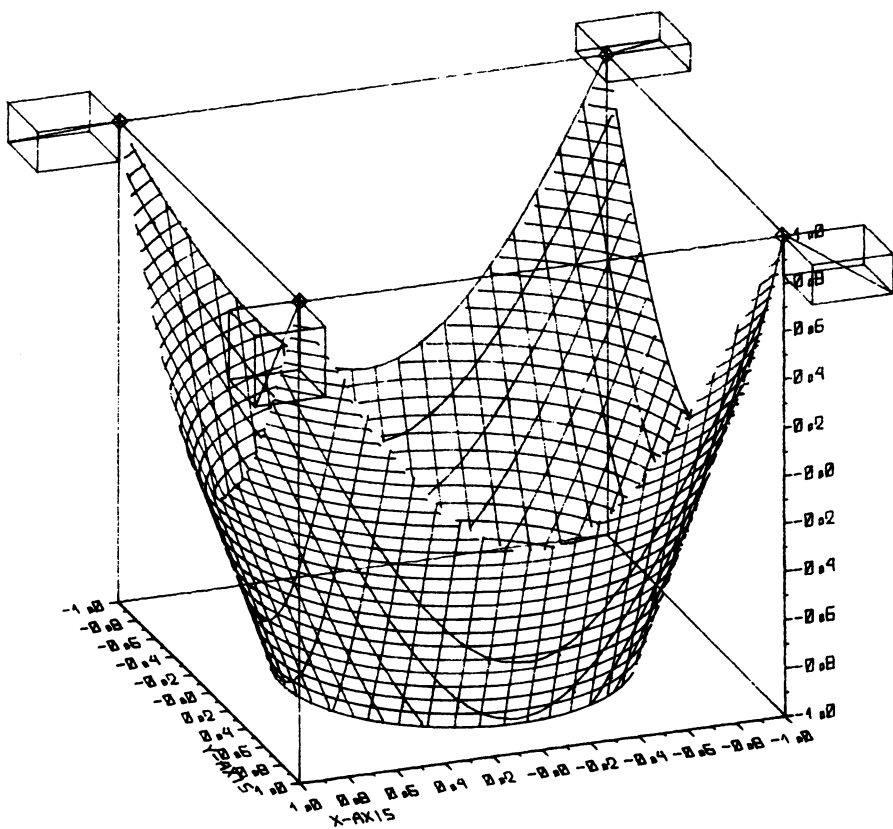


Рис. 1. Эрмитова интерполяция при $a = -1/8$

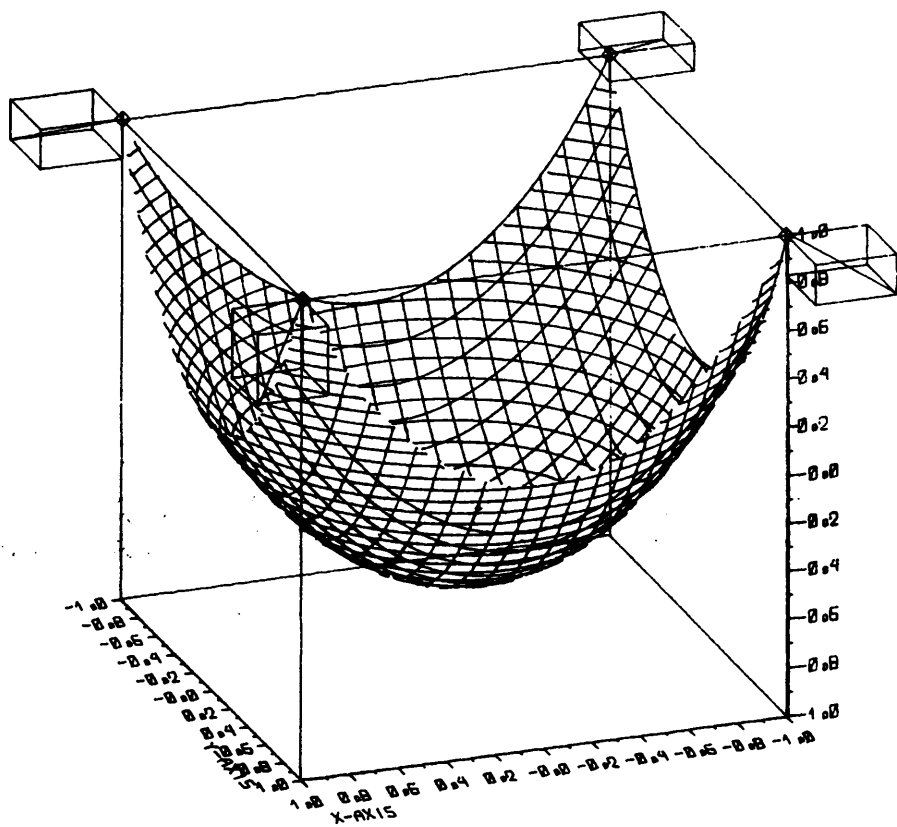


Рис. 2. Эрмитова интерполяция при $\alpha = 0$

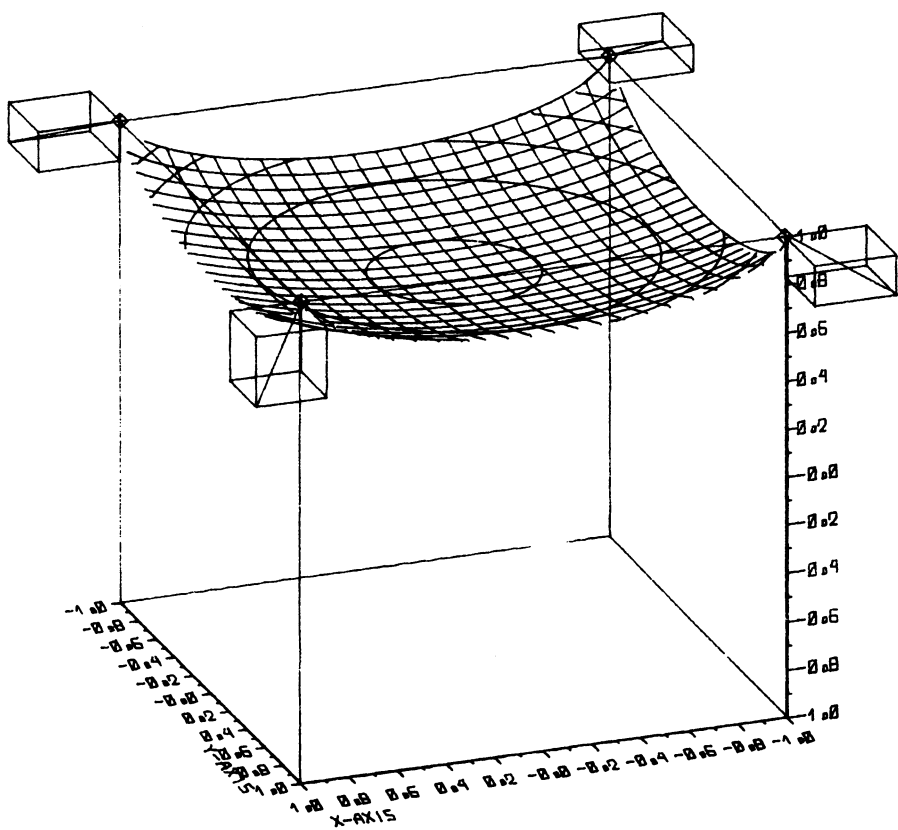


Рис. 3. Эрмитова интерполяция при $a = 1$

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 + (z-1) \left[a_{33}(z-1) - \frac{x+y}{2} - 1 \right] = 0.$$

Аналогично для второго треугольника получаем

$$\psi(x, y, z) = 3(x^2 + y^2 - 2) + (z-1) \left[a'_{33}(z-1) - \frac{x+y}{2} - 3 \right] = 0.$$

В частности, при $a_{33} = \frac{1}{3} a'_{33} = a$ решения совпадают в точке $x = y = 0$, а значит, в плоскости $x + y = 0$. На рис. 1-3 изображены оба решения, каждое под своим треугольником, при значениях параметра $a = -1/8, 0, 1$ вместе с интерполируемыми ими точками и векторами.

Полученные результаты наводят на мысль, что за счет выбора параметра a может быть достигнута гладкая склейка соседних поверхностей. Проверая условие визуальной гладкости [1], в точке $x = y = 0$ находим

$$\frac{\phi'_x}{\psi'_x} = \frac{\phi'_y}{\psi'_y} = 1, \quad \frac{\phi'_z}{\psi'_z} = \frac{1}{3},$$

т.е. нормальные векторы никогда не могут быть параллельны. Более детальное изучение данного вопроса показывает, что в случае выпуклой триангуляции гладкой склейки можно добиться, вставляя между соседними поверхностями три полоски из поверхностей второго порядка [7], либо одну из поверхности четвертого порядка [8].

Л и т е р а т у р а

1. FARIN G. Smooth interpolation to scattered 3D data // Surfaces in Computer Aided Geometric Design. Proc. Conf. Oberwolf. Apr. 25-30, 1982. - Amsterdam e.a. - 1983. - P. 43-64.
2. FARIN G. Triangular Bernstein - Bezier patches // Computer Aided Geometric Design. - 1986. - Vol. 3, N 2. - P. 83-127.

3. ШУМИЛОВ Б.М. Неявные квадратические поверхностные сплайны //Вопросы геометрического моделирования в САПР.-Свердловск. 1987. -С. 38.

4. MILLER J.R. Sculptured surfaces in solid models: issues and alternative approaches //IEEE Computer Graphics and Applications. - 1986. - Vol. 6, N 12. -P. 37-48.

5. КОРН Г., КОРН Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Изд. 4-е. -М.: Наука, 1978. - 832 с.

6. LITTLE F.F. Convex combination surfaces //Surfaces in Computer Aided Geometric Design. Proc. Conf. Oberwolf. Apr.25-30, 1982. - Amsterdam e.a. - 1983. -P. 99-107.

7. JIANG S., YANG P. Smooth quadratic interpolation over a convex 3D triangulation //Ханкун сюэбао. Acta aeronautica et astronautica Sinica. - 1987. - Vol. A8, N 4, -P. 136-139.

8. HOFFMANN C., HOPCROFT J. Quadratic blending surfaces //Computer Aided Design. - 1986. - Vol. 18, N 6. -P. 301-306.

Поступила в ред.-изд.отд.

12 октября 1987 года