

ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ОБОБЩЕННЫМИ  
КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Ю.С.Завьялов, В.В.Богданов

В в е д е н и е

Эрмитова интерполяция полиномиальными сплайнами - хорошо разработанный раздел теории сплайнов [1]. На практике наиболее популярны сплайны невысоких нечетных степеней - третьей, пятой. В большинстве случаев они дают вполне удовлетворительные результаты в отношении качественного поведения, т.е. сохранения монотонности исходных данных, выпуклости и т.п. Однако при больших градиентах в исходных данных на сравнительно редких сетках возможны, как и в случае эрмитовой интерполяции полиномами, осцилляции. От них свободны только сплайны первой степени, изображаемые ломаными. Поэтому почти с самого начала развития теории сплайнов предпринимались попытки улучшить геометрические характеристики сплайнов, особенно кубических.

Задача построения сплайнов с заданными геометрическими характеристиками была формализована А.И.Гребенниковым [2], который назвал ее задачей *изогеометрической аппроксимации*. Для построения изогеометрической аппроксимации предложены и обоснованы методы, основанные на локальной сплайновой аппроксимации. В последующем в работах Ю.А.Флорова [3] стал использоваться термин "*консервативная интерполяция*", который

подчеркивает сохранение качественных характеристик исходных данных.

Решение проблемы идет двумя путями. Первый заключается в варьировании параметров полиномиального сплайна с целью обеспечить требуемые его свойства. Так, в [4] для эрмитовой интерполяции кубическими сплайнами установлены необходимые и достаточные условия монотонности сплайна, налагаемые на исходные данные  $\{f_i, m_i\}_{i=0}^N$  - значения сплайна и его первой производной. В случае нарушения условий предложен простой алгоритм изменения массива  $\{m_i\}_{i=0}^N$ , обеспечивающий их выполнение (см. ниже §4). В работе [5] дано видоизменение алгоритма, которое, как утверждается, имеет то преимущество, что при варьировании массива  $\{m_i\}_{i=0}^N$  сохраняется порядок приближения, имевшийся у начальной немонотонной интерполяции.

Второй путь состоит во введении в структуру кубического сплайна дополнительных параметров, располагаясь выбором которых, можно управлять качественным поведением графиков получаемых кривых. Так, были введены сплайны с натяжением или экспоненциальные, рациональные сплайны, сплайны с дополнительными узлами (см., например, [6]). Примером использования рациональных сплайнов для целей интерполяции с изогометрией служит работа [7]. В частности, в ней рассмотрена эрмитова интерполяция по исходным данным  $\{f_i, m_i, M_i\}_{i=0}^N$ , где  $M_i$  - значения второй производной сплайна.

В настоящей статье исследована изогометрическая интерполяция обобщенными кубическими сплайнами [6]. Установлены необходимые и достаточные условия монотонности и выпуклости сплайна в самом общем виде. В качестве приложений рассмотрены сплайны с дополнительными узлами, рациональные и экспоненциальные.

# §1. Эрмитовы интерполяционные обобщенные сплайны

Для целей эрмитовой интерполяции целесообразно брать обобщенные сплайны на сетке  $\Delta: a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_m = b$  при  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  в виде:

$$S_G(x) = (1-t)f_i + tf_{i+1} + h_i \{ a_i [\varphi_i(t) - 1+t] + b_i [\psi_i(t) - t] \}, \quad (1)$$

где  $f_i$  - исходные данные,  $h_i = x_{i+1} - x_i$  - шаги сетки,  $t = (x - x_i)/h_i$ ;  $\varphi_i(t), \psi_i(t) \in C^2$  - суть базовые функции, от которых зависит конкретный тип обобщенного сплайна, подчиняющиеся условиям [6],

$$\varphi_i(0) = \psi_i(1) = 1, \quad \varphi_i'(0) < -2, \quad \psi_i'(1) > 2; \quad (2a)$$

$$\varphi_i^{(r)}(1) = \psi_i^{(r)}(0) = 0, \quad r = 0, 1, 2. \quad (2b)$$

Параметры  $a_i, b_i$  определяются из условий  $S_G'(x_j) = m_j$ ,  $j = i, i+1$ . Имеют место формулы

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{1}{\Delta_{1i}} \{ [\psi_i'(1) - 1](m_i - \delta_{i+1/2}) + (m_{i+1} - \delta_{i+1/2}) \}, \\ b_i &= \frac{1}{\Delta_{1i}} \{ -(m_i - \delta_{i+1/2}) + [\varphi_i'(0) + 1](m_{i+1} - \delta_{i+1/2}) \}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $\delta_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i)/h_i$  - первые разделенные разности,

$$\Delta_{1i} = \varphi_i'(0)\psi_i'(1) - \varphi_i'(0) + \psi_i'(1).$$

Согласно (2a) имеем

$$\Delta_{1i} < 0. \quad (4)$$

При заданных  $f_i$ ,  $m_i$  формулы (1), (3) дают решение задачи эрмитовой интерполяции. Обобщенный сплайн принадлежит в этом случае классу  $C^1[a, b]$ .

По аналогии с эрмитовыми кубическими сплайнами здесь можно задавать значения  $m_i$  либо как  $m_i = f_i'$ , либо как значения производных интерполяционных полиномов Лагранжа, например, второй степени [1, §2.8]:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= (1 + \mu_1) \delta_{1/2} - \mu_1 \delta_{3/2}, \\ m_i &= \lambda_i \delta_{i-1/2} + \mu_i \delta_{i+1/2}, \quad i = 1, \dots, N-1, \\ m_N &= -\lambda_{N-1} \delta_{N-3/2} + (1 + \lambda_{N-1}) \delta_{N-1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если  $m_i$  не задаются, а определяются из условий непрерывности  $S_G^n(x)$  в узлах сетки  $\Delta$  (с соответствующими граничными условиями), то получаются сплайны класса  $C^2$ . В данной работе они не рассматриваются.

В дальнейшем речь идет о монотонных и выпуклых эрмитовых обобщенных сплайнах. Помимо выполнения условий (2), будем дополнительно предполагать, что

а) на  $[0, 1]$  существуют точки  $t_{11}$  и  $t_{21}$  такие, что:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &\in C^4, \quad t \in [0, t_{21}); \quad \varphi_1(t) = 0, \quad t \in [t_{21}, 1]; \\ \psi_1(t) &\in C^4, \quad t \in (t_{11}, 1]; \quad \psi_1(t) = 0, \quad t \in [0, t_{11}); \\ \varphi_1''(t) &> 0, \quad t \in [0, t_{21}); \quad \psi_1''(t) > 0, \quad t \in (t_{11}, 1]; \\ \varphi_1'''(t) &< 0, \quad t \in [0, t_{21}); \quad \psi_1'''(t) > 0, \quad t \in (t_{11}, 1], \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

причем третьи производные могут иметь разрывы первого рода в точках  $t_{21}$  и  $t_{11}$  соответственно;

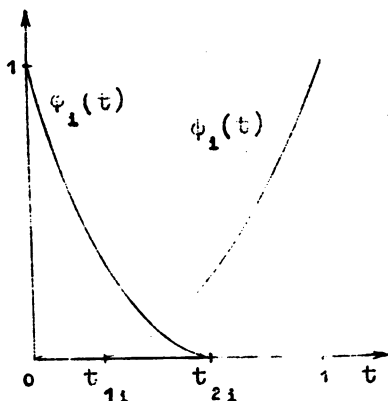


Рис. 1

б) при  $t_{11} < t_{21}$   
(рис. 1) выполнено неравен-

ство

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \\ &= [\psi_1'(t) - 1] \phi_1''(t) - [\psi_1'(t) + \\ &+ 1] \phi_1''(t) < 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При  $t_{11} = 0, t_{21} = 1$  отрезки  $[0, t_{11}]$ ,  $[t_{21}, 1]$  стягиваются в точки. Случай  $t_{11} = 1, t_{21} = 0$ , соответствующий вырождению сплайна (1) в сплайн первой степени, из рассмотрения исключается.

## §2. Монотонные обобщенные сплайны

Говорят, что исходные данные монотонно возрастают (убывают) на отрезке  $[x_j, x_{j+1+1}]$ , если  $\delta_{i+1/2} \geq 0$  ( $\delta_{i+1/2} \leq 0$ ) для  $i = j, \dots, j+1$ .

Интерполяционный сплайн (1) называется монотонным на  $[x_j, x_{j+1+1}]$ , если при монотонных исходных данных имеют место соотношения  $\text{sign } S_G'(x) = \text{sign } \delta_{i+1/2}$ ,  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ;  $i = j, \dots, j+1$ .

Очевидна

ЛЕММА 1. Чтобы сплайн  $S_G(x)$  был монотонным на  $[x_1, x_{i+1}]$ , необходимо, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \text{sign } m_i &= \text{sign } m_{i+1} = \text{sign } \delta_{i+1/2}, \text{ если } \delta_{i+1/2} \neq 0, \\ m_i &= m_{i+1} = 0, \text{ если } \delta_{i+1/2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Требование выполнения равенств  $m_i = m_{i+1} = 0$  в случае, когда  $\delta_{i+1/2} = 0$ , на практике может оказаться не всегда приемлемым. В частности, если  $\delta_{i+1/2} = 0$  и  $\delta_{i-1/2} > 0$ ,  $\delta_{i+3/2} < 0$ , более естественно потребовать  $m_i > 0$ ,  $m_{i+1} < 0$ . Аналогично, при  $\text{sign } \delta_{i+1/2} = -\text{sign } \delta_{i-1/2}$  необходимо принять некоторое соглашение о знаке величины  $m_i$ . Мы не касаемся в дальнейшем подобных ситуаций, ибо их рассмотрение, на наш взгляд, должно увязываться с конкретным характером интерполируемых данных.

Остальная, большая часть данного параграфа, посвящена установлению необходимых и достаточных условий монотонности обобщенного сплайна.

Исследуем поведение сплайна на отрезке  $[x_i, x_{i+1}]$ . Введем обозначения. Если  $\delta_{i+1/2} \neq 0$ , то

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}_i &= m_i / \delta_{i+1/2}, \quad \bar{m}_{i+1} = m_{i+1} / \delta_{i+1/2}, \\ \bar{a}_i &= a_i / \delta_{i+1/2}, \quad \bar{b}_i = b_i / \delta_{i+1/2}, \\ \bar{s}_G^{(r)}(x) &= s_G^{(r)}(x) / \delta_{i+1/2}, \quad r = 0, 1, 2, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

если  $\delta_{i+1/2} = 0$ , то полагаем  $\bar{m}_i = \bar{m}_{i+1} = 0$ .

В силу леммы 1 для монотонного сплайна имеем  $\bar{m}_i \geq 0$ ,  $\bar{m}_{i+1} \geq 0$ . В §2 и далее при исследовании монотонности, с целью упрощения записи, опускаются черточки над символами, а ссылки на формулы этого параграфа делаются с учетом обозначений (9).

Формулы (3) перепишем в виде:

$$a_i = \frac{1}{\Delta_{1i}} \{ [\psi'_i(1) - 1] (m_i - 1) + (m_{i+1} - 1) \}, \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \vdots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$b_i = \frac{1}{\Delta_{1,i}} \{ -(m_i - 1) + [\varphi'_i(0) + 1](m_{i+1} - 1) \}. \quad \vdots$$

Из (1) получаем

$$S'_G(x) = a_i [\varphi'_i(t) + 1] + b_i [\psi'_i(t) - 1] + 1, \quad (11a)$$

$$S''_G(x) = [a_i \varphi''_i(t) + b_i \psi''_i(t)] h_i^{-1}. \quad (11b)$$

Каждое звено сплайна при заданных  $f_i, f_{i+1}$  в принятых обозначениях характеризуется точкой в первом квадранте плоскости  $(m_i, m_{i+1})$ .

Определим множество  $G_i = \{(m_i, m_{i+1}) \mid S'_G(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in [x_i, x_{i+1}]\}$ . Оно не пусто, ибо ему принадлежит точка  $O_1(1, 1)$ , где  $a_i = b_i = 0$ ,  $S'_G(x) \equiv 1$ , и целиком лежит в первом квадранте плоскости  $(m_i, m_{i+1})$ .

Далее, если точка  $c_i(m_i, m_{i+1})$  порождает сплайн, у которого  $S''_G(x)$  знакопостоянна для всех  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , то  $S'_G(x)$  монотонно изменяется от  $m_i$  до  $m_{i+1}$ , оставаясь неотрицательной, и точка  $c_i \in G_i$ . Если  $S''_G(\xi) = 0$  для некоторых  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$ , то  $c_i \in G_i$  тогда и только тогда, когда  $S'_G(\xi) \geq 0$ .

Выражение  $S'_G(x)$  при  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  является линейной функцией параметров  $m_i, m_{i+1}$ . Поэтому уравнение  $S'_G(\xi) = 0$  для  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$  описывает семейство прямых в плоскости  $(m_i, m_{i+1})$ . Покажем, что огибающая  $\Gamma_i$  этого семейства, которая определяется как решение системы линейных уравнений

$$S'_G(\xi) = 0, \quad S''_G(\xi) = 0 \quad (12)$$

относительно  $m_i = m_i(\xi)$ ,  $m_{i+1} = m_{i+1}(\xi)$ , является границей области  $G_i$ .

Для кривой  $\Gamma_i$  с учетом (4), (10), (11) из (12) получаем

$$R_i(\tau)(m_i - 1) + T_i(\tau)(m_{i+1} - 1) + \Delta_{1i} = 0, \quad (13a)$$

$$R'_i(\tau)(m_i - 1) + T'_i(\tau)(m_{i+1} - 1) = 0, \quad (136)$$

где  $\tau = (\xi - x_i)/h_i$ ,

$$R_1(\tau) = [\psi'_1(1) - 1](\varphi'_1(\tau) + 1) - \psi'_1(\tau) + 1,$$

$$T_1(\tau) = \varphi_1'(\tau) + 1 + [\varphi_1'(0) + 1][\psi_1'(\tau) - 1].$$

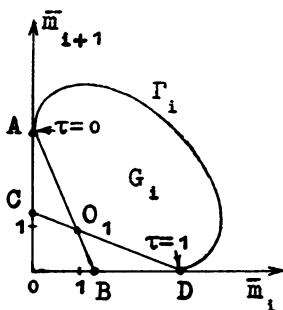


Рис. 2

В плоскости  $(m_i, m_{i+1})$  рассмотрим прямые  $AB$  и  $CD$ , на которых  $a_i = 0$  и  $b_i = 0$  соответственно (рис.2). Они не пересекаются в точке  $O_1$ . Точки пересечения их с осями координат суть  $A(0, \varphi_i'(1))$ ,  $B(\varphi_i'(1)/[\varphi_i'(1) - 1], 0)$ ,  $C(0, \varphi_i'(0)/[\varphi_i'(0) + 1])$ ,  $D(-\varphi_i'(0), 0)$ .

ЛЕММА 2. Если в (6)  $t_{21} \leq t_{11}$ , то  $\Gamma_1$  есть отрезок прямой AD.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При  $\tau \in [0, t_{21}]$  имеем  $\phi_i(\tau) = 0$ . Из (11б) и (12) следует, что  $a_i = 0$ . Тогда из (10) получаем  $b_i = 1 - m_i$  и из (11а) вытекает  $S'_G(\xi) = 1 - b_i = m_i$ . Система (12) имеет единственное решение  $m_i = 0$ ,  $m_{i+1} = \phi'_i(1)$ , которое определяет точку А. Аналогично, при  $\tau \in [t_{11}, 1]$  система (12) имеет единственное решение  $m_i = -\phi'_i(0)$ ,  $m_{i+1} = 0$ , определяющее точку D.

При  $\tau \in [\tau_{21}, \tau_{11}]$  имеем  $\varphi_1(\tau) = \psi_1(\tau) = 0$ . Из (116) следует, что  $S_G''(\xi) = 0$ , и система (13) эквивалентна уравнению



$$\psi'_1(1)m_1 - \psi'_1(0)m_{i+1} + \psi'_1(0)\psi'_1(1) = 0, \quad (14)$$

которое определяет в первом квадранте отрезок  $AD$ .

ЛЕММА 3. Если в (6)  $t_{11} \leq t_{21}$ , то  $\Gamma_1$  есть выпуклая кривая с концами в точках  $A$  и  $D$ , целиком лежащая в области  $m_1 \geq 0, m_{i+1} \geq 0$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (7) определитель  $Q_1(\tau)$  системы (13) отличен от нуля для всех  $\tau \in [0, 1]$ . Решая ее, получаем уравнение кривой  $\Gamma_1$  в параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{1}{Q_1} \{ \psi''_1(\tau) + [\psi'_1(0) + 1] \psi''_1(\tau) \}, \\ m_{i+1} &= 1 - \frac{1}{Q_1} \{ [\psi'_1(1) - 1] \psi''_1(\tau) - \psi''_1(\tau) \}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При  $\tau \in [0, t_{11}]$  имеем  $\psi''_1(\tau) = 0$ ,  $Q_1(\tau) = -\psi''_1(\tau)$ , и, следовательно, единственное решение  $m_1 = 0$ ,  $m_{i+1} = \psi'_1(1)$ , определяет точку  $A$ . При  $\tau \in [t_{21}, 1]$  имеем  $\psi''_1(\tau) = 0$ ,  $Q_1(\tau) = -\psi''_1(\tau)$ , и, следовательно, снова единственное решение  $m_1 = -\psi'_1(0)$ ,  $m_{i+1} = 0$  определяет точку  $D$ .

При  $\tau \in (t_{11}, t_{21})$  кривая (15) дважды непрерывно дифференцируема и можно определить знак ее кривизны. Находим

$$\frac{dm_1}{d\tau} = -\frac{T_1(\tau)P_1(\tau)}{Q_1(\tau)}, \quad \frac{dm_{i+1}}{d\tau} = \frac{R_1(\tau)P_1(\tau)}{Q_1(\tau)}, \quad (16)$$

где  $P_1(\tau) = \psi''_1(\tau)\psi'''_1(\tau) - \psi''_1(\tau)\psi'''_1(\tau) < 0$  согласно (6).

Из (16) получаем

$$\frac{d^2 m_1}{d\tau^2} = -\frac{T'_1(\tau)P_1(\tau) + T_1(\tau)P'_1(\tau)}{Q_1^2(\tau)} + \frac{2T_1(\tau)P_1(\tau)Q'_1(\tau)}{Q_1^3(\tau)},$$

$$\frac{d^2 m_{i+1}}{d\tau^2} = \frac{R'_i(\tau)P_i(\tau) + R_i(\tau)P'_i(\tau)}{Q_i^2(\tau)} - \frac{2R_i(\tau)P_i(\tau)Q'_i(\tau)}{Q_i^3(\tau)}.$$

Знак кривизны кривой (15) совпадает со знаком выражения

$$\zeta_i = \frac{dm_i}{d\tau} \cdot \frac{d^2 m_{i+1}}{d\tau^2} - \frac{dm_{i+1}}{d\tau} \cdot \frac{d^2 m_i}{d\tau^2} = -\frac{\Delta_{1i} P_i^2(\tau)}{Q_i^3(\tau)} < 0 \quad (17)$$

для всех  $\tau \in [t_{1i}, t_{2i}]$ . В (17) учтены формулы (4) и (7). Неравенство  $\zeta_i < 0$  означает, что кривая выпукла в сторону положительного направления нормали.

Осталось показать, что кривая лежит в области  $m_i \geq 0$ ,  $m_{i+1} \geq 0$ . Для этого нужно убедиться, что в (15)

$$U_i(\tau) = Q_i(\tau) + \varphi'_i(\tau) + [\varphi'_i(0) + 1] \psi''_i(\tau) \leq 0,$$

$$V_i(\tau) = Q_i(\tau) - [\psi'_i(1) - 1] \varphi''_i(\tau) + \psi''_i(\tau) \leq 0.$$

Имеем  $U_i(t_{1i}) = 0$ ,  $U_i(t_{2i}) = \varphi'_i(0) \psi''_i(\tau) < 0$ .  
 $U'_i(\tau) = \varphi'''_i(\tau) \psi'_i(\tau) + \psi'''_i(\tau) [\varphi'_i(0) - \varphi'_i(\tau)] < 0$  для  $\tau \in [t_{1i}, t_{2i}]$ . Очевидно, что функция  $U_i(\tau)$  монотонно убывает на  $[t_{1i}, t_{2i}]$ , и поэтому  $U_i(\tau) \leq 0$ . Аналогично показывается, что  $V_i(\tau) \leq 0$ .

Лемма доказана. Геометрически картина изображена на рис.2.

**ЛЕММА 4.** Если в (6)  $t_{1i} = 0$ ,  $t_{2i} = 1$ , то кривая  $\Gamma_i$  касается осей  $m_i, m_{i+1}$  в точках D и A соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Теперь с точками A и D связано по одному значению  $\tau = 0$  и  $\tau = 1$  соответственно. В точке A величина  $T_i(0) = 0$ , и, значит,  $dm_i/d\tau = 0$ . В точке D получаем  $R_i(1) = 0$  и  $dm_{i+1}/d\tau = 0$ , что доказывает лемму.

ЛЕММА 5. Кривая  $\Gamma_1$  является границей области  $G_1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выражение  $S_G''(x)$  представляет собой линейную функцию параметров  $m_1, m_{i+1}$ . Поэтому условие  $S_G''(\xi) = 0$  при  $\xi \in [x_i, x_{i+1}]$  дает уравнение прямой линии в плоскости  $(m_1, m_{i+1})$ , проходящей согласно (116) через точку  $O_1(1,1)$  и пересекающей кривую  $\Gamma_1$ . Так как  $S_G'(x)$  линейна относительно  $m_1, m_{i+1}$ , то при том же значении  $\xi$  след функции  $S_G'(\xi)$  на прямой также изменяется по линейному закону. Он принимает в точке  $O_1$  значение  $S_G'(\xi) = 1$ , а на кривой  $\Gamma_1$  имеем  $S_G'(\xi) = 0$ . Поэтому  $S_G'(\xi)$  может изменять знак только в точке пересечения прямой  $S_G''(\xi) = 0$  с кривой  $\Gamma_1$ , и, таким образом,  $\Gamma_1$  является границей области  $G_1$ .

Теперь очевидна

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы обобщенный сплайн  $S_G'(x)$  был монотонным на отрезке  $[x_j, x_{j+1+1}]$ , необходимо и достаточно, чтобы  $(m_1, m_{i+1}) \in G_1$  для всех  $i = j, \dots, j+1$ .

Примеры использования теоремы 1 для решения задач монотонной интерполяции приводятся в §4-7.

### §3. Выпуклые обобщенные сплайны

Пусть  $\delta_i^2 = (\delta_{i+1/2} - \delta_{i-1/2}) / (h_{i-1} + h_i)$  - вторая, разделенная разность от исходных данных. Говорят, что исходные данные выпуклы вниз (вверх) на  $[x_j, x_{j+1+1}]$ , если  $\delta_i^2 \geq 0$  ( $\delta_i^2 \leq 0$ ) для  $i = j+1, \dots, j+1$ .

Интерполяционный сплайн называется *выпуклым* на  $[x_j, x_{j+1+1}]$ , если при выпуклых исходных данных  $\text{sign } S_G''(x) = \text{sign } \delta_i^2$  ( $x \in [x_i, x_{i+1}]$ ) для  $i \in j+1, \dots, j+1$ .

ЛЕММА 6. Чтобы сплайн  $S_G(x)$  был выпуклым вниз т.е.  $S_G''(x) \geq 0$  (вверх -  $S_G''(x) \leq 0$ ), на  $[x_j, x_{j+1+1}]$

необходимо, чтобы

$$m_i \leq \delta_{i+1/2} \leq m_{i+1} \quad (m_i \geq \delta_{i+1/2} \geq m_{i+1}). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При интерполяции функции  $S_G(x)$  сплайном первой степени остаточный член может быть представлен в виде [1, §2.2]:

$$S'_G(x) - \delta_{i+1/2} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} K'_x(x, v) S''_G(v) dv,$$

где

$$K'_x(x, v) = \begin{cases} \frac{v-x_i}{h_i}, & \text{если } v \leq x, \\ -\frac{x_{i+1}-v}{h_i}, & \text{если } v > x. \end{cases}$$

Отсюда для  $S''_G(x) \geq 0$  при  $x = x_i$  получаем  $S'_G(x_i) \leq \delta_{i+1/2}$ , а при  $x = x_{i+1}$  имеем  $S'_G(x_{i+1}) \geq \delta_{i+1/2}$ , что совпадает с неравенствами (18) для этого случая. Аналогично выводятся неравенства (18) для случая  $S''_G(x) \leq 0$ .

При выводе условий (18) никак не использовалась специфика обобщенного сплайна, и поэтому они носят довольно общий характер. Следующая теорема дает ответ на вопрос о необходимых и достаточных условиях выпуклости обобщенного сплайна.

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $\delta_i^2 \geq 0$ ,  $i = j+1, \dots, j+1$ . Для того чтобы обобщенный сплайн  $S_G(x)$  был выпуклым вниз на  $[x_j, x_{j+1+1}]$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия  $a_i \geq 0$ ,  $b_i \geq 0$ , т.е.

$$[\psi'_i(1)-1]m_i + m_{i+1} \leq \psi'_i(1)\delta_{i+1/2}, \quad \vdots$$

$$m_i - [\varphi'_i(0)+1]m_{i+1} \geq -\varphi'_i(0)\delta_{i+1/2}, \quad \left. \begin{matrix} \vdots \\ i=j, \dots, j+1. \end{matrix} \right\} \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства (116) и условий (6) ясно, что для выполнения неравенства  $S_G''(x) \geq 0$  при  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  необходимо и достаточно выполнения соотношений  $S_G''(x_i) \geq 0$ ,  $S_G''(x_{i+1}) \geq 0$ , которые, как нетрудно видеть, эквивалентны требованиям  $a_i \geq 0$ ,  $b_i \geq 0$ . Отсюда, учитывая (3), (4), получаем условия (19).

Отметим, что для сплайна, выпуклого вверх в формулировке теоремы 2, знаки неравенств нужно заменить на противоположные.

Если  $\delta_i^2 = 0$ , то из неравенств (19) с необходимостью следуют соотношения  $m_{i-1} = m_i = m_{i+1} = \delta_{i+1/2} = \delta_{i-1/2}$ .

Если задавать значения  $m_i$  по формулам (5), хорошо отражающим качественное поведение интерполируемой функции, то для сплайна, интерполирующего выпуклые вниз данные ( $\delta_i^2 \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ ) условия (19) дают неравенства

$$[\varphi'_i(1)-1]\delta_i^2 \geq \delta_{i+1}^2, \quad \delta_i^2 \leq -[\varphi'_i(0)+1]\delta_{i+1}^2, \quad (20)$$

$$i = j, \dots, j+1; \quad 1 < j < N-1.$$

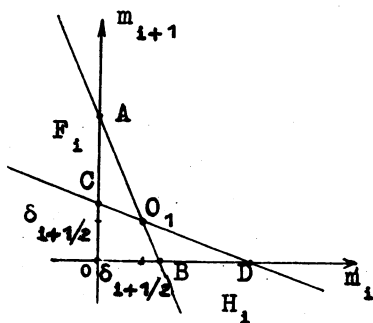


Рис. 3

Неравенства (19) и (20) - это аналоги известных условий для кубических сплайнов. Геометрически они выделяют на плоскости  $(m_i, m_{i+1})$  сектор  $F_i$ , ограниченный продолженными лучами  $O_1A$  и  $O_1C$  (рис.3). Для сплайнов, выпуклых вверх, это сектор  $H_i$ , образованный продолженными лучами  $O_1B$  и  $O_1D$ .

Примеры использования теоремы 2 для решения задачи выпуклой интерполяции даются в §4-7.

#### §4. Кубические сплайны

Кубические сплайны порождаются базовыми функциями

$$\psi_1(t) = (1-t)^3, \quad \psi_2(t) = t^3. \quad (21)$$

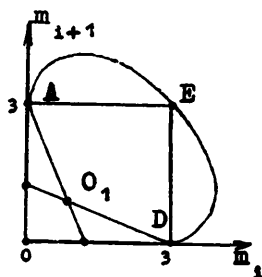


Рис. 4

Для них выполняются условия (2), (6), (7), а значит, применимы теоремы 1, 2.

Характерные точки плоскости  $(m_i, m_{i+1})$  имеют следующие координаты:  $A(0, 3)$ ,  $B(1.5, 0)$ ,  $C(0, 1.5)$ ,  $D(3, 0)$  (см. рис. 4). Уравнения кривой  $\Gamma_1$  (15) в обозначениях (9) принимают вид:

$$m_i = \frac{3\tau^2}{1-3\tau(1-\tau)}, \quad m_{i+1} = \frac{3(1-\tau)^2}{1-3\tau(1-\tau)}. \quad (22)$$

Это есть дуга эллипса, в чем можно убедиться, исключая параметр  $\tau$  из этих формул. Получаем [4]:

$$(m_i - 1)^2 + (m_i - 1)(m_{i+1} - 1) + (m_{i+1} - 1)^2 - 3(m_i + m_{i+1} - 2) = 0.$$

Эллипс имеет центр в точке  $(2, 2)$ , расположен симметрично относительно прямой  $m_{i+1} = m_i$  и касается осей координат в точках  $A$  и  $D$  (рис. 3). Дуге  $AED$  соответствуют значения  $\tau \in [0, 1]$ .

Для решения задачи монотонной интерполяции в [4] предлагается сузить допустимую область монотонности (теорема 1) либо до четырехугольника  $OABD$ , либо до четверти круга радиуса 3

с центром в точке 0. Если начальные значения  $m_i^0, m_{i+1}^0$  не принадлежат суженной области, то осуществляется их ортогональное проецирование на ее границу. При этом все точки, у которых  $m_i^0 \geq 3$ ,  $m_{i+1}^0 \geq 3$ , переносятся в точку  $E$ . Очевидно, такая процедура обеспечивает выполнение условий  $m_i \leq m_i^0$ ,  $m_{i+1} \leq m_{i+1}^0$  и не выводит из соответствующей области монотонности точку  $(m_{i-1}, m_i)$ .

Нетрудно видеть, что проецирование по прямым, проходящим через начало координат 0, выводящее точку на эллипс, может нарушать условия монотонности на предыдущем интервале.

В [5] предложен двухпроходной алгоритм монотонной интерполяции кубическими сплайнами. На первом проходе изменяются только вторые компоненты пар  $(m_i^0, m_{i+1}^0)$ , которые параллельным переносом выводятся на эллипс. При этом, если  $m_i^0 \geq 3$ ,  $m_{i+1}^0 \geq 3$ , то принимается  $m_{i+1} = 3$ . При обратном проходе по такому же правилу исправляются первые компоненты пар. В результате условия монотонности выполняются для всех  $i$ .

Успех в построении алгоритмов монотонной интерполяции достигается за счет того, что у множества областей монотонности  $\{G_i\}_{i=0}^{N-1}$  имеется, по крайней мере, одна общая точка  $O \{m_i = m_{i+1} = 0\}_{i=0}^{N-1}$ . Перемещение точек  $(m_i^0, m_{i+1}^0)$  производится так, что их расстояние до точки 0 уменьшается.

Сложнее обстоит дело с множествами областей выпуклости  $\{F_i\}_{i=0}^{N-1}$  или  $\{H_i\}_{i=0}^{N-1}$  (теорема 2), где в данном случае  $\phi_i'(0) = -3$ ,  $\phi_i'(1) = 3$ . У них общей точки может не быть, и потому в общем случае предложить алгоритмы построения выпуклого сплайна за счет изменения величин  $m_i^0$  нельзя. Иначе говоря, система из  $2(l+1)$  неравенств (19) относительно  $l+1$  неизвестных  $m_i$  может не иметь решения.

Не развивая этой темы, отметим только, что при использовании для  $m_i$  формул (5) из (20) имеем  $2\delta_i^2 \geq \delta_{i+1}^2$ ,

$\delta_i^2 \leq 2\delta_{i+1}^2$ ,  $i = j, \dots, j+1$ , и поэтому сплайн будет выпуклым, если отношение соседних значений  $\delta_i^2, \delta_{i+1}^2$  больше  $1/2$  и меньше 2.

Обобщенные сплайны имеют преимущество перед кубическими в том случае, если за счет входящих в их базовые функции дополнительных параметров удастся так расширить области монотонности или выпуклости, что в них попадают заданные по условиям эрмитовой интерполяции значения  $m_i^0, m_{i+1}^0$ , удовлетворяющие необходимым условиям монотонности или выпуклости.

## §5. Кубические сплайны с дополнительными узлами

1. Усеченные кубические функции в качестве базовых функций

$$\varphi_i(t) = \frac{(q_i - t)^3}{q_i^3}, \quad \psi_i(t) = \frac{(t - p_i)^3}{(1 - p_i)^3}, \quad (23)$$

где  $0 \leq p_i < 1$ ,  $0 < q_i \leq 1$ , порождают кубические сплайны  $S_D(x)$ , имеющие в общем случае по два дополнительных узла  $t = p_i, t = q_i$  между узлами сетки  $\Delta$ . При  $p_i = q_i$  два узла сливаются в один, а при  $p_i = 0, q_i = 1$  они совпадают с узлами сетки  $\Delta$ , и функции (23) переходят в функции (21).

В дополнительных узлах сплайн непрерывен вместе с двумя первыми производными. Интерполяционные условия в них не задаются.

Используя термины §1 имеем  $p_i = t_{1i}, q_i = t_{2i}$ . Очевидно, условия (2), (6), (7), налагаемые на базовые функции, выполняются.

2. При исследовании монотонности сплайна  $S_D(x)$ , как и в §2, будем использовать относительные величины  $m_i, m_{i+1}$ .

а) Пусть  $p_i \geq q_i$ . Тогда на отрезке  $[q_i, p_i]$  имеем  $\varphi_i^{(r)}(t) = \psi_i^{(r)}(t) = 0$ ,  $r = 0, 1, 2, 3$ , и сплайн здесь вы-



рождается в линейную функцию. По лемме 2 условие его монотонности на  $[x_i, x_{i+1}]$  имеет вид:

$$q_i m_i + (1-p_i) m_{i+1} - 3 \leq 0. \quad (24)$$

В частности, при  $p_i = q_i = 1/2$  это дает область  $m_i + m_{i+1} \leq 6$ . Очевидно, неравенства (24) всегда можно выполнить при достаточно малых  $q_i, 1-p_i$ , когда сплайн приближается к сплайну первой степени.

Однако наличие прямолинейных отрезков у графика сплайна не всегда приемлемо на практике, поэтому нужно исследовать и вторую возможность.

б) Пусть  $p_i \leq q_i$ . Для построения границы  $\Gamma_i$  области  $G_i$  при  $\tau \in [p_i, q_i]$  запишем систему (12), используя формулы (11):

$$a_i \cdot \frac{q_i - \tau}{q_i^3} + b_i \cdot \frac{\tau - p_i}{(1-p_i)^3} = 0,$$

$$a_i \left[ -\frac{3(q_i - \tau)^2}{q_i^3} + 1 \right] + b_i \left[ \frac{3(\tau - p_i)^2}{(1-p_i)^3} - 1 \right] + 1 = 0.$$

Из первого равенства получаем

$$\tau = \left[ \frac{a_i q_i}{q_i^3} - \frac{b_i p_i}{(1-p_i)^3} \right] / \left[ \frac{a_i}{q_i^3} - \frac{b_i}{(1-p_i)^3} \right].$$

Так как на кривой  $\Gamma_i$  выполняются условия  $a_i \leq 0$ ,  $b_i \geq 0$ , причем одновременно равенства имеют место только в точке  $O_i$  (рис. 2), то знаменатель в этой формуле отличен от нуля. Подставляя  $\tau$  во второе равенство, после преобразований получаем уравнение  $\Gamma_i$  в виде:

$$\frac{a_1^2}{q_1^3} + M_1 a_1 b_1 + \frac{b_1^2}{(1-p_1)^3} + \frac{a_1}{q_1^3} - \frac{b_1}{(1-p_1)^3} = 0, \quad (25)$$

где

$$M_1 = \frac{3(q_1 - p_1)^2}{q_1^3(1-p_1)^3} - \frac{1}{q_1^3} - \frac{1}{(1-p_1)^3}.$$

Из (25) с помощью линейного преобразования (10) можно получить уравнение  $\Gamma_1$  в плоскости  $m_1, m_{i+1}$ :

$$A_1(m_1 - 1)^2 + 2B_1(m_1 - 1)(m_{i+1} - 1) + C_1(m_{i+1} - 1) + D_1(m_1 - 1) + E_1(m_{i+1} - 1) = 0, \quad (26)$$

где коэффициенты  $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$  зависят от параметров  $p_1, q_1$ .

Итак,  $\Gamma_1$  есть кривая второго порядка. Ее тип определяется знаками инвариантов, которые можно вычислить из (25):

$$I_{11} = -\frac{3(q_1 - p_1)^2}{q_1^6(1-p_1)^6},$$

$$I_{21} = \left[ \frac{1}{\sqrt{q_1^3(1-p_1)^3}} - \frac{M_1}{2} \right] \left[ \frac{1}{\sqrt{q_1^3(1-p_1)^3}} + \frac{M_1}{2} \right],$$

$$I_{31} = \frac{1}{q_1^3} + \frac{1}{(1-p_1)^3}.$$

Так как  $I_{31} > 0$ , то все кривые, описываемые уравнением (25) (или (26)), действительны.

Условие  $I_{21} = 0$  является признаком параболы. Так как в области интересующих нас значений  $0 \leq p_1 < q_1 \leq 1$  в вы-

ражении  $I_{21}$  первый множитель положителен, то признаком параболы является равенство нулю второго множителя. Разлагая его на два сомножителя, получаем равенство

$$\left[ \frac{\sqrt{3}(q_1 - p_1)}{\sqrt{q_1^3(1-p_1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{q_1^3}} + \frac{1}{\sqrt{(1-p_1)^3}} \right] \times$$

$$\times \left[ \frac{\sqrt{3}(q_1 - p_1)}{\sqrt{q_1^3(1-p_1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{q_1^3}} - \frac{1}{\sqrt{(1-p_1)^3}} \right] = 0,$$

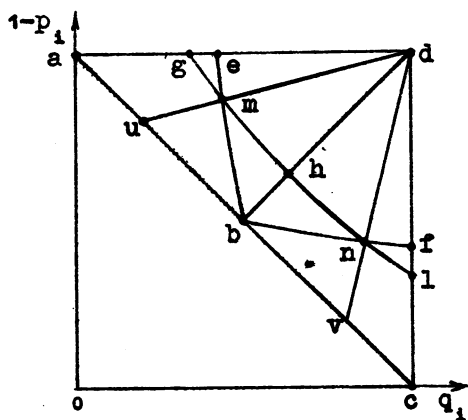


Рис. 5

описывающее в единичном квадрате плоскости  $(q_1, 1-p_1)$  пару кривых  $be$  и  $bf$  (рис. 5). Для значений  $q_1, 1-p_1$  из области  $bedf$  (исключая линии  $be$  и  $bf$ ) имеем  $I_{21} > 0$  и кривая (26) есть эллипс. В частности, точка  $d$  ( $p_1 = 0, q_1 = 1$ ) соответствует эллипсу для

кубического сплайна (рис. 4). Для областей  $abe$  и  $bcf$  (исключая линии  $be$  и  $bf$ ) выполняется неравенство  $I_{21} < 0$  и кривая (26) есть гипербола. Отрезок прямой  $ac$ , где  $p_1 = q_1$ , соответствует случаю совпадения дополнительных узлов сплайна.

Обратимся к первому инварианту. На отрезке прямой  $ac$  имеем  $I_{11} = 0$ . Это характеризует пару пересекающихся пря-

ных, одна из которых есть граница (24) области  $G_1$ . В точке  $b$ , где  $I_{11} = I_{21} = 0$ , прямые становятся параллельными.

Рассмотрим несколько примеров.

Предварительно ответим на два вопроса. Первый: в каких точках плоскости  $(m_1, m_{i+1})$  прямая  $m_{i+1} = m_1$  пересекает границу  $\Gamma_1$  области  $G_1$ ? Из (25) и (10) имеем

$$\left\{ \frac{3(m_1 - 1)}{\Delta_{11}} \left[ \frac{1}{q_1^2(1-p_1)} - M_1 + \frac{1}{q_1(1-p_1)^2} \right] + \left[ \frac{1}{q_1^2} + \frac{1}{(1-p_1)^2} \right] \right\} (m_1 - 1) = 0.$$

Отсюда  $m_1 = 1$  - это точка  $0_1$ , и второе значение

$$m_1 = 3[1 - 2p_1(1 - q_1)] / [q_1(1 - q_1)^2 + p_1^2(1 - p_1) - p_1(1 - q_1)^2 - (1 - q_1)p_1^2 - 2p_1(1 - q_1) + 1]. \quad (27)$$

На линии  $ac$   $p_1 = q_1$ ,  $m_1 = 3$ .

В плоскости  $(q_1, 1 - p_1)$  рассматриваем прямые  $p_1 = k(1 - q_1)$ ,  $k \geq 0$ , проходящие через точку  $d(1, 1)$ .

Второй вопрос: имеет ли определенная в (27) функция  $m_1 = m_1(p_1, q_1)$  экстремумы на этих прямых, и если да, то какие? Для этого подсчитываем  $m_1$  на заданных прямых

$$m_1 = \frac{3[1 - 2k(1 - q_1)^2]}{1 + (1 - k)^2(1 - q_1)^2 - (1 + k)(1 + k^2)(1 - q_1)^3}.$$

Дифференцируя это выражение, получаем

$$\frac{dm_1}{dq_1} = \frac{3(1 + k^2)(1 - q_1)[2 - 3(1 + k)(1 - q_1) + 2k(1 + k)(1 - q_1)^3]}{[1 + (1 - k)^2(1 - q_1)^2 - (1 + k)(1 + k^2)(1 - q_1)^3]^2}.$$

Отсюда следует, что  $dm_1/dq_1 = 0$  в двух случаях:

1)  $q_1 = 1$ , что на рис.5 отвечает точке  $d$  (случай кубического сплайна),  $m_1 = 3$ .

2)  $2 - 3(1+k)(1-q_1) + 2k(1+k)(1-q_1)^3 = 0$ .  
После подстановки сюда  $k = p_1/(1-q_1)$  получаем уравнение кривой  $ghl$  в плоскости  $(q_1, 1-p_1)$  (рис. 5):

$$[2p_1(1-q_1) - 3](1-q_1 + p_1) + 2 = 0.$$

Эта кривая расположена симметрично относительно прямой  $1-p_1 = q_1$  и проходит через точки:  $g\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ ,  $l\left(1, \frac{1}{3}\right)$ , в которых  $m_1 = 3/\left[1 + \frac{4}{27}\right] < 3$ , и  $h\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$ , в которой  $m_1 = 1 + \sqrt{3} < 3$ . Следовательно, это линия минимума значений  $m_1$ , а в точке  $d(1,1)$  они имеют максимум.

Кривые  $be$  и  $bf$  пересекаются с кривой  $ghl$  в точках, близких к  $m(0.4346, 0.8622)$  и  $n(0.8622, 0.4346)$ .

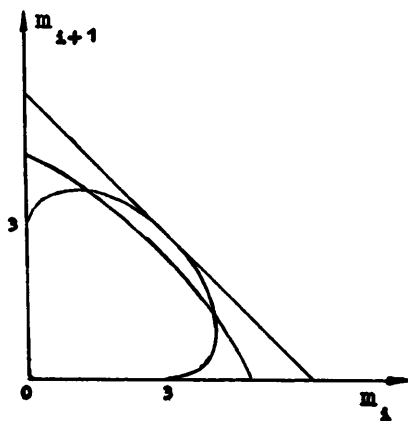


Рис. 6

А теперь приведем примеры. По формулам (15) рассчитаны границы областей  $G_1$ , соответствующие точкам  $d, h, b$  на рис.5, т.е. дуга эллипса для кубических сплайнов, дуга эллипса с минимальной длиной малой полуоси и прямая (рис.6).

На рис.7 изображены границы областей  $G_1$ , соответствующие точкам  $d, m, u$  на рис.5, т.е. эллипс, парабола и прямая.

На рис.8 изображены границы областей  $G_1$ , соответствующие точкам  $d, e, g, a$ , т.е. снова эллипс, парабола, гипербол

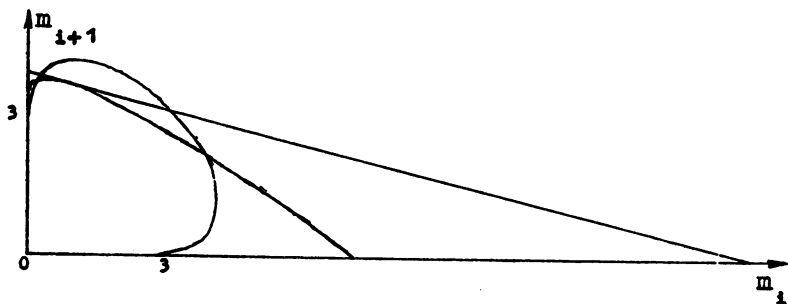


Рис. 7

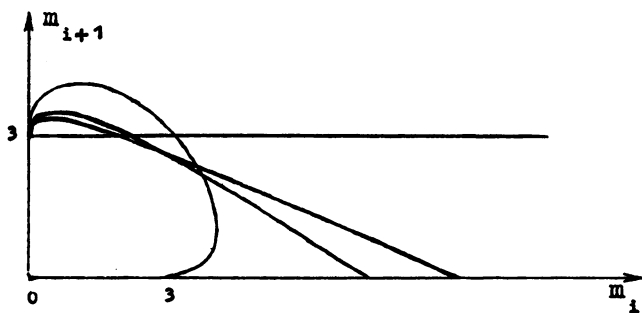


Рис. 8

и прямая, параллельная оси  $m_i$ . Последняя соответствует случаю, когда оба дополнительных узла сплайна совпадают с узлом сетки  $x_i$ , что не предусмотрено определением базовых функций (23). Поэтому прямую следует рассматривать только как предельное положение гипербол, соответствующих интервалу  $(a, g)$ .

При практическом построении монотонных сплайнов  $S_G(x)$  приходится выбирать значения  $p_i, q_i$ . Как видно из рис.6-8 и симметричных им конфигураций, соответствующих отрезкам прямых  $dv$  и  $dc$  (рис.5), здесь по сравнению с кубическими сплайнами появляются дополнительные возможности. Главная из них заключается в том, что если хотя бы одно из заданных значений  $m_i^0, m_{i+1}^0$  меньше 3, то существуют  $p_i, q_i$ , для которых сплайн будет монотонным при  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ .

Если же  $m_i^0 > 3, m_{i+1}^0 > 3$ , то нужно выбирать наиболее подходящую пару  $p_i, q_i$ , для которой граница области  $G_i$  проходит ближе к точке  $(m_i^0, m_{i+1}^0)$ . Например, если  $m_{i+1}^0$  незначительно превосходит 3, а  $m_i^0$  существенно больше 3, то имеет смысл выбирать  $p_i, q_i$  из окрестности точки  $p_i = q_i = 0$  (точка "а" на рис.5). Тогда границей области  $G_i$  будет дуга гиперболы или прямая, проходящие близко от точки  $m_i = m_{i+1} = 3$ . После чего, как и в случае кубических сплайнов, осуществляется проецирование на эту границу точки  $(m_i^0, m_{i+1}^0)$ . Имеет смысл применять только двухпроходный алгоритм, ибо наилучшие условия для однопроходного алгоритма дают чисто кубические сплайны.

3. Для выпуклых исходных данных условия выпуклости сплайна определяются теоремой 2. При выборе  $m_i, m_{i+1}$ , например, по формулам (5) условия выпуклости вниз (20) сплайна  $S_D(x)$  имеют вид:

$$\delta_i^2 \geq 0, \text{ если } i = 1, N-1,$$

$$\left( \frac{3}{1-p_i} - 1 \right) \delta_i^2 \geq \delta_{i+1}^2, \delta_i^2 \leq \left( \frac{3}{q_i} - 1 \right) \delta_{i+1}^2, \text{ если } i = \overline{2, N-2}.$$

Эти неравенства всегда можно выполнить, когда  $\delta_i^2 > 0, i = 1, N-1$ . Действительно, если  $\delta_i^2 = \delta_{i+1}^2$ , то полагаем

$p_1 = 0$ , а  $q_1$  выбираем достаточно малым. Наоборот, если  $\delta_1^2 \leq \delta_{1+1}^2$ , то  $q_1 = 1$ , а  $p_1$  берется близким к единице. Таким образом, возможность решения задачи гарантируется введением одного дополнительного узла.

## §6. Рациональные сплайны

### 1. Базовые функции

$$\varphi_1(t) = \frac{(1-t)^3}{1+q_1 t}, \quad \psi_1(t) = \frac{t^3}{1+p_1(1-t)}, \quad (28)$$

где  $-1 < p_1, q_1 < \infty$ , порождают рациональные сплайны  $S_R(x)$ . Для вычислений удобнее пользоваться представлением этих функций в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{(1+q_1)^3}{q_1^3(1+q_1 t)} - \frac{t^2}{q_1} + \frac{1+3q_1}{q_1^2} t - \frac{1+3q_1+q_1^2}{q_1^3}, \\ \psi_1(t) &= \frac{(1+p_1)^3}{p_1^3[1+p_1(1-t)]} - \frac{(1-t)^2}{p_1} + \\ &\quad + \frac{1+3p_1}{p_1^2}(1-t) - \frac{1+3p_1+p_1^2}{p_1^3}. \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1'(t) &= -\frac{(1+q_1)^3}{q_1^2(1+q_1 t)^2} - \frac{2t}{q_1} + \frac{1+3q_1}{q_1^2}, \\ \psi_1'(t) &= \frac{(1+p_1)^3}{p_1^2[1+p_1(1-t)]^2} + \frac{2(1-t)}{p_1} - \frac{1+3p_1}{p_1^2}; \end{aligned} \right\} \quad (296)$$



$$\left. \begin{aligned} \varphi_i''(t) &= \frac{2(1+q_i)^3}{q_i(1+q_i t)^3} - \frac{2}{q_i}, \\ \psi_i''(t) &= \frac{2(1+p_i)^3}{p_i[1+p_i(1-t)]^3} - \frac{2}{p_i}; \end{aligned} \right\} \quad (29в)$$

$$\varphi_i'''(t) = -\frac{6(1+q_i)^3}{(1+q_i t)^4}, \quad \psi_i'''(t) = \frac{6(1+p_i)^3}{[1+p_i(1-t)]^4}. \quad (29г)$$

Формулы (29а)-(29в) непригодны для вычислений при  $p_i = 0$  или  $q_i = 0$ , и в этом случае следует использовать непосредственно формулы (28).

Функции (28) определены на  $[0,1]$ . Для них выполняются ограничения (2), (6), (7), используемые при построении монотонных и выпуклых сплайнов, т.е. применимы леммы 1,3-6 и теоремы 1,2.

2. Отметим, что  $\varphi_i'(0) = -(3+q_i)$ ,  $\psi_i'(1) = 3+p_i$ . По формулам (15) с учетом (8), (29б) и (29в) получаем параметрические уравнения границы области  $G_i$  монотонности сплайна на  $S_R(x)$ .

Ограничимся симметричным случаем  $p_i = q_i$ , т.е.  $\varphi_i(t) = \varphi_i(1-t)$ ,  $\varphi_i'(t) = -\varphi_i'(1-t)$ ,  $\psi_i''(t) = \varphi_i''(1-t)$ . По формулам (15) получаем

$$\left. \begin{aligned} m_i &= 1 + \frac{1}{Q_i} [\varphi_i''(\tau) - (2+q_i)\varphi_i''(1-\tau)], \\ m_{i+1} &= 1 - \frac{1}{Q_i} [(2+q_i)\varphi_i''(\tau) - \varphi_i''(1-\tau)], \\ Q_i &= -[\varphi_i'(1-\tau)+1]\varphi_i''(\tau) - [\varphi_i'(\tau)+1]\varphi_i''(1-\tau) < 0. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

В силу симметрии, пересечению кривой (30) с прямой  $m_{i+1} = m_i$ , очевидно, соответствует значение  $\tau = 1/2$ .

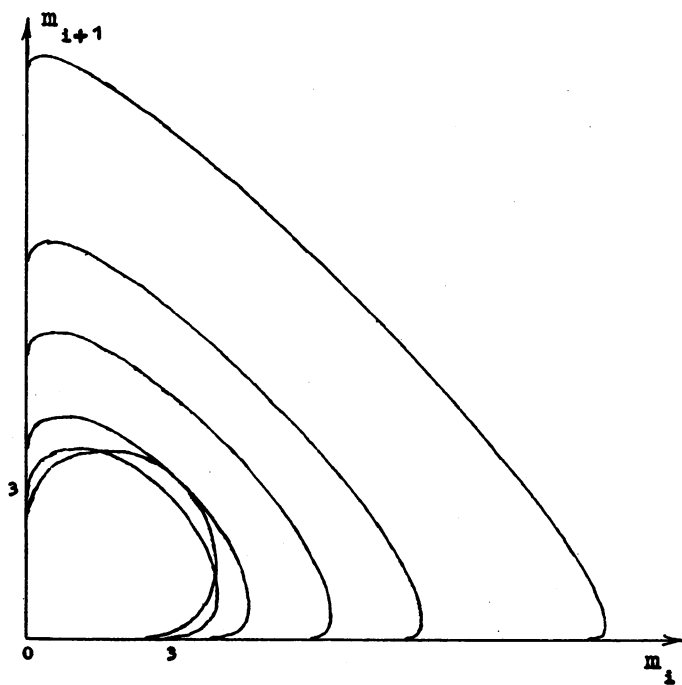


Рис. 9

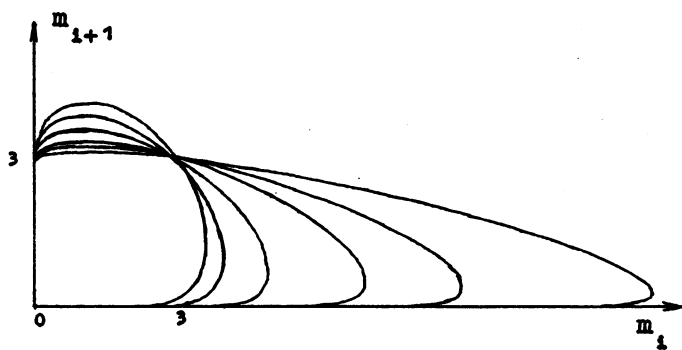


Рис. 10

Тогда

$$m_i = 1 + \frac{1+q_i}{2[\varphi'_i(1/2)+1]} = 1 + \frac{(2+q_i)^2}{2(1+q_i)}. \quad (31)$$

Функция  $m_i(q_i)$ ,  $q_i \in (-1, \infty)$ , имеет единственный экстремум-минимум при  $q_i = 0$ , что соответствует кубическому сплайну. При  $q_i < 0$  и  $q_i > 0$  граница области  $G_i$  раздвигается.

При заданных  $m_i^0, m_{i+1}^0$  сначала проверяем, попадают ли они в область монотонности кубического сплайна. Если да, то  $p_i = q_i = 0$ . Если нет, то  $q_i$  изменяется так, чтобы заданные значения  $m_i^0, m_{i+1}^0$  оказались в области монотонности рационального сплайна. Характер изменения границы (30) в этом случае показан на рис. 9, где изображены границы, соответствующие значениям  $q_i = -1/2, 0, 1, 3, 5, 9$ . Таким способом цель всегда будет достигнута.

При  $p_i \neq q_i$  добиться помещения заданных  $m_i^0, m_{i+1}^0$  в область монотонности можно различными способами. Характер границ (15) показан на рис. 10, 11. В первом случае принято  $p_i = 0$ , во втором —  $p_i = 1$ ; значения  $q_i = -1/2, 0, 1, 3, 5, 9$ .

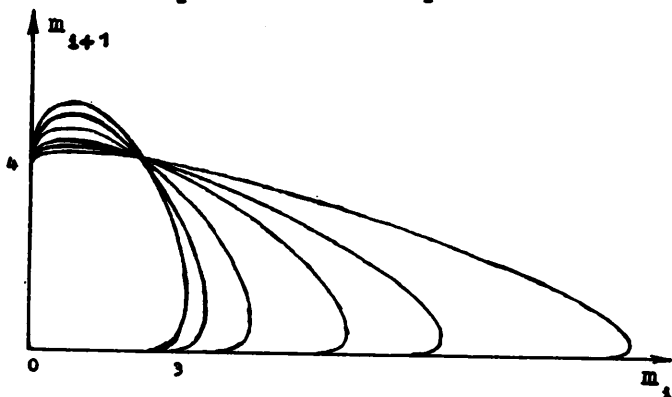


Рис. 11

3. Условия выпуклости вниз сплайна  $S_R(x)$ ,  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , при задании  $m_i, m_{i+1}$  по формулам (5) согласно (21) имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta_i^2 &\geq 0, \text{ если } i = 1, N-1, \\ (2+p_i)\delta_i^2 &\geq \delta_{i+1}^2, \delta_i^2 \leq (2+q_i)\delta_{i+1}^2, \text{ если } i = \overline{2, N-2}. \end{aligned} \right\} (32)$$

Если все  $\delta_i^2 > 0$ , то эти неравенства всегда можно выполнить при достаточно больших  $p_i, q_i$ .

## §7. Экспоненциальные сплайны

### 1. Базовые функции

$$\varphi_i(t) = (1-t)^3 e^{-q_i t}, \quad \psi_i(t) = t^3 e^{-p_i(1-t)}, \quad (33)$$

где  $-1 < p_i, q_i < \infty$ , порождают экспоненциальные сплайны  $S_E(x)$ . Имеем

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i'(t) &= -(1-t)^2 [3+q_i(1-t)] e^{-q_i t}, \\ \psi_i'(t) &= t[3+p_i t] e^{-p_i(1-t)}; \end{aligned} \right\} (34a)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i''(t) &= (1-t)[6+6q_i(1-t)+q_i^2(1-t)^2] e^{-q_i t}, \\ \psi_i''(t) &= t[6+6p_i t+p_i^2 t^2] e^{-p_i(1-t)}; \end{aligned} \right\} (34b)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i'''(t) &= -[6 + 18q_i(1-t) + 9q_i^2(1-t)^2 + \\ &\quad + q_i^3(1-t)^3]e^{-q_i t}, \\ \psi_i'''(t) &= [6 + 18p_i t + 9p_i^2 t^2 + p_i^3 t^3]e^{-p_i(1-t)}. \end{aligned} \right\} \quad (34в)$$

Функции (33) определены на  $(0,1)$ . Для них выполняются ограничения (2), (6), (7), а, значит, применимы леммы 1,3-5 и теоремы 1,2.

2. Граница области монотонности сплайна  $S_E(x)$  дается формулами (15), где  $Q_i$  определяется по формуле (7), а производные базовых функций по формулам (34а) и (34б).

В симметричном случае  $p_i = q_i$  снова получаем формулы (30). В точке пересечения границы с прямой  $m_{i+1} = m_i$  получаем значение  $m_i$ , задаваемое первым равенством (31). Подставляя в него значение  $\varphi_i'(1/2)$ , согласно (34а), находим

$$m_i = 1 + \frac{1+q_i}{2 - \frac{1}{4} \cdot (6+q_i) e^{-q_i/2}}.$$

Так как

$$\frac{dm_i}{dq_i} = \frac{4}{[8 - (6+q_i) e^{-q_i/2}]^2} \cdot \left[ 8 - \left( 8 + \frac{7}{2} \cdot q_i + \frac{1}{2} \cdot q_i^2 \right) e^{-q_i/2} \right],$$

то функция  $m_i(q_i)$  при  $q_i \in (-1, \infty)$  имеет единственный экстремум-минимум в точке  $q_i = 0$ , что соответствует кубическому сплайну, как и в случае рациональных сплайнов.

Для данного типа обобщенных сплайнов можно высказать те же соображения, что уже были сделаны в случае рациональных сплайнов. Это проиллюстрировано на рис. 12-14. На рис. 12 изображены границы областей  $G_i$ , соответствующие симметричному

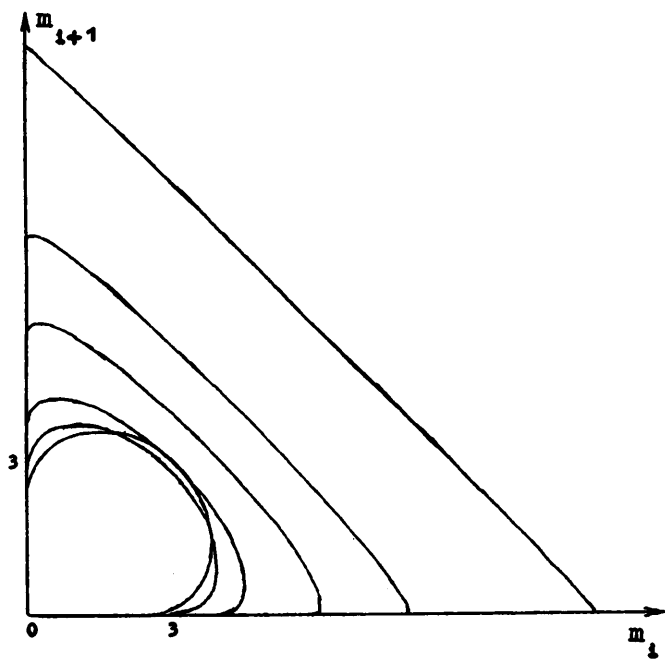


Рис. 12

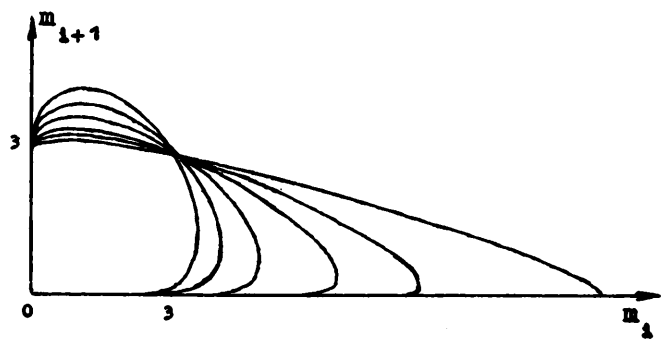


Рис. 13

случаю  $p_i = q_i = -1/2, 0, 1, 3, 5, 9$ . На рис. 13, 14 представлены несимметричные случаи:  $p_i = 0$  и  $p_i = 1$  соответственно, а  $q_i$  принимает те же значения, что и на рис. 10, 11.

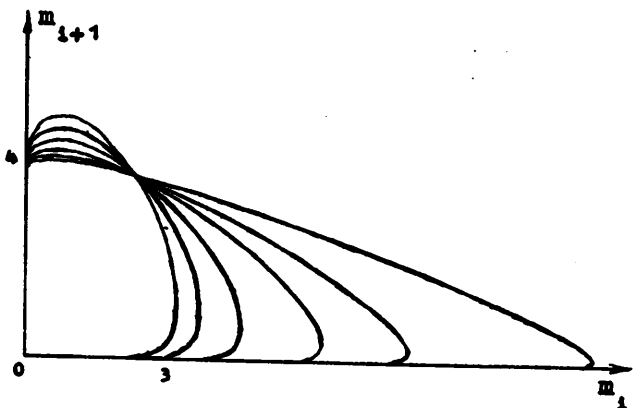


Рис. 14

3. Условия выпуклости сплайна  $S_E(x)$ ,  $x \in [x_i, x_{i+1}]$ , при задании  $m_i, m_{i+1}$  по формулам (5) имеют снова вид (32), которые можно выполнить при достаточно больших  $p_i, q_i$ , если  $\delta_i^2 > 0$ ,  $i = 1, \dots, N-1$ .

#### Л и т е р а т у р а

1. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 352 с.
2. ГРЕБЕННИКОВ А.И. Изогеометрическая аппроксимация функций //Численный анализ на ФОРТРАНЕ. Методы и алгоритмы. - М., 1978. - С. 48-55.
3. ФЛЕРОВ Ю.А. Локальный синтез плоских кривых методом введения простых дополнительных узлов //Проблемы прикладной математики и информатики. - М., 1987. - С. 231-239.
4. FRITSCH F.N., CARLSON R.E. Monotone Piecewise Cubic Interpolation //SIAM J.Numer.Anal. - 1980. - Vol. 17, N. 2. - P. 238-246.

5. EISENSTAT S.E., JACKSON K.R., LEWIS J.W. The Order of Monotone Piecewise Cubic Interpolation //SIAM J. Numer. Anal. - 1985. -Vol. 22, N. 6. -P. 1220-1237.

6. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С. О теории обобщенных кубических сплайнов //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1990. - Вып.137: Вычислительные системы. - С. 58-90.

7. КВАСОВ Б.И., ЯЦЕНКО С.А. Изометрическая интерполяция рациональными сплайнами //Аппроксимация сплайнами. - Новосибирск, 1987. - Вып. 121: Вычислительные системы. -С. 11-36.

Поступила в ред.-изд.отд.

14 января 1990 года