

УДК 519.63:551.465

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ БАРОКЛИННОГО ЗИХРЯ НА ОСНОВЕ
МЕТОДОВ СПЛАЙН-КОЛЛОКАЦИИ И РАСЩЕПЛЕНИЯ

В.И.Кузин, А.Г.Колобов

В в е д е н и е

Анализ результатов наблюдений [1,2] и теоретические работы [3] свидетельствуют о большой значимости процессов синоптического масштаба при моделировании циркуляции океана.

К настоящему времени построено большое количество численных моделей, описывающих как взаимодействие вихрей с течениями, так и трансформацию отдельного вихря. В этих моделях использовались либо разностных схемы [4,5], либо метод конечных элементов [6].

В данной работе рассматривается модель, которая с более высокой степенью точности по сравнению с ранее построенными моделями описывает процессы трансформации вихревых образований в бароклинном океане.

Использование Фурье-разложения по собственным функциям динамического оператора по вертикали позволяет свести трехмерную задачу к набору двумерных. Приближенное решение последних ищется методом, основанном на комбинации методов сплайн-коллокации и расщепления. Для аппроксимации функций и их производных применяются кубические сплайны в разложении по базису из В-сплайнов. Это позволяет получить аналитическое выражение для приближенного решения.

Проведенные эксперименты выявили сложную вертикальную структуру процессов трансформации вихревых образований.

1. Постановка задачи

Рассмотрим движение бароклинной несжимаемой невязкой жидкости в трехмерной ограниченной области Ω_3 , представляющей собой параллелепипед со сторонами L_x, L_y, H . Ось x направлена на восток, y - на север, z - вертикально вниз, кривизна земной поверхности учитывается с помощью приближения β -плоскости $\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + \beta \mathbf{y}$ [2]. Уравнение сохранения потенциального вихря, полученное с использованием квазигеострофического приближения, в декартовой системе координат в безразмерном виде записывается следующим образом [6]:

$$\zeta_t + \delta^* J(p, \zeta) = 0, \quad (1)$$

$$\zeta = \Delta p + \alpha^* \left[\frac{p_z}{N^2(z)} \right]_z + \beta^* y. \quad (2)$$

Здесь ζ - потенциальный вихрь, p - давление, $N(z)$ - частота Вайселя-Брента, $\alpha^*, \beta^*, \delta^*$ - безразмерные параметры, определяемые соотношениями: $\alpha^* = f_0^2 L_0^2 / N_0^2 Z_0^2$, $\beta^* = \beta f_0 \rho_0 L_0^3 / P_0$, $\delta^* = P_0 T_0 / f_0 \rho_0 L_0^2$, $J(p, \zeta) = p_x \zeta_y - p_y \zeta_x$, $\Delta p = p_{xx} + p_{yy}$. Нижние индексы t, x, y, xx, yy во всех случаях (за исключением обозначений $L_x, L_y, \Delta_x, \Delta_y$) означают частные производные (первого или второго порядков) по соответствующим переменным. Величины $T_0, L_0, H_0, P_0, N_0, f_0, \rho_0$ - характерные масштабы времени, пространственных координат, глубины, давления, частоты Вайселя-Брента, параметра Кориолиса, средней плотности. Численные значения масштабов выбраны следующими: $T_0 = 10^6$ с, $L_0 = 10^7$ см, $H_0 = 10^5$ см, $P_0 = 10^3$ г·см⁻¹·с⁻², $N_0^2 = 10^{-5}$ с⁻¹, $f_0 = 10^{-4}$ с⁻¹, $\beta = 1.6 \cdot 10^{-13}$ см⁻¹·с⁻¹, $\rho_0 = 1$ г·см⁻³.

Граничные условия по вертикали возьмем в виде

$$p_z = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \quad z = 1. \quad (3)$$

На боковых стенках будем использовать периодические граничные условия в зональном направлении

$$p(0, y, z, t) = p(L_x/L_0, y_0, z, t) \quad (4)$$

и условие отсутствия возмущения давления на широтных стенках

$$p(x, 0, z, t) = p(x, L_y/L_0, z, t) = 0. \quad (5)$$

Для уравнения (1) осталось задать начальное условие

$$\zeta|_{t=0} = \zeta^0(x, y, z). \quad (6)$$

Уравнение (1) является нелинейным и для его решения по времени необходимо провести линеаризацию. Для этого введем по времени сетку $\Delta_t = \{t_n : t_n = \Delta t \cdot n\}$ и будем рассматривать систему (1), (2) на интервале $[t_n, t_{n+1}]$. Следуя [6] будем использовать линеаризацию для уравнения (1) вида

$$\zeta_t + \delta^* J(p^n, \zeta) = 0. \quad (7)$$

Приближенное решение системы (2), (7) с соответствующими граничными и начальными условиями будем строить на основе методов сплайн-коллокации, расщепления и разложения решения по собственным функциям вертикальной координаты.

2. Метод решения

На каждом временном интервале $[t_n, t_{n+1}]$ вначале численно решается уравнение (2), затем - уравнение (7).

Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$p(x, y, z, t_n) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(x, y, t_n) Z_m(z), \quad (8)$$

где $Z_n(z)$ - собственные функции спектральной задачи

$$\left[\frac{Z'}{N^2} \right]' = -\lambda Z, \quad 0 < z < 1, \quad (9)$$

$$Z'(0) = Z'(1) = 0.$$

В случае произвольной функции $N(z)$ решение задачи (9) строится численно на сетке

$$\Delta_z: 0 = z_0 < \dots < z_K < \dots < z_K = 1 \quad (10)$$

с использованием однородных консервативных разностных схем [7].

Умножая скалярно (2) на Z_n , получаем уравнение для коэффициентов $p_n(x, y, t_n)$:

$$\Delta p_n - \alpha^* \lambda_n p_n = \zeta_n - \beta^* \sigma_n y. \quad (11)$$

Здесь $\zeta_n = (\zeta, Z_n)$, $\sigma_n = (1, Z_n)$. Обозначим для удобства правую часть соотношения (11) через F_n .

Определим двумерную область Ω_2 , представляющую собой прямоугольник со сторонами L_x, L_y . В области Ω_2 введем сетку $\Delta_{xy} = \Delta_x \times \Delta_y$, где

$$\Delta_x: 0 = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_N = L_x / L_0, \quad (12)$$

$$\Delta_y: 0 = y_0 < \dots < y_j < \dots < y_M = L_y / L_0. \quad (13)$$

Сетка характеризуется шагами $h_i = x_{i+1} - x_i$, $l_j = y_{j+1} - y_j$. Сетку Δ_x дополняем узлами с координатами x_i , $i = -1, -2, -3, N+1, N+2, N+3$, причем $h_{-3} = h_{-2} = h_{-1} = h_0$, $h_{N-1} = h_N = h_{N+1} = h_{N+2}$. На расширенной сетке Δ_x строится множество кубических В-сплайнов $B_i(x)$, $i = -1, \dots, N+1$ [8]. Аналогичным образом дополняется сетка Δ_y и строится множество В-сплайнов $\bar{B}_j(y)$, $j = -1, \dots, M+1$. Всевозможные пары $B_i(x) \bar{B}_j(y)$ образуют базис множества бикубических сплайнов в области Ω_2 .

Функцию $p_n(x, y, t_n)$ будем аппроксимировать кубиче-
ским сплайном двух переменных, представленном в виде

$$S(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij}(t) B_i(x) \bar{B}_j(y). \quad (14)$$

Наряду с представлением (14) будем использовать также эк-
вивалентные ему представления

$$S(x, y, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \bar{\alpha}_i(y, t) B_i(x), \quad (15)$$

$$\bar{\alpha}_i(y, t) = \sum_{j=-1}^{M+1} \beta_{ij}(t) \bar{B}_j(y),$$

$$S(x, y, t) = \sum_{j=-1}^{M+1} \alpha_j(x, t) \bar{B}_j(y), \quad (16)$$

$$\alpha_j(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \beta_{ij}(t) B_i(x).$$

Значения сплайна в точках (x_i, y_j, t_n) обозначим p_{nij}^n .
Аналогично будем обозначать их частные производные.

Для решения уравнения (11) применим метод установления по
фиктивному времени с использованием двухшаговой схемы перемен-
ных направлений [9]:

$$p_{nij}^{v+1/2} = p_{nij}^v + \frac{\Delta \tau}{2} [(p_{xx})_{nij}^v + (p_{yy})_{nij}^{v+1/2} - \alpha^* \lambda_{ij} p_{nij}^v - F_{nij}], \quad (17)$$

$$p_{nij}^{v+1} = p_{nij}^{v+1/2} + \frac{\Delta \tau}{2} [(p_{xx})_{nij}^{v+1} + (p_{yy})_{nij}^{v+1/2} - \alpha^* \lambda_{ij} p_{nij}^{v+1} - F_{nij}]. \quad (18)$$

На первом полушаге (17) используем представление (16), на втором полушаге (18) - представление (15). Это дает нам существенные преимущества при реализации схемы (17), (18). А именно, если бы мы использовали для нахождения приближенного решения представление (14), то пришли бы к девятиточечным системам линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных β_{ij} . Применение же эквивалентных представлений (15), (16) приводит нас к системам с трехдиагональными матрицами, что позволяет использовать метод прогонки. В дальнейших выкладках опустим индекс m .

Вследствии фйнитности В-сплайнов имеем:

$$p_{ij}^{v+1/2} = \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^{v+1/2} \bar{B}_{j+q}(y_j),$$

$$(p_{yy})_{ij}^{v+1/2} = \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^{v+1/2} \bar{B}_{j+q}''(y_j), \quad (19)$$

$$p_{ij}^{v+1} = \sum_{r=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+r,j}^{v+1} B_{i+r}(x_i),$$

$$(p_{xx})_{ij}^{v+1} = \sum_{r=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+r,j}^{v+1} B_{i+r}''(x_i). \quad (20)$$

Введем операторы вычисления значений кубических сплайнов и их производных в узлах сетки:

$$(T_1^{(k)} \bar{\alpha})_{ij}^v = \sum_{r=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+r,j}^v B_{i+r}^{(k)}(x_i),$$

$$(T_2^{(k)} \alpha)_{ij}^v = \sum_{q=-1}^1 \alpha_{i,j+q}^v \bar{B}_{j+q}^{(k)}(y_j).$$

Тогда схему (17), (18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
(T_2^{(0)} \alpha)_{ij}^{v+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2} (T_2^{(2)} \alpha)_{ij}^{v+1/2} &= (T_1^{(0)} \alpha)_{ij}^v + \\
&+ \frac{\Delta \tau}{2} (T_1^{(2)} \alpha)_{ij}^v - \frac{\Delta \tau}{2} \alpha^* \lambda (T_1^{(0)} \alpha)_{ij}^v - \frac{\Delta \tau}{2} F_{ij}, \quad (21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(T_1^{(0)} \alpha)_{ij}^{v+1} - \frac{\Delta \tau}{2} (T_1^{(2)} \alpha)_{ij}^{v+1} + \frac{\Delta \tau}{2} \alpha^* \lambda (T_1^{(0)} \alpha)_{ij}^{v+1} &= \\
= (T_2^{(0)} \alpha)_{ij}^{v+1/2} + \frac{\Delta \tau}{2} (T_2^{(2)} \alpha)_{ij}^{v+1/2} - \frac{\Delta \tau}{2} F_{ij}. \quad (22)
\end{aligned}$$

Исключая с помощью граничных условий на боковых стенках в (21) неизвестные $\alpha_{i,-1}^{v+1/2}$, $\alpha_{i,M+1}^{v+1/2}$, $i = 0, \dots, N$, а в (22) - неизвестные $\bar{\alpha}_{-1,j}^{v+1}$, $\bar{\alpha}_{N+1,j}^{v+1}$, $j = 0, \dots, M$, приходим к системам линейных уравнений с трехдиагональными матрицами.

Процесс установления заканчиваем, когда

$$\max(\max_{i,j} |\alpha_{ij}^v - \alpha_{ij}^{v+1}|, \max_{i,j} |\bar{\alpha}_{ij}^v - \bar{\alpha}_{ij}^{v+1}|) < \varepsilon.$$

Используя представления (19), (20), вычисляем $(p_x)_{ij}^n$ и $(p_y)_{ij}^n$.

После нахождения $p_m(x, y, t_n)$ в узлах сетки Δ_{xy} вычисляем $p(x, y, z, t_n)$ в Ω_3 .

Обратимся теперь к решению уравнения (7). Заметим, что его можно рассматривать на каждом горизонте $z_k \in \Delta_z$ независимо от других горизонтов:

$$(\zeta_k)_t + \delta^* J(p_k^n, \zeta_k) = 0. \quad (23)$$

Таким образом, (7) разбивается на $K+1$ уравнений (23), которые решаем методом переменных направлений [10]:

$$\zeta^{n+1/2} - \zeta^n + \frac{\Delta t}{2} \delta^* (R_1 \zeta^{n+1/2} + R_2 \zeta^n) = 0, \quad (24)$$

$$\zeta^{n+1} - \zeta^{n+1/2} + \frac{\Delta t}{2} \delta^* (R_1 \zeta^{n+1/2} + R_2 \zeta^{n+1}) = 0. \quad (25)$$

$$\text{Здесь } R_1 \zeta^v = -p_y^n \zeta_x^v - \frac{1}{2} p_{xy}^n \zeta^v, \quad R_2 \zeta^v = p_x^n \zeta_y^v + \frac{1}{2} p_{xy}^n \zeta^v, \quad \text{а индекс } k \text{ опущен.}$$

Аппроксимируем операторы R_1 и R_2 соотношениями

$$(A_1 \bar{\alpha})_{ij}^v = - \sum_{r=-1}^1 (p_y)^n_{i+r/2, j} B'_{i+r}(x_i) \bar{\alpha}_{i+r, j}^v,$$

$$(A_2 \alpha)_{ij}^v = \sum_{q=-1}^1 (p_x)^n_{i, j+q/2} \bar{B}'_{j+q}(y_j) \alpha_{i, j+q}^v,$$

где

$$(p_y)^n_{i+r/2, j} = \frac{1}{2} ((p_y)^n_{i+r, j} + (p_y)^n_{ij}),$$

$$(p_x)^n_{i, j+q/2} = \frac{1}{2} ((p_x)^n_{i, j+q} + (p_x)^n_{ij}).$$

Отметим, что на равномерной сетке операторы A_1 и A_2 являются кососимметрическими. Исходя из вышеизложенного, аппроксимируем соотношения (24), (25) следующим образом:

$$\begin{aligned} & (T_1^{(0)} \bar{\alpha})_{ij}^{n+1/2} - \\ & - (T_2^{(0)} \alpha)_{ij}^n + \frac{\Delta t}{2} \delta^* [(A_1 \bar{\alpha})_{ij}^{n+1/2} + (A_2 \alpha)_{ij}^n] = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & (T_2^{(0)} \alpha)_{ij}^{n+1} - (T_1^{(0)} \bar{\alpha})_{ij}^{n+1/2} + \\ & + \frac{\Delta t}{2} \delta^* [(A_1 \bar{\alpha})_{ij}^{n+1/2} + (A_2 \alpha)_{ij}^{n+1}] = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Метод составления алгебраических уравнений и их решения такой же, как и для (21), (22).

Приведенные схемы аппроксимируют исходные уравнения со вторым порядком на неравномерной сетке. На равномерных сетках схемы (21), (22) и (26), (27) абсолютно устойчивы в энергетических пространствах, порожденных операторами представления кубических сплайнов в базисе из B-сплайнов.

3. Законы сохранения для сплайн-коллокационной дискретизации

При численном интегрировании уравнений движения жидкости на длительный срок мы сталкиваемся с явлением нелинейной вычислительной неустойчивости [11]. Аракава [12] показал, что применение численных схем, сохраняющих интегральные свойства исходных дифференциальных уравнений, обеспечивает подавление нелинейной неустойчивости и предотвращает ложный приток к коротким волнам, тем самым позволяя получить физически верное решение. К таким интегральным свойствам относятся законы сохранения вихря, энтропии и энергии.

Покажем выполнение этих законов для дискретной задачи

$$[\zeta_t]_{ijk} + \delta^* [J(p, \zeta)]_{ijk} = 0, \quad (28)$$

$$\zeta_{ijk} = [\Delta p]_{ijk} + \alpha^* \left[\left[\frac{p_z}{N^2} \right] \right]_{ijk} + \beta^* y_j, \quad (29)$$

$$i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M; k = 0, \dots, K,$$

с граничными условиями по вертикали

$$(p_z)_{ijk} = 0, \quad i = 0, \dots, N; j = 0, \dots, M; k = 0, K, \quad (30)$$

и на боковых стенках

$$p_{ijk} = 0, \quad i = 0, \dots, N; j = 0, M; k = 0, \dots, K, \quad (31)$$

$$p_{ijk} = p_{i+N, jk}, \quad i = 0; j = 0, \dots, M; k = 0, \dots, K. \quad (32)$$

Рассмотрим случай равномерной сетки по всем направлениям, причем $h = 1$.

Суммарные вихрь (V), энтропию (S), кинетическую ($KЭ$) и доступную потенциальную (ДПЭ) энергии для задачи (28)–(32) определим следующим образом:

$$V = \left[\iint_{ij} \zeta_{ij}, 1 \right], \quad (33)$$

$$\Theta = \frac{1}{2} \left[\iint_{ij} \zeta_{ij}^2, 1 \right], \quad (34)$$

$$K\Theta = \frac{1}{2} \left[\iint_{ij} (p_x^2 + p_y^2)_{ij}, 1 \right], \quad (35)$$

$$ДП\Theta = \frac{1}{2} \alpha^* \left[\iint_{ij} \left(\frac{p_z^2}{N^2} \right)_{ij}, 1 \right]. \quad (36)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \int_i \varphi_{ij} = & \frac{1}{6} (2\bar{\alpha}_{1j} - \bar{\alpha}_{0j} - \bar{\alpha}_{-1j}) + \\ & + h \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{r=-1}^1 \bar{\alpha}_{i+rj} B_{i+r}(x_i) + \\ & + \frac{1}{6} (\bar{\alpha}_{N+1j} + \bar{\alpha}_{Nj} - 2\bar{\alpha}_{N-1,j}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_j \varphi_{ij} = & \frac{1}{6} (2\alpha_{i1} - \alpha_{i0} - \alpha_{i,-1}) + \\ & + h \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{q=-1}^1 \alpha_{ij+q} B_{j+q}(y_j) + \\ & + \frac{1}{6} (\alpha_{iM+1} + \alpha_{iM} - 2\alpha_{iM-1}), \end{aligned}$$

$\alpha_{ij}, \bar{\alpha}_{ij}$ - коэффициенты разложений (15), (16) для функции φ , зависящие от времени (верхний индекс опущен для простоты), $[v, 1], [v, 1]$ - скалярные произведения, действующие в пространстве сеточных функций, определенных на сетке Δ_z [7].

Легко проверяются соотношения

$$\iint_{1j} (\varphi_x)_{1j} = 0, \quad \iint_{1j} (\varphi_y)_{1j} = 0$$

для произвольной функции φ , удовлетворяющей условиям (31), (32).

Используя эти соотношения, покажем справедливость равенств

$$\iint_{1j} [J(p, \zeta)]_{1j} = 0, \quad (37)$$

$$\iint_{1j} [\zeta J(p, \zeta)]_{1j} = 0, \quad (38)$$

$$\iint_{1j} [pJ(p, \zeta)]_{1j} = 0. \quad (39)$$

Действительно,

$$\iint_{1j} [J(p, \zeta)]_{1j} = \iint_{1j} [(p\zeta_y)_x - (p\zeta_x)_y]_{1j} = 0.$$

Аналогично доказывается справедливость (38), (39).

Дифференцируя (33) по t с учетом (28) и (37), получаем закон сохранения суммарного вихря V

$$\frac{dV}{dt} = \left[\iint_{1j} (\zeta_t)_{1j}, 1 \right] = -\delta^* \left[\iint_{1j} (J(p, \zeta))_{1j}, 1 \right] = 0.$$

Дифференцируя (34) по времени с учетом (28) и (38), получаем закон сохранения суммарной энтропии (3)

$$\frac{dS}{dt} = \left[\iint_{1j} \zeta_{1j} (\zeta_t)_{1j}, 1 \right] = -\delta^* \left[\iint_{1j} (\zeta J(p, \zeta))_{1j}, 1 \right] = 0.$$

Наконец, докажем справедливость закона сохранения для суммарной полной энергии (КЭ + ДПЭ).

Пользуясь ортонормированностью Z_m , для КЭ можно получить выражение

$$КЭ = \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=0}^K \iint_{ij} (p_{mx}^2 + p_{my}^2)_{ij}. \quad (40)$$

Если записать дискретный аналог спектральной задачи (9) в виде $A\phi = \lambda\phi$, где

$$A\phi = \begin{cases} -\frac{2\mu_1}{g} \phi_{z_0}, \\ -(\mu\phi_z)_{z_k}, \quad k = 1, \dots, K-1, \\ -\frac{2\mu_K}{g} \phi_{z_K}, \end{cases}$$

а $\mu_1 = \frac{1}{N^2(z_0)}$, $\mu_K = \frac{1}{N^2(z_K)}$, $\mu_k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N^2(z_k)} + \frac{1}{N^2(z_{k-1})} \right]$, $\phi_k = Z(z_k)$, то с помощью первой разностной формулы Грина [7] можно доказать справедливость соотношения

$$(\mu\phi_z, \eta_z) = \lambda [\phi, \eta]. \quad (41)$$

Используя эту формулу, для ДПЭ по аналогии с (40) получим выражение

$$ДПЭ = \frac{1}{2} \alpha^* \sum_{m=0}^K \lambda_m \iint_{ij} (p_{mx}^2)_{ij}.$$

С помощью интегрирования по частям легко показать справедливость соотношений

$$\iint_{ij} (p_{mx}^2 + p_{my}^2)_{ij} = -\iint_{ij} (\Delta p_m p_m)_{ij}, \quad (42)$$

$$\iint_{ij} (\Delta p_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}t})_{ij} = \iint_{ij} (p_{\mathbf{n}} \Delta p_{\mathbf{n}t})_{ij}. \quad (43)$$

Воспользовавшись теперь формулой (42), для суммарной полной энергии можно записать соотношение

$$KЭ + ДПЭ = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{n}=0}^K \iint_{ij} ((-\Delta p_{\mathbf{n}} + \alpha^* \lambda_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{n}}) p_{\mathbf{n}})_{ij},$$

дифференцируя которое по t с учетом (43) и (11), получаем

$$\frac{d}{dt} (KЭ + ДПЭ) = - \sum_{\mathbf{n}=0}^K \iint_{ij} (\zeta_{\mathbf{n}t} p_{\mathbf{n}})_{ij},$$

где $\zeta_{\mathbf{n}t} = [\zeta_{\mathbf{n}}, Z_{\mathbf{n}}] = -\delta^* [J(p, \zeta), Z_{\mathbf{n}}]$.

С учетом последнего равенства и соотношения (39) выводятся закон сохранения полной энергии

$$\frac{d}{dt} (KЭ + ДПЭ) = -\delta^* \left[\iint_{ij} (J(p, \zeta) p)_{ij}, 1 \right] = 0.$$

Итак, для дискретной бароклинической модели остаются в силе интегральные законы сохранения вихря, энтропии и полной энергии.

4. Результаты численных экспериментов

С использованием описанной модели были проведены серии численных экспериментов по изучению эволюции синоптических вихревых образований. С учетом одной лишь баротропной моды в разложении (8) рассматривалось взаимодействие цепочек упакованных вихрей, вихря с потоком. Эволюция уединенного вихря изучалась при $N^2(z) = (1 + \gamma z)^{-2}$, где $\gamma \geq 0$. В этом случае решение спектральной задачи (9) выглядит следующим образом [13]:

$$Z_0(z) \equiv 1, \quad \lambda_0 \equiv 0,$$

$$Z_m(z) = \sqrt{\frac{2\gamma}{(\frac{1}{\lambda_m} + \delta_m^2) \ln(1+\gamma)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\gamma z}} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{2} \sin[\delta_m \ln(1+\gamma z)] + \delta_m \cos[\delta_m \ln(1+\gamma z)] \right\}, \quad (44)$$

$$\delta_m = m\pi / \ln(1+\gamma), \quad m = 1, 2, \dots, \quad \lambda_m = \gamma^2 \left(\frac{1}{\lambda_m} + \delta_m^2 \right).$$

В связи с тем, что система функций (44) является ортонормированной в гильбертовом пространстве L_2 , для дальнейшего его использования при численном интегрировании по вертикали к $Z_m(z)$ применялся процесс ортогонализации Грамма-Шмидта [14] в норме, определяемой методом вычисления интеграла. В данном случае использовался метод трапеций.

Для произвольного $N(z)$ решение дискретной спектральной задачи находится QL-методом [15].

В начальный момент времени задавалось распределение давления, моделирующее вихревые образования в океане. В последующие моменты времени вихрь трансформировался по законам, определяемым численной моделью.

Во всех обсуждаемых ниже экспериментах шаг по времени $\Delta t = 0,5$ суткам, шаги сетки в зональном и меридианальном направлениях $h = l = 10$ км, сетка Δ_z - неравномерная, со сгущением у поверхности.

В линейном случае эволюция исходного вихря происходит так же как и в [16]. Из анализа вторичных вихрей и скорости движения основного вихря видно, что дисперсия последнего происходит слабее, чем в аналитическом решении [16], но существенно сильнее, чем в численном решении, представленном в [6]. Отсюда следует вывод о том, что данная модель точнее, чем модель в [6], описывает процессы трансформации вихревых образований. Это объясняется тем, что, по сравнению с применением разностных схем, использование кубических сплайнов позволяет лучше аппроксимировать градиенты давления.

При нелинейном взаимодействии вихрей во всех экспериментах прослеживается тенденция смещения циклонов на север, антициклонов - на юг.

Были проведены два эксперимента по изучению эволюции уединенного бароклинного вихря, отличающиеся различными начальными распределениями давления: в одном в качестве вертикальной составляющей бралась функция $Z_1(z)$, а в другом - сумма $Z_0(z) + Z_1(z)$. Таким образом, в первом случае в верхних и нижних слоях исходный вихрь был разного знака (конкретно, циклон - в верхних слоях, антициклон - в нижних), во втором случае исходное вихревое образование сохраняло свой знак почти по всей глубине океана.

Как и в линейной задаче, к востоку от первичного вихря образуется возмущение, обратное по знаку завихренности основного вихря. Затем за счет нелинейности вторичный вихрь перемещается по периферии основного, увеличиваясь по амплитуде. Циклоны при этом движутся на северо-запад, антициклоны - на юго-запад. Но конкретная трансформация вихрей в этих двух экспериментах различна.

Во втором эксперименте качественное поведение вихря на всех горизонтах одинаково.

В первом эксперименте отсутствует однородная картина по вертикали. В верхних слоях вторичный вихрь вначале вместе с основным движется на северо-запад. После того, как восточнее этой пары продуцируется циклон, вторичный антициклон начинает свое движение на юго-запад. Впоследствии южнее него образуется еще один антициклон, который сливается с первым.

В нижних слоях вначале основной вихрь (антициклон) движется вместе со вторичным циклоном на юго-запад. После образования восточнее этой пары вторичного антициклона циклон начинает свое движение на северо-запад. Вторичный же антициклон сливается со следующим из цепочки основных вихрей.

Для наглядности на рис.1 представлена траектория движения оси исходного вихря в первом эксперименте в плоскости Oyz и в трехмерном пространстве соответственно.

Из анализа поведения кинетической энергии вихрей, как в верхних, так и в нижних горизонтах, видно, что при уменьшении энергии первичного вихря возрастает энергия вторичного вихря (рис.2). С течением времени, если энергия циклонов увеличивается, то энергия антициклонов уменьшается, и наоборот. Это подтверждает вывод об автоколебательном характере процесса обмена энергией между основным и вторичными вихрями [6]. Также наблюдается некоторое перераспределение энергии по вертикали: уменьшение кинетической энергии первичных вихрей в верхних слоях происходит быстрее, чем в нижних. Рост же энергии вторичных вихрей примерно одинаков на всех горизонтах.

В ы в о д ы

Проделанные эксперименты позволяют сделать следующие выводы:

1. Данная модель с более высокой степенью точности, чем модель, в основе которой - метод конечных элементов, описывает процессы трансформации вихревых образований. При этом, в отличие от разностных схем, получается аналитическое выражение для приближенного решения.

2. При эволюции уединенного вихря нелинейные эффекты проявляются в смещении вторичных возмущений по периферии основного. Подтверждается вывод об атоколебательном характере процесса обмена энергией между продуцирующим и продуцируемыми вихрями. Прослеживается движение циклонов на северо-запад, антициклонов - на юго-запад.

3. Эволюция бароклинного вихря существенно неоднородна по вертикали и зависит от начального распределения давления. В эксперименте, в котором исходный вихрь однороден по знаку за-

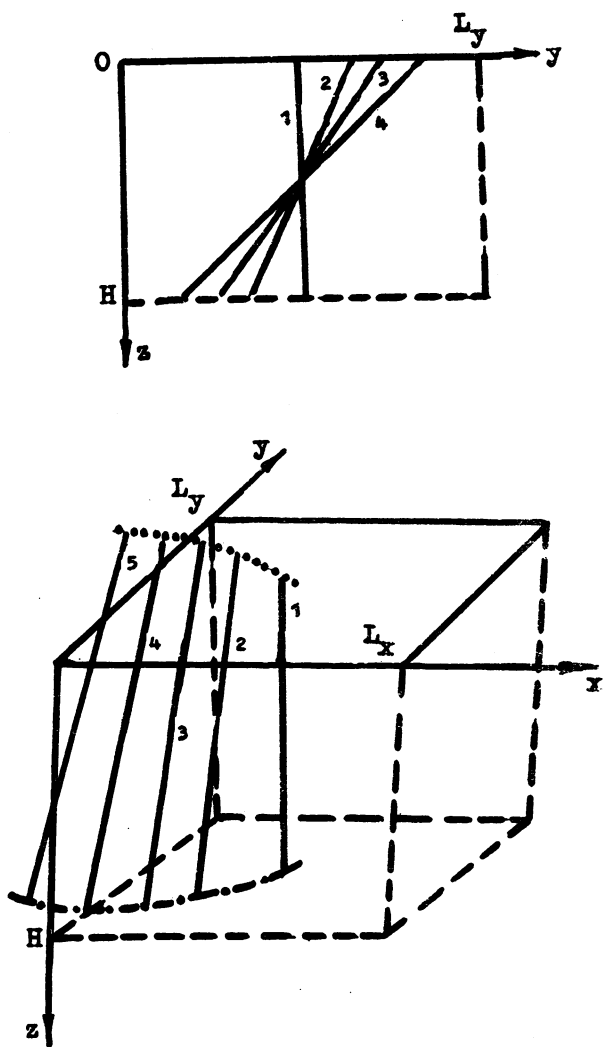


Рис.1. Положения оси и траектория движения центра исходного вихря в первом эксперименте в моменты времени: 1 - 0, 2 - 150, 3 - 200, 4 - 300, 5 - 400 суток.

Обозначения: ... - траектория при $z = 0$,
 — · — · - траектория при $z = 1$.

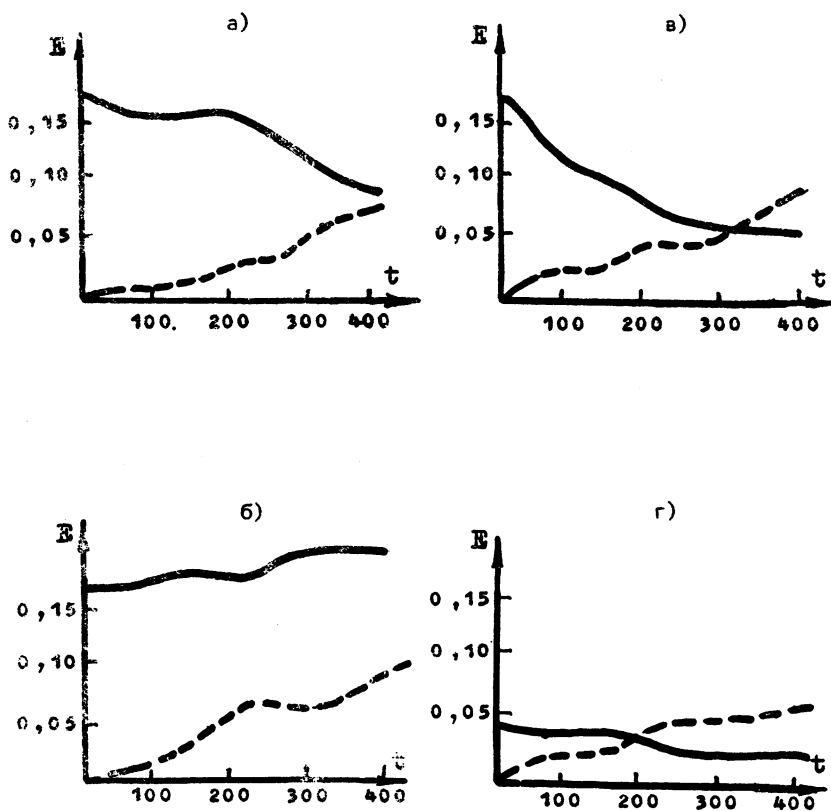


Рис.2. Изменение кинетической энергии основного (—) и вторичного (----) вихрей (в условных единицах, E), t - в сутках) в первом эксперименте (а - у поверхности, б - у дна) и во втором эксперименте (в - при $z = 0$, г - при $z = 0,4$).

вихренности на всех горизонтах, вертикальная структура его практически не меняется в процессе трансформации. Когда же исходным был вихрь с отличными друг от друга направлениями вращения в верхних и нижних слоях, его вертикальная структура существенно меняется. Анализ энергетических характеристик позволяет говорить о некотором перераспределении энергии по вертикали - часть кинетической энергии из верхних слоев передается в нижние.

Л и т е р а т у р а

1. Об океанских вихрях на "Мегаполигоне" /Бубнов В.А., Иванов Ю.А., Кошляков М.Н. и др. //Докл. АН СССР. - 1988. Т. 301, № 6. - С. 1468-1471.
2. КАМЕНКОВИЧ В.М., КОШЛЯКОВ М.Н., МОНИН А.С. Синоптические вихри в океане. - Л.: Гидрометеиздат, 1987. - 511 с.
3. КОРОТАЕВ Г.К. Теоретическое моделирование синоптической изменчивости океана. - Киев: Наук.думка, 1988. - 180 с.
4. КАМЕНКОВИЧ В.М., ЛАРИЧЕВ В.Д., ХАРЬКОВ Б.В. Бороклин - ная квазигеострофическая модель для анализа синоптических вихрей в открытой области океана //Океанология. - 1981. - Т. 21, вып. 6. - С. 949-959.
5. СЕИДОВ Д.Г. Моделирование синоптической и климатической изменчивости океана. - Л.: Гидрометеиздат, 1985. - 208 с.
6. КУЗИН В.И. Метод конечных элементов в моделировании океанических процессов. - Новосибирск, 1985. - 190 с. (ВЦ СО АН СССР)
7. САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. - М.: Наука, 1983. - 616 с.
8. ЗАВЬЯЛОВ Ю.С., КВАСОВ Б.И., МИРОШНИЧЕНКО В.Л. Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980. - 350 с.
9. МАРЧУК Г.И. Методы вычислительной математики. - М.: Наука, 1980. - 536 с.
10. МАРЧУК Г.И. Методы расщепления. - М.: Наука, 1988. - 264 с.
11. МЕЗИНГЕР Ф., АРАКАВА А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. - Л.: Гидрометеиздат. - 1979. - 136 с.

12. ARAKAWA A. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motions: two-dimensional incompressible flow. Part 1 //J.Comp. Phys.-1966.-Vol.1, N 1. - P. 119-143.

13. КОЗЛОВ В.Ф. Модели топографических вихрей в океане.-М.: Наука, 1983. - 200 с.

14. ГАНТМАХЕР Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1988.-548 с.

15. ВОЕВОДИН В.В. Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы. - М.: Наука, 1966. - 248 с.

16. ИВАНОВ Ю.А., МЕЛЬНИКОВ В.А., НОВИЦКИЙ А.Г. Эволюция локализованного вихря //Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. - 1979. - Т. 15, № 4. - С. 442-448.

Поступила в ред.-изд.отд.

18 сентября 1991 года