

УДК 621.31:534.4

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ МОМЕНТОВ НАЧАЛА ИЗВЕСТНЫХ  
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ИМПУЛЬСОВ ФИКСИРОВАННОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТИ  
В КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ\*)

А.В.Кельманов, О.А.Кутненко

В в е д е н и е

Задача обнаружения и оценивания моментов начала импульсов квазипериодической последовательности возникает во многих приложениях, связанных с обработкой наблюдений или сигналов. Среди них можно указать медицину, криминалистику, геофизику, автоматическую обработку речевых сигналов и т.п. Разнообразие подходов к решению указанной задачи, описанных в монографиях, обзорах и отдельных публикациях [1-7], объясняется многообразием математических моделей сигналов или изучаемых явлений.

В данной работе приведен вариант решения задачи для случая, когда число импульсов в выборке неизвестно. Предполагается, что импульс и его длительность фиксированы и заданы, а интервал между началами соседних импульсов лежит в некотором диапазоне, ширина которого не меньше длительности самого импульса. Особенностью приведенного решения является отсутствие требования задания импульса в виде какой-либо параметрической модели и ориентация на интерактивную обработку сигнала. Эта особенность позволяет создать алгоритм весьма привлекательный как

---

\*) Работа выполнена в рамках проекта 1№ 94-01-0169а, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований.

для предварительного, так и для более детального исследования периодичности наблюдаемого временного ряда.

Решение задачи опирается на метод максимального правдоподобия, а алгоритм вычисления оценок - на оптимизационные методы. В терминах общепринятой классификации предлагаемое решение относится к апостериорным методам оценивания, т.е. к методам оценивания по полной выборке. Наряду с чисто теоретическим решением задачи в работе приведены результаты численного моделирования.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $x_n$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , - временной ряд, образованный путем почти периодического повторения детерминированной последовательности (импульса)  $u_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, p-1$ , длины  $p$ , т.е.

$$x_n = \begin{cases} u_{|n-n_i|}, & n = n_i, n_i+1, \dots, n_i+p-1, \\ 0, & n = n_i + p, \dots, n_{i+1} - 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где  $\dots, n_{-i}, \dots, n_{-1}, n_0, n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, \dots$ , - почти периодическая последовательность моментов времени, которым соответствуют начала импульсов.

Условимся, под почти периодической детерминированной последовательностью  $n_i$ ,  $i = 0, \pm 1, \dots$ , моментов времени понимать последовательность, для которой

$$p \leq T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, \quad (2)$$

где  $T_{\min}$ ,  $T_{\max}$  - минимальное и максимальное расстояние между двумя последовательными импульсами. Значения  $T_{\min}$ ,  $T_{\max}$  будем считать известными. Величина

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{2K+1} \sum_{i=-K}^K (n_i - n_{i-1}) = T \quad (3)$$

есть средний интервал ("период") повторения импульсов в бесконечной последовательности.

Предположим, что наблюдаемый временной ряд искажается аддитивной гауссовской помехой, т.е.:

$$y_n = x_n + \varepsilon_n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4)$$

где  $\varepsilon_n$  - гауссовская последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, имеющих нулевое математическое ожидание  $M\varepsilon_n = 0$  и дисперсию  $M\varepsilon_n^2 = \sigma^2$ .

Пусть наблюдаемая выборка  $\vec{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  длины  $N$  содержит неизвестное число  $K \geq 1$  полных импульсов фиксированной длины  $p$  и, возможно, неполные импульсы в начале и в конце выборки (см. рис.1). Обозначим через  $n_* \in [1, p-1]$  такой момент в последовательности  $u_n, n = 0, 1, \dots, p-1$ , описывающий импульс, который соответствует началу выборки. Тогда  $p - n_* - 1$

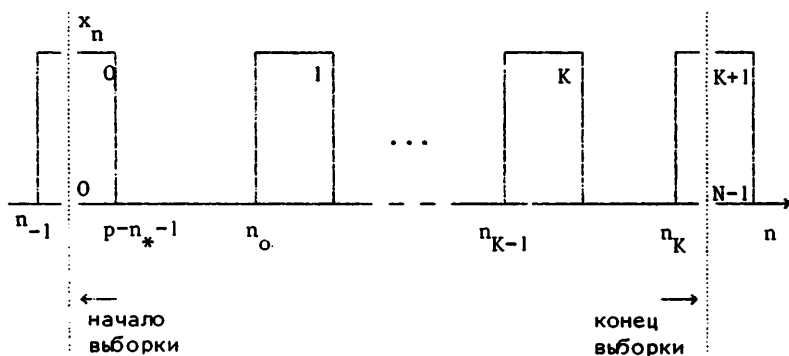


рис. 1

есть момент окончания неполного импульса в начале выборки, а  $n_{-1} = -n_*$  - момент начала этого импульса за пределами выборки. Последовательности  $n_0, n_1, \dots, n_{K-1}$  поставим в соответствие на-

чала  $K$  полных импульсов. Момент начала незавершенного импульса в конце выборки обозначим  $n_K$ .

Задача состоит в оценивании по выборке  $\vec{Y} = (y_0, y_1, \dots, y_{N-1})$  длины  $N$  моментов времени  $n_{-1} < n_0 < \dots < n_{K-1} < n_K$ , начала известных импульсов  $\vec{U} = (u_0, u_1, \dots, u_{p-1})$  фиксированной длины  $p$  в квазипериодической последовательности, удовлетворяющей ограничению (2), а также дисперсии  $\sigma^2$  помехи при неизвестном числе импульсов  $K$  в выборке.

## 2. Функция правдоподобия

Плотность распределения случайного вектора  $\vec{Y}$  или совместное распределение наблюдаемых случайных величин  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$ , как видно из (1), (2) и (4), полностью определяется вектором  $\vec{X} = (x_0, x_1, \dots, x_{N-1})$  и плотностью распределения вектора шума  $\vec{E} = (\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1})$ . При этом якобиан преобразования переменных  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{N-1}$  в  $y_0, y_1, \dots, y_{N-1}$  единичен. Поэтому плотность распределения наблюдаемого вектора

$$p(\vec{Y} / \vec{X}, \sigma^2) = p(\vec{Y} / \vec{U}, n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K, \sigma^2) = \\ = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n)^2 \right], \quad (5)$$

а логарифмическая функция правдоподобия

$$L = \ln p(\vec{Y} / \vec{X}, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n)^2. \quad (6)$$

Очевидно, что число полных импульсов в выборке лежит в интервале

$$\left[ \frac{N-1}{T_{\max}} \left[ +1 \leq K \leq \right] \frac{N-1}{T_{\min}} \left[ +1 \right.$$

Предполагая, что выборка длины  $N$  содержит  $K \geq 1$  полных импульсов длины  $p$ , сумма во втором члене (6) функции правдоподобия может быть переписана в виде:

$$S = S(n_0, n_1, \dots, n_{K-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n)^2 = \sum_{n=0}^{n_0-1} (y_n - x_n)^2 + \\ + \sum_{n=n_0}^{n_{K-1}+p-1} (y_n - x_n)^2 + \sum_{n=n_{K-1}+p}^{N-1} (y_n - x_n)^2. \quad (7)$$

Возможны 2 случая расположения сигнала  $x_n$  в начале (конце) выборки: 1) начало (конец) выборки совпадает с одним из  $p$  отсчетов импульса, 2) выборка начинается (заканчивается) участком, где сигнал  $x_n$  принимает нулевые значения, т.е. импульс отсутствует. Таким образом, возможно  $2 \times 2$  ситуации, которым соответствуют различные формы записи суммы (7).

Учитывая квазипериодичность ряда  $x_n$ , подставив (1) в (7) и обозначив

$$A_{-1}(n_{-1}) = \sum_{n=0}^{p+n_{-1}-1} (u_{n-n_{-1}}^2 - 2y_n u_{n-n_{-1}}) = \sum_{j=-n_{-1}}^{p-1} (u_j^2 - 2u_j y_{j+n_{-1}}), \quad (8)$$

$$A_K(n_K) = \sum_{n=n_K}^{N-1} (u_{n-n_K}^2 - 2y_n u_{n-n_K}) = \sum_{j=0}^{N-1-n_K} (u_j^2 - 2u_j y_{j+n_K}), \quad (9)$$

$$A(n_0, \dots, n_{K-1}) = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{n=n_i}^{n_i+p-1} (u_{n-n_i}^2 - 2y_n u_{n-n_i}) = \\ = \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{p-1} (u_j^2 - 2u_j y_{j+n_i}) = \sum_{j=0}^{p-1} u_j^2 - 2 \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{p-1} u_j y_{j+n_i}, \quad (10)$$

получим

$$S = S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) =$$

$$= \begin{cases} S_1(n_{-1}, n_0, \dots, n_K) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + A_{-1}(n_{-1}) + A(n_0, \dots, n_{K-1}) + A_K(n_K), \\ \quad 1-p \leq n_{-1} \leq -1, N-p+1 \leq n_K \leq N-1, \\ S_2(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + A_{-1}(n_{-1}) + A(n_0, \dots, n_{K-1}), \\ \quad 1-p \leq n_{-1} \leq -1, n_K \geq N, \\ S_3(n_0, \dots, n_K) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + A(n_0, \dots, n_{K-1}) + A_K(n_K), \\ \quad n_{-1} \leq -p, N-p+1 \leq n_K \leq N-1, \\ S_4(n_0, \dots, n_{K-1}) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + A(n_0, \dots, n_{K-1}), \\ \quad n_{-1} \leq -p, n_K \geq N. \end{cases} \quad (11)$$

Сумма  $S$  зависит от  $K+2$  неизвестных моментов времени  $n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K$ . Три члена  $A_{-1}, A$  и  $A_K$  этой суммы соответствуют началу, середине и окончанию выборки. Член  $A_{-1}$  описывает окончание импульса, начало которого осталось за пределами выборки. Момент времени  $p-n_{*-1}$  окончания этого неполного импульса может лежать в интервале  $0 \leq p-n_{*-1} \leq p-2$ , так что  $1 \leq n_* \leq p-1$ . Член  $A_K$  соответствует концу выборки. Момент времени  $n_K$  начала незавершенного импульса может располагаться в интервале  $N-p+1 \leq n_K \leq N-1$ . Наконец, член  $A$  описывает последовательность, состоящую из  $K$  полных импульсов. Очевидно, начало  $n_0$  первого импульса лежит в интервале  $0 \leq n_0 \leq T_{\max}-1$ , а начало  $n_{K-1}$  последнего полного импульса - в интервале  $N-T_{\max}-p+1 \leq n_{K-1} \leq N-p$ . В том случае, когда выборка содержит ровно  $K$  полных импульсов и не содержит неполных в начале и в конце, члены  $A_{-1}$  и  $A_K$  в формуле (11) отсутствуют.

### 3. Оценки максимального правдоподобия

Оценки неизвестных параметров по наблюдаемому сигналу  $\vec{Y}$  находятся путем максимизации (5) или (6) как функции от величин, которые подлежат оцениванию, т.е. от  $\sigma^2, n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K$ .

Выполнив дифференцирование (6) по  $\sigma^2$ , приравняв производную нулю и решив уравнение правдоподобия, получим оценку дисперсии, зависящую от последовательности  $n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K$ :

$$\hat{\sigma}^2(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - x_n)^2 \quad (12)$$

для случая, когда сигнал  $x_n$  известен.

Подставив в (6) оценку (12), найдем

$$L_{\max} = -\frac{N}{2} \ln[2\pi\hat{\sigma}^2(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K)] - \frac{N}{2}. \quad (13)$$

Формула (13) показывает, что решение задачи состоит в минимизации оценки дисперсии  $\hat{\sigma}^2(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K)$ , вычисляемой в виде (12) на множестве всевозможных последовательностей моментов времени  $\{n\}^{K+2} = \{n_{-1}\}x\{n_0\}x \dots x\{n_{K-1}\}x\{n_K\}$ . При этом оценки максимального правдоподобия искомых моментов времени и дисперсии, с учетом (11), даются формулами:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) = \\ = \frac{1}{N} \left\{ \min_{\{n\}^{K+2}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} [\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{K-1}, \hat{n}_K] = \\ = \text{Arg} \min_{\{n\}^{K+2}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K). \end{aligned} \quad (15)$$

#### 4. Алгоритм оценивания

Сумма  $S$  может быть записана в виде:

$$S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{j=-n_{-1}}^{p-1} u_j^2 + \sum_{j=0}^{N-1-n_K} u_j^2 + K \sum_{j=0}^{p-1} u_j^2 - 2 \sum_{i=-1}^K \sum_{j=0}^{p-1} u_j y_{j+n_i}. \quad (16)$$

Обозначим через

$$A_i(n_i) = \sum_{n=n_i}^{n_i+p-1} u_{n-n_i} (u_{n-n_i} - 2y_n) = \sum_{j=0}^{p-1} u_j (u_j - 2y_{j+n_i}), \quad (17) \\ i = 0, \dots, K-1.$$

Тогда, учитывая (8) и (9), формулу (16) можно переписать в виде:

$$S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \sum_{i=-1}^K A_i(n_i). \quad (18)$$

Из (14), (15) и (18) видно, что для решения задачи оценивания необходимо вычислить значение функции

$$S_{\min} = \min_{\{n\}^{K+2}} S(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 + \min_{\{n\}^{K+2}} \sum_{i=-1}^K A_i(n_i). \quad (19)$$

Формула (19) показывает, что задача вычисления  $S_{\min}$  сводится к задаче поиска минимума аддитивного функционала, представляющего сумму выпуклых функций

$$D(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K) = \sum_{i=-1}^K A_i(n_i), \quad (20)$$



с ограничениями на целочисленные переменные  $n_i$ :

$$\begin{aligned} -T_{\max} \leq n_{-1} \leq -1, \quad 0 \leq n_0 \leq T_{\max}, \quad N-p+1 \leq n_K \leq n-p+1+T_{\max}, \\ T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}, \quad i = 0, \dots, K. \end{aligned} \quad (21)$$

Подобные задачи эффективно решаются методами динамического программирования [8]. В решаемой задаче неизвестное число импульсов является искомым числом состояний в схеме пошаговой оптимизации.

Заметим, что в соответствии с (11),  $A_{-1}(n_{-1}) = 0$  при  $n_{-1} \leq -p$  и  $A_K(n_K) = 0$  при  $n_K \geq N$ . Поэтому для анализа расположения неполных импульсов в начале выборки и в ее конце достаточно использовать множества  $\{n_{-1}\} = \{-p, -p+1, \dots, -1\}$  и  $\{n_K\} = \{N-p+1, N-p+2, \dots, N\}$ . При этом решения (оценки)  $n_{-1} = -p$  и  $n_K = N$  являются индикаторами отсутствия неполных импульсов. Таким образом, областью поиска экстремума (20) является объединение множеств

$$N = \{n_{-1}\} \cup \{n_0\} \cup \dots \cup \{n_{K-1}\} \cup \{n_K\} = \{-p, -p+1, \dots, N\}. \quad (22)$$

Каждая из функций  $A_i$  определена в каждой точке множества  $N$ . Таким образом, решение исходной задачи сводится к задаче поиска минимума аддитивного функционала (20), который является функционалом от последовательности местоположений импульсов, с ограничениями на целочисленные переменные  $n_i$ :

$$-p \leq n_{-1} < n_0 < \dots < n_{K-1} < n_K \leq N, \quad T_{\min} \leq n_i - n_{i-1} \leq T_{\max}. \quad (23)$$

Вспользуемся принципом оптимальности и составим функциональные уравнения.

Определим

$$d_K(-p, N) = \min_{\{n_j\}} D_K(n_{-1}, n_0, \dots, n_{K-1}, n_K), \quad K = -1, 0, 1, \dots,$$

тогда

$$\begin{aligned}
d_i(-p, n) &= \min_{-p \leq m \leq n} \{A_i(m) + d_{i-1}(-p, n)\} = \\
&= \min_{-p \leq m \leq n} A_i(m) + d_{i-1}(-p, n), \quad n = -p, \dots, N.
\end{aligned}$$

или, учитывая ограничения (23) на последовательность моментов начала импульсов,

$$d_i(-p, n) = \min_{n-T_{\max} \leq m \leq n-T_{\min}} A_i(m) + d_{i-1}(-p, m). \quad (24)$$

После очевидных преобразований функциональных уравнений (24) рекуррентные формулы, обеспечивающие минимизацию критерия, будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
d(-p, n) &= \min_{n-T_{\max} \leq m \leq n-T_{\min}} \{A(m) + d(-p, m)\}, \\
n &= -p, \dots, N.
\end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, схема вычислений, реализующая алгоритм пошаговой оптимизации выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} d(-p, n) &= 0, \\ I(n) &= 0, \quad n = -p, -p+1, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} d(-p, n) &= \min_{n-T_{\max} \leq m \leq n-T_{\min}} \{A(m) + d(-p, m)\}, \\ I(n) &= \arg \min_{n-T_{\max} \leq m \leq n-T_{\min}} \{A(m) + d(-p, m)\}, \\ n &= -p+T_{\min}, \dots, N, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$d_{\min} = \min_{N-p+1 \leq m \leq N} \{A(m) + d(-p, m)\}. \quad (28)$$

В этих формулах  $I(n)$  - указатель оптимального пути из точки  $-p$  в точку  $n$ . Формула (26) задает начальные условия. Вычисления по формуле (27) обеспечивают пошаговую оптимизацию функционала. Наконец, формула (28) определяет глобальный экстремум.

Таким образом,

$$d_{\min} = d_K(-p, N) = D_{\min}(\hat{n}_{-1}, \hat{n}_0, \dots, \hat{n}_{K-1}, \hat{n}_K).$$

Число импульсов (состояний) и их расположение в выборке определяются рекуррентными вычислениями в обратном порядке:

$$m_1 = \arg \min_{N-p+1 \leq m \leq N} \{A(m) + d(-p, m)\},$$

$$m_i = I(m_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots$$

Вычисления заканчиваются при таком  $i = i^*$ , что  $I(m_{i^*-1}) = 0$ .

При этом получаем последовательность  $m_{i^*}, m_{i^*-1}, \dots, m_1$  такую,

что  $m_{i^*} = \hat{n}_{-1}$ ,  $m_{i^*-1} = \hat{n}_0, \dots, m_1 = \hat{n}_K$ . Если  $\hat{n}_{-1} = m_{i^*} = -p$ , то

неполный импульс в начале выборки отсутствует, а если  $\hat{n}_K = m_1 = N$ , то неполный импульс отсутствует в конце выборки.

Трудоемкость алгоритма есть величина, пропорциональная произведению  $t_*(N+p+1)$ , где  $t_* = \max(p, T_{\max} - T_{\min})$ , при линейных по  $N$  затратах на память.

## 5. Результаты моделирования и обработки сигналов

Проверка работоспособности алгоритма осуществлена на квазипериодических последовательностях  $\delta$ -импульсов (импульсы единичной длительности) искаженных гауссовским шумом. На рис. 2 приведен график экспериментальной зависимости числа ошибок (%) оценивания положения импульса в последовательности от отношения амплитуды импульса к стандартному отклонению, т.е. от отношения  $U/\sigma$ . Каждая последовательность содержала  $10^4$  импульсов при  $T_{\max} = 100$ . Величина  $T_{\min}$  изменялась случайным образом по равномерному закону в интервале  $[50-100]$ . При этом сам импульс располагался случайно в этом же интервале.

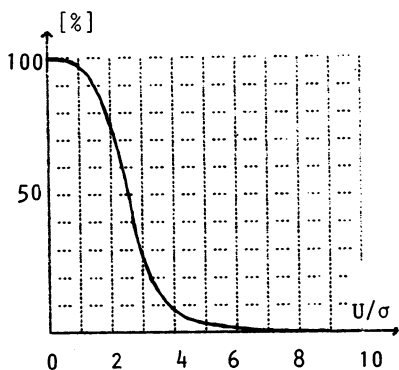


Рис. 2

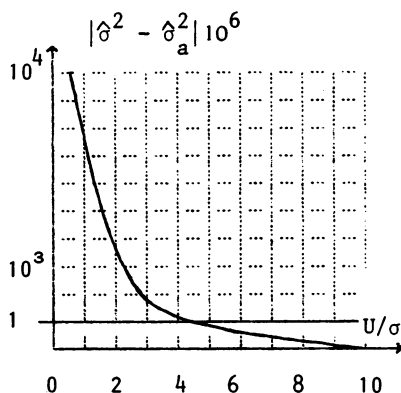


Рис. 3

О качестве работы алгоритма можно судить также по абсолютной величине разности оценки  $\hat{\sigma}^2$  дисперсии гауссовской помехи, подсчитанной непосредственно по сгенерированному шуму, и оценки  $\hat{\sigma}_a^2$ , полученной по приведенному алгоритму. Когда алгоритм точно выделяет положения импульсов в выборке, оценки дисперсий совпадают. Чем больше число ошибок допускает алгоритм, тем значительнее разность между оценками. На рис.3 в виде графика приведена зависимость величины  $|\hat{\sigma}^2 - \hat{\sigma}_a^2| \cdot 10^6$  от отношения  $U/\sigma$ . Оценки получены по выборке длиной  $10^6$  отсчетов сигнала.

Приведенные данные показывают способность алгоритма обрабатывать квазипериодические последовательности в условиях помех. Алгоритм подтвердил свою эффективность при анализе зашумленных последовательностей импульсов синусоидальной формы и импульсов, представляющих затухающие синусоиды. При интерактивной цифровой обработке сигналов данный алгоритм оказывается полезным инструментом в руках исследователя. Например, при анализе речевых сигналов он позволяет эксперту автоматически выделять участки речевого сигнала, соответствующие импульсам основного тона (циклам колебаний голосовых связок), после указа-

ния эталонного импульса. Подобным образом данный алгоритм был использован для получения эталонных сигналов синтезатора речи.

#### Л и т е р а т у р а

1. КЛИГЕНЕ Н., ТЕЛЬКСНИС Л. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов //Автоматика и телемеханика. - 1983. - № 10. - С. 5-56.

2. ТОРГОВИЦКИЙ И.Ш. Методы определения момента изменения вероятностных характеристик случайных величин //Зарубежная радиоэлектроника. - 1976. - № 1. - С. 3-52.

3. НИКИФОРОВ И.В. Последовательное обнаружение свойств временных рядов.- М.: Наука,1983.- 199 с.

4. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем: Пер.с англ./ М.Бассвиль, А.Вилски, А.Банвениста и др.; под ред. М.Бассвиль, А.Банвениста.- М.: Мир,1989.- 278 с.

5. СЕРЕБРЕННИКОВ И.Г., ПЕРВОЗВАНСКИЙ А.А. Выявление скрытых периодичностей.- М.: Наука,1965.- 224 с.

6. WISE J.D., CAPRIO J.R., PARKS T.W. Maximum Likelihood Pitch Estimation // IRRR Trans. on acoustics, speech and signal processing.-1976.- Vol.ASSP-24, N 5 (October).-P.418-423.

7. ВИНЦЮК Т.К. Анализ, распознавание и интерпретация речевых сигналов. - Киев: Наукова думка, 1987.- 262 с.

8. БЕЛЛМАН Р. Динамическое программирование.- М.: Иностранная литература, 1960.- 400 с.

Поступила в ред.изд.отд.

7 декабря 1994 года