

СПЛАЙН-ФУНКЦИИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(Вычислительные системы)

1997 год

Выпуск 159

УДК 629.01:519.65

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ГЛИССЕРА В ВОДНОЙ СРЕДЕ С УЧЕТОМ РЕАЛЬНОЙ ФОРМЫ ДНИЩА

Г.А.Куриленко, В.К.Королев

В предыдущей статье [1] приведены результаты начального этапа численного моделирования движения глиссера — без учета реальной (сложной) формы его днища: глиссер представлялся в виде прямоугольного параллелепипеда. Для этого случая выписывалась система сил и моментов, действующих на глиссер, и полученная система дифференциальных уравнений численно интегрировалась. Задача получения численной модели вообще довольно сложная. Кроме адекватности описания, требуется еще его соответствие принятому способу реализации, в данном случае — способу численного интегрирования.

В предлагаемой постановке — с уточнением формы днища — задача существенно осложнилась: потребовалось не только аккуратно сформировать все выражения для компонент силового воздействия на глиссер, но и обеспечить их взаимное соответствие на разных этапах расчета (например, в статике — при задании начальных данных для системы дифференциальных уравнений — и, в дальнейшем, в динамике).

Ниже излагаются вопросы, связанные с постановкой задачи:

- описывается геометрия днища и ее математическое представление;
- выписываются дифференциальные уравнения движения и система действующих сил и моментов и детализируются способы их вычисления;
- приводятся результаты расчетов — в виде графиков координат в зависимости от времени.

1. Геометрия днища глссера

На рис.1 приведено изображение каркаса днища в квазиизометрической проекции. На рис. 2 показаны отдельно проекции на координатные плоскости XOY (внизу) и XOZ (вверху) трех основных линий, образующих каркас днища: килля, скулы и борта. Координаты X, Y, Z обозначены соответственно через ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Кружками на рис.1 и 2 обведены *опорные* точки, координаты которых даны в таблице.

Т а б л и ц а

Поли- ном	Функ- ция	Значение аргумента ξ_1					
		ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{13}	ξ_{14}	ξ_{15}	$\xi_{1П}$
		1.455	1.940	2.425	2.910	3.395	3.780
(a)	ξ_3	0.000	0.006	0.025	0.085	0.225	0.500
(b)	ξ_3	0.0465	0.060	0.095	0.165	0.320	—
(c)	ξ_2	—	0.700	0.695	0.675	0.630	—
			(ξ_{22})				
(d)	ξ_2	0.950	0.945	0.910	0.850	0.725	0.300
		($\xi_{2П}$)					(ξ_{21})

Полиномы (a) и (b) описывают зависимость координаты ξ_3 от ξ_1 , полиномы (c) и (d) — соответственно ξ_2 от ξ_1 . До точек, отмеченных на рис.2 звездочками, кривые представляют собой прямолинейные отрезки, далее описываются полиномами 4-го или 5-го порядков в зависимости

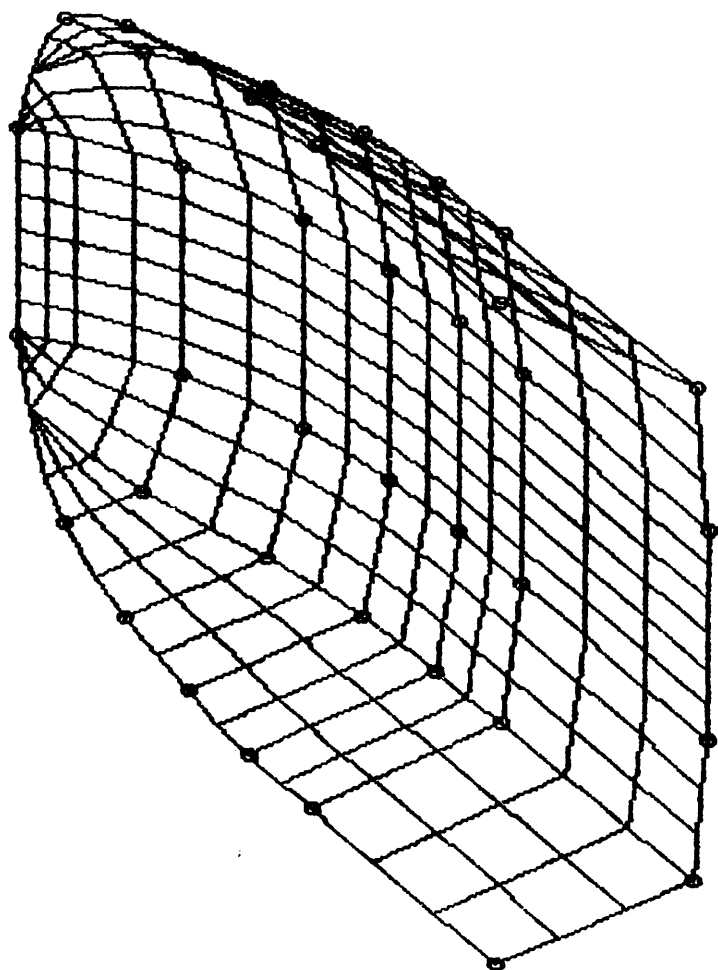


Рис. 1. Квазиизометрическая проекция каргаса динца.

от числа точек, по которым вычисляется соответствующий полином. В точке с абсциссой $\xi_{16} = 3.670$ (см. рис.2) координаты ξ_2 и ξ_3 находятся соответственно из условий: $c = d$ и $b = h_6$.

Таким способом получены кривые обводов днища для построения его каркаса. Рассчитываются дополнительные — продольные и поперечные — кривые, с помощью которых получается *сеточное* представление каркаса (рис.1).

Были опробованы и другие — сплайновые — способы представления граничных кривых каркаса днища. В частности, использовались программы сплайн-аппроксимации С.И.Фадеева и В.Л.Мирошниченко. Поскольку каких-то специфических требований к этим кривым не предъявляется, а применяемые полиномы имеют невысокий порядок, то именно они и участвуют в математическом описании днища.

При *интегрировании* системы дифференциальных уравнений для единообразия программной реализации при аппроксимации описываемых кривых используются полиномы 8-го порядка — для всех участвующих в модели днища граничных кривых. Приближенная прямолинейность кривых на начальных участках обеспечивается введением дополнительной точки на середине первого участка. Приведенные на рис.2 кривые построены именно таким способом.

Для описания *поверхности* днища (т.е. зависимости координаты ξ_3 от ξ_1 и ξ_2 во всех промежуточных точках области ее определения) эта область разбита на 9 подобластей 1, ..., 9 (см. рис.2). Ниже приводятся соответствующие выражения:

$$\xi_3 = 0; \quad (1)$$

$$\xi_3 = a(\xi_1); \quad (2)$$

$$\xi_3 = \frac{(\xi_2 - \xi_{21}) \left(h_1 + \frac{\xi_1 \cdot \Delta h_1}{\xi_{11}} \right)}{\xi_{22} - \xi_{21}}; \quad (3)$$

$$h_1 = 0.03; \quad \Delta h_1 = 0.0165;$$

$$\xi_3 = h_1 + \frac{\xi_1 \cdot \Delta h_1}{\xi_{11}} + \frac{(\xi_2 - \xi_{22}) \left(h_6 - h_1 - \frac{\xi_1 \cdot \Delta h_1}{\xi_{11}} \right)}{\xi_{211} - \xi_{22}}; \quad (4)$$

$$h_6 = 0.5;$$

$$\xi_3 = a(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_{21}) \frac{b(\xi_1) - a(\xi_1)}{\xi_{22} - \xi_{21}}; \quad (5)$$

$$\xi_3 = b(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_{22}) \frac{h_6 - b(\xi_1)}{d(\xi_1) - \xi_{22}}; \quad (6)$$

$$\xi_3 = a(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_{21}) \frac{b(\xi_1) - a(\xi_1)}{c(\xi_1) - \xi_{21}}; \quad (7)$$

$$\xi_3 = b(\xi_1) + (\xi_2 - c(\xi_1)) \frac{h_6 - b(\xi_1)}{d(\xi_1) - c(\xi_1)}; \quad (8)$$

$$\xi_3 = a(\xi_1) + (\xi_2 - \xi_{21}) \frac{h_6 - a(\xi_1)}{d(\xi_1) - \xi_{21}}. \quad (9)$$

Здесь $a(\xi_1)$, $b(\xi_1)$, $c(\xi_1)$ и $d(\xi_1)$ — полиномы, о которых говорилось выше.

2. Уравнения движения

Ниже приводится система из шести обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение глисера в водной среде. Три первых уравнения описывают линейные перемещения аппарата относительно неподвижной системы координат, три последних — угловые эволюции глисера относительно системы координат, движущейся вместе с глиссером параллельно неподвижной системе:

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{X} + & P_p \cdot \sin(\gamma + \varphi) \cdot \cos \Theta + P_a \cdot \cos \varphi \cdot \cos \Theta + \\ & + P_6 \cdot \sin \varphi + P_{Tp} \cos \varphi + P_{\Pi} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \varphi + \\ & + P_{\Pi} \sin \chi \cdot \sin \varphi \cdot \cos \Theta - T \cdot \cos \Theta \cdot \cos \varphi + \\ & + P_{CK} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \varphi \pm P_{B\Pi} \sin \Theta \cdot \cos \varphi \pm \\ & \pm P_{y_1} \cdot \sin \varphi \pm P_{y_2} \cdot \sin \varphi = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{Y} - & P_p \cdot \cos(\gamma + \varphi) \cdot \cos \Theta + P_a \cdot \sin \varphi \cdot \cos \Theta - \\ - & P_6 \cdot \cos \varphi + P_{Tp} \cdot \sin \varphi + P_{\Pi} \sin \Theta \cdot \sin \varphi - \\ - & P_{\Pi} \sin \chi \cdot \cos \Theta \cdot \cos \varphi - T \cdot \cos \Theta \cdot \sin \varphi + \\ + & P_{CK} \sin \Theta \cdot \sin \varphi \pm P_{B\Pi} \cdot \sin \Theta \cdot \sin \varphi \pm \\ \pm & P_{y_1} \cdot \cos \varphi \pm P_{y_2} \cdot \cos \varphi = 0; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} m \cdot \ddot{Z} - & P_{\Pi} \cdot \cos \Theta \cdot \cos \chi - P_{CK} \cdot \cos \Theta \pm P_{B\Pi} \cdot \cos \Theta + \\ + & P_T - (T - P_a) \cdot \sin \Theta - P_{B\text{ВТ}} = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$J_{Ox} \ddot{\chi} + M_{B\text{ВТ}} \pm M_{CK} - P_6 \cdot h \cdot \cos(\alpha - \chi) = 0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} J_{Oy} \cdot \ddot{\psi} - & M_K \cdot \cos \varphi + T \cdot H \cdot \cos \chi \cdot \cos \varphi + P_T \cdot l_T \cdot \cos \varphi - \\ - & P_{B\text{ВТ}} \cdot l_1 \cdot \cos \varphi - P_{\Pi} \cdot l_B \cdot \cos \Theta \cdot \cos \chi \cdot \cos \varphi - \\ - & P_a \cdot H/2 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \chi - P_{CK} \cdot l/2 \cdot \cos \Theta \cdot \cos \varphi \pm \\ \pm & P_{B\Pi} \cdot l_6 \cdot \cos \Theta \cdot \cos \varphi = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
J_{Oz} \cdot \ddot{\varphi} + P_p \cdot a + M_B - P_6 \cdot l_6 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \Theta - \\
- P_{II} \cdot l_B \cdot \sin \chi \cdot \cos \Theta + T \cdot H \cdot \cos \Theta \cdot \sin \chi - \\
- P_a \cdot H/2 \cdot \cos \Theta \cdot \sin \chi \pm M'_{B_1} \pm M'_{B_2} = 0. \quad (15)
\end{aligned}$$

3. Исходные данные (постоянные параметры)

- $m = 755 \text{ кг}$ — масса катера;
 $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды;
 $F_p = 0,25 \text{ м}^2$ — площадь руля;
 $\beta = 3^\circ$ — угол глиссирования;
 $F_{\text{л}} = 1,75 \text{ м}^2$ — площадь лобового сопротивления;
 $\rho' = 1,23 \text{ кг/м}^3$ — плотность воздуха;
 $\nu = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ — кинематическая вязкость воды (при $t = 20^\circ\text{C}$);
 $N = 48,8 \cdot 10^3 \text{ Вт}$ — мощность двигателя;
 $P_T = 7550 \text{ Н}$ — вес катера;
 $\gamma_1 = 10^4 \text{ Н/м}^3$ — удельный вес воды;
 $V' = 2 \text{ м/с}$ — скорость ветра;
 $J_{Ox} = 221,7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ — момент инерции катера относительно оси OX ;
 $J_{Oy} = 1732 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ — момент инерции катера относительно оси OY ;
 $J_{Oz} = 1732 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ — момент инерции катера относительно оси OZ ;
 $H = 1,25 \text{ м}$ — плечо силы тяжести;
 $a = 0,3 \text{ м}$ — плечо силы P_p относительно оси OZ ;
 $l_T = 1,24 \text{ м}$ — плечо силы P_T ;
 $h = 0,855 \text{ м}$ — плечо силы P_6 в уравнении (13);
 $\alpha = 0,306 \cdot \pi$.

4. Начальные данные

Основные координаты: $X, Y, Z, \chi, \psi, \varphi$, их первые и вторые производные по времени t .

Начальные значения координат (при $t = 0$):

$$X_0 = Y_0 = \chi_0 = \psi_0 = \varphi_0 = 0.$$

Алгоритм вычисления Z_0 .

Шаг 1. Полагаем $\Theta = \beta$, $Z_0 = 0$, $l = 2$.

Шаг 2. Вычисляем $Z_0 = l \cdot \sin \Theta + \cos \Theta \cdot a(l)$.

Шаг 3. Вычисляем $V = \sum V_i$ (по п. 5.12).

Шаг 4. Если

$$V < P_T/\gamma_1, \quad (16)$$

то полагаем $l = l + l/100$ и повторяем вычисления с шага 2 до тех пор, пока не изменится знак неравенства (16);

если

$$V > P_T/\gamma_1, \quad (17)$$

то полагаем $l = l - l/100$ и повторяем вычисления с шага 2 до тех пор, пока не изменится знак неравенства (17).

Последнее значение Z_0 принимаем за окончательное, а значение l — за l_0 .

5. Функциональные параметры

5.1. $P_p = C_1 \cdot F \cdot \rho \cdot \dot{X}^2/2$ — сила, действующая на руль. Здесь:

$C_1 = 1,1$ — коэффициент сопротивления движению (для плоской пластины);

$F = F_p \cdot \sin \gamma$ — проекция площади руля на плоскость, перпендикулярную движению;

γ — угол поворота руля. На $\gamma(t)$ составляется отдельная программа, обеспечивающая приближенно прямолинейное движение вдоль оси OX .

5.2. $\Theta = \psi + \beta$.

5.3. $P_a = C_1 \cdot F_L \cdot \rho' \cdot \dot{X}^2/2$ — сила лобового давления воздуха.

5.4. $P_{Tr} = (0,0287 \cdot Re^{-0,14} + 0,25 \cdot 10^{-3}) \cdot \rho/2 \cdot \Omega \cdot \dot{X}^2$ — сила трения о воду;

Re — число Рейнольдса,

$$\Omega = lB/(\cos \beta \cdot \cos \beta_1), \quad \beta_1 = 5^\circ.$$

Алгоритм вычисления l — длины смоченной части днища:

(А) если $\xi_{11} \leq l$, то l определяется из уравнения

$$Z_0 - Z = a(l) \cdot \cos \Theta + \xi_{11} \cdot \sin \Theta;$$

(В) если $l < \xi_{11}$, то $l = (Z_0 - Z) / \sin \Theta$.

Алгоритм вычисления lB — площади смоченной части днища (проекция на воду): $lB = l \cdot B_1$, где $B_1 = \xi_{21} + \xi_{2r}$;

если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta \leq 0,03$, то ξ_{2r} вычисляется из уравнения (3) при $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta$;

если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta > 0,03$, то ξ_{2r} вычисляется из уравнения (4) при $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta$.

5.5. $P_6 = C_4 \cdot F_6 \cdot \rho' \cdot V'^2 / 2$ — сила бокового давления ветра. Здесь $C_4 = 1,19$, $F_6 = 4 - F_{\text{погр.}}$, $F_{\text{погр.}} = (Z_0 - Z) \cdot l / \cos \Theta$.

5.6. $P_{\Pi} = K \cdot \rho \cdot (lB) / 2 \cdot \beta \cdot \dot{X}^2$ — подъемная сила;

$K = K(\text{Fr})$, $\text{Fr} = \dot{X} / \sqrt{9,8 \cdot l / 2}$ — число Фруда;

$$K = \begin{cases} 20 - 19 \cdot \text{Fr}, & \text{если } \text{Fr} \leq 1; \\ 1,07 \cdot \text{Fr} - 0,07, & \text{если } 1 < \text{Fr} \leq 3; \\ 3,14, & \text{если } 3 < \text{Fr}. \end{cases}$$

5.7. T — тяга двигателя: $T = 1400$, если $\dot{X} \leq 20,9$, иначе $T = 0,6 \cdot N / \dot{X}$. (В программе скачкообразный характер функции $T(t)$ на начальном отрезке сглажен с помощью экспоненты.)

5.8. $P_{\text{ск}}$ — сила противодействия среды вертикальным перемещениям:

$P_{\text{ск}} = 0$, если $\dot{Z} \geq 0$, иначе $P_{\text{ск}} = C_2 \cdot (lB) \cdot \rho \cdot \dot{Z}^2 / 2$, $C_2 = 1,15$.

5.9. $P_{\text{вп}} = C_2 \cdot F_{\text{пл}} \cdot \rho' \cdot \dot{Z}^2 / 2$ — сила сопротивления воздуха вертикальным перемещениям: $F_{\text{пл}} = 7$, если $\dot{Z} > 0$, иначе $F_{\text{пл}} = 7 - (lB)$.

5.10. $P_{y1} = C_3 \cdot F_{\text{погр}} \cdot \rho \cdot \dot{Y}^2 / 2$ — сила сопротивления воды боковому движению (вдоль оси OY): $C_3 = 1,3$.

5.11. P_{y2} — сила бокового сопротивления воды за счет поворота на угол φ :

$$P_{y2} = \int_0^{l \cdot \cos \Theta} C_3 \cdot \rho / 2 \cdot (Z_0 - Z - r \cdot \operatorname{tg} \Theta) \cdot (\dot{\varphi} \cdot r)^2 dr.$$

Выполняя интегрирование по r , получаем:

$$P_{y2} = C_3 \cdot \rho / 2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot (l \cdot \cos \Theta)^3 \cdot \left(\frac{Z_0 - Z}{3} - \frac{l \cdot \sin \Theta}{4} \right).$$

5.12. $P_{\text{выт}}$ — выталкивающая сила: $P_{\text{выт}} = \gamma_1 \cdot \sum V_i$.

Объемы V_i везде далее вычисляются по единой формуле: $V_i = K_0 \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$; где параметры K_0 , d_1 , d_2 , d_3 для каждой конкретной подобласти днища (1-9) имеют свой конкретный вид.

(А) Если $l \leq \xi_{11}$, то

$$\sum V_i = V_1 + V_3 + V_4;$$

для V_1 : $K_0 = 1$, $d_1 = l$, $d_2 = \xi_{21}$, $d_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta$;

для V_3 : $K_0 = 2$, $d_1 = l$;

а) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta \leq 0,03$, то $d_2 = (\xi_2^{(3)} - \xi_{21}) / 2$, $\xi_2^{(3)}$ определяется из (3) при $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta$, $d_3 = (Z_0 - Z) / (2 \cdot \cos \Theta)$;

б) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta > 0,03$, то $d_2 = (\xi_{22} - \xi_{21}) / 2$, $d_3 = 0,015$;

для V_4 :

а) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta \leq 0,03$, то $V_4 = 0$,

б) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta > 0,03$, то $K_0 = 1$, d_1 определяется из полинома (b) (см. таблицу) при $\xi_1 = d_1$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - d_1 \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_2 = (\xi_2^{(4)} - \xi_{22}) / 2$, $\xi_2^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta$, $d_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - 0,03$.

(В) Если $\xi_{11} < l \leq \xi_{12}$, то

$$\sum V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6;$$

для V_1 : $K_0 = 1$, $d_1 = \xi_{11}$, $d_2 = \xi_{21}$, $d_3 = 2 \cdot (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

для V_2 : $K_0 = 1$, $d_1 = l - \xi_{11}$, $d_2 = \xi_{21}$, $d_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

для V_3 : $K_0 = 2$, $d_1 = \xi_{11}$,

а) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta \leq 0,03$, то $d_2 = \xi_2^{(3)} - \xi_{21}$, $\xi_2^{(3)}$ определяется из (3) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11}/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_3 = \xi_3^{(3)}$ определяется из (3) при $\xi_1 = \xi_{12}/2$, $\xi_2 = d_2/2 + \xi_{21}$;

б) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta > 0,03$, то $d_2 = \xi_2^{(3)} - \xi_{21}$; $\xi_2^{(3)}$ определяется из (3) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (0,03 + (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta) / 2$, $d_3 = \xi_3^{(3)}$ определяется из (3) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_2 = d_2/2 + \xi_{21}$;

для V_4 : как в предыдущем пункте ($l \leq \xi_{11}$);

для V_5 : $K_0 = 1$, $d_1 = l - \xi_{11}$;

а) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,0465$, то $d_2 = (\xi_2^{(5)} - \xi_{21})/2$, $\xi_2^{(5)}$ определяется из (5) при $\xi_1 = \xi_{11}$, $d_3 = \xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

б) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,0465$, то $d_3 = 0,0465$, $d_2 = (\xi_{22} - \xi_{21})/2$;

для V_6 :

а) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,0465$, то $V_6 = 0$;

б) если $(Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,0465$, то $K_0 = 1$, $d_2 = (\xi_2^{(6)} - \xi_{22})/2$, $\xi_2^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = \xi_{11}$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_1 = \xi_{16} - \xi_{11}$, ξ_{16} определяется из полинома (б) при $\xi_1 = \xi_{16}$, $\xi_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{16} \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_3 = (Z_0 - Z) / \cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,0465$.

(С) Если $\xi_{12} < l$, то

$$\sum V_i = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 + V_7 + V_8;$$

V_1, V_2, V_3 вычисляются, как и в случае (В);

для V_4 :

а) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,0465$, то V_4 вычисляется, как и в случае (В);

б) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,0465$, то $K_0 = 2$, $d_1 = \xi_{11}$, $d_3 = (\xi_{31} + \xi_{32})/2$, $d_2 = (\xi_2^{(4)} - \xi_{22})/2$, $\xi_2^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (\xi_{31} + \xi_{32})/2$, где $\xi_{31} = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - 0,03$, $\xi_{32} = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,0465$;

для V_5 : $K_0 = 1$, $d_1 = \xi_{12} - \xi_{11}$, $d_3 = (\xi_{31} + \xi_{32})/2$;

а) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,06$, то $d_2 = \xi_2^{(5)} - \xi_{21}$, $\xi_2^{(5)}$ определяется из (5) при $\xi_1 = (\xi_{11} + \xi_{12})/2$, $\xi_3 = (\xi_{31} + \xi_{32})/2$, где $\xi_{32} = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,06$;

А) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,0465$, то $\xi_{31} = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

В) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,0465$, то $\xi_{31} = 0,0465$;

б) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,06$, то $d_2 = \xi_{22} - \xi_{21}$, $\xi_{31} = 0,0465$, $\xi_{32} = 0,054$;

для V_6 :

а) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,0465$, то $V_6 = 0$;

б) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,465$, то

1) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,06$, то $K_0 = 1$, $d_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,0465$, $d_1 = \xi_{16} - \xi_{11}$, ξ_{16} определяется из (4) при $\xi_1 = \xi_{16}$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{16} \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_2 = (\xi_2^{(6)} - \xi_{22})/2$, $\xi_2^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = \xi_{11}$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

2) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,06$, то $K_0 = 2$, $d_1 = \xi_{12} - \xi_{11}$, $d_3 = (\xi_{31} + \xi_{32})/2$, где $\xi_{31} = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,0465$, $\xi_{32} = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,06$, $d_2 = (\xi_2^{(6)} - \xi_{22})/2$, $\xi_2^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = (\xi_{12} + \xi_{11})/2$, $\xi_3 = d_3$;

для V_7 : $K_0 = 1$, $d_1 = l - \xi_{12}$,

а) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,06$ то $d_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_2 = (\xi_2^{(7)} - \xi_{21})/2$, $\xi_2^{(7)}$ определяется из (7) при $\xi_1 = \xi_{12}$, $\xi_3 = d_3$;

б) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,06$, то $d_3 = 0,06$, $d_2 = (\xi_2^{(7)} - \xi_{21})/2$, $\xi_2^{(7)}$ определяется из (7) при $\xi_1 = \xi_{12}$, $\xi_3 = d_3$;

для V_8 :

а) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta \leq 0,06$, то $V_8 = 0$.

б) если $(Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta > 0,06$, то $K_0 = 1$, $d_1 = \xi_{16} - \xi_{12}$, ξ_{16} определяется из полинома (б) (см. таблицу) при $\xi_1 = \xi_{16}$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{16} \cdot \operatorname{tg} \Theta$, $d_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta - 0,06$, $d_2 = (\xi_2^{(8)} - \xi_{22})/2$, $\xi_2^{(8)}$ определяется из (8) при $\xi_1 = \xi_{12}$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta$.

5.13. $M_B = \int_0^l dP_{\text{тр}} \cdot r$ — момент трения вращения вокруг оси OZ , где

$$dP_{\text{тр}} = (0,25 \cdot 10^{-3} + B \cdot \dot{\varphi} \cdot r/\nu) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot B \cdot \frac{dr}{\cos \beta \cdot \cos \beta_1} \cdot (r \cdot \dot{\varphi})^2.$$

Алгоритм определения $B = B(l, r)$:

А) если $l \leq \xi_{11}$, то $B = 2 \cdot \xi_{2\text{т}}^{(4)}$, $\xi_{2\text{т}}^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = l/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/(2 \cdot \cos \Theta)$;

В) если $\xi_{11} < l \leq \xi_{12}$, то

а) при $r \leq \xi_{11}$ $B = 2 \cdot \xi_{2\text{т}}^{(4)}$, $\xi_{2\text{т}}^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11}/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

б) при $\xi_{11} < r$ $B = 2 \cdot \xi_{2\text{т}}^{(6)}$, $\xi_{2\text{т}}^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = (l + \xi_{11})/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - (l + \xi_{11})/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

С) если $\xi_{12} < l$, то

а) при $r \leq \xi_{11}$ $B = 2 \cdot \xi_{2\text{т}}^{(4)}$, $\xi_{2\text{т}}^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11}/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

б) при $\xi_{11} < r \leq \xi_{12}$ $B = 2 \cdot \xi_{2\text{т}}^{(6)}$, $\xi_{2\text{т}}^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = (\xi_{11} + \xi_{12})/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - (\xi_{11} + \xi_{12})/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$;

с) при $\xi_{12} < r$ $B = 2 \cdot \xi_{2\text{т}}^{(8)}$, $\xi_{2\text{т}}^{(8)}$ определяется из (8) при $\xi_1 = (l + \xi_{12})/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - (l + \xi_{12})/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$.

Ниже приводятся рабочие формулы для вычислений по описанному алгоритму.

Введем обозначения:

$$M_B = P \cdot I_0^I, \quad I_0^I = \int_0^l B(l, r) \cdot (Q + B(l, r) \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr,$$

$$P = \rho/2 \cdot \dot{\varphi}^2 / (\cos \beta \cdot \cos \beta_1), \quad Q = 0,25 \cdot 10^{-3}, \quad R = \dot{\varphi} / \nu.$$

Выполняя интегрирование по соответствующим интервалам, получаем:

А) если $l \leq \xi_{11}$, то $B(l, r) = B^{(4)}$;

$$I_0^I = B^{(4)} \cdot \int_0^l (Q + B^{(4)} \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr = B^{(4)} \cdot (Q \cdot l^4/4 + B^{(4)} R \cdot l^5/5);$$

В) если $\xi_{11} < l \leq \xi_{12}$, то

$$B(l, r) = \begin{cases} B_1^{(4)} & \text{при } r \leq \xi_{11}, \\ B^{(6)} & \text{при } \xi_{11} < r; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_0^I &= B_1^{(4)} \cdot \int_0^{\xi_{11}} (Q + B_1^{(4)} \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr + \\ &+ B^{(6)} \cdot \int_{\xi_{11}}^l (Q + B^{(6)} \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr = \\ &= B_1^{(4)} \cdot (Q \cdot \xi_{11}^4/4 + B_1^{(4)} \cdot R \cdot \xi_{11}^5/5) + \\ &+ B^{(6)} \cdot (Q \cdot (l^4/4 - \xi_{11}^4/4) + B^{(6)} \cdot R \cdot (l^5/5 - \xi_{11}^5/5)); \end{aligned}$$

С) если $\xi_{12} < l$, то

$$B(l, r) = \begin{cases} B_1^{(4)} & \text{при } r \leq \xi_{11}, \\ B^{(6)} & \text{при } \xi_{11} < r \leq \xi_{12}, \\ B^{(8)} & \text{при } \xi_{12} < r; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I_0^I &= B_1^{(4)} \int_0^{\xi_{11}} (Q + B_1^{(4)} \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr + \\
&+ B_1^{(6)} \cdot \int_{\xi_{11}}^{\xi_{12}} (Q + B_1^{(6)} \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr + \\
&+ B^{(8)} \int_{\xi_{12}}^l (Q + B^{(8)} \cdot R \cdot r) \cdot r^3 \cdot dr = B_1^{(4)} \cdot (Q \cdot \xi_{11}^4/4 + \\
&+ B_1^{(4)} \cdot R \cdot \xi_{11}^5/5) + B_1^{(6)} \cdot (Q \cdot (\xi_{12}^4/4 - \xi_{11}^4/4) + \\
&+ B_1^{(6)} \cdot R \cdot (\xi_{12}^5/5 - \xi_{11}^5/5)) + B^{(8)} \cdot (Q \cdot (l^4/4 - \xi_{12}^4/4) + \\
&+ B^{(8)} \cdot R \cdot (l^5/5 - \xi_{12}^5/5)).
\end{aligned}$$

5.14. $l_6 = 2 \text{ м}$ — плечо силы P_6 .

5.15. $l_B = q \cdot l$ — плечо подъемной силы; коэффициент q изменяется в диапазоне 0,5 — 1. По результатам численного интегрирования выбрано $q = 1$.

5.16. $M'_{B_1} = P_{y_1} \cdot l_1$ — момент силы P_{y_1} ; l_1 — плечо сил P_{y_1} , P_{y_2} , $P_{\text{выт}}$.

Алгоритм вычисления l_1 .

А) Если $\text{tg} \Theta \geq 0$, то

а) если $\text{tg} \Theta \geq (Z_0 - Z)/\xi_{11}$, то

$$l_1 = (Z_0 - Z)/(3 \cdot \cos \Theta) \cdot (1/\sin \Theta - 2 \cdot \sin \Theta);$$

б) если $\text{tg} \Theta < (Z_0 - Z)/\xi_{11}$, то

$$l_1 = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} - \frac{Z_0 - Z}{3} \cdot \text{tg} \Theta, \quad (18)$$

где

$$A_1 = \xi_{11} \cdot (Z_0 - Z - \xi_{11} \cdot \text{tg} \Theta), \quad x_1 = \xi_{11}/2;$$

$$A_2 = \xi_{11}^2/2 \cdot \text{tg} \Theta, \quad x_2 = \xi_{11}/3;$$

$$A_3 = (l - \xi_{11}) \cdot (Z_0 - Z - \xi_{11} \cdot \text{tg} \Theta)/1,5, \quad x_3 = (5 \cdot \xi_{11} + 3 \cdot l)/8.$$

В) Если $\operatorname{tg} \Theta < 0$, то l_1 вычисляется по формуле (18); при этом

$$A_1 = \xi_{11} \cdot (Z_0 - Z), \quad x_1 = \xi_{11}/2;$$

$$A_2 = \xi_{12}^2/2 \cdot |\operatorname{tg} \Theta|, \quad x_2 = \xi_{11}/1,5;$$

$$A_3 = (l - \xi_{11}) \cdot (Z_0 - Z + \xi_{11} \cdot |\operatorname{tg} \Theta|)/1,5, \quad x_3 = (5 \cdot \xi_{11} + 3 \cdot l)/8.$$

5.17. $M'_{B_2} = P_{y_2} \cdot l_1$ — момент силы P_{y_2} .

$$5.18. M_K = \int_0^l dP_{\text{кач}} \cdot r \text{ — момент сопротивления кача-}$$

нию;

$dP_{\text{кач}} = C_1 \cdot B \cdot \rho \cdot (\dot{\psi} \cdot r)^2/2 \cdot dr$; B вычисляется как в п. 5.13.

5.19. M_{BT} — восстанавливающий момент от бокового качания.

А) Если $l \leq \xi_{11}$, то

$$M_{BT} = \int_0^{\xi_{2T}^{(4)}} dP_{BT} \cdot r;$$

$dP_{BT} = r \cdot \chi \cdot l \cdot \gamma_1 \cdot dr$, $\xi_{2T}^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = 1/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/(2 \cdot \cos \Theta)$.

В) Если $\xi_{11} < l \leq \xi_{12}$, то

$$M_{BT} = \int_0^{\xi_{2T}^{(4)}} dP_{BT}^{(4)} \cdot r + \int_0^{\xi_{2T}^{(6)}} dP_{BT}^{(6)} \cdot r;$$

$dP_{BT}^{(4)} = r \cdot \chi \cdot \xi_{11} \cdot \gamma_1 \cdot dr$, $\xi_{2T}^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11}/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$; $dP_{BT}^{(6)} = r \cdot \chi \cdot (l - \xi_{11}) \cdot \gamma_1 \cdot dr$, $\xi_{2T}^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = (l + \xi_{11})/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - (l + \xi_{11})/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$.

С) Если $\xi_{12} < l$, то

$$M_{BT} = \int_0^{\xi_{2T}^{(4)}} dP_{BT}^{(4)} \cdot r + \int_0^{\xi_{2T}^{(6)}} dP_{BT}^{(6)} \cdot r + \int_0^R dP_{BT}^{(8)} \cdot r;$$

$dP_{BT}^{(4)} = r \cdot \chi \cdot \xi_{11} \cdot \gamma_1 \cdot dr$, $\xi_{2T}^{(4)}$ определяется из (4) при $\xi_1 = \xi_{11}/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{11}/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$; $dP_{BT}^{(6)} = r \cdot \chi \cdot (\xi_{12} - \xi_{11}) \cdot \gamma_1 \cdot dr$, $\xi_{2T}^{(6)}$ определяется из (6) при $\xi_1 = (\xi_{11} + \xi_{12})/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - (\xi_{11} + \xi_{12})/2 \cdot \operatorname{tg} \Theta$; $dP_{BT}^{(8)} = r \cdot \chi \cdot (l - \xi_{12}) \cdot \gamma_1 \cdot dr$, $R = (\xi_{2T}^{(8)} + \xi'_{2CK})/2$, $\xi_{2T}^{(8)}$ определяется из (8) при $\xi_1 = \xi_{12}/2$, $\xi_3 = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - \xi_{12} \cdot \operatorname{tg} \Theta$, ξ'_{2CK} определяется из полинома (b) при $\xi_1 = l'$, l' есть решение уравнения $b(l') = (Z_0 - Z)/\cos \Theta - l' \cdot \operatorname{tg} \Theta$.

5.20. M_{CK} — момент сопротивления боковым колебаниям (от воды).

А) Если $l \leq \xi_{11}$, то

$$M_{CK} = \int_0^{\xi_{2T}^{(4)}} dP_{CK} \cdot r; \quad dP_{CK} = C_1 \cdot l \cdot \rho/2 \cdot (\dot{\chi} \cdot r)^2 \cdot dr.$$

В) Если $\xi_{11} < l \leq \xi_{12}$, то

$$M_{CK} = \int_0^{\xi_{2T}^{(4)}} dP_{CK}^{(4)} \cdot r + \int_0^{\xi_{2T}^{(6)}} dP_{CK}^{(6)} \cdot r;$$

$dP_{CK}^{(4)} = C_1 \cdot \xi_{11} \cdot \rho/2 \cdot (\dot{\chi} \cdot r)^2 \cdot dr$, $dP_{CK}^{(6)} = C_1 \cdot (l - \xi_{11}) \cdot \rho/2 \cdot (\dot{\chi} \cdot r)^2 \cdot dr$.

С) Если $\xi_{12} < l$, то

$$M_{CK} = \int_0^{\xi_{2T}^{(4)}} dP_{CK}^{(4)} \cdot r + \int_0^{\xi_{2T}^{(6)}} dP_{CK}^{(6)} \cdot r + \int_0^R dP_{CK}^{(8)} \cdot r;$$

$dP_{\text{СК}}^{(4)} = C_1 \xi_{11} \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (\dot{\chi} r)^2 dr, \quad dP_{\text{СК}}^{(6)} = C_1 (\xi_{12} - \xi_{11}) \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (\dot{\chi} r)^2 dr,$
 $dP_{\text{СК}}^{(8)} = C_1 \cdot (1 - \xi_1) \cdot \rho / 2 \cdot (\dot{\chi} \cdot r)^2 \cdot dr, \quad \xi_{2\text{T}}^{(4)}, \xi_{2\text{T}}^{(6)}, R \text{ определяются}$
 так же, как в п. 5.19.

6. Дополнительные условия на уравнения движения

6.1. Уравнение (10).

1) Перед слагаемым $P_{\text{ВП}} \cdot \sin \Theta \cdot \cos \varphi$ ставится знак "+", если $\dot{Z} \leq 0$, и знак "-", если $\dot{Z} > 0$.

2) Перед слагаемым $P_{y_1} \cdot \sin \varphi$ знаки ставятся так:

а) при $\varphi > 0$ знак "+", если $\dot{Y} < 0$, и знак "-", если $\dot{Y} \geq 0$;

б) при $\varphi < 0$ знак "+", если $\dot{Y} > 0$, и знак "-", если $\dot{Y} \leq 0$.

3) Перед слагаемым $P_{y_2} \cdot \sin \varphi$ знаки ставятся так:

а) при $\varphi > 0$ знак "+", если $\dot{\varphi} < 0$, и знак "-", если $\dot{\varphi} \geq 0$;

б) при $\varphi < 0$ знак "+", если $\dot{\varphi} > 0$, и знак "-", если $\dot{\varphi} \leq 0$.

6.2. Уравнение (11).

1) Перед слагаемым $P_{\text{ВП}} \cdot \sin \Theta \cdot \sin \varphi$ ставится знак "+", если $\dot{Z} \leq 0$, и знак "-", если $\dot{Z} > 0$.

2) Перед слагаемым $P_{y_1} \cdot \cos \varphi$ ставится знак "+", если $\dot{Y} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{Y} < 0$.

3) Перед слагаемым $P_{y_2} \cdot \cos \varphi$ ставится знак "+", если $\dot{\varphi} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{\varphi} < 0$.

6.3. Уравнение (12).

Перед слагаемым $P_{\text{ВП}} \cdot \cos \Theta$ ставится знак "+", если $\dot{Z} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{Z} < 0$.

6.4. Уравнение (13).

Перед слагаемым $M_{\text{СК}}$ ставится знак "+", если $\dot{\chi} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{\chi} < 0$.

6.5. Уравнение (14).

Перед слагаемым $P_{\text{ВП}} \cdot l_6 \cdot \cos \Theta \cdot \cos \varphi$ ставится знак "+", если $\dot{Z} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{Z} < 0$.

6.6. Уравнение (15).

1) Перед слагаемым $M'_{\text{В}}$ ставится знак "+", если $\dot{Y} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{Y} < 0$.

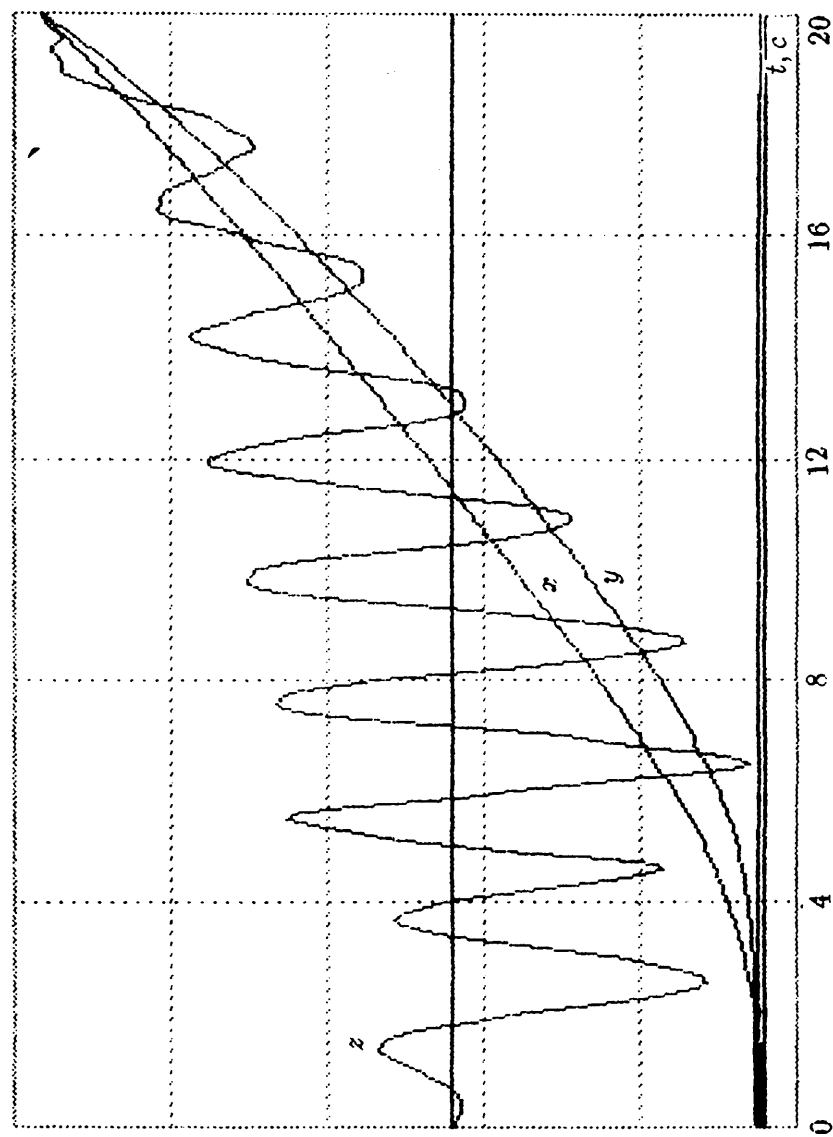


Рис. 3а. Интегральные кривые x , y , z .

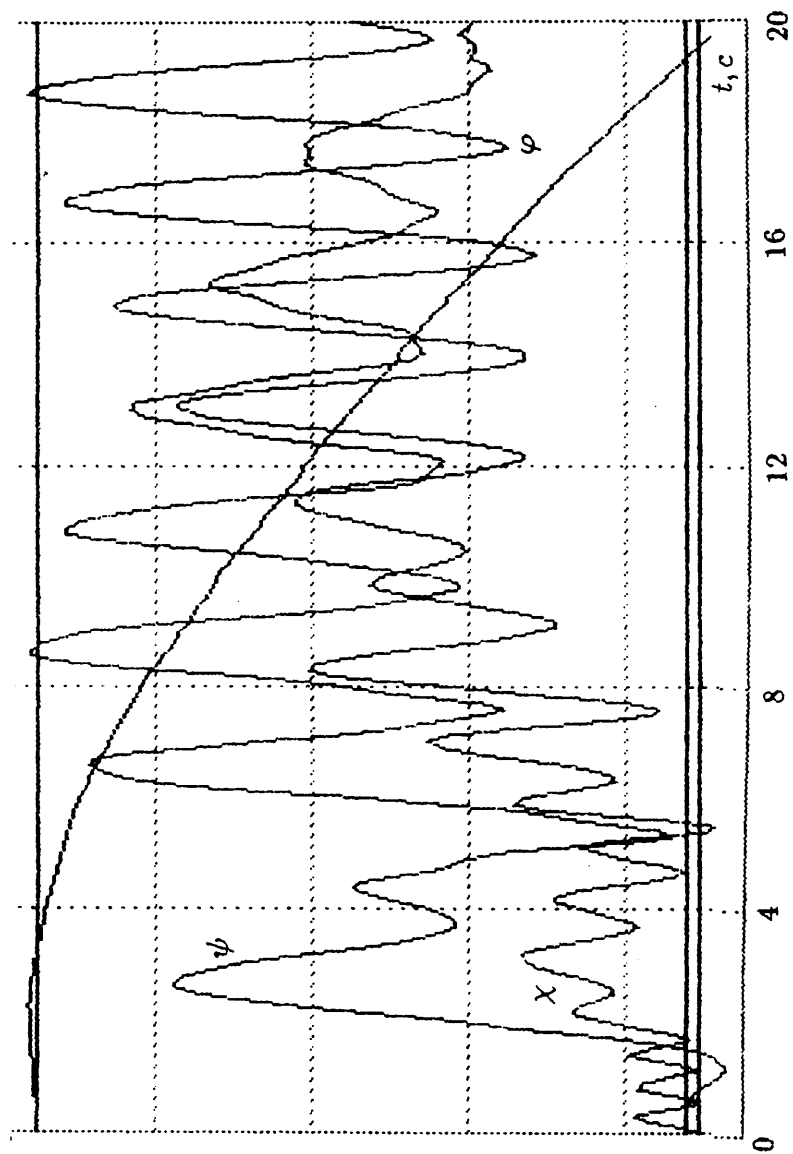


Рис. 36. Интегральные кривые χ , ψ , φ .

2) Перед слагаемым M'_{B_2} ставится знак "+", если $\dot{\varphi} \geq 0$, и знак "-", если $\dot{\varphi} < 0$.

6.7. Кроме того, при $\Theta \geq 0$ должно быть: $P_{\text{выт}} = P_{\Pi} = P_{\text{тр}} = P_{y_1} = P_{y_2} = M_B = M'_{B_1} = M'_{B_2} = P_{\text{ск}} = M_K = 0$.

В качестве иллюстрации на рис.3,а,б приводятся интегральные кривые системы дифференциальных уравнений, представленной выше. Масштабы на графиках выбираются автоматически — по минимальным и максимальным значениям изображаемых кривых. На рис. 3,а и 3,б соответственно: $0 < X < 106,0$; $0 < Y < 45,8$; $-0,113 < Z < 0,156$; $-0,000956 < \chi < 0,00371$; $-0,00817 < \psi < 0,15$; $-0,099 < \varphi < 0,00129$.

Л и т е р а т у р а

1. КУРИЛЕНКО Г.А., КОРОЛЕВ В.К. Численное моделирование движения глissера //Сплайны и их приложения. — Новосибирск, 1995. — Вып.154: Вычислительные системы. — С. 83-91.

Поступила в редакцию
1 марта 1997 года