Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2018. Том 59, № 1

УДК 519.17

ОПИСАНИЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ 5–ВЕРШИН В ОДНОМ КЛАССЕ 3–МНОГОГРАННИКОВ С МИНИМАЛЬНОЙ СТЕПЕНЬЮ 5

О. В. Бородин, А. О. Иванова, Д. В. Никифоров

Аннотация. В 1940 г. Лебег доказал, что каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину, степени соседних вершин которой мажорируются одной из следующих последовательностей:

$$(6,6,7,7,7),\ (6,6,6,7,9),\ (6,6,6,6,11),$$
$$(5,6,7,7,8),\ (5,6,6,7,12),\ (5,6,6,8,10),\ (5,6,6,6,17),$$
$$(5,5,7,7,13),\ (5,5,7,8,10),\ (5,5,6,7,27),\ (5,5,6,6,\infty),\ (5,5,6,8,15),\ (5,5,6,9,11),$$
$$(5,5,5,7,41),\ (5,5,5,8,23),\ (5,5,5,9,17),\ (5,5,5,10,14),\ (5,5,5,11,13).$$

Доказано, что каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 без вершин степеней от 7 до 10 содержит 5-вершину, степени соседних вершин которой мажорируются одной из следующих последовательностей: $(5,6,6,5,\infty)$, $(5,6,6,6,15)$, $(6,6,6,6,6)$, где все параметры точны.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.105

Ключевые слова: плоский граф, структурные свойства, 3-многогранник, окрестность.

1. Введение

Под 3-*многогранником* мы подразумеваем конечный трехмерный выпуклый многогранник. Штейницем доказано [1], что 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Степень $d(v)$ вершины v ($r(f)$ грани f) в 3-многограннике P есть число инцидентных ей ребер. Через $\Delta(P)$ и $\delta(P)$ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в P соответственно. k-*Вершина* (k-*грань*) — вершина (грань) степени k; k^+-*вершина* имеет степень не менее k, и т. д.

В 1904 г. Вернике [2] доказал, что каждый 3-многогранник P с $\delta(P)=5$ содержит 5-вершину, смежную с 6^--вершиной. В 1922 г. Франклин [3] усилил этот результат, доказав, что в каждом 3-многограннике P с $\delta(P)=5$ найдется 5-вершина, смежная с двумя 6^--вершинами. Теорема Франклина неулучшаема, так как в классе $\mathbf{P}_5$ многогранников с минимальной степенью 5 существует 3-многогранник, в котором каждая 5-вершина полностью окружена 6-вершинами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16–11–10054).

Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [4] доказали аналог теоремы Франклина, а именно, что каждый такой 3-многогранник также содержит вершину степени не более 6, смежную с 5-вершиной и с другой вершиной степени не более 6, причем параметры точны. Также в [4] показано, что других точных описаний трехвершинных цепей в $\mathbf{P}_5$, кроме полученных в [3, 4], не существует.

Будем говорить, что v является *вершиной типа* $(k_1, k_2, \dots)$ или просто $(k_1, k_2, \dots)$-*вершиной*, если последовательность степеней смежных с ней вершин мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$. Если порядок следования вершин в типе не имеет значения, то будем ставить черту над соответствующими степенями. Следующее описание окрестностей 5-вершин в 3-многограннике P с $\delta(P) = 5$ было дано Лебегом [5, с. 36] в 1940 г.; оно включает результаты Вернике [2] и Франклина [3].

Теорема 1 [5]. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину одного из следующих типов:*

$$(\overline{6,6,7,7,7}),\ (\overline{6,6,6,7,9}),\ (\overline{6,6,6,6,11}),$$
$$(\overline{5,6,7,7,8}),\ (5,6,\overline{6,7},11),\ (5,6,\overline{6,8},8),$$
$$(5,6,\overline{6,9},7),\ (5,7,6,6,12),\ (5,8,6,6,10),\ (5,6,6,6,17),$$
$$(5,5,\overline{7,7,8}),\ (5,13,5,7,7),\ (5,10,5,7,8),$$
$$(5,8,5,7,9),\ (5,7,5,7,10),\ (5,7,5,8,8),$$
$$(5,5,7,6,12),\ (5,5,8,6,10),\ (5,6,5,7,12),$$
$$(5,6,5,8,10),\ (5,17,5,6,7),\ (5,11,5,6,8),$$
$$(5,11,5,6,9),\ (5,7,5,6,13),\ (5,8,5,6,11),\ (5,9,5,6,10),\ (5,6,6,5,\infty),$$
$$(5,5,7,5,41),\ (5,5,8,5,23),\ (5,5,9,5,17),\ (5,5,10,5,14),\ (5,5,11,5,13).$$

Теорема 1 наряду с другими идеями из [5] имеет многочисленные приложения в задачах раскраски плоских графов (первые примеры таких приложений и недавний обзор можно найти в [6, 7]). Некоторые параметры теоремы Лебега были улучшены для узких классов плоских графов. Например, в 1963 г. Коциг [8] доказал, что для каждой плоской триангуляции с минимальной степенью 5 верно $w \le 18$, где w есть минимальный вес (сумма степеней граничных вершин) 5^--граней, и предположил, что $w \le 17$. Только в 1989 г. О. В. Бородин [9] дал подтверждение гипотезы Коцига, причем в более общей форме, позволившей одновременно доказать гипотезу Грюнбаума [10] о циклической 11-связности 5-связных 3-многогранников.

Теорема 2 [9]. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит $(5,5,7)$-грань или $(5,6,6)$-грань, причем все параметры точны.*

Младшей k-звездой назовем звезду с центром в 5-вершине, имеющую k лучей. Лебеговское описание [5, с. 36] окрестностей 5-вершин в классе $\mathbf{P}_5$ показывает, что существует 5-вершина с тремя 7^--соседями. В 1996 г. Йендроль и Мадараш [11] дали точное описание младших 3-звезд в классе $\mathbf{P}_5$: найдется $(6,6,6)$-звезда или $(5,6,7)$-звезда. О. В. Бородин и А. О. Иванова [12], используя точную оценку О. В. Бородина и Вудала [13] на минимальный вес (сумму степеней вершин) младшей 4-звезды, получили точное описание младших 4-звезд в классе $\mathbf{P}_5$.

Проблема точного описания 5-звезд в $\mathbf{P}_5$ пока далека от своего решения. Затруднения вызывает даже получение точных верхних оценок на минимальные вес и высоту (максимальную степень соседей) младших 5-звезд в ограниченных подклассах из $\mathbf{P}_5$. Ряд результатов в этом направлении можно найти в [14–20]. В частности, мы доказали [19], что при запрете на 6-вершины найдется 5-звезда высоты не более 17, причем 17 является точной оценкой и улучшает оценку 51, вытекающую из теоремы Лебега.

В [5] Лебег не привел доказательства теоремы 1, а только дал его идею. В 2013 г. А. О. Иванова и Д. В. Никифоров [21] дали полное доказательство теоремы 1 и попутно исправили следующие неточности:

(1) в типе $(5,11,5,6,8)$ должно быть 15 вместо 11;
(2) в типе $(5,17,5,6,7)$ должно быть 27 вместо 17;
(3) в типе $(\overline{6,6,6,6,11})$ черта лишняя;
(4) вместо типа $(\overline{5,6,7,7,8})$ должны быть $(5,8,\overline{6,7,7})$ и $(5,7,6,8,7)$;
(5) тип $(5,6,\overline{6,9},7)$ избыточен;
(6) вместо $(5,5,\overline{7,7,8})$ достаточно писать $(5,5,7,\overline{7,8})$.

Позднее А. О. Иванова и Д. В. Никифоров [22, 23] улучшили уточненную версию теоремы 1, заменив 41 и 23 в типах $(5,5,7,5,41)$ и $(5,5,8,5,23)$ на 31 и 22 соответственно.

Теорема 3 [21–23]. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину одного из следующих типов:*

$$(\overline{6,6,7,7,7}),\ (\overline{6,6,6,7,9}),\ (6,6,6,6,11),$$
$$(5,8,\overline{6,7,7}),\ (5,7,6,8,7),\ (5,6,\overline{6,7},11),\ (5,6,\overline{6,8},8),$$
$$(5,7,6,6,12),\ (5,8,6,6,10),\ (5,6,6,6,17),$$
$$(5,5,7,\overline{7,8}),\ (5,13,5,7,7),\ (5,10,5,7,8),\ (5,8,5,7,9),$$
$$(5,7,5,7,10),\ (5,7,5,8,8),\ (5,5,7,6,12),\ (5,5,8,6,10),$$
$$(5,6,5,7,12),\ (5,6,5,8,10),\ (5,27,5,6,7),\ (5,15,5,6,8),$$
$$(5,11,5,6,9),\ (5,7,5,6,13),\ (5,8,5,6,11),\ (5,9,5,6,10),$$
$$(5,6,6,5,\infty),$$
$$(5,5,7,5,31),\ (5,5,8,5,22),\ (5,5,9,5,17),\ (5,5,10,5,14),\ (5,5,11,5,13).$$

Из теоремы 3, если пренебречь циклическим порядком соседей 5-вершины, получаем более компактный результат.

Следствие 4. *Каждый 3-многогранник с минимальной степенью 5 содержит 5-вершину одного из следующих типов:*

$$(\overline{6,6,7,7,7}),\ (\overline{6,6,6,7,9}),\ (\overline{6,6,6,6,11}),$$
$$(\overline{5,6,7,7,8}),\ (\overline{5,6,6,7,12}),\ (\overline{5,6,6,8,10}),\ (\overline{5,6,6,6,17}),$$
$$(\overline{5,5,7,7,13}),\ (\overline{5,5,7,8,10}),\ (\overline{5,5,6,7,27}),$$
$$(\overline{5,5,6,6,\infty}),\ (\overline{5,5,6,8,15}),\ (\overline{5,5,6,9,11}),$$
$$(\overline{5,5,5,7,41}),\ (\overline{5,5,5,8,23}),\ (\overline{5,5,5,9,17}),\ (\overline{5,5,5,10,14}),\ (\overline{5,5,5,11,13}).$$

Как видно из следствия 4, если запретить вершины степеней от 7 до 11, то найдется 5-вершина одного из следующих типов: $(\overline{5,5,6,6,\infty})$, $(\overline{5,6,6,6,17})$, $(6,6,6,6,6)$. О. В. Бородин, А. О. Иванова и О. Н. Казак [24] получили точное описание 5-звезд в этом узком подклассе класса $\mathbf{P}_5$.

Теорема 5 [24]. *Каждый* 3-*многогранник с минимальной степенью* 5 *и без вершин степеней от* 7 *до* 11 *содержит* 5-*вершину одного из следующих типов:* $(\overline{5,5,6,6,\infty})$, $(\overline{5,6,6,6,15})$, $(6,6,6,6,6)$, *где все параметры точны.*

Целью настоящей статьи является доказательство следующей теоремы, которая усиливает теорему 5, максимально расширяя область ее применимости и сокращая количество выявляемых типов 5-вершин до минимума.

Теорема 6. *Каждый* 3-*многогранник с минимальной степенью* 5 *и без вершин степеней от* 7 *до* 10 *содержит* 5-*вершину одного из следующих типов:* $(5,6,6,5,\infty)$, $(5,6,6,6,15)$, $(6,6,6,6,6)$, *где все параметры точны.*

Заметим, что описание, данное в теореме 6, уже не является верным для более широкого класса 3-многогранников с минимальной степенью 5 без вершин степеней от 7 до 9, что следует из конструкции О. В. Бородина и Вудала в [13], в которой каждая 5-вершина имеет двух 10^+-соседей.

2. Доказательство теоремы 6

Все параметры в теореме 6 неулучшаемы. Действительно, следующую конструкцию, подтверждающую точность типа $(5,6,6,5,\infty)$, можно найти в [14]. Возьмем три концентрических n-цикла $C^i = v_1^i \ldots v_n^i$, где n не ограничено и $1 \le i \le 3$, и соединим C^2 с C^1 ребрами $v_j^2 v_j^1$ и $v_j^2 v_{j+1}^1$, где $1 \le j \le n$ (сложение по модулю n). Затем то же сделаем с C^2 и C^3. Наконец, соединим все вершины цикла C^1 с новой n-вершиной и то же сделаем для C^3.

Точность $(6,6,6,6,6)$ подтверждается конструкцией, получаемой из додекаэдра путем добавления 5-вершины в каждую его грань. Точность $(5,6,6,6,15)$ показана в [24].

Далее предположим, что 3-многогранник P' есть контрпример к теореме 6. Пусть P — контрпример на том же множестве вершин, что и P', с максимальным числом ребер.

Замечание 7. В P каждая 4^+-грань $f = v_1 \ldots v_{d(f)}$ с $d(v_1) \ne 6$ удовлетворяет неравенству $d(v_i) \ne 6$ для всех $3 \le i \le d(f) - 1$. В противном случае мы могли бы добавить диагональ $v_1 v_i$, что противоречит максимальности контрпримера P.

Следствие 8. *В* P *каждая* 4^+-*грань имеет не более двух вершин степени* $\ne 6$. *Более того, если имеется в точности две такие вершины, то они смежны между собой.*

2.1. Перераспределение эйлеровых вкладов. Множества вершин, ребер и граней контрпримера P обозначим через V, E и F соответственно. Формула Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P влечет

$$\sum_{v \in V} (d(v) - 6) + \sum_{f \in F} (2r(f) - 6) = -12. \tag{1}$$

Будем считать *начальным зарядом* вершины v и грани f величину $\mu(v) = d(v) - 6$ и $\mu(f) = 2d(f) - 6$ соответственно. Таким образом, только 5-вершины имеют отрицательный заряд. Используя свойства контрпримера P, перераспределим заряды таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это будет противоречить тому, что сумма новых зарядов равна -12 согласно (1).

Через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ обозначим соседей вершины v в циклическом порядке вокруг v, а через $f_1, \dots, f_{d(v)}$ — грани, инцидентные вершине v в том же порядке. Вершину v назовем *симплициальной*, если она полностью окружена 3-гранями. Симплициальную 5-вершину v назовем *плохой*, если она смежна с 11-вершиной v_1, 6-вершинами v_2, v_5 и 6^--вершинами v_3, v_4.

Будем использовать следующие правила перераспределения зарядов (рис. 1).

R1. Каждая 4^+-грань дает 1 каждой инцидентной 5-вершине.

R2. Каждая 11-вершина v дает $\frac{1}{4}$ каждой симплициальной 5-вершине v_1 через каждую инцидентную грань, за следующим исключением.

(e) Если v_1 является плохой, то v дает $\frac{1}{2}$ вершине v_1 через каждую инцидентную грань.

R3. Пусть симплициальная 5-вершина v смежна с 11-вершиной v_1, 5-вершинами v_2 и v_5 и 11^+-вершинами v_3 и v_4. Тогда v дает $\frac{1}{2}$ вершине v_1.

R4. Каждая 12^+-вершина v дает симплициальной 5-вершине v_2 следующий заряд через грань $f = v_2vv_3$:

(a) $\frac{1}{4}$, если $d(v_3) = 5$,

(b) $\frac{1}{2}$, если $d(v_3) \geq 6$,

за следующим исключением.

(e) Если $d(v) \geq 16$, $d(v_1) = 5$, $d(v_3) = 6$ и v_2 имеет четырех 6^--соседей, то v дает $\frac{2}{3}$ вершине v_2 через грань v_2vv_3 и $\frac{1}{3}$ — через грань v_1vv_2.

R5. Пусть вершина v с $16 \leq d(v) \leq 17$ имеет цепь соседей $v_1, \dots, v_5$ такую, что $d(v_1) = 6$, $d(v_5) \geq 6$, а v_2, v_3, v_4 — симплициальные 5-вершины, причем v_2 имеет четырех 6^--соседей. Тогда v_4 дает $\frac{1}{4}$ вершине v.

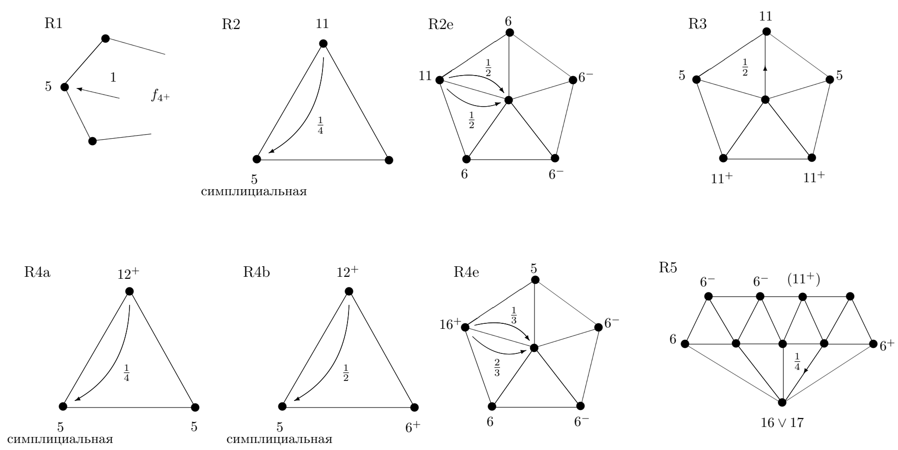

Рис. 1. Правила перераспределения зарядов

2.2. Доказательство неравенства $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$. Сначала рассмотрим грань f в P. Если $d(f) = 3$, то f не участвует в перераспределении зарядов, а значит, $\mu'(v) = \mu(f) = 2 \times 3 - 6 = 0$. Заметим, что каждая 4^+-грань инцидентна не более чем с двумя 5-вершинами по следствию 8, откуда вытекает, что $\mu'(v) = 2d(f) - 6 - 2 \times 1 \geq 0$ по R1.

Пусть v — вершина в P.

Случай 1: $d(v) = 5$. Если v инцидентна 4^+-грани, то $\mu'(v) \geq 5 - 6 + 1 = 0$ по R1. Далее будем считать, что v симплициальная.

Пусть v дает $\frac{1}{4}$ по R5 своему 17^--соседу v_1. Тогда $d(v_2) = 5$ и $d(v_5) \geq 6$, а $d(v_3) \geq 11$ ввиду отсутствия вершин типа $(5, 6, 6, 5, \infty)$ в нашем контрпримере.

Если правило R3 не применяется к v, то $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ по R2, R4.

Если правило R3 применяется к v, то $d(v_5) \geq 11$, следовательно, $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$ по R2, R4 и R3.

Таким образом, далее можем считать, что ни R3, ни R5 не применяются к нашей v, следовательно, достаточно показать, что v получает в сумме от своих соседей не менее 1. Заметим, что v имеет не менее одного 11^+-соседа ввиду отсутствия в P вершин типа $(6, 6, 6, 6, 6)$.

Подслучай 1.1: v имеет не менее двух 11^+-соседей. Здесь $\mu'(v) \geq -1 + 4 \times \frac{1}{4} = 0$ по R2 и R4.

Подслучай 1.2: v имеет в точности одного 11^+-соседа, v_2. Заметим, что случай $d(v_1) = d(v_3) = 5$ невозможен ввиду отсутствия $(5, 6, 6, 5, \infty)$-звезд в P. Поэтому будем далее считать, что $d(v_3) = 6$.

Если $d(v_1) = 5$, то $d(v_2) \geq 16$ в силу отсутствия $(5, 6, 6, 6, 15)$-звезд в P, откуда $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0$ по R4e. Если $d(v_1) = 6$, то $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R2e или R4b.

Случай 2: $d(v) = 6$. Поскольку v не принимает участия в перераспределении зарядов, имеем $\mu'(v) = \mu'(v) = 6 - 6 = 0$.

Случай 3: $d(v) = 11$. Заметим, что v передает не более $\frac{1}{2}$ через каждую грань по R2.

Если v инцидентна хотя бы одной 4^+-грани, то $\mu'(v) \geq 11 - 6 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$ по R1, R2. Итак, далее можем считать, что наша v симплициальная.

Если v смежна с 11^+-вершиной v_2, то каждая из граней vv_2v_1 и vv_2v_3 уносит не более $\frac{1}{4}$ от v, откуда $\mu'(v) \geq 5 - 9 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$.

Если v смежна с несимплициальной 5-вершиной v_2, то снова каждая из граней vv_2v_1 и vv_2v_3 уносит не более $\frac{1}{4}$ от v, поэтому $\mu'(v) \geq 5 - 9 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$.

Ввиду предыдущих двух абзацев далее будем считать, что v смежна только с 6-вершинами и симплициальными 5-вершинами.

Если v окружена только 5-вершинами, то каждая из них имеет 11^+-соседа, отличного от v. Благодаря нечетности числа 11 среди этих 11^+-соседей найдутся две смежные 11^+-вершины, поэтому наша v получит $\frac{1}{2}$ по R3, откуда $\mu'(v) \geq 5 - 11 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Таким образом, можем считать, что v имеет не менее одного 6-соседа.

Если v смежна с двумя последовательными 6-вершинами, то грань, инцидентная им обеим и вершине v, не уносит от v ничего, откуда следует, что $\mu'(v) \geq 5 - 10 \times \frac{1}{2} = 0$.

Далее будем считать, что у v нет двух последовательных 6-соседей. Ввиду нечетности числа 11 найдется цепь $v_1, \ldots, v_k$ с $d(v_1) = d(v_k) = 6$ и $d(v_i) = 5$, где $2 \leq i \leq k - 1$ и $k \geq 4$. Заметим, что при этом не исключается, что $v_1 = v_k$; этот случай имеет место, если v смежна в точности с одной 6-вершиной. Таким образом, v_2 и v_{k-1} не являются плохими, следовательно, каждая из граней vv_1v_2 и $vv_{k-1}v_k$ забирает от v не более $\frac{1}{4}$ согласно R2. Стало быть, снова $\mu'(v) \geq 5 - 9 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{4} = 0$, что и требовалось.

Случай 4: $12 \leq d(v) \leq 15$. Здесь R4e не применимо к v, поэтому v шлет не более $\frac{1}{2}$ через каждую инцидентную грань согласно R4a,b, а значит, $\mu'(v) \geq$

$d(v) - 6 - d(v) \times \frac{1}{2} = \frac{d(v)-12}{2} \geq 0$.

Случай 5: $16 \leq d(v) \leq 17$. Заметим, что v отдает не более $\frac{2}{3}$ через каждую 3-грань и только на симплициальную 5-вершину. Если v не дает ничего через не менее чем одну инцидентную ей грань, то $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - (d(v) - 1) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-16}{3} = 0$ по R1, R4.

Если v смежна с несимплициальной 5-вершиной v_2, то v_2 не получает от v ничего, а каждая из вершин v_1, v_3 получает от v не более $\frac{1}{3}$ по R4a или R4e, откуда $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - 2 \times \frac{1}{3} - (d(v) - 2) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-16}{3} \geq 0$.

Поэтому далее можно считать, что v симплициальная и каждая грань уносит от v некоторый положительный заряд, откуда следует, что каждая грань при v инцидентна 5-вершине и все 5-вершины, смежные с v, симплициальны.

Таким образом, $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-18}{3}$, и имеем дефицит $\frac{1}{3}$ для 17-вершины и $\frac{2}{3}$ для 16-вершины по отношению к передаче заряда $\frac{2}{3}$ через грань.

Пусть $S_k = v_1, \ldots, v_k$ — последовательность соседей вершины v с $d(v_1) \geq 6$, $d(v_k) \geq 6$, при этом $d(v_i) = 5$ для всех $2 \leq i \leq k-1$ и $k \geq 3$, а $f_1, \ldots, f_{k-1}$ — соответствующие грани. (Не исключено, что $S_k = S_{d(v)}$, что возможно в случае, когда v имеет в точности одного 6^+-соседа.) Будем говорить, что последовательность граней $f_1, \ldots, f_{k-1}$ *экономит* ε по отношению к уровню $\frac{2}{3}$, если эти грани в общей сумме уносят от v заряд $(k-1) \times \frac{2}{3} - \varepsilon$.

Замечание 9. Только v_2 и v_{k-1} в S_k могут получить заряд $\frac{2}{3}$ от v по R4e, тогда как каждая другая из 5-вершин v_i получает в точности $\frac{1}{4}$ от v через каждую инцидентную грань. Таким образом, если $k \geq 5$, то v_2 получает не более 1, а v_3 — $\frac{1}{2}$ от v через инцидентные грани.

Замечание 10. Если v полностью окружена 5-вершинами, то $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - \frac{d(v)}{2} = \frac{d(v)-12}{2} > 0$ по R4a, следовательно, далее можно считать, что окрестность вершины v разбита на цепи вида S_k.

(P1) Если $k = 3$, то $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Действительно, здесь v_2 получает $\frac{1}{2}$ через каждую из граней v_1vv_2 и v_2vv_3 по R4b, т. е. $\varepsilon = 2 \times \frac{2}{3} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

(P2) Если $k = 4$, то $\varepsilon = 0$.

Теперь каждая из v_2 и v_3 получает не более 1 от v по замечанию 9, откуда $\varepsilon = 3 \times \frac{2}{3} - 2 = 0$.

(P3) Если $k = 5$, то $\varepsilon = \frac{2}{3}$.

Пусть $w_1, \ldots, w_4$ — соседи вершин $v_1, \ldots, v_5$ такие, что найдутся грани $v_iw_iv_{i+1}$, где $1 \leq i \leq 4$.

Если v_2 получает 1 по R4e, то $d(w_1) \leq 6$ и $d(w_2) \leq 6$. Следовательно, $d(w_3) \geq 12$ ввиду отсутствия $(5, 6, 6, 5, \infty)$-вершин в P, а это значит, что v_4 смежна с двумя 11^+-вершинами, поэтому v_4 получает $\frac{1}{2}$ от v через f_4 и $\frac{1}{4}$ — через f_3 по R4a, R4b. Кроме того, v_4 отдает $\frac{1}{4}$ вершине v по R5, откуда $\varepsilon = 4 \times \frac{2}{3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$.

Если R4e не применяется к v, то $\varepsilon = 4 \times \frac{2}{3} - 4 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ по R4a, R4b.

(P4) Если $k = 6$, то $\varepsilon = \frac{1}{3}$.

Здесь каждая из v_2 и v_5 получает не более 1, тогда как каждая из v_3 и v_4 получает $\frac{1}{2}$ от v по замечанию 9, значит, $\varepsilon = 5 \times \frac{2}{3} - 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

(P5) Если $k = 7$, то $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Теперь имеем $\varepsilon = 6 \times \frac{2}{3} - 2 \times 1 - 3 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ согласно замечанию 9.

(P6) Если $k \geq 8$, то $\varepsilon \geq \frac{2}{3}$.

Аналогично имеем $\varepsilon = (k-1) \times \frac{2}{3} - 2 \times 1 - (k-4) \times \frac{1}{2} = \frac{k-4}{6} \geq \frac{2}{3}$.

Если $d(v) = 17$, то достаточно предположить, что окрестность вершины v состоит из пар 5-вершин, отделенных друг от друга 6^+-вершинами ввиду (P1)–(P6) (поскольку иначе сразу погасим дефицит в $\frac{1}{3}$), что невозможно благодаря тому, что 17 не делится на 3.

Предположим, что $d(v) = 16$ и $\mu'(v) < 0$. Как следует из (P1)–(P6), в таком случае окрестность вершины v может иметь не более одной из цепей S_{t+2} из t вершин степени 5, где $t \in \{1, 4, 5\}$, а все другие вершины разбиты на пары 5-вершин, отделенных друг от друга 6^+-вершинами. Действительно, если найдутся либо две цепи с $t \in \{1, 4, 5\}$ или не менее одной цепи с $t = 3$ или $t \geq 6$, то можно погасить дефицит $\frac{2}{3}$; противоречие. Но ни один из остальных случаев невозможен из-за неделимости 16 на 3. А именно, если $t = 1$, то остается $16 - 2 = 14$ граней для разбиения их на тройки граней с последовательностью S_4 соседей вершины v, как в (P2), или $16 - 5 = 11$ и $16 - 6 = 10$ граней при $t = 4$ и $t = 5$ соответственно, но и все 16 граней нельзя поделить на тройки вида S_4; противоречие.

Случай 6: $d(v) \geq 18$. Имеем $\mu'(v) \geq d(v) - 6 - d(v) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-18}{3} \geq 0$ по R4.

Таким образом, доказали, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит равенству (1) и завершает доказательство теоремы 6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyeder und Raumeinteilungen // Enzykl. Math. Wiss. (Geometrie). 1922. V. 3AB, N 12. P. 1–139.
2. *Wernicke P.* Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. Bd 58. S. 413–426.
3. *Franklin Ph.* The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44, N 3. P. 225–236.
4. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* An analogue of Franklin's theorem // Discrete Math. 2016. V. 339, N 10. P. 2553–2556.
5. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
6. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
7. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics. New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
8. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra (Russian) // Mat. Eas. SAV (Math. Slovaca). 1963. V. 13. P. 20–34.
9. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
10. *Grünbaum B.* Polytopal graphs. Studies in graph theory. P. II // Stud. Math., Math. Assoc. Amer. 1975. V. 12. P. 201–224.
11. *Jendrol' S., Madaras T.* On light subgraphs in plane graphs of minimal degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
12. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 4-stars at 5-vertices in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 17. P. 1710–1714.
13. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Short cycles of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 1998. V. 8, N 2. P. 159–164.
14. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R.* 5-Stars of low weight in normal plane maps with minimum degree 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2014. V. 34, N 3. P. 539–546.
15. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Легкие и низкие 5-звезды в нормальных плоских картах с минимальной степенью 5 // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 596–602.

16. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Light neighborhoods of 5-vertices in 3-polytopes with minimum degree 5 // Sib. Elektron. Math. Rep. 2016. V. 13. P. 584–591.
17. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Low 5-stars in normal plane maps with minimum degree 5 // Discrete Math. 2017. V. 340, N 2. P. 18–22.
18. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* On light neighborhoods of 5-vertices in 3-polytopes with minimum degree 5 // Discrete Math. 2017. V. 340, N 9. P. 2234–2242.
19. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Nikiforov D.V.* Low minor 5-stars in 3-polytopes with minimum degree 5 and no 6-vertices // Discrete Math. 2017. V. 340, N 7. P. 1612–1616.
20. *Jendrol' S., Madaras T.* Note on an existence of small degree vertices with at most one big degree neighbour in planar graphs // Tatra Mt. Math. Publ. 2005. V. 30. P. 149–153.
21. *Иванова А. О., Никифоров Д. В.* Строение окрестностей 5-вершин в плоских триангуляциях с минимальной степенью 5 // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20, № 2. С. 66–78.
22. *Иванова А. О., Никифоров Д. В.* Комбинаторное строение триангулированных 3-многогранников с минимальной степенью 5 // Сборник статей научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Республики Саха (Якутия), XVII и XVIII Лаврентьевские чтения г. Якутск. Киров: МНЦНИП, 2015. С. 22–27.
23. *Никифоров Д. В.* Строение окрестностей плоских нормальных карт с минимальной степенью 5 // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 1. С. 56–66.
24. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kazak O. N.* Describing neighborhoods of 5-vertices in 3-polytopes with minimum degree 5 and without vertices of degrees from 7 to 11 // Discuss. Math. Graph Theory (accepted). doi:10.7151/dmgt.2024.

Статья поступила 11 мая 2017 г.

Бородин Олег Вениаминович, Иванова Анна Олеговна,
Никифоров Дмитрий Владиславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru, shmgnanna@mail.ru, zerorebelion@mail.ru