УДК 517.98 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ТРУДЫ
2001, том 4, № 2, 42–52

НЕСТАНДАРТНАЯ ОБОЛОЧКА НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА В БУЛЕВОЗНАЧНОМ УНИВЕРСУМЕ

А. Е. Гутман, Д. Б. Рябко

В данной работе некоторые результаты инфинитезимального анализа, касающиеся нормированных пространств и поля вещественных чисел, перенесены на функциональное представление булевозначного универсума. В частности, для произвольного поливерсума над Q доказана равносильность следующих условий: точка $q \in Q$ не σ-изолированна, слой поливерсума над точкой q является счетно-насыщенным, нестандартная оболочка любого нормированного пространства в слое поливерсума над точкой q полна.

Ключевые слова и фразы: булевозначный анализ, инфинитезимальный анализ, нестандартный анализ, поливерсум, нестандартная оболочка.

Одним из важнейших понятий, возникающих в инфинитезимальном анализе применительно к теории нормированных пространств, является понятие нестандартной оболочки нормированного пространства — множества его ограниченных элементов, факторизованного по отношению бесконечной близости (см., например, [3]).

В работе [1] для произвольного булевозначного универсума предложен удобный функциональный аналог — класс сечений соответствующего непрерывного поливерсума. Такая функциональная модель позволяет, в частности, ввести в рассмотрение понятие бесконечной близости элементов нормированного пространства внутри слоя поливерсума и тем самым открыть дополнительную возможность для синтеза методов инфинитезимального и булевозначного анализа.

В связи с этим естественно возникает вопрос о переносе основных результатов классического инфинитезимального анализа на булевозначный универсум. В рамках затронутой нами проблематики одним из ключевых является вопрос о полноте нестандартной оболочки нормированного пространства внутри слоя поливерсума.

В данной работе получен положительный ответ на поставленный вопрос в случае, когда точка компакта, соответствующая рассматриваемому слою, не является σ-изолированной. Полноту нестандартной оболочки удалось доказать благодаря установленному в этой же работе критерию счетной насыщенности слоя поливерсума.

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе приведены некоторые определения и факты, необходимые для дальнейшего изложения.

Символом $\mathbb{V}$ мы обозначаем класс всех множеств и предполагаем, что $\mathbb{V}$ является моделью ZFC (а точнее, NBG; см., например, [2, II.1.3]).

На протяжении всего текста Q — экстремально несвязный компакт. Символом $\mathrm{Clop}(Q)$ обозначают совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, а символом $\mathrm{Clop}(q)$ — совокупность всех открыто-замкнутых подмножеств Q, содержащих точку $q \in Q$. Пусть $V^Q \subset Q \times \mathbb{V}$ — класс-соответствие, на котором задана некоторая топология (см. [1, 1.2]). Класс всех открыто-замкнутых подмножеств V^Q обозначается через $\mathrm{Clop}(V^Q)$. Для каждой точки $q \in Q$ класс $V^Q \cap \big(\{q\} \times \mathbb{V}\big) = \big\{(q,x) \bigm| (q,x) \in V^Q\big\}$ обозначают символом V^q. Соответствие V^Q называют *непрерывным расслоением* над Q, а класс V^q — *слоем* расслоения V^Q в точке q.

Функцию $u\colon D \to V^Q$ называют *сечением* расслоения V^Q над множеством $D \subset Q$, если $u(q) \in V^q$ для всех $q \in D$. Под *непрерывным сечением* расслоения V^Q понимается сечение, являющееся непрерывной функцией. Для любого подмножества $D \subset Q$ символом $C(D, V^Q)$ обозначается класс всех непрерывных сечений V^Q над D.

Как установлено в [1] (предложения 2.3 и 2.5), если выполнены условия

(1) $\forall\, q \in Q \quad \forall\, x \in V^q \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad u(q) = x$;
(2) $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \forall\, A \in \mathrm{Clop}(Q) \quad u(A) \in \mathrm{Clop}(V^Q)$,

то непрерывное расслоение V^Q обладает следующими свойствами:

(i) топология V^Q хаусдорфова;
(ii) для любых $u \in C(Q, V^Q)$ и $q \in Q$ множества $u(A)$ $\big(A \in \mathrm{Clop}(q)\big)$ образуют базу окрестностей точки $u(q)$;
(iii) все элементы $C(Q, V^Q)$ являются открытыми и замкнутыми отображениями;
(iv) топология V^Q экстремально несвязна.

В дальнейшем мы предполагаем, что для каждой точки $q \in Q$ класс V^q представляет собой алгебраическую систему сигнатуры $\{\in\}$.

Для произвольной формулы $\varphi(t_1, \dots, t_n)$ сигнатуры теории множеств и сечений $u_1, \dots, u_n$ расслоения V^Q символом $\big\{\varphi(u_1, \dots, u_n)\big\}$ обозначают множество

$$\big\{q \in \operatorname{dom} u_1 \cap \dots \cap \operatorname{dom} u_n \bigm| V^q \models \varphi\big(u_1(q), \dots, u_n(q)\big)\big\}.$$

Для любого элемента $x \in \mathbb{U}$, где $\mathbb{U}$ — алгебраическая система сигнатуры $\{\in\}$, *спуском* x называется класс $x{\downarrow} := \{y \in \mathbb{U} \mid \mathbb{U} \models y \in x\}$. Если в системе $\mathbb{U}$ истинна аксиома экстенсиональности, то для всех $x, y \in \mathbb{U}$ равенства $x{\downarrow} = y{\downarrow}$ и $x = y$ равносильны. Далее нас в основном будет интересовать случай $\mathbb{U} = V^q$.

Для произвольного сечения $u \in C(Q, V^Q)$ класс $\bigcup_{q \in Q} u(q){\downarrow}$ называют *распаковкой* сечения u и обозначают символом $\llcorner u \lrcorner$.

Непрерывное расслоение V^Q называется (*непрерывным*) *поливерсумом* над Q, если в каждом слое V^q $(q \in Q)$ истинны аксиомы экстенсиональности и регулярности и, кроме того, в дополнение к (1) и (2) выполнены следующие условия:

(3) $\forall\, u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner \in \mathrm{Clop}(V^Q)$;

(4) $\forall\, X \in \mathrm{Clop}(V^Q) \quad \exists\, u \in C(Q, V^Q) \quad \llcorner u \lrcorner = X$.

Для произвольных сечений $u, v \in C(Q, V^Q)$ множества $\{u = v\}$ и $\{u \in v\}$ открыто-замкнуты (см. [1, 3.3]), что позволяет ввести в рассмотрение две класс-функции

$$\|\cdot = \cdot\|,\ \|\cdot \in \cdot\| :\ C(Q, V^Q) \times C(Q, V^Q) \to \mathrm{Clop}(Q),$$

полагая $\|u = v\| = \{u = v\}$ и $\|u \in v\| = \{u \in v\}$.

Несложно убедиться в том, что тройка $\big(C(Q, V^Q),\ \|\cdot = \cdot\|,\ \|\cdot \in \cdot\|\big)$ является отделимой $\mathrm{Clop}(Q)$-значной алгебраической системой.

Как показывает следующая теорема, класс непрерывных сечений поливерсума представляет собой общий вид булевозначного универсума.

Теорема [1, 4.10]. *Пусть Q — стоуновский компакт полной булевой алгебры B.*

(а) *Класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений поливерсума V^Q над Q является булевозначным универсумом над* $\mathrm{Clop}(Q)$.

(б) *Для любого булевозначного универсума $\mathfrak{U}$ над B существует поливерсум V^Q над Q, класс $C(Q, V^Q)$ непрерывных сечений которого изоморфен $\mathfrak{U}$.*

Подробные сведения о непрерывных расслоениях и непрерывном поливерсуме имеются в [1].

Всюду далее $\mathbb{V}^Q$ — непрерывный поливерсум, а $\mathbb{V}^q$ — его слой в точке $q \in Q$, который мы также будем обозначать символом ${}^q\mathbb{V}$. (Заметим, что ${}^q\mathbb{V}$ представляет собой модель ZFC.)

Условимся обозначать символами $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ множества вещественных и натуральных чисел $(0 \notin \mathbb{N})$, а символами $\mathcal{R}$ и $\mathcal{N}$ — элементы $C(Q, \mathbb{V}^Q)$, являющиеся в $C(Q, \mathbb{V}^Q)$ множествами вещественных и натуральных чисел. Напомним, что $\mathcal{N} = \mathbb{N}^\wedge$, где $(\cdot)^\wedge$ — каноническое вложение $\mathbb{V}$ в $C(Q, \mathbb{V}^Q)$

(см. [2, II.2.2.7]). Введем также обозначения ${}^q\mathbb{R} = \mathcal{R}(q)$, ${}^q\mathbb{N} = \mathcal{N}(q)$ и для числа $\alpha \in \mathbb{R}$ символом ${}^q\alpha$ условимся обозначать элемент $\alpha^\wedge(q) \in {}^q\mathbb{V}$.

Если элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ полем или упорядоченным множеством, то на $X{\downarrow}$ можно естественным образом ввести операции поля или соответственно отношение порядка. Например, для $\alpha, \beta \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ сумма $\alpha+\beta$ определяется как такой элемент $\gamma \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$, что ${}^q\mathbb{V} \models (\gamma = \alpha+\beta)$. Легко проверить, что спуск поля будет полем. Если элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ векторным пространством над полем $F \in {}^q\mathbb{V}$, то $X{\downarrow}$ окажется векторным пространством над полем $F{\downarrow}$.

Лемма 1. *Для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$ элемент ${}^q\alpha \in {}^q\mathbb{V}$ является числом внутри ${}^q\mathbb{V}$, т. е. ${}^q\alpha \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$. Функция ${}^q(\cdot)\colon \mathbb{R} \to {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ инъективна и сохраняет отношение порядка и операции сложения и умножения. Кроме того, $\mathbb{N}^\wedge(q) = {}^q\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^\wedge(q) \subset {}^q\mathbb{R}$ внутри ${}^q\mathbb{V}$.*

Доказательство этой леммы несложно провести, используя свойства канонического вложения $(\cdot)^\wedge$, приведенные в [2], и опираясь на классическое определение числовых множеств, при котором натуральными числами считаются конечные ординалы, рациональные числа вводятся как классы эквивалентности пар целых чисел, а вещественные числа определяются как дедекиндовы сечения множества рациональных чисел.

Условимся в дальнейшем отождествлять элементы $\alpha \in \mathbb{R}$ и ${}^q\alpha \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ и тем самым считать, что $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$.

Пусть $\mathbb{U}$ — модель сигнатуры теории множеств, а элемент $P \in \mathbb{U}$ является внутри $\mathbb{U}$ отношением (т. е. множеством пар). Рассмотрим следующее свойство последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $(\operatorname{dom} P){\downarrow}$: если для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $y_n \in \mathbb{U}$ такой, что

$$\mathbb{U} \models \big((x_1, y_n), \dots, (x_n, y_n) \in P\big),$$

то существует элемент $y \in \mathbb{U}$, для которого

$$\mathbb{U} \models \big((x_n, y) \in P\big) \quad \text{при всех } n \in \mathbb{N}.$$

Отношение P называется *счетно-насыщенным*, если любая последовательность элементов $(\operatorname{dom} P){\downarrow}$ обладает указанным выше свойством. Говорят, что модель $\mathbb{U}$ *счетно-насыщенна*, если любое отношение в $\mathbb{U}$ счетно-насыщенно.

Точка топологического пространства называется *σ-изолированной* (или *P-точкой*), если пересечение любого счетного множества ее окрестностей является окрестностью этой точки.

§ 2. Нестандартная оболочка нормированного пространства

В данном параграфе устанавливается критерий счетной насыщенности слоя поливерсума, предлагаются аналоги некоторых теорем инфинитезимального анализа о поле вещественных чисел и нормированных пространствах и исследуется вопрос о полноте нестандартной оболочки нормированного пространства в слое поливерсума.

Теорема 1. *Класс ${}^q\mathbb{V}$ является счетно-насыщенным тогда и только тогда, когда точка $q \in Q$ не σ-изолированна.*

$\lhd$ Достаточность. Предположим, что точка q не σ-изолированна, и установим счетную насыщенность класса ${}^q\mathbb{V}$.

Пусть P — элемент ${}^q\mathbb{V}$, являющийся отношением внутри ${}^q\mathbb{V}$. Рассмотрим произвольную последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ элементов $(\mathrm{dom}\,P){\downarrow}$ и предположим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется элемент $y_n \in {}^q\mathbb{V}$, удовлетворяющий условию

$$ {}^q\mathbb{V} \models \big((x_1, y_n), \dots, (x_n, y_n) \in P\big). $$

Покажем, что существует элемент $y \in {}^q\mathbb{V}$, для которого ${}^q\mathbb{V} \models \big((x_n, y) \in P\big)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.

Проведем через P сечение $\mathcal{P} \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$, а через x_n и y_n — сечения $u_n, v_n \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$ $(n \in \mathbb{N})$. Определим множества $W_n \in \mathrm{Clop}(Q)$ $(n \in \mathbb{N})$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&W_1 = \|(u_1, v_1) \in \mathcal{P}\|,\\
&W_2 = \|(u_1, v_2), (u_2, v_2) \in \mathcal{P}\| \cap W_1,\\
&\dots\\
&W_n = \|(u_1, v_n), \dots, (u_n, v_n) \in \mathcal{P}\| \cap W_{n-1},\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Случай 1: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} W_n$ не является окрестностью точки q.

Положим $D_1 = W_1 \backslash W_2, \dots, D_n = W_n \backslash W_{n+1}, \dots$ и обозначим через D_0 дополнение замыкания $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ до Q. Множества D_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ образуют разбиение единицы в булевой алгебре $\mathrm{Clop}(Q)$.

Определим сечение $\tilde{v} \in C\big(\bigcup_{n=0}^\infty D_n, \mathbb{V}^Q\big)$, полагая $\tilde{v}|_{D_n} = v_n|_{D_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\tilde{v}|_{D_0} = \varnothing^\wedge|_{D_0}$. Согласно принципу продолжения (см. [1, 3.8]) сечение $\tilde{v}$ (определенное на всюду плотном подмножестве Q) продолжается до сечения $v \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$. Покажем, что элемент $y = v(q)$ искомый. Для этого зафиксируем произвольное число $n \in \mathbb{N}$ и установим включение

$$ q \in \|(u_n, v) \in \mathcal{P}\|. $$

Положим $W_0 = \|(u_n, v) \in \mathcal{P}\| \cap W_n$ и покажем, что q принадлежит замыканию W_0 (а следовательно, $q \in W_0$). Допустим вопреки доказываемому, что некоторая окрестность $W \subset W_n$ точки q не пересекается с W_0. Как нетрудно заметить, $D_m \subset W_0$ для всех $m \geqslant n$. Следовательно, $W \subset W_n \backslash \bigcup_{m \geqslant n} D_m$. С другой стороны, множество

$$W_n \backslash \bigcup_{m \geqslant n} D_m = \bigcap_{m \geqslant n} W_m = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m$$

не является окрестностью точки q.

Случай 2: $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ является окрестностью точки q.

Поскольку точка q не σ-изолированна, существует убывающая последовательность открыто-замкнутых окрестностей $(W'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ точки q такая, что $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W'_n$ не является окрестностью q. Без ограничения общности можно считать, что $W'_n \subset \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Дальнейшее доказательство сводится к повторению рассуждений для случая 1 с заменой W_n на W'_n.

Необходимость. Пусть q — σ-изолированная точка. Покажем, что класс ${}^q\mathbb{V}$ не является счетно-насыщенным.

Пусть P — элемент ${}^q\mathbb{V}$, равный внутри ${}^q\mathbb{V}$ множеству всех пар (x, y) элементов ${}^q\mathbb{N}$ таких, что $x \neq y$. Покажем, что отношение P не является счетно-насыщенным.

Очевидно, ${}^q\mathbb{V} \models \Big(\big({}^q1, {}^q(n+1)\big), \dots, \big({}^qn, {}^q(n+1)\big) \in P\Big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим вопреки доказываемому, что существует элемент $y \in {}^q\mathbb{N}{\downarrow}$, удовлетворяющий соотношению ${}^qn \neq y$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Проведем через y сечение $v \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$. Тогда

$$q \in \big\|v \in \mathbb{N}^\wedge\big\| = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} \big\|v = n^\wedge\big\| = \mathrm{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big\|v = n^\wedge\big\|.$$

Поскольку для каждого $m \in \mathbb{N}$ точка q не принадлежит $\bigcup_{n \leqslant m} \|v = n^\wedge\|$, заключаем, что $q \in \mathrm{cl} \bigcup_{n > m} \|v = n^\wedge\| =: W_m$ для всех $m \in \mathbb{N}$, т. е. $q \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m$. С другой стороны, используя попарную дизъюнктность множеств $\|v = n^\wedge\|$ $(n \in \mathbb{N})$, нетрудно показать, что пересечение $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} W_m$ не является окрестностью точки q, и тем самым получить противоречие с σ-изолированностью точки q. $\triangleright$

Предложение 1. *Для любого множества $C \subset {}^q\mathbb{V}$ существует элемент $\widetilde{C} \in {}^q\mathbb{V}$ такой, что $C \subset \widetilde{C}{\downarrow}$.*

$\triangleleft$ Проведем через каждый элемент $c \in C$ сечение $u_c \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$ и положим $u = \{u_c \mid c \in C\}{\uparrow}$. Ясно, что элемент $\widetilde{C} = u(q)$ искомый. $\triangleright$

Предложение 2. *Для любого конечного множества $C \subset {}^q\mathbb{V}$ существует элемент $\overline{C} \in {}^q\mathbb{V}$ такой, что $C = \overline{C}{\downarrow}$. При этом $\overline{C}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ конечным множеством.*

$\lhd$ Пусть $C = \{x_1, \dots, x_n\} \subset {}^q\mathbb{V}$. Обозначим символом u подъем множества сечений $\{u_1, \dots u_n\} \subset C(Q, \mathbb{V}^Q)$, проведенных соответственно через $x_1, \dots, x_n$, и положим $\overline{C} = u(q)$. Очевидно, $x_1, \dots, x_n \in \overline{C}{\downarrow}$. Покажем, что любой элемент $x \in \overline{C}{\downarrow}$ совпадает с x_i для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. Проведем через x сечение $v \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$. Ясно, что

$$q \in \|v \in u\| = \bigvee_{i=1}^{n} \|v = u_i\| = \bigcup_{i=1}^{n} \|v = u_i\|,$$

а значит, $x = v(q) = u_i(q) = x_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$. $\rhd$

Очевидно, что элемент $\overline{C}$, фигурирующий в формулировке предложения 2, однозначно определяется конечным множеством C. Мы будем называть этот элемент *подъемом* множества C и обозначать его символом $C{\uparrow}$.

Пусть $C \subset {}^q\mathbb{V}$, $D \in {}^q\mathbb{V}$ и $f \colon C \to D{\downarrow}$. Элемент $\bar{f} \in {}^q\mathbb{V}$ будем называть *внутренним продолжением* функции f, если ${}^q\mathbb{V} \models \bar{f} \colon \overline{C} \to D$, где $\overline{C} \in {}^q\mathbb{V}$, $C \subset \overline{C}{\downarrow}$ и ${}^q\mathbb{V} \models \bar{f}(c) = f(c)$ для всех $c \in C$.

Лемма 2. *Пусть точка $q \in Q$ не является σ-изолированной. Если C — счетное подмножество ${}^q\mathbb{V}$ и $D \in {}^q\mathbb{V}$, то любая функция $f \colon C \to D{\downarrow}$ имеет внутреннее продолжение.*

$\lhd$ По предложению 1 найдется такой элемент $\widetilde{C} \in {}^q\mathbb{V}$, что $C \subset \widetilde{C}{\downarrow}$. Пусть $P \in {}^q\mathbb{V}$ является внутри ${}^q\mathbb{V}$ отношением на множестве всех функций из подмножеств $\widetilde{C}$ в D, определенным следующим образом:

$$\big(h, \bar{h}\big) \in P \ \Leftrightarrow \ \bar{h} \text{ — продолжение } h.$$

Пусть $C = \{c_1, \dots, c_n, \dots\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через f_n такой элемент ${}^q\mathbb{V}$, что ${}^q\mathbb{V} \models f_n = \big\{\big(c_n, f(c_n)\big)\big\}$, и положим

$$\bar{f}_n = \big\{(c_1, f(c_1)), \dots, \big(c_n, f(c_n)\big)\big\}{\uparrow}.$$

Ясно, что ${}^q\mathbb{V} \models \big((f_1, \bar{f}_n), \dots, (f_n, \bar{f}_n) \in P\big)$. Тогда из счетной насыщенности класса ${}^q\mathbb{V}$ (гарантируемой теоремой 1) следует существование такого элемента $\bar{f} \in {}^q\mathbb{V}$, что ${}^q\mathbb{V} \models \big((f_n, \bar{f}\,) \in P\big)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, элемент $\bar{f}$ является искомым внутренним продолжением функции f. $\rhd$

Условимся называть элементы ${}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ *внутренними числами.* Внутреннее число λ назовем *стандартным*, если существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что ${}^q\alpha = \lambda$. Заметим, что с учетом принятого ранее соглашения (о включении $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$) мы отождествляем стандартные числа и элементы $\mathbb{R}$.

Ограниченным числом назовем внутреннее число, модуль которого меньше некоторого стандартного числа, и обозначим символом $\mathcal{O}({}^q\mathbb{R})$ множество всех ограниченных чисел. Числа, не являющиеся ограниченными, будем называть *бесконечно большими.*

Внутреннее число λ назовем *бесконечно малым*, если $|\lambda| < \alpha$ для любого стандартного числа $\alpha > 0$. Будем говорить, что два внутренних числа *бесконечно близки*, если их разность бесконечно мала. Отношение бесконечной близости обозначим символом $\approx$. Это отношение является отношением эквивалентности на множестве внутренних чисел. Условимся обозначать символом $[\lambda]$ класс эквивалентности, содержащий внутреннее число λ.

Предложение 3. *Для любого ограниченного числа λ существует единственное стандартное число, бесконечно близкое к λ.*

$\lhd$ Существование. Рассмотрим множества

$$A = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha < \lambda\}, \quad B = \{\beta \in \mathbb{R} \mid \beta > \lambda\}.$$

Из ограниченности числа λ вытекает, что $A, B \neq \varnothing$. Кроме того, $A \cup B = \mathbb{R}$ и $\alpha < \beta$ для любых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$. Положим $\gamma = \sup A = \inf B$. Если $\gamma < \lambda$, то $\gamma \in A$ и, следовательно, $\gamma \approx \lambda$ (поскольку в этом случае γ является наибольшим стандартным числом, меньшим λ). Случай $\gamma > \lambda$ рассматривается аналогично.

Единственность. Если стандартные числа α и β таковы, что $\alpha \neq \beta$ и $\alpha, \beta \approx \lambda$, то число $|\alpha - \beta|$ отлично от нуля и бесконечно мало, что противоречит его стандартности. $\rhd$

Следствие. *Отображение $\alpha \mapsto [\alpha]$ осуществляет биекцию $\mathbb{R}$ на $\mathcal{O}({}^q\mathbb{R})/{\approx}$.*

Для любого ограниченного числа λ бесконечно близкое к нему стандартное число назовем *стандартной частью* λ и обозначим через ${}^\circ\lambda$.

Предложение 4. *Пусть точка $q \in Q$ не является σ-изолированной. Предположим, что спуск элемента $D \in {}^q\mathbb{V}$ содержит множество $\{n \in \mathbb{N} \mid m \leqslant n\}$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует бесконечно большое натуральное число M такое, что внутри ${}^q\mathbb{V}$ справедливо включение*

$$\{n \in {}^q\mathbb{N} \mid m \leqslant n < M\} \subset D.$$

$\lhd$ Достаточно рассмотреть отношение P, заданное внутри ${}^q\mathbb{V}$ правилом

$$(x,y)\in P \;\Leftrightarrow\; \big(x,y\in D\cap {}^q\mathbb{N},\ x<y \text{ и } \{n\in{}^q\mathbb{N}\mid x\leqslant n<y\}\subset D\big),$$

и воспользоваться счетной насыщенностью ${}^q\mathbb{V}$. $\rhd$

Пусть $X\in{}^q\mathbb{V}$ — нормированное пространство над ${}^q\mathbb{R}$ внутри ${}^q\mathbb{V}$. Элемент $x\in X{\downarrow}$ назовем *ограниченным*, если его норма внутри ${}^q\mathbb{V}$ является ограниченным числом. Обозначим символом $\mathcal{O}(X)$ множество всех ограниченных элементов $X{\downarrow}$.

Элементы $x,y\in X{\downarrow}$ будем называть *бесконечно близкими* и писать $x\approx y$, если норма их разности внутри ${}^q\mathbb{V}$ бесконечно мала. Отношение бесконечной близости представляет собой отношение эквивалентности на множестве $X{\downarrow}$. Класс эквивалентности, содержащий элемент $x\in X{\downarrow}$, условимся обозначать через $[x]$.

Обозначим фактор-множество $\mathcal{O}(X)/{\approx}$ символом $\mathbf{X}$ и положим

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=[x+y],\quad \lambda\mathbf{x}=[\lambda x],\quad \|\mathbf{x}\|={}^\circ\|x\|$$

для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{X}$ и $\lambda\in\mathbb{R}$, где x и y — произвольные представители классов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и $\|x\|$ — норма элемента x внутри ${}^q\mathbb{V}$. Легко показать, что введенные операции определены корректно и превращают $\mathbf{X}$ в нормированное пространство над $\mathbb{R}$, которое мы будем обозначать символом $\widehat{X}$ и называть *нестандартной оболочкой* нормированного пространства X.

Теорема 2. *Пусть точка $q\in Q$ не является σ-изолированной и $X\in{}^q\mathbb{V}$ — нормированное пространство внутри ${}^q\mathbb{V}$. Тогда нормированное пространство $\widehat{X}$ полно.*

$\lhd$ Пусть $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в пространстве $\widehat{X}$ и $x_n\in\mathbf{x}_n$ для всех $n\in\mathbb{N}$. Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ найдется число $n_k\in\mathbb{N}$ такое, что ${}^q\mathbb{V}\models\|x_n-x_m\|<1/k$ для всех $n,m>n_k$. Рассмотрим внутреннее продолжение $(x_n)_{n\in\widetilde{N}}\in{}^q\mathbb{V}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, понимаемой как функция из $\mathbb{N}$ в $X{\downarrow}$ (такое продолжение существует в силу леммы 2). Можно считать, что ${}^q\mathbb{V}\models\widetilde{N}\subset{}^q\mathbb{N}$.

Покажем, что найдется бесконечно большое число $\overline{m}\in{}^q\mathbb{N}{\downarrow}$, принадлежащее $\widetilde{N}{\downarrow}$ и удовлетворяющее внутри ${}^q\mathbb{V}$ неравенству $\|x_n-x_{\overline{m}}\|<1/k$ для всех $k,n\in\mathbb{N}$, $n>n_k$. (Тем самым мы установим, что элемент $x_{\overline{m}}\in X{\downarrow}$ является ограниченным и последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к $[x_{\overline{m}}]$.)

Для каждого $k\in\mathbb{N}$ обозначим через E_k элемент ${}^q\mathbb{V}$, удовлетворяющий внутри ${}^q\mathbb{V}$ соотношению

$$E_k=\{m\in\widetilde{N}\mid \|x_i-x_j\|<1/k \text{ для всех } i,j\in\widetilde{N} \text{ таких, что } n_k<i,j\leqslant m\}.$$

Заметим, что $\mathbb{N} \subset E_k{\downarrow}$, а следовательно, согласно предложению 4 имеет место включение

$$\{m \in {}^q\mathbb{N}{\downarrow} \mid m \leqslant m_k\} \subset E_k{\downarrow}$$

для некоторого бесконечно большого числа $m_k \in \widetilde{N}{\downarrow}$. Можно считать, что $m_{k+1} < m_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Благодаря счетной насыщенности ${}^q\mathbb{V}$ существует бесконечно большое число $m \in \widetilde{N}{\downarrow}$ такое, что $m < m_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $m \in E_k{\downarrow}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, а значит, внутреннее число $\overline{m} = m$ искомое. $\rhd$

Предложение 5. *Если точка $q \in Q$ является σ-изолированной, то в ${}^q\mathbb{V}$ все вещественные числа стандартны.*

$\lhd$ Сначала покажем, что в ${}^q\mathbb{V}$ нет нестандартных натуральных чисел. Предположим вопреки доказываемому, что существует сечение $u \in C(Q, \mathbb{V}^Q)$, для которого $C(Q, \mathbb{V}^Q) \models u \in \mathcal{N}$ и $u(q) \neq {}^q k$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Из σ-изолированности точки q следует, что множество $W = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \|u \neq k^\wedge\|$ является окрестностью q. С другой стороны,

$$Q = \|u \in \mathcal{N}\| = \bigvee_{k \in \mathbb{N}} \big\|u = k^\wedge\big\| = \mathrm{cl} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \big\|u = k^\wedge\big\|,$$

а значит, множество $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \|u = k^\wedge\| = Q \backslash W$ всюду плотно в Q, что невозможно.

Из доказанного выше следует, что в ${}^q\mathbb{V}$ нет бесконечно больших вещественных чисел. Для завершения доказательства осталось заметить, что если $\lambda \in {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$ — нестандартное ограниченное число, то число $1/(\lambda - {}^\circ\lambda)$ бесконечно большое. $\rhd$

Предложение 5 означает, что в случае σ-изолированной точки q справедливы равенства ${}^q\mathbb{R}{\downarrow} = \mathbb{R}$ и ${}^q\mathbb{N}{\downarrow} = \mathbb{N}$ (с учетом принятого ранее соглашения о включении $\mathbb{R} \subset {}^q\mathbb{R}{\downarrow}$).

Докажем теперь утверждение, обратное к теореме 2.

Предложение 6. *Пусть $q \in Q$ — σ-изолированная точка. Тогда найдется элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^q\mathbb{V}$ нормированным пространством, для которого нормированное пространство $\widehat{X}$ не полно.*

$\lhd$ Рассмотрим элемент $X \in {}^q\mathbb{V}$, являющийся внутри ${}^q\mathbb{V}$ неполным нормированным пространством, и покажем, что его нестандартная оболочка $\widehat{X}$ не полна. Из предложения 5 вытекает, что бесконечная близость элементов $X{\downarrow}$ равносильна их равенству, а значит, элементы $\widehat{X}$ представляют собой синглитоны $\{x\}$ ограниченных элементов $x \in X{\downarrow}$.

Пусть s — элемент ${}^q\mathbb{V}$, который внутри ${}^q\mathbb{V}$ является фундаментальной последовательностью элементов X, не имеющей предела. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ элементов $X{\downarrow}$, полагая x_n равным ${}^q n$-му члену последовательности s внутри ${}^q\mathbb{V}$. Используя предложение 5, легко показать, что $\big(\{x_n\}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность элементов $\widehat{X}$. С другой стороны, эта последовательность не может иметь предела, поскольку из ее сходимости к элементу $\{x\} \in \widehat{X}$ с очевидностью вытекала бы сходимость последовательности s к элементу x внутри ${}^q\mathbb{V}$. ▷

В заключение сформулируем теорему, объединяющую основные результаты данной работы.

Теорема 3. *Пусть ${}^q\mathbb{V}$ — слой в точке $q \in Q$ непрерывного поливерсума над экстремально несвязным компактом Q. Следующие утверждения эквивалентны*:

(а) *точка q не σ-изолированна*;
(б) *модель ${}^q\mathbb{V}$ является счетно-насыщенной*;
(в) *нестандартная оболочка любого нормированного пространства внутри ${}^q\mathbb{V}$ полна.*

Литература

1. *Гутман А. Е., Лосенков Г. А.* Функциональное представление булевозначного универсума // *Мат. труды.* 1998. Т. 1, № 1. С. 54–77.

2. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.* Новосибирск: Наука, 1990.

3. *Hurd A. E., Loeb P. A. An Introduction to Nonstandard Real Analysis.* Orlando, Florida 32887: Academic Press, Inc., 1985.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: gutman@math.nsc.ru

Статья поступила
19 февраля 2001 г.

Рябко Даниил Борисович

Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090 Новосибирск, РОССИЯ.
E-mail: ryabko@math.nsc.ru