УДК 517.9:541.124:541.126
DOI 10.17377/PAM.2017.17.5

А. Е. Гутман, Л. И. Кононенко

ФОРМАЛИЗАЦИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ *

Показано, как бинарные соответствия могут быть использованы для простой формализации понятия задачи, определения основных компонентов задач, их свойств и конструкций (условие задачи, ее данные и искомые, разрешимость и однозначная разрешимость задачи, обратная задача, композиция и ограничение задач). Рассмотрены топологические задачи и связанные с ними понятия устойчивости и корректности. Особое внимание уделено задачам с параметрами. В качестве иллюстрации рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс химической кинетики, а также обратная к ней задача.

Ключевые слова: обратная задача, бинарное соответствие, разрешимость, композиция, устойчивость, корректность, дифференциальное уравнение, химическая кинетика.

1. Формализация понятия задачи

Определение 1. *Задачей* условимся называть любое соответствие между элементами двух множеств, т. е. тройку $P = (A, B, C)$, где A и B — произвольные множества и $C \subseteq A \times B$. Множества A, B и C (т. е. область отправления, область прибытия и график соответствия P) обозначаются символами $\operatorname{Dom} P$, $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Gr} P$ и называются соответственно *областью данных*, *областью искомых* и *условием* задачи P. Включение $(a, b) \in \operatorname{Gr} P$ записывается в виде $P(a, b)$ и трактуется как условие, выражающее соответствие искомого b данному a. Таким образом, для задачи P подразумевается следующее неформальное прочтение:

Для данных $a \in \operatorname{Dom} P$ найти $b \in \operatorname{Im} P$, удовлетворяющие условию $P(a, b)$.

Образ $P[X]$ и *прообраз* $P^{-1}[Y]$ произвольных подмножеств $X \subseteq \operatorname{Dom} P$ и $Y \subseteq \operatorname{Im} P$ относительно соответствия P определяются традиционными формулами

$$P[X] = \{b \in \operatorname{Im} P : (\exists\, x \in X)\ P(x, b)\},$$
$$P^{-1}[Y] = \{a \in \operatorname{Dom} P : (\exists\, y \in Y)\ P(a, y)\}.$$

Определение 2. *Решением* задачи P для данного $a \in \operatorname{Dom} P$ называется любое искомое $b \in \operatorname{Im} P$, удовлетворяющее условию $P(a, b)$. Множество всех решений задачи P для данного a обозначается символом $P[a]$. Таким образом,

$$P[a] = P[\{a\}] = \{b \in \operatorname{Im} P : P(a, b)\}, \quad a \in \operatorname{Dom} P.$$

Задача P называется *разрешимой для* $a \in \operatorname{Dom} P$, если $P[a] \neq \varnothing$, т. е. для данного a задача P имеет хотя бы одно решение. Множество $\{a \in \operatorname{Dom} P : P[a] \neq \varnothing\}$ (т. е. область определения соответствия P) называется *областью разрешимости* задачи P и обозначается символом

* Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-00745).

$\operatorname{dom} P$. В случае $\operatorname{dom} P = \operatorname{Dom} P$ задачу P называют *разрешимой* или, точнее, *всюду разрешимой.*

Определение 3. Говорят, что задача P *однозначно разрешима для* $a \in \operatorname{Dom} P$, если для данного a задача P имеет единственное решение, т. е. $P[a] = \{b\}$ для некоторого $b \in \operatorname{Im} P$. Соответствующее решение b условимся обозначать через $P^{\mathrm{s}}(a)$. Таким образом, если задача P однозначно разрешима для a, то

$$P[a] = \{P^{\mathrm{s}}(a)\}.$$

Множество $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$, состоящее из всех данных $a \in \operatorname{Dom} P$, для которых задача P однозначно разрешима, называется *областью однозначной разрешимости* задачи P, а функция

$$P^{\mathrm{s}} : \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \to \operatorname{Im} P,$$

сопоставляющая с каждым элементом $a \in \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ соответствующее решение $P^{\mathrm{s}}(a)$, называется *функцией решения* задачи P. Очевидно, $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \subseteq \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{Dom} P$. Говорят, что задача P *однозначно разрешима на множестве* $D \subseteq \operatorname{Dom} P$, если $D \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$. Задачу P называют *однозначно разрешимой* или, точнее, *всюду однозначно разрешимой*, если она однозначно разрешима на $\operatorname{Dom} P$, т. е. $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} = \operatorname{Dom} P$. В этом случае соответствие P является всюду определенной функцией и тем самым совпадает с P^{s}.

Определение 4. *Обратной задачей* по отношению к задаче P называется обратное соответствие

$$P^{-1} := \big(\operatorname{Im} P, \operatorname{Dom} P, (\operatorname{Gr} P)^{-1}\big), \quad \text{где } (\operatorname{Gr} P)^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in \operatorname{Gr} P\}.$$

Определение 5. *Композицией задач* P и Q называется их композиция как соответствий, которая представляет собой задачу $Q \circ P := (\operatorname{Dom} P, \operatorname{Im} Q, \operatorname{Gr} Q \circ \operatorname{Gr} P)$ с условием

$$\operatorname{Gr} Q \circ \operatorname{Gr} P = \big\{(a,c) \in \operatorname{Dom} P \times \operatorname{Im} Q : (\exists\, b \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Dom} Q)\ P(a,b)\ \&\ Q(b,c)\big\}.$$

Композиция $Q \circ P$ обычно рассматривается в случае $\operatorname{Im} P = \operatorname{Dom} Q$.

Определение 6. *Ограничением* или *сужением* задачи P на подмножества $A \subseteq \operatorname{Dom} P$ и $B \subseteq \operatorname{Im} P$ называется задача $P\Big|_A^B := \big(A, B, \operatorname{Gr} P \cap (A \times B)\big)$. Частными случаями ограничений служат $P|_A := P\Big|_A^{\operatorname{Im} P}$ и $P|^B := P\Big|_{\operatorname{Dom} P}^B$.

Ограничение задачи можно определить посредством композиции с соответствующими задачами вложения и сужения. Для любых множеств X и Y рассмотрим задачу $\operatorname{Id}_X^Y := (X, Y, I_X^Y)$, где

$$I_X^Y = \{(z,z) : z \in X \cap Y\} = \{(x,y) \in X \times Y : x = y\}.$$

Тогда для произвольной задачи P и любых подмножеств $A \subseteq \operatorname{Dom} P$ и $B \subseteq \operatorname{Im} P$ справедливы равенства

$$P|_A = P \circ \operatorname{Id}_A^{\operatorname{Dom} P}, \quad P|^B = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}^B \circ P, \quad P\Big|_A^B = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}^B \circ P \circ \operatorname{Id}_A^{\operatorname{Dom} P}.$$

Определение 7. Под *изоморфизмом* между задачами P и Q понимается такая пара (f, g) биективных отображений $f : \operatorname{Dom} P \to \operatorname{Dom} Q$, $g : \operatorname{Im} P \to \operatorname{Im} Q$, что

$$\operatorname{Gr} Q = \big\{\big(f(a), g(b)\big) : (a,b) \in \operatorname{Gr} P\big\}.$$

Задачи называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

Определение 8. Задачу P условимся называть *топологической*, если ее область данных $\mathrm{Dom}\,P$ и область искомых $\mathrm{Im}\,P$ снабжены какими-либо топологиями, т. е. являются топологическими пространствами. Изоморфизм (f, g) между топологическими задачами называется *топологическим изоморфизмом*, если каждое из отображений f и g является топологическим изоморфизмом (т. е. гомеоморфизмом).

Все вводимые здесь понятия, связанные с топологией и непрерывностью, имеют естественные аналоги для случая равномерности и равномерной непрерывности. (Примером равномерного пространства служит любое метрическое и, в частности, нормированное пространство.) Мы не будем приводить соответствующие уточнения, считая их достаточно очевидными.

Определение 9. Топологическая задача P называется *устойчивой в точке* $a \in \mathrm{dom}\,P$, если соответствие P полунепрерывно сверху в этой точке, т. е. для любой окрестности V множества $P[a]$ в $\mathrm{Im}\,P$ прообраз $P^{-1}[V]$ является окрестностью точки a в $\mathrm{dom}\,P$. Говорят, что задача P *устойчива на множестве* $D \subseteq \mathrm{dom}\,P$, если P устойчива в каждой точке $a \in D$. Задачу P называют *устойчивой* или, точнее, *всюду устойчивой*, если P устойчива на $\mathrm{dom}\,P$.

В случае, когда a является внутренней точкой $\mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ относительно $\mathrm{dom}\,P$ (т. е. существует такое открытое множество $G \subseteq \mathrm{Dom}\,P$, что $a \in G \cap \mathrm{dom}\,P \subseteq \mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$), устойчивость задачи P в a равносильна непрерывности функции P^{s} в a. Аналогично, если множество D лежит во внутренности $\mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ относительно $\mathrm{dom}\,P$ (т. е. существует такое открытое множество $G \subseteq \mathrm{Dom}\,P$, что $D \subseteq G \cap \mathrm{dom}\,P \subseteq \mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$), то устойчивость задачи P на D равносильна непрерывности функции P^{s} на D. В частности, устойчивость однозначно разрешимой задачи равносильна ее непрерывности.

Определение 10. Топологическая задача P называется *корректной* (или, точнее, *локально корректной*) *в точке* $a \in \mathrm{Dom}\,P$, если a является внутренней точкой $\mathrm{dom}\,P^{\mathrm{s}}$ и задача P устойчива в точке a. Иными словами, задача корректна в точке a, если при данных, достаточно близких к a, она имеет единственное решение, причем непрерывно зависящее от данных при стремлении к a. Говорят, что задача P *корректна* (или, точнее, *условно корректна*) *на множестве* $D \subseteq \mathrm{Dom}\,P$, если P корректна в каждой точке $a \in D$. Задачу P называют *корректной*, если P корректна на $\mathrm{Dom}\,P$. Таким образом, корректность задачи означает ее однозначную разрешимость и устойчивость (или, что то же самое, непрерывность).

Определение 11. Под семейством $(v_i)_{i \in I}$ традиционно понимается определенная на I функция, а запись v_i символизирует значение этой функции в точке $i \in I$. Для произвольного семейства $(V_i)_{i \in I}$ символом $\prod_{i \in I} V_i$ обозначается соответствующее декартово произведение — совокупность всех таких семейств $(v_i)_{i \in I}$, что $v_i \in V_i$ для каждого индекса $i \in I$. Для любых $\pi : X \to \prod_{i \in I} V_i$, $i \in I$ и $J \subseteq I$ вводятся в рассмотрение функции $\pi_i : X \to V_i$ и $\pi_J : X \to \prod_{j \in J} V_j$, действующие согласно формулам $\pi_i(x) := \pi(x)_i \in V_i$ и $\pi_J(x) := \pi(x)|_J \in \prod_{j \in J} V_j$ для всех $x \in X$.

Определение 12. *Параметризацией* множества X называется любое инъективное отображение π, определенное на $\mathrm{Dom}\,\pi := \mathrm{dom}\,\pi = X$ и действующее в декартово произведение $\mathrm{Im}\,\pi := \prod_{i \in I} V_i$ какого-либо семейства $(V_i)_{i \in I}$. При этом I называется *множеством параметров* и обозначается символом $\mathrm{Par}\,\pi$, элементы $i \in \mathrm{Par}\,\pi$ именуются *параметрами*, множество

$\operatorname{Im}\pi_i := V_i$ называется *областью значений параметра* i, а элемент $\pi_i(x) \in \operatorname{Im}\pi_i$ — *значением параметра* i для объекта $x \in X$. Произведение $\prod_{j\in J} V_j$ называется *областью значений набора параметров* $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$ и обозначается $\operatorname{Im}\pi_J$.

Отметим, что область значений $\operatorname{Im}\pi_i$ параметра i не обязана совпадать с совокупностью $\operatorname{im}\pi_i = \pi_i[X]$ всевозможных значений этого параметра, т. е. включение $\operatorname{im}\pi_i \subseteq \operatorname{Im}\pi_i$ может быть строгим. В случае равенства $\operatorname{im}\pi_i = \operatorname{Im}\pi_i$ область значений параметра i называется *точной*.

Множество, снабженное какой-либо параметризацией, называется *параметризованным множеством*. При этом параметризация множества X по умолчанию обозначается символом π или, если необходимо уточнение, символом π^X.

Определение 13. Рассматривая параметризацию π топологического пространства X, естественно снабжать множество $\operatorname{Im}\pi_J$, где $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, образом топологии X относительно π_J, т. е. считать открытыми те подмножества $U \subseteq \operatorname{Im}\pi_J$, прообраз $\pi_J^{-1}[U]$ которых открыт в X. В этом случае π оказывается непрерывным отображением X в $\operatorname{Im}\pi$, а также топологическим изоморфизмом между X и $\operatorname{im}\pi$.

Области $\operatorname{Im}\pi_i$ значений параметров $i \in \operatorname{Par}\pi$ обычно имеют собственные естественные топологии, относительно которых отображения π_i непрерывны. В противном случае $\operatorname{Im}\pi_i$ можно снабдить образом топологии X относительно π_i или топологией, индуцированной из $\operatorname{Im}\pi$, в которой открытыми подмножествами $\operatorname{Im}\pi_i$ служат множества вида $\{u_i : u \in U\}$, где U открыто в $\operatorname{Im}\pi$.

Области значений параметров часто являются банаховыми пространствами. В этом случае параметризованные топологические пространства во многом аналогичны банаховым расслоениям (см., например, [1]), где область определения I расслоения V играет роль множества параметров, а слой $V(i)$ служит областью значений параметра $i \in I$.

Определение 14. Задачу P условимся называть *параметризованной* (или задачей *с параметрами*), если ее область данных $\operatorname{Dom} P$ и область искомых $\operatorname{Im} P$ являются параметризованными множествами. Любую задачу можно считать параметризованной, если условиться снабжать не параметризованные области X тривиальными параметризациями с единственным параметром: $\pi_1(x) = x$ для всех $x \in X$.

Как легко видеть, пара (π^A, π^B) представляет собой изоморфизм между параметризованной задачей (A, B, C) и задачей (A', B', C'), где $A' = \operatorname{im}\pi^A$, $B' = \operatorname{im}\pi^B$ и $C' = \big\{\big(\pi^A(a), \pi^B(b)\big) : (a, b) \in C\big\}$. Если, кроме того, задача (A, B, C) топологическая, то таковыми являются задача (A', B', C') и изоморфизм (π^A, π^B).

Определение 15. Пусть π — параметризация множества A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, $J' := \operatorname{Par}\pi\backslash J$. Символом $\operatorname{Res}_J^a(A)$ обозначается задача $(\operatorname{Im}\pi_J, A, R_J^a)$, где

$$R_J^a = \{(v, b) : v \in \operatorname{Im}\pi_J,\ b \in A,\ \pi_J(b) = v,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

т. е. задача восстановления элемента A по данным значениям параметров J при фиксированных значениях остальных параметров. В случае $J = \{i\}$ вместо $\operatorname{Res}_{\{i\}}^a(A)$ условимся писать $\operatorname{Res}_i^a(A)$.

В силу инъективности параметризации π задача $\mathrm{Res}^a_J(A)$ однозначно разрешима на множестве

$$\operatorname{dom}\mathrm{Res}^a_J(A) = \{\pi_{J'}(b) : b \in A,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

и ее решение для любого $v \in \operatorname{dom}\mathrm{Res}^a_J(A)$ определяется формулой

$$\mathrm{Res}^a_J(A)^{\mathrm{s}}(v) = \pi^{-1}\big(v \otimes \pi_{J'}(a)\big), \quad \text{где } \big(v \otimes w\big)_i = \begin{cases} v_i, & \text{если } i \in J; \\ w_i, & \text{если } i \notin J. \end{cases}$$

Определение 16. Пусть π — параметризация топологического пространства A, $a \in A$, $J \subseteq \subseteq \operatorname{Par}\pi$. Говорят, что набор параметров J *локально свободен* в точке a, если область разрешимости $\operatorname{dom}\mathrm{Res}^a_J(A)$ задачи $\mathrm{Res}^a_J(A)$ является окрестностью точки $\pi_J(a)$ в топологическом пространстве $\operatorname{Im}\pi_J$. Таким образом, для локально свободного набора параметров реализуемы любые достаточно малые изменения значений при фиксированных значениях остальных параметров. Параметр i называется *локально свободным* в точке a, если таковым является набор $\{i\}$.

Определение 17. Пусть P — параметризованная топологическая задача, $a \in \operatorname{dom}P$, $J \subseteq \subseteq \operatorname{Par}\pi$, где $\pi := \pi^{\operatorname{dom}P}$. Задача P называется *устойчивой в точке a относительно J*, если задача $P{\circ}\mathrm{Res}^a_J(\operatorname{dom}P)$ устойчива в точке $\pi_J(a)$. Устойчивость задачи в a относительно J обычно рассматривается в случае, когда набор параметров J локально свободен в точке a.

Говорят, что задача P *устойчива на множестве $D \subseteq \operatorname{dom}P$ относительно J*, если P устойчива в каждой точке $a \in D$ относительно J. Задачу P называют *устойчивой относительно J*, если P устойчива на $\operatorname{dom}P$ относительно J. В случае $J = \{i\}$ говорят об *устойчивости относительно параметра i*.

При рассмотрении естественной топологии на $\operatorname{im}\pi_J$ в случае, когда a является внутренней точкой $\operatorname{dom}P^{\mathrm{s}}$ относительно $\operatorname{dom}P$, устойчивость однозначно разрешимой задачи P в точке a относительно J равносильна непрерывности в точке a функции

$$v \in \pi_J[\operatorname{dom}R] \;\mapsto\; P^{\mathrm{s}}\big(R^{\mathrm{s}}(v)\big), \quad \text{где } R := \mathrm{Res}^a_J(\operatorname{Dom}P).$$

Последнее, в свою очередь, означает непрерывную зависимость решения $P^{\mathrm{s}}(b)$ от значений $\pi_J(b)$ параметров J при стремлении $\pi_J(b)$ к $\pi_J(a)$ с соблюдением равенства $\pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)$.

Определение 18. Пусть P — параметризованная топологическая задача, $i \in \operatorname{Par}\pi$. О задаче P говорят как о «задаче с малым параметром i», если $\operatorname{Im}\pi_i \subseteq \mathbb{R}$, число 0 является предельной точкой $\operatorname{Im}\pi_i$, и рассматривается вопрос о каком-либо асимптотическом аспекте задачи P при значениях параметра i, близких к 0, — например, об устойчивости P относительно i в точке a, удовлетворяющей условию $\pi_i(a) = 0$.

2. Пример из химической кинетики

В качестве иллюстрации мы рассмотрим сингулярно возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, возникающую при моделировании процессов химической кинетики и горения (см., например, [2; 3]).

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y — область в $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \leqslant \varepsilon_0\}$, $F := C(X \times Y \times T \times E,\ \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E,\ \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу P с областью данных $\operatorname{Dom} P = F \times G \times E$, областью искомых $\operatorname{Im} P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$P\bigl((f, g, \varepsilon), (x, y)\bigr) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f\bigl(x(t), y(t), t, \varepsilon\bigr), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\bigl(x(t), y(t), t, \varepsilon\bigr) \end{cases} \text{для всех } t \in T,$$

где $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$. Рассмотрим также вспомогательную задачу P_0 с областью данных $\operatorname{Dom} P_0 = G$, областью искомых $\operatorname{Im} P_0 = H := Y^{X \times T}$ и условием

$$P_0(g, h) \;\Leftrightarrow\; g\bigl(x, h(x, t), t, 0\bigr) = 0 \text{ для всех } x \in X,\ t \in T.$$

Следующее утверждение установлено в [4].

Теорема 1. *Пусть $f \in F$, $g \in G$ и $h_0 \in H$ удовлетворяют следующим условиям:*

a) *существует такое число $\rho > 0$, что*

$$\{h_0\} = P_0[g] \cap \bigl\{h \in H \,:\, |h(x, t) - h_0(x, t)| < \rho \text{ для всех } x \in X,\ t \in T\bigr\};$$

b) *функции $f|_\Omega$, $g|_\Omega$ и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по всем переменным до порядка 2 включительно, где*

$$\Omega := \{(x, y, t, \varepsilon) \in X \times Y \times T \times E \,:\, |y - h_0(x, t)| < \rho\};$$

c) $\sup\bigl\{\operatorname{Re} \lambda_i(x, t) \,:\, x \in X,\ t \in T,\ i = 1, \ldots, n\bigr\} < 0$, *где $\lambda_i(x, t)$ — собственные числа матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}\bigl(x(t), h_0(x, t), t, 0\bigr)$.*

Тогда существует такое число $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$, что для любых $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ задача P для данных (f, g, ε) имеет интегральное многообразие вида

$$S = \{(x, y, t) \in X \times Y \times T \,:\, y = h_\varepsilon(x, t)\}, \text{ где } h_\varepsilon \in H,$$

движение по которому описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = f\bigl(x(t), h_\varepsilon\bigl(x(t), t\bigr), t, \varepsilon\bigr). \tag{1}$$

Многообразие S является интегральным в том смысле, что для любого решения $(x, y) \in P[(f, g, \varepsilon)]$ включение $\bigl(x(t), y(t), t\bigr) \in S$ для какой-либо точки $t \in T$ влечет это включение для всех $t \in T$. Если x — решение уравнения (1), то пара (x, y), где $y(t) = h_\varepsilon(x, t)$, $t \in T$, является решением задачи P для данных (f, g, ε).

В основе решения задачи P лежит метод интегральных многообразий, который является удобным аппаратом исследования многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность систем (см. [4–6]). Задача P имеет естественную параметризацию (см. определение 12), где «ε» играет роль «малого параметра» (см. определение 18), что приводит к разделению системы на «медленную» и «быструю» подсистемы: $\dot{x}(t) = f\bigl(x(t), y(t), t, \varepsilon\bigr)$ и $\varepsilon\, \dot{y}(t) = g\bigl(x(t), y(t), t, \varepsilon\bigr)$. Нахождение решения задачи P в определенном смысле сводится к решению так называемой вырожденной системы, которая получается из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю. Это обстоятельство следует из работ А. Н. Тихонова (см., например, [7]), в которых установлены факты о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

Задача, обратная к P (см. определение 4), состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи P. Имея в виду тесную связь исходной задачи с вырожденной системой, мы рассмотрим случай $\varepsilon = 0$, дополнительно предполагая, что «медленная поверхность», определяемая уравнением $g\big(x, y, t, 0\big) = 0$, состоит из одного листа (относительно зависимости y от x). Поскольку правые части уравнений, возникающих в задачах химической кинетики, часто оказываются многочленами, соответствующее ограничение на вид функций f не является обременительным.

Итак, в целях демонстрации рассмотрим частный случай задачи P, в котором $m = n = 1$, $E = \{0\}$, функции $f \in F$ являются многочленами первой степени, а $g \in G$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, благодаря чему уравнение

$$g\big(x(t), y(t), t, 0\big) = 0$$

можно заменить эквивалентным уравнением вида $y(t) = h\big(x(t), t\big)$.

Пусть $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим задачу Q с областью данных $\operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^3$, областью искомых $\operatorname{Im} Q = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$Q\big(f, (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t), \\ y(t) = h\big(x(t), t\big) \end{cases} \text{для всех } t \in \mathbb{R},$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$.

Обратная к Q задача Q^{-1}, формально соответствующая определению 4 и имеющая пары функций $(x, y) \in C^1(\mathbb{R})^2$ в качестве данных, очень проста и не практична. В роли данных более адекватны конечные наборы значений функций или их производных, нежели всюду определенные функции. Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции (см. определение 5) задачи Q^{-1} и вспомогательной задачи R с областью данных $\operatorname{Dom} R = (\mathbb{R}^3)^3$, областью искомых $\operatorname{Im} R = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$R\big((t, \alpha, \beta), (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x(t_1) = \alpha_1,\; x(t_2) = \alpha_2,\; x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1,\; \dot{x}(t_2) = \beta_2,\; \dot{x}(t_3) = \beta_3, \end{cases}$$

где $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$. По сравнению с формальной обратной задачей Q^{-1} композиция $Q^{-1} \circ R$ более практична и представляет собой следующую задачу: по данным $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ найти коэффициенты $f \in \mathbb{R}^3$, для которых существуют функции $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha_1,\; x(t_2) = \alpha_2,\; x(t_3) = \alpha_3,\; \dot{x}(t_1) = \beta_1,\; \dot{x}(t_2) = \beta_2,\; \dot{x}(t_3) = \beta_3, \\ \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t),\; y(t) = h\big(x(t), t\big) \text{ для всех } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Следующий результат получен в [8].

Теорема 2. *Если $t, \alpha \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & h(\alpha_1, t_1) \\ 1 & \alpha_2 & h(\alpha_2, t_2) \\ 1 & \alpha_3 & h(\alpha_3, t_3) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2}$$

то при любых $\beta \in \mathbb{R}^3$ *задача* $Q^{-1} \circ R$ *однозначно разрешима для данных* (t, α, β) (см. определение 3) *и ее решение* $(f_1, f_2, f_3) = (Q^{-1} \circ R)^s(t, \alpha, \beta)$ *вычисляется по классическим формулам Крамера* $f_i = \Delta_i / \Delta$, *где* Δ_i *— определитель матрицы, полученной из матрицы* (2) *заменой* i*-го столбца столбцом* $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

Список литературы

1. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Конечномерность и сепарабельность слоев банаховых расслоений // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 304–314.

2. *Кононенко Л. И.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем с одной или двумя медленными и быстрыми переменными // Сиб. журн. индустр. мат. 2002. Т. 5, № 4. С. 55–62.

3. *Кононенко Л. И.* Релаксации в сингулярно возмущенных системах на плоскости // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 4. С. 45–50.

4. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1988.

5. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1963.

6. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.

7. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сборник. 1948. Т. 22 (64), № 2. С. 193–204.

8. *Кононенко Л. И.* Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 175–180.

Материал поступил в редколлегию 30.10.2016

Адреса авторов

ГУТМАН Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия
gutman@math.nsc.ru

КОНОНЕНКО Лариса Ивановна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1, Новосибирск, 630090, Россия
larak@math.nsc.ru

Сведения об авторах

Асеев Владислав Васильевич

доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Борисов Игорь Семенович [1,2]

доктор физико-математических наук, профессор

[1] профессор кафедры теории вероятностей и математической статистики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета

[2] главный научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Витяев Евгений Евгеньевич [1,2]

доктор физико-математических наук

[1] ведущий научный сотрудник Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

[2] профессор кафедры дискретной математики и информатики Новосибирского государственного университета

Гермидер Оксана Владимировна

аспирант кафедры математики Северного (Арктического) федерального университета им. М. В. Ломоносова (Архангельск)

Гутман Александр Ефимович [1,2]

доктор физико-математических наук, профессор

[1] заведующий лабораторией функционального анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

[2] профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Новосибирского государственного университета

Зубелевич Олег Эдуардович

доктор физико-математических наук, профессор механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Кононенко Лариса Ивановна [1,2]

кандидат физико-математических наук, доцент

[1] старший научный сотрудник лаборатории прикладного анализа Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

[2] доцент кафедры математического анализа механико-математического факультета Новосибирского государственного университета

5. O. V. Germider, V. N. Popov, A. A. Yushkanov, “Computation of the gas mass and heat fluxes in a rectangular channel in the free molecular regime” [in Russian], *Zh. Tekh. Fiz.* **86**, No. 6, 37–41 (2016); English transl.: *Tech. Phys.* **61**, No. 6, 835–840 (2016).

6. S. Naris, D. Valougeorgis, “Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice,” *Eur. J. Mech. B. Fluids* **27**, 810–822 (2008).

7. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, “An analytical discrete-ordinates solution of the s-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube,” *J. of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer* **72**, 531–550 (2002).

8. P. Taheri, M. Bahrami, “Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels,” *Phys. Rev.* **86**, No. 1–9 (2012).

9. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, “A closed-form solution of a kinetic integral equation for rarefied gas flow in a cylindrical duct,” *Appl. Math.* **5**, 1516–1527 (2014).

10. O. V. Germider, V. N. Popov, A. A. Yushkanov, “Mathematical modeling of heat transfer processes in a long cylindrical channel” [in Russian], *Zh. Srednevolzhskogo Mat. Ob-va*. **17**, No. 1, 22–29 (2015).

11. V. A. Titarev, E. M. Shakhov, “Numerical analysis of the spiral Couette flow of a rarefied gas between coaxial cylinders” [in Russian], *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **46**, No. 3, 527–535 (2006); English transl.: *Comput. Math. and Math. Phys.* **46**, No. 3, 505–513 (2006).

12. I. Graur, F. Sharipov, “Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction,” *Eur. J. Mech. B. Fluids* **27**, 335–345 (2008).

13. C. Cercignani, “The method of elementary solutions for kinetic models with velocity-dependent collision frequency,” *Annals of Physics* **40**, No. 3, 469–481 (1966).

14. M. N. Kogan, *Rarefied Gas Dynamics. Kinetic Theory* [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

15. P. Courant, *Partial Differential Equations* [in Russian], Mir, Moscow (1964).

16. A. V. Latyshev, A. A. Yushkanov, *Analytic Solution of Boundary Problems for Kinetic Equations* [in Russian], MGOU, Moscow (2004).

17. C. Siewert, F. Sharipov, “Model equations in rarefied gas dynamics: viscous-slip and thermal-slip coefficients,” Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. No. 12. P. 4123–4129.

UDC 517.9:541.124:541.126

A. E. Gutman, L. I. Kononenko, “Formalization of Inverse Problems and Its Applications,” *Siberian J. of Pure and Appl. Math.*, **17**, No. 4. P. 49–56 (2017).

We show how binary correspondences can be used for simple formalization of the notion of problem, definition of the basic components of problems, their properties, and constructions (the condition of a problem, its data and unknowns, solvability and unique solvability of a problem, inverse problem, composition and restriction of problems, etc.). We also consider topological problems and the related notions of stability and correctness. Particular attention is paid to problems with parameters. As an illustration, we consider a system of differential equations which describe a process in chemical kinetics, as well as the inverse problem.

Key words: inverse problem, binary correspondence, solvability, composition, stability, correctness, differential equation, chemical kinetics.

References

1. A. E. Gutman, A. V. Koptev, "Finite dimensionality and separability of the stalks of Banach bundles", *Sib. Math. J.* **55**, No. 2, 246–253 (2014).

2. L. I. Kononenko, "Qualitative analysis of singularly perturbed systems with one or two slow and fast variables" [in Russian], *Sib. Zh. Ind. Mat.* **5**, No. 4, 55–62 (2002).

3. L. I. Kononenko, "Relaxations in singularly perturbed planar systems" [in Russian], *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.* **9**, No. 4, 45–50 (2009).

4. V. M. Goldstein, V. A. Sobolev, *Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems* [in Russian], Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk (1988).

5. Yu. A. Mitropolsky, O. B. Lykova, *Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics* [in Russian], Nauka, Moscow (1963).

6. A. V. Vasil'eva, V. F. Butuzov, *Singularly Perturbed Equations in Critical Cases* [in Russian], Nauka, Moscow (1978).

7. A. N. Tikhonov, "On independence of solutions to differential equations on a small parameter" [in Russian], *Mat. Sb.* **22 (64)**, No. 2, 193–204 (1948).

8. L. I. Kononenko, "Identification problem for singular systems with small parameter in chemical kinetics" [in Russian], *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **13**, 175–180 (2016).

UDC 517.972.2

O. E. Zubelevich, "On a Chain on Cone Problem," *Siberian J. of Pure and Appl. Math.*, **17**, No. 4. P. 57–63 (2017).

We consider a loop of a chain thrown like a lasso on a fixed right circular cone. The system is in the standard homogeneous gravity field. The axis of the cone is vertical. It is shown that under certain vertex angles chain's loop has an oblique equilibrium.

Key words: variational methods, equilibriums of chains.

References

1. *History of Mathematics from Ancient Times to the Beginning of 19 Century*, Vol. 2, [in Russian], Ed. by A. P. Yushkevich, Nauka, Moscow (1970).

2. L. S. Polak, *William Hamilton* [in Russian], Nauka, Moscow (1993).

UDC 519.865

V. M. Marakulin, "A Theory of Spatial Equilibrium: the Existence of Migration Proof Country Partition in a Uni-Dimensional World," *Siberian J. of Pure and Appl. Math.*, **17**, No. 4. P. 64–78 (2017).