УДК **517.9+541.124+541.126**

БИНАРНЫЕ СООТВЕТСТВИЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ [1]

А. Е. Гутман, Л. И. Кононенко

Показано, как бинарные соответствия могут быть использованы для простой формализации понятия задачи, определения основных компонентов задач, их свойств и конструкций. В частности, предложена формализация следующих понятий: условие, данные, искомые и решения задачи, разрешимость и однозначная разрешимость, обратная задача, композиция и ограничение задач, изоморфизм между задачами. Рассмотрены топологические задачи и связанные с ними понятия устойчивости и корректности. Указана связь между устойчивостью и непрерывностью однозначно разрешимой топологической задачи. Дано определение параметризации множества. Введены понятия параметризованной задачи, задачи восстановления объекта по значениям параметров, а также понятия локально свободного набора параметров и устойчивости относительно набора параметров.

В качестве иллюстрации рассмотрена сингулярно возмущенная система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая процесс химической кинетики и горения. Для такой системы сформулированы прямая и обратная задача. Изучаемый класс задач расширен за счет рассмотрения многочленов произвольной степени в качестве правых частей дифференциальных уравнений. Показано, как обратная задача химической кинетики может быть скорректирована и приближена к практике посредством композиции с простой вспомогательной задачей, реализующей связь между функциями и конечными наборами измеряемых числовых характеристик. Приведены формулы решения и указаны условия однозначной разрешимости скорректированной обратной задачи. В рамках исследования разрешимости получен критерий линейной независимости вещественных функций в терминах конечных наборов их значений. С помощью установленного критерия уточнена реализуемость условия однозначной разрешимости обратной задачи химической кинетики.

Ключевые слова: бинарное соответствие, обратная задача, разрешимость, композиция, устойчивость, корректность, дифференциальное уравнение, химическая кинетика, линейная независимость.

Данная работа продолжает инициированные в $[1, 2]$ исследования, посвященные формализации понятия задачи и решению обратной задачи химической кинетики. В частности, изучаемый класс обратных задач расширен за счет рассмотрения многочленов произвольной степени в качестве правых частей дифференциальных уравнений.

1. Формализация понятия задачи

В этом параграфе мы покажем, как бинарные соответствия могут быть использованы для простой формализации понятия задачи, основных компонентов задач, их свойств и конструкций — таких, как условие задачи, ее данные и искомые, разрешимость и однозначная разрешимость задачи, обратная задача, композиция и ограничение задач. Кроме того, будут рассмотрены топологические задачи, связанные с ними понятия устойчивости и корректности, а также задачи с параметрами.

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2., проекты № 0314-2016-0005 и № 0314-2016-0007, а также при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00057.

1.1. *Задачей* условимся называть любое соответствие между элементами двух множеств, т. е. тройку $P = (A, B, C)$, где A и B — произвольные множества и $C \subseteq A \times B$. Множества A, B и C (т. е. область отправления, область прибытия и график соответствия P) обозначаются символами $\operatorname{Dom} P$, $\operatorname{Im} P$ и $\operatorname{Gr} P$ и называются соответственно *областью данных*, *областью искомых* и *условием* задачи P. Включение $(a, b) \in \operatorname{Gr} P$ записывается в виде $P(a, b)$ и трактуется как условие, выражающее соответствие искомого b данному a. Таким образом, для задачи P подразумевается следующее неформальное прочтение:

Для данных $a \in \operatorname{Dom} P$ найти $b \in \operatorname{Im} P$, удовлетворяющие условию $P(a, b)$.

Образ $P[X]$ и *прообраз* $P^{-1}[Y]$ произвольных подмножеств $X \subseteq \operatorname{Dom} P$ и $Y \subseteq \operatorname{Im} P$ относительно соответствия P определяются традиционными формулами

$$P[X] \;=\; \{b \in \operatorname{Im} P : (\exists\, x \in X)\ P(x, b)\},$$
$$P^{-1}[Y] \;=\; \{a \in \operatorname{Dom} P : (\exists\, y \in Y)\ P(a, y)\}.$$

1.2. *Решением* задачи P для данного $a \in \operatorname{Dom} P$ называется любое искомое $b \in \operatorname{Im} P$, удовлетворяющее условию $P(a, b)$. Множество всех решений задачи P для данного a обозначается символом $P[a]$. Таким образом,

$$P[a] \;=\; P[\{a\}] \;=\; \{b \in \operatorname{Im} P : P(a, b)\}, \quad a \in \operatorname{Dom} P.$$

Задача P называется *разрешимой для* $a \in \operatorname{Dom} P$, если $P[a] \neq \varnothing$, т. е. для данного a задача P имеет хотя бы одно решение. Область определения соответствия P

$$\operatorname{dom} P \;:=\; \{a \in \operatorname{Dom} P : P[a] \neq \varnothing\}$$

называется *областью разрешимости* задачи P. В случае $\operatorname{dom} P = \operatorname{Dom} P$ задачу P называют *разрешимой* или, точнее, *всюду разрешимой*.

1.3. Говорят, что задача P *однозначно разрешима для* $a \in \operatorname{Dom} P$, если для данного a задача P имеет единственное решение, т. е. $P[a] = \{b\}$, где $b \in \operatorname{Im} P$. Соответствующее решение b условимся обозначать через $P^{\mathrm{s}}(a)$. Таким образом, если задача P однозначно разрешима для a, то

$$P[a] = \{P^{\mathrm{s}}(a)\}.$$

Множество

$$\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \;:=\; \{a \in \operatorname{Dom} P : P \text{ однозначно разрешима для } a\}$$

называется *областью однозначной разрешимости* задачи P, а функция

$$P^{\mathrm{s}}\colon\ \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \to \operatorname{Im} P, \quad a \mapsto P^{\mathrm{s}}(a)$$

называется *функцией решения* задачи P. Очевидно, $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} \subseteq \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{Dom} P$. Говорят, что задача P *однозначно разрешима на множестве* $D \subseteq \operatorname{Dom} P$, если $D \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$. Задачу P называют *однозначно разрешимой* или, точнее, *всюду однозначно разрешимой*, если она однозначно разрешима на $\operatorname{Dom} P$, т. е. $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}} = \operatorname{Dom} P$. В этом случае соответствие P является всюду определенной функцией и тем самым совпадает с P^{s}.

1.4. *Обратной задачей* по отношению к задаче $P = (\operatorname{Dom} P,\, \operatorname{Im} P,\, \operatorname{Gr} P)$ называется обратное соответствие

$$P^{-1} := \bigl(\operatorname{Im} P,\, \operatorname{Dom} P,\, (\operatorname{Gr} P)^{-1}\bigr), \quad \text{где } (\operatorname{Gr} P)^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in \operatorname{Gr} P\}.$$

Замечание. Если задача P моделирует какой-либо реальный физический процесс, то рассмотрение обратной задачи P^{-1} мотивировано поиском относительно простого формального закона, описывающего этот процесс с приемлемой точностью. Данными обратной задачи служат экспериментально измеряемые характеристики процесса, а искомыми являются, например, коэффициенты дифференциального уравнения, описывающего наблюдаемый процесс.

В случае, когда в основе задачи P лежит функциональное уравнение, с формальной точки зрения данными обратной задачи P^{-1} оказываются функции соответствующего класса, в то время как на практике в роли данных обратной задачи выступают не сами функции, а те или иные их характеристики, поддающиеся измерению, т. е. конечные наборы чисел.

Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции (см. 1.5) задачи P^{-1} и простой вспомогательной задачи, формализующей связь между функциями и их измеряемыми характеристиками. (Пример такой корректирующей композиции приведен в 2.3.)

1.5. *Композицией задач* P и Q называется их композиция как соответствий, представляющая собой задачу

$$Q \circ P \;:=\; (\operatorname{Dom} P,\, \operatorname{Im} Q,\, \operatorname{Gr} Q \circ \operatorname{Gr} P)$$

с условием

$$\operatorname{Gr} Q \circ \operatorname{Gr} P \;=\; \bigl\{(a,c) \in \operatorname{Dom} P \times \operatorname{Im} Q : (\exists\, b \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Dom} Q)\ P(a,b)\ \&\ Q(b,c)\bigr\}.$$

Композиция $Q \circ P$ обычно рассматривается в случае $\operatorname{Im} P = \operatorname{Dom} Q$.

1.6. *Ограничением* или *сужением* задачи P на подмножества $A \subseteq \operatorname{Dom} P$ и $B \subseteq \operatorname{Im} P$ называется задача

$$P\bigr|_A^B \;:=\; \bigl(A,\, B,\, \operatorname{Gr} P \cap (A \times B)\bigr).$$

Частными случаями ограничений служат $P|_A := P\bigr|_A^{\operatorname{Im} P}$ и $P|^B := P\bigr|_{\operatorname{Dom} P}^B$.

Ограничение задачи можно определить посредством композиции с соответствующими задачами вложения. Для произвольных множеств X и Y рассмотрим задачу $\operatorname{Id}_X^Y := (X, Y, I_X^Y)$, где

$$I_X^Y \;=\; \{(z,z) : z \in X \cap Y\} \;=\; \{(x,y) \in X \times Y : x = y\}.$$

Тогда для любой задачи P и любых подмножеств $A \subseteq \operatorname{Dom} P$ и $B \subseteq \operatorname{Im} P$ справедливы равенства

$$P|_A = P \circ \operatorname{Id}_A^{\operatorname{Dom} P}, \quad P|^B = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}^B \circ P, \quad P\bigr|_A^B = \operatorname{Id}_{\operatorname{Im} P}^B \circ P \circ \operatorname{Id}_A^{\operatorname{Dom} P}.$$

1.7. Под *изоморфизмом* между задачами P и Q понимается такая пара (f,g) биективных отображений $f\colon\ \operatorname{Dom} P \to \operatorname{Dom} Q$, $g\colon\ \operatorname{Im} P \to \operatorname{Im} Q$, что

$$\operatorname{Gr} Q = \bigl\{\bigl(f(a), g(b)\bigr) : (a,b) \in \operatorname{Gr} P\bigr\}.$$

Задачи называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм.

1.8. Задачу P условимся называть *топологической*, если ее область данных $\operatorname{Dom} P$ и область искомых $\operatorname{Im} P$ снабжены какими-либо топологиями, т. е. являются топологическими пространствами. Изоморфизм (f,g) между топологическими задачами называется *топологическим изоморфизмом*, если каждое из отображений f и g является топологическим изоморфизмом (т. е. гомеоморфизмом).

Все вводимые здесь понятия, связанные с топологией и непрерывностью, имеют естественные аналоги для случая равномерности и равномерной непрерывности. (Примером равномерного пространства служит любое метрическое и, в частности, нормированное пространство.) Мы не будем приводить соответствующие уточнения, считая их достаточно очевидными.

1.9. Топологическая задача P называется *устойчивой в точке* $a \in \operatorname{dom} P$, если соответствие P полунепрерывно сверху в этой точке, т. е. для любой окрестности V множества $P[a]$ в $\operatorname{Im} P$ прообраз $P^{-1}[V]$ является окрестностью точки a в $\operatorname{dom} P$. Говорят, что задача P *устойчива на множестве* $D \subseteq \operatorname{dom} P$, если P устойчива в каждой точке $a \in D$. Задачу P называют *устойчивой* или, точнее, *всюду устойчивой*, если P устойчива на $\operatorname{dom} P$.

В случае, когда a является внутренней точкой $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ относительно $\operatorname{dom} P$ (т. е. существует такое открытое множество $G \subseteq \operatorname{Dom} P$, что $a \in G \cap \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$), устойчивость задачи P в a равносильна непрерывности функции P^{s} в a. Аналогично, если множество D лежит во внутренности $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ относительно $\operatorname{dom} P$ (т. е. существует такое открытое множество $G \subseteq \operatorname{Dom} P$, что $D \subseteq G \cap \operatorname{dom} P \subseteq \operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$), то устойчивость задачи P на D равносильна непрерывности функции P^{s} на D. В частности, устойчивость однозначно разрешимой задачи равносильна ее непрерывности.

1.10. Топологическая задача P называется *корректной* (или, точнее, *локально корректной*) *в точке* $a \in \operatorname{Dom} P$, если a является внутренней точкой $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ и задача P устойчива в точке a. Иными словами, задача корректна в точке a, если при данных, достаточно близких к a, она имеет единственное решение, причем непрерывно зависящее от данных при стремлении к a. Говорят, что задача P *корректна* (или, точнее, *условно корректна*) *на множестве* $D \subseteq \operatorname{Dom} P$, если P корректна в каждой точке $a \in D$. Задачу P называют *корректной*, если P корректна на $\operatorname{Dom} P$. Таким образом, корректность задачи означает ее однозначную разрешимость и устойчивость (или, что то же самое, непрерывность).

1.11. Под семейством $(v_i)_{i \in I}$ традиционно понимается определенная на I функция, а запись v_i символизирует значение этой функции в точке $i \in I$. Для произвольного семейства $(V_i)_{i \in I}$ символом $\prod_{i \in I} V_i$ обозначается соответствующее декартово произведение — совокупность всех таких семейств $(v_i)_{i \in I}$, что $v_i \in V_i$ для каждого индекса $i \in I$. Для любых $\pi\colon X \to \prod_{i \in I} V_i$, $i \in I$ и $J \subseteq I$ вводятся в рассмотрение функции $\pi_i\colon X \to V_i$ и $\pi_J\colon X \to \prod_{j \in J} V_j$, действующие согласно формулам

$$\pi_i(x) := \pi(x)_i \in V_i, \quad \pi_J(x) := \pi(x)|_J \in \prod_{j \in J} V_j, \quad x \in X.$$

1.12. *Параметризацией* множества X называется любое инъективное отображение π, определенное на $\operatorname{Dom} \pi := \operatorname{dom} \pi = X$ и действующее в декартово произведение $\operatorname{Im} \pi := \prod_{i \in I} V_i$ какого-либо семейства $(V_i)_{i \in I}$. При этом I называется *множеством параметров* и обозначается символом $\operatorname{Par} \pi$, элементы $i \in \operatorname{Par} \pi$ именуются *параметрами*, множество $\operatorname{Im} \pi_i := V_i$ называется *областью значений параметра* i, а элемент $\pi_i(x) \in \operatorname{Im} \pi_i$ — *значением параметра* i для объекта $x \in X$. Произведение $\prod_{j \in J} V_j$ называется *областью значений набора параметров* $J \subseteq \operatorname{Par} \pi$ и обозначается $\operatorname{Im} \pi_J$.

Отметим, что область значений $\operatorname{Im} \pi_i$ параметра i не обязана совпадать с совокупностью $\operatorname{im} \pi_i = \pi_i[X]$ всевозможных значений этого параметра, т. е. включение $\operatorname{im} \pi_i \subseteq \operatorname{Im} \pi_i$ может быть строгим. В случае равенства $\operatorname{im} \pi_i = \operatorname{Im} \pi_i$ область значений параметра i называется *точной*.

Множество, снабженное какой-либо параметризацией, называется *параметризованным множеством.* При этом параметризация множества X по умолчанию обозначается символом π или, если необходимо уточнение, символом π^X.

1.13. Рассматривая параметризацию π топологического пространства X, естественно снабжать множество $\operatorname{Im}\pi_J$, где $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, образом топологии X относительно π_J, т. е. считать открытыми те подмножества $U \subseteq \operatorname{Im}\pi_J$, прообраз $\pi_J^{-1}[U]$ которых открыт в X. В этом случае π оказывается непрерывным отображением X в $\operatorname{Im}\pi$, а также топологическим изоморфизмом между X и $\operatorname{im}\pi$.

Области $\operatorname{Im}\pi_i$ значений параметров $i \in \operatorname{Par}\pi$ обычно имеют собственные естественные топологии, относительно которых отображения π_i непрерывны. В противном случае $\operatorname{Im}\pi_i$ можно снабдить образом топологии X относительно π_i или топологией, индуцированной из $\operatorname{Im}\pi$, в которой открытыми подмножествами $\operatorname{Im}\pi_i$ служат множества вида $\{u_i : u \in U\}$, где U открыто в $\operatorname{Im}\pi$.

Области значений параметров часто являются банаховыми пространствами. В этом случае параметризованные топологические пространства во многом аналогичны банаховым расслоениям (см., например, [3]), где область определения I расслоения V играет роль множества параметров, а слой $V(i)$ служит областью значений параметра $i \in I$.

1.14. Задачу P условимся называть *параметризованной* (или задачей *с параметрами*), если ее область данных $\operatorname{Dom} P$ и область искомых $\operatorname{Im} P$ являются параметризованными множествами. Любую задачу можно считать параметризованной, если условиться снабжать не параметризованные области X тривиальными параметризациями с единственным параметром: $\pi_1(x) = x$ для всех $x \in X$.

Как легко видеть, пара (π^A, π^B) представляет собой изоморфизм между параметризованной задачей (A, B, C) и задачей (A', B', C'), где $A' = \operatorname{im}\pi^A$, $B' = \operatorname{im}\pi^B$ и $C' = \big\{\big(\pi^A(a), \pi^B(b)\big) : (a, b) \in C\big\}$. Если, кроме того, задача (A, B, C) топологическая, то таковыми являются задача (A', B', C') и изоморфизм (π^A, π^B).

1.15. Пусть π — параметризация множества A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, $J' := \operatorname{Par}\pi \setminus J$. Символом $\operatorname{Res}^a_J(A)$ обозначается задача $(\operatorname{Im}\pi_J, A, R^a_J)$, где

$$R^a_J = \{(v, b) : v \in \operatorname{Im}\pi_J,\ b \in A,\ \pi_J(b) = v,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

т. е. задача восстановления элемента A по данным значениям параметров J при фиксированных значениях остальных параметров. В случае $J = \{i\}$ вместо $\operatorname{Res}^a_{\{i\}}(A)$ условимся писать $\operatorname{Res}^a_i(A)$.

В силу инъективности параметризации π задача $\operatorname{Res}^a_J(A)$ однозначно разрешима на множестве

$$\operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A) = \{\pi_{J'}(b) : b \in A,\ \pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)\},$$

и ее решение для любого $v \in \operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A)$ определяется формулой

$$\operatorname{Res}^a_J(A)^{\mathrm{s}}(v) = \pi^{-1}\big(v \otimes \pi_{J'}(a)\big), \quad \text{где } (v \otimes w)_i = \begin{cases} v_i, & \text{если } i \in J; \\ w_i, & \text{если } i \notin J. \end{cases}$$

1.16. Пусть π — параметризация топологического пространства A, $a \in A$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$. Говорят, что набор параметров J *локально свободен* в точке a, если область разрешимости $\operatorname{dom}\operatorname{Res}^a_J(A)$ задачи $\operatorname{Res}^a_J(A)$ является окрестностью точки $\pi_J(a)$ в топологическом пространстве $\operatorname{Im}\pi_J$. Таким образом, для локально свободного набора параметров реализуемы любые достаточно малые изменения значений при фиксированных значениях остальных параметров. Параметр i называется *локально свободным* в точке a, если таковым является набор $\{i\}$.

1.17. Пусть P — параметризованная топологическая задача, $a \in \operatorname{dom} P$, $J \subseteq \operatorname{Par}\pi$, где $\pi := \pi^{\operatorname{dom} P}$. Задача P называется *устойчивой в точке a относительно J*, если задача $P \circ \operatorname{Res}_J^a(\operatorname{dom} P)$ устойчива в точке $\pi_J(a)$. Устойчивость задачи в a относительно J обычно рассматривается в случае, когда набор параметров J локально свободен в точке a.

Говорят, что задача P *устойчива на множестве $D \subseteq \operatorname{dom} P$ относительно J*, если P устойчива в каждой точке $a \in D$ относительно J. Задачу P называют *устойчивой относительно J*, если P устойчива на $\operatorname{dom} P$ относительно J. В случае $J = \{i\}$ говорят об *устойчивости относительно параметра i*.

При рассмотрении естественной топологии на $\operatorname{im}\pi_J$ в случае, когда a является внутренней точкой $\operatorname{dom} P^{\mathrm{s}}$ относительно $\operatorname{dom} P$, устойчивость однозначно разрешимой задачи P в точке a относительно J равносильна непрерывности в точке a функции

$$v \in \pi_J[\operatorname{dom} R] \;\mapsto\; P^{\mathrm{s}}\big(R^{\mathrm{s}}(v)\big), \quad \text{где } R := \operatorname{Res}_J^a(\operatorname{Dom} P).$$

Последнее, в свою очередь, означает непрерывную зависимость решения $P^{\mathrm{s}}(b)$ от значений $\pi_J(b)$ параметров J при стремлении $\pi_J(b)$ к $\pi_J(a)$ с соблюдением равенства $\pi_{J'}(b) = \pi_{J'}(a)$.

1.18. Пусть P — параметризованная топологическая задача, $i \in \operatorname{Par}\pi$. О задаче P говорят как о «задаче с малым параметром i», если $\operatorname{Im}\pi_i \subseteq \mathbb{R}$, число 0 является предельной точкой $\operatorname{Im}\pi_i$, и рассматривается вопрос о каком-либо асимптотическом аспекте задачи P при значениях параметра i, близких к 0 — например, об устойчивости P относительно i в точке a, удовлетворяющей условию $\pi_i(a) = 0$.

2. Обратная задача химической кинетики

В качестве иллюстрации мы рассмотрим сингулярно возмущенную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующую процессы химической кинетики и горения (см., например, [4, 5]). В ходе исследования соответствующей обратной задачи будет также установлен критерий линейной независимости функций в терминах конечных наборов их значений (см. 2.5).

2.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y — область в $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$. Положим $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$, $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу P с областью данных $\operatorname{Dom} P = F \times G \times E$, областью искомых $\operatorname{Im} P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$P\big((f, g, \varepsilon), (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \;\;\dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \end{cases} \text{для всех } t \in T,$$

где $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$.

Такая задача P исследуется методом интегральных многообразий (см. [6–8]), который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность рассматриваемых систем.

В задаче P числу ε отводится роль «малого параметра», что приводит к разделению системы на «медленную» и «быструю» подсистемы:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \;\text{ и }\; \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big).$$

Решение задачи P в определенном смысле сводится к решению *вырожденной системы*, которая получается из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю.

Это следует из работ А. Н. Тихонова (см., например, [9]), в которых установлены факты о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю.

2.2. Задача, обратная к P, состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи P. Тесная связь с вырожденной системой мотивирует рассмотрение случая $\varepsilon = 0$. Дополнительно предположим, что «медленная поверхность», определяемая уравнением

$$g\big(x, y, t, 0\big) = 0,$$

состоит из одного листа (относительно зависимости y от x), и что функция $g \in G$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, и поэтому уравнение

$$g\big(x(t), y(t), t, 0\big) = 0$$

можно заменить уравнением вида

$$y(t) = h\big(x(t), t\big).$$

Кроме того, будем считать, что правая часть f основного дифференциального уравнения является многочленом (что естественно для задач химической кинетики).

Итак, рассмотрим частный случай задачи P, в котором $m = n = 1$, $E = \{0\}$, а функции $f \in F$ представляют собой многочлены двух переменных степени не выше $p \in \mathbb{N}$:

$$f(x, y, t, \varepsilon) \;=\; \sum_{(i,j)\in K(p)} \gamma_{ij}\, x^i y^j,$$

где $\gamma_{ij} \in \mathbb{R}$, $(i, j) \in K(p) := \big\{(i, j) :\; 0 \leqslant i, j \in \mathbb{Z},\;\; i + j \leqslant p\big\}$. Введем обозначение

$$\kappa(p) \;:=\; \frac{(p+1)(p+2)}{2}$$

для числа элементов множества $K(p)$ и фиксируем какую-либо нумерацию

$$K(p) \;=\; \big\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{\kappa(p)}, j_{\kappa(p)})\big\}.$$

Таким образом, выражение $\sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k\, x^{i_k} y^{j_k}$ служит общим видом многочлена двух переменных x, y степени не выше p.

В результате перечисленных соглашений возникает задача Q с областью данных $\operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^{\kappa(p)}$, областью искомых $\operatorname{Im} Q = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$Q\big(\gamma, (x, y)\big) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\kappa(p)} \gamma_k\, x(t)^{i_k}\, y(t)^{j_k}, \\ y(t) = h\big(x(t), t\big) \end{cases} \quad \text{для всех } t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

2.3. Обратная к Q задача Q^{-1}, формально соответствующая определению и имеющая пары функций $(x,y)\in C^1(\mathbb{R})^2$ в качестве данных, очень проста и не соответствует практике. В роли данных более адекватны конечные наборы значений функций или их производных, а не всюду определенные функции. Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции задачи Q^{-1} и вспомогательной задачи R с областью данных $\operatorname{Dom} R = (\mathbb{R}^{\kappa(p)})^3$, областью искомых $\operatorname{Im} R = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$R\big((\tau,\alpha,\beta),(x,y)\big) \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x(\tau_1)=\alpha_1,\ \ x(\tau_2)=\alpha_2,\ \ \ldots,\ \ x(\tau_{\kappa(p)})=\alpha_{\kappa(p)},\\ \dot x(\tau_1)=\beta_1,\ \ \dot x(\tau_2)=\beta_2,\ \ \ldots,\ \ \dot x(\tau_{\kappa(p)})=\beta_{\kappa(p)}, \end{cases}$$

где $\tau,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$, $x,y\in C^1(\mathbb{R})$.

По сравнению с формальной обратной задачей Q^{-1} композиция $Q^{-1}\circ R$ более практична и представляет собой следующую задачу: по данным $\tau,\alpha,\beta\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$ найти коэффициенты $\gamma\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$, для которых существуют функции $x,y\in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x(\tau_1)=\alpha_1,\ \ x(\tau_2)=\alpha_2,\ \ \ldots,\ \ x(\tau_{\kappa(p)})=\alpha_{\kappa(p)},\\ \dot x(\tau_1)=\beta_1,\ \ \dot x(\tau_2)=\beta_2,\ \ \ldots,\ \ \dot x(\tau_{\kappa(p)})=\beta_{\kappa(p)},\\ \dot x(t)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\kappa(p)}\gamma_k\, x(t)^{i_k}\, y(t)^{j_k}\ \ \text{для всех } t\in\mathbb{R},\\ y(t)=h\big(x(t),t\big)\ \ \text{для всех } t\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

2.4. Сформулированное ниже утверждение доказывается для произвольного числа $p\in\mathbb{N}$ аналогично рассмотренному в [10, 11] случаю $p=1$.

Теорема. *Если $\tau,\alpha\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$ удовлетворяют условию*

$$\Delta(\tau,\alpha) := \begin{vmatrix} \alpha_1^{i_1}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_1} & \alpha_1^{i_2}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_2} & \ldots & \alpha_1^{i_{\kappa(p)}}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_{\kappa(p)}}\\ \alpha_2^{i_1}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_1} & \alpha_2^{i_2}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_2} & \ldots & \alpha_2^{i_{\kappa(p)}}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_{\kappa(p)}}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{\kappa(p)}^{i_1}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_1} & \alpha_{\kappa(p)}^{i_2}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_2} & \ldots & \alpha_{\kappa(p)}^{i_{\kappa(p)}}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_{\kappa(p)}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то при любых $\beta\in\mathbb{R}^{\kappa(p)}$ задача $Q^{-1}\circ R$ однозначно разрешима для данных (τ,α,β) и ее решение $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{\kappa(p)}) = (Q^{-1}\circ R)^{\mathrm{s}}(\tau,\alpha,\beta)$ вычисляется по формулам Крамера

$$\gamma_k = \frac{\Delta_k(\tau,\alpha,\beta)}{\Delta(\tau,\alpha)},\quad k=1,2,\ldots,\kappa(p),$$

где $\Delta_k(\tau,\alpha,\beta)$ — определитель матрицы, полученной из приведенной выше матрицы в результате замены k-го столбца $\big(\alpha_1^{i_k}\, h(\alpha_1,\tau_1)^{j_k},\ \alpha_2^{i_k}\, h(\alpha_2,\tau_2)^{j_k},\ \ldots,\ \alpha_{\kappa(p)}^{i_k}\, h(\alpha_{\kappa(p)},\tau_{\kappa(p)})^{j_k}\big)$ столбцом $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{\kappa(p)})$.

2.5. Следующий критерий позволяет выяснить, в каких случаях существует набор чисел $\tau_1,\ldots,\tau_{\kappa(p)}$, удовлетворяющий условию теоремы 2.4.

Теорема. *Пусть $n\in\mathbb{N}$ и пусть T — произвольное множество. Семейство функций $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\colon T\to\mathbb{R}$ линейно независимо в векторном пространстве $\mathbb{R}^T$ тогда и только тогда, когда существуют точки $t_1,\ldots,t_n\in T$, удовлетворяющие условию*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \ldots & \varphi_n(t_1)\\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \ldots & \varphi_n(t_2)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \ldots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0\,. \qquad (1)$$

Доказательство. Для удобства введем обозначение для матрицы, фигурирующей в (1):

$$M_n(\varphi_1,\dots,\varphi_n;\, t_1,\dots,t_n) \;:=\; \begin{pmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 1$ тривиален: если семейство $\{\varphi_1\}$ линейно независимо, то $\varphi_1 \neq 0$, а значит, для некоторой точки $t_1 \in T$ мы имеем $\varphi_1(t_1) \neq 0$, т. е. $|M_1(\varphi_1;\, t_1)| \neq 0$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и пусть для любого линейно независимого семейства функций $\varphi_1,\dots,\varphi_n\colon T \to \mathbb{R}$ существуют точки $t_1,\dots,t_n \in T$, удовлетворяющие (1). Рассмотрим линейно независимое семейство $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{n+1}\colon T \to \mathbb{R}$. По предположению индукции имеются такие точки $t_1,\dots,t_n \in T$, что матрица

$$M \;:=\; M_n(\varphi_1,\dots,\varphi_n;\, t_1,\dots,t_n)$$

обратима. Нам предстоит найти точку $t \in T$, обеспечивающую обратимость матрицы

$$\overline{M}(t) \;:=\; M_{n+1}(\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{n+1};\, t_1,\dots,t_n,t).$$

Допустим вопреки доказываемому, что $|\overline{M}(t)| = 0$ для всех $t \in T$. Тогда для каждой точки $t \in T$ существует кортеж $0 \neq \big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_{n+1}(t)\big) \in \mathbb{R}^{n+1}$, удовлетворяющий условию

$$\overline{M}(t)\big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_{n+1}(t)\big) = 0$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} \varphi_1(t_1)\,\alpha_1(t) + \dots + \varphi_n(t_1)\,\alpha_n(t) + \varphi_{n+1}(t_1)\,\alpha_{n+1}(t) = 0, \\ \varphi_1(t_2)\,\alpha_1(t) + \dots + \varphi_n(t_2)\,\alpha_n(t) + \varphi_{n+1}(t_2)\,\alpha_{n+1}(t) = 0, \\ \dots, \\ \varphi_1(t_n)\,\alpha_1(t) + \dots + \varphi_n(t_n)\,\alpha_n(t) + \varphi_{n+1}(t_n)\,\alpha_{n+1}(t) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

$$\varphi_1(t)\,\alpha_1(t) \;+\dots+\; \varphi_n(t)\,\alpha_n(t) \;+\; \varphi_{n+1}(t)\,\alpha_{n+1}(t) \;= 0. \tag{3}$$

Подсистема (2) равносильна равенству

$$M\big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big) + \alpha_{n+1}(t)\big(\varphi_{n+1}(t_1),\dots,\varphi_{n+1}(t_n)\big) = 0,$$

благодаря которому

$$\big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_n(t)\big) = -\alpha_{n+1}(t)\,M^{-1}\big(\varphi_{n+1}(t_1),\dots,\varphi_{n+1}(t_n)\big). \tag{4}$$

С учетом (4) в случае $\alpha_{n+1}(t) = 0$ мы бы имели $\alpha_1(t) = \dots = \alpha_{n+1}(t) = 0$, что противоречит условию $\big(\alpha_1(t),\dots,\alpha_{n+1}(t)\big) \neq 0$. Следовательно, $\alpha_{n+1}(t) \neq 0$ и

$$\left(\tfrac{\alpha_1(t)}{\alpha_{n+1}(t)},\dots,\tfrac{\alpha_n(t)}{\alpha_{n+1}(t)}\right) = -M^{-1}\big(\varphi_{n+1}(t_1),\dots,\varphi_{n+1}(t_n)\big). \tag{5}$$

Согласно (5) числа $\beta_1 := \frac{\alpha_1(t)}{\alpha_{n+1}(t)}$, ..., $\beta_n := \frac{\alpha_n(t)}{\alpha_{n+1}(t)}$ не зависят от t. Осталось заметить, что из (3) следует

$$\beta_1\varphi_1(t) + \dots + \beta_n\varphi_n(t) + \varphi_{n+1}(t) = 0 \quad \text{для всех } t \in T$$

вопреки линейной независимости семейства функций $\varphi_1,\dots,\varphi_n,\varphi_{n+1}$.

2.6. Из теорем 2.4 и 2.5 непосредственно вытекает следующее условие однозначной разрешимости «скорректированной обратной задачи» $Q^{-1} \circ R$.

Теорема. *Пусть $x \in C^1(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Если семейство функций*

$$t \mapsto x(t)^{i_k}\, h\big(x(t), t\big)^{j_k}, \quad k = 1, 2, \dots, \kappa(p),$$

линейно независимо в векторном пространстве $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, то существуют такие $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$, что при любых $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa(p)} \in \mathbb{R}$ задача $Q^{-1} \circ R$ однозначно разрешима для данных $\tau_1, \dots, \tau_{\kappa(p)}$, $x(\tau_1), \dots, x(\tau_{\kappa(p)})$, $\beta_1, \dots, \beta_{\kappa(p)}$.

Литература

1. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Формализация обратных задач и ее приложения // Сиб. журн. чист. и прикл. матем.—2017.—Т. 17, № 4.—С. 49–56. DOI: 10.17377/PAM.2017.17.5.
2. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Обратная задача химической кинетики как композиция бинарных соответствий // Сиб. электрон. матем. изв.—2018.—Т. 15.—С. 48–53. DOI: 10.17377/semi.2018.15.006.
3. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Конечномерность и сепарабельность слоев банаховых расслоений // Сиб. матем. журн.—2014.—Т. 55, № 2.—С. 304–314. DOI: 10.1134/S0037446614020074.
4. *Кононенко Л. И.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем с одной или двумя медленными и быстрыми переменными // Сиб. журн. индустр. матем.—2002.—Т. 5, № 4.—С. 55–62.
5. *Кононенко Л. И.* Релаксации в сингулярно возмущенных системах на плоскости // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ.—2009.—Т. 9, № 4.—С. 45–50.
6. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1963.
7. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978.
8. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1988.
9. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сборник.—1948.—Т. 22 (64), № 2.—С. 193–204.
10. *Кононенко Л. И.* Прямая и обратная задачи для сингулярной системы с медленными и быстрыми переменными в химической кинетике // Владикавк. мат. журн.—2015.—Т. 17, вып. 1.—С. 39–46. DOI: 10.23671/VNC.2015.1.7291.
11. *Кононенко Л. И.* Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике // Сиб. электрон. матем. изв.—2016.—Т. 13.—С. 175–180. DOI: 10.17377/semi.2016.13.015.

Статья поступила 3 июля 2018 г.

Гутман Александр Ефимович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
заведующий лабораторией функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: `gutman@math.nsc.ru`

Кононенко Лариса Ивановна

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
старший научный сотрудник лаб. теории функций
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4;

Новосибирский государственный университет
доцент кафедры математического анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1

E-mail: `larakon2@gmail.ru`, `larak@math.nsc.ru`