Т. (К. Жордан): $\exists\, J = J(n)$ $\forall\, G \subset GL_n(\mathbb{C})$
1878 кон.

$\exists\, A \underset{\text{аб}}{\triangleleft} G$ $[G : A] \leq J$.

$\begin{pmatrix} * & & 0 \\ & * & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$

$|G/H| \leq J$

A_k, S_k
S_{n+1}

Пример: $PGL_2(\mathbb{C}) \supset G$

циклические, диэдральные, A_4, S_4, A_5

Т. (Коллинз, 2004)

	A	D	E
$J(n) = (n+1)!$ при $n \geq 72$	1	2	60
1, ..., 71	—		

Другие бесконечные группы:

$\mathrm{Diff}(M)$, M – комп. мн-зие

$\underline{\mathrm{Aut}\,X}$, X – алг. мн-зие

комп. компл. мн-зие

$\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$

$xyz \longmapsto \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}$

$\mathrm{Bir}\,X$

$\mathrm{Aut}\,K''$

$\mathrm{Bim}\,X$

Какие из этих групп жордановы?

Фейт (~70): $\mathrm{Diff}(S^n)$?

Жис (~90): $\mathrm{Diff}(M)$, M гладкое ~~компл.~~ мн-зие компактное

2007, Серр: $\mathrm{Bir}\,\mathbb{P}^2$ жорданова.

$J(\mathrm{Bir}\,\mathbb{P}^2) = 7200$

A_5,

$(A_5 \times A_5) \rtimes \mathbb{Z}/2$

$PSL_2(\mathbb{F}_7)$

Зархин, 2010: $\overline{\mathrm{Bir}\,\underline{\mathbb{P}}^1 \times \underset{\text{эл.}}{\underline{E}}} / \mathbb{C}$ не жорданова

Попов, 2010: $\mathrm{Bir}\,X$ не жорданова только если $X \sim \mathbb{P}^1 \times E$

$\dim X = 2$

Чикос – Пибер – Жабо, 2014: $\mathrm{Diff}\ \underline{S}^2 \times \underline{T}^2$ не жорданова

Т. (Прохоров – Ш., 2012)

Bir $\mathbb{P}^k$ жорданова при всех k

Bir X, X рац.-связно 

X не покрывается рац. кривыми

На 2012 год зависело от гипотезы Б.-А.-Б., про ограниченность многообразий Фано

Биркар, 2016

Diff M : много частных случаев

Б. Циммерманн: $\boxed{S^n;}$ $\dim_{\mathbb{R}} X \leq 3$

Мунджет и Риера : $\chi_{top}(X) \neq 0$

Гипотеза (М и Р): M асферическое
$\Rightarrow$ Diff M жорданова

Т. (Менг – Жанг, 2014) X проективное мн-гие
$\Rightarrow$ Aut X жорданова $\boxed{\text{2020: X комп. кэл. мн-гие бимером. проективная}}$

Гип. (Попов): X – афф. мн-гие, $\boxed{\text{Aut } X}$ жорданова

$$\mathbb{A}^n \hookleftarrow X \rightsquigarrow k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I \quad (x_1^2)$$

Цель на сегодня: X — комп. комплексная пов-ть.

Зам. C — кривая

$g=0$ $\quad \underline{\mathrm{Aut}\, C \cong PGL_2(\mathbb{C})}$

$g=1$ $\quad C \curvearrowleft \mathbb{Z}/n, \ n \le 6$

$g \geqslant 2$ $\quad |\mathrm{Aut}\, C| < \infty$

Тh. (Прохоров — Ш., 2017)

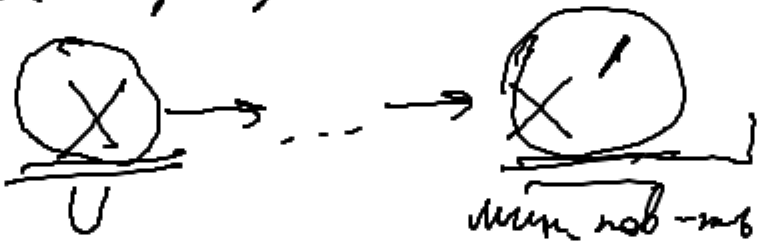
1. $\underline{\mathrm{Aut}\, X}$ жорданова

2. $\mathrm{Bir}\, X$ не жорданова только если $X \sim_{\text{бир.}} \mathbb{P}^1 \times E$

что с $\dim X > 2$?

$\dim X = 2$, т.е. X — комп. компл. пов-ть

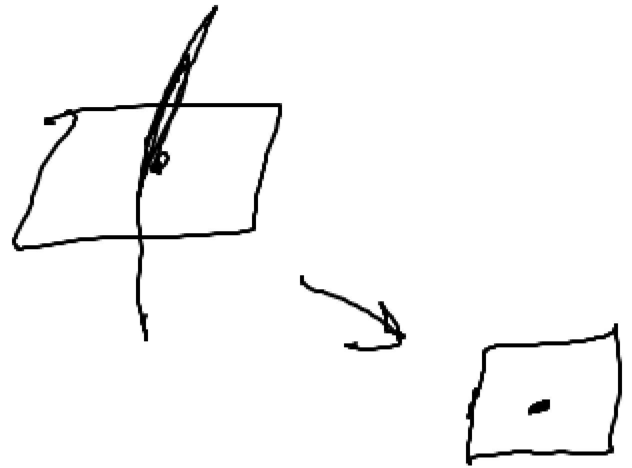
I. Программа мин. моделей



(-1)-кривые

$C \cong \mathbb{P}^1$, $\quad C^2 = -1$

$\Leftrightarrow \underline{K_X \cdot C = -1}$



Пример: $\left(\boxed{K_X \geq 0} \Rightarrow X\right.$ минимальна

Т.: $\underline{K_X \geq 0} \Rightarrow \mathrm{Bim}\,X = \mathrm{Aut}\,X \left.\right)$

II. Классификация Кодаиры — Энриквеса:

(кривые /$\mathbb{C}$:

$\varkappa=-\infty$	$\varkappa=0$	$\varkappa=1$
$g=0$	$g=1$	$g\geq 2$
$\mathbb{P}^1$	элл. кр.	$\lvert\mathrm{Aut}\, C\rvert<\infty$)

X — мин. к.к.п.

$\varkappa=-\infty$ + X рациональна

+ $X \xrightarrow{\mathbb{P}^1} C$, $g(C)\geq 1$

! — класс VII (Хопфа, Инуэ, ...)

$\varkappa=0$ (+) торы]

(± К3

[+ Энриквес

[+ биэлл.

— к-ти Кодаиры]

!

$\varkappa=1$ (+) $X \xrightarrow{\text{элл.}} C$

$\varkappa=2$ (+) $\Rightarrow X$ проективна и $|\mathrm{Aut}\, X|<\infty$

Кодаирова размерность:

$K_X=\Lambda^2 T_X^\vee$

$|mK_X|: X \dashrightarrow Y \subset \mathbb{P}^N$

$K_X^{\otimes m}$ $\quad \varkappa(X)=\dim Y$

$|mK_X|=\emptyset \Rightarrow \varkappa(X)=-\infty$

Класс VII:

Пример (пов-ть Хопфа):

Отр. Унив. накрывающая $\underline{W \cong \mathbb{C}^2_{x,y} \setminus 0}$

Напр., $X = W/\mathbb{Z}$

$(x,y) \mapsto (2x, 2y)$

$X \to \mathbb{P}^1$

$x,y \mapsto (x:y)$

$G \underset{\text{ком.}}{\subset} \operatorname{Aut} X \Rightarrow \mathbb{Z} \to \tilde{G} \to G$

$\tilde{G} \cap \operatorname{Aut} W$

$\Rightarrow \tilde{G} \subset \operatorname{Aut}(\mathbb{C}^2; 0) \Rightarrow d: \tilde{G} \hookrightarrow \operatorname{Aut} T_0(\mathbb{C}^2) = GL_2(\mathbb{C})$

Хартогс

Пример: пов-сти Инуэ.

$$X = W/\Gamma \qquad (W \cong \mathbb{C}\times \mathbb{H})$$

$\varkappa = -\infty$

$$\Gamma \cong \begin{bmatrix} \mathbb{Z}^3 \rtimes \mathbb{Z} \\ \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \rtimes \mathbb{Z} \end{bmatrix} \begin{matrix} - \\ - \end{matrix}$$

VII.

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 0 & \\ 0 & & b_2 & & 0 \\ & 0 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} H^0 \\ H^1 \end{array}$$

$\chi_{top} = b_2$

$S^3\times S^1$

"Инуэ", "хопфа": $b_2 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathcal{H}_1$$

$$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \langle \delta_1, \delta_2, \delta_3 \mid \delta_1\delta_2\delta_1^{-1}\delta_2^{-1} = \delta_3^{2},\ \delta_3 \in Z(\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}) \rangle$$

$X \not\ni$ кривых!

(как вообще где $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$)

$\varkappa = 0$, пов-ть Кодаиры: $W = \mathbb{C}^2$, $\Gamma = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}$

$T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^4$

$b_1 = 3$, $b_2 = 4$

X пов-ть Инуэ (или Кодаиры),

$G \underset{\text{кон.}}{\subset} \mathrm{Aut}\, X$

1 шаг. $\underline{\underline{G}}$ действует свободно.

2 шаг. $\underline{X}/G = \underline{X'}$ — пов-ть Инуэ (или Кодаиры)

$\Gamma = \underline{\pi_1}(X)$

$\Gamma' = \pi_1(X')$

$G = \Gamma' / \underline{\underline{\Gamma}}$

$\mathbb{Z}^3 \rtimes \mathbb{Z}$

$\boxed{H_r \rtimes \mathbb{Z}}$

$\underline{\underline{H_r \times \mathbb{Z}}}$

3 шаг. Теория групп.

$\boxed{\varkappa = \underline{1}}$

$\mathfrak{X} = 1.$ $\quad \phi : X \xrightarrow[\text{эл.}]{} C$

$1 \to \mathrm{Aut}_\phi \to \mathrm{Aut}\,X \to \Delta \to 1$

$\Delta \subset \mathrm{Aut}\,C$

$\forall$ кон. подгр. содерж. в Aut (алг. гр.)

$|\Delta| < \infty$

Богомолов ~70
Телеман

Богомолов, Курнос
2018

Класс VII + $b_2 = 0$
$\Downarrow$
Хопфа + Инуэ

Класс VII
$b_2 > 0$

Если $|\Delta| = \infty$ ⇒ есть ∞ орбиты на C
⇒ ϕ изотривиально ⇒ ограничения на выр. слои
⇒ $\nexists$ выр. слоёв ⇒ $|\Delta| < \infty$.