Топология пространства метрик (и его модулей) с положительной скалярной кривизной

Борис Ботвинник
University of Oregon, USA

Геометрия, топология и их приложения
Семинар кафедры геометрии и топологии, НГУ
4 октября 2021

I: ВВЕДЕНИЕ. Обозначения:

- W – компактное многообразие, $\dim W = d$, $\partial W = \emptyset$;
- $\mathcal{R}(W)$ – пространство всех Римановых метрик;
- "psc-метрика g" = "метрика g с положительной скалярной кривизной $s_g > 0$";
- $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \subset \mathcal{R}(W)$ – подпространство psc-метрик.
- Если $\partial W \neq \emptyset$, тогда

$$\mathcal{R}(W) := \{g = h + dt^2 \text{ около } \partial W \text{ где } h \in \mathcal{R}(\partial W)\} \supset \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W).$$

Замечание: Если $M = \partial W$, то имеем отображение:

$$\mathrm{res} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \to \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(M), \quad \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_h := \mathrm{res}^{-1}(h), \quad h \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(M).$$

I: ВВЕДЕНИЕ. Обозначения:

- W – компактное многообразие, $\dim W = d$, $\partial W = \emptyset$;
- $\mathcal{R}(W)$ – пространство всех Римановых метрик;
- "psc-метрика g" = "метрика g с положительной скалярной кривизной $s_g > 0$";
- $\mathcal{R}^{\rm psc}(W) \subset \mathcal{R}(W)$ – подпространство psc-метрик.
- Если $\partial W \neq \emptyset$, тогда

$$\mathcal{R}(W) := \{g = h + dt^2 \text{ около } \partial W \text{ где } h \in \mathcal{R}(\partial W)\} \supset \mathcal{R}^{\rm psc}(W).$$

Замечание: Если $M = \partial W$, то имеем отображение:

$$\mathrm{res} : \mathcal{R}^{\rm psc}(W) \to \mathcal{R}^{\rm psc}(M), \quad \mathcal{R}^{\rm psc}(W)_h := \mathrm{res}^{-1}(h), \quad h \in \mathcal{R}^{\rm psc}(M).$$

Теорема$^{\text{fiber bundle}}$. (Chernysh, 2006, Ebert-Frenck, 2018)
Отображение $\mathrm{res} : \mathcal{R}^{\rm psc}(W) \to \mathcal{R}^{\rm psc}(M)$ *является расслоением Серра.*

Существование psc-**метрик:** Мы рассматриваем здесь односвязные многообразия размерности как минимум пять. В этом классе многообразий имеются два фундаментальных результата:

Теорема$^{\text{non-spin}}$. (Gromov-Lawson, 1979) *Если W – замкнутое компактное неспинорное и односвязное многообразие с $\dim W \geq 5$, то $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$.*

Напомню что гладкое ориентированное многообразие W спинорно если второй класс Штифеля-Уитни $w_2(W) = 0$.

Существование psc-**метрик:** Мы рассматриваем здесь односвязные многообразия размерности как минимум пять. В этом классе многообразий имеются два фундаментальных результата:

Теорема$^{\text{non-spin}}$**.** (Gromov-Lawson, 1979) *Если W – замкнутое компактное неспинорное и односвязное многообразие с* $\dim W \geq 5$, *то* $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$.

Напомню что гладкое ориентированное многообразие W спинорно если второй класс Штифеля-Уитни $w_2(W) = 0$.

Если $g \in \mathcal{R}(W)$, то имеется каноническое спинорное расслоение $\mathcal{S}_g \to W$ и оператор Дирака D_g действующий на пространстве сечений $L^2(W, S_g)$.

Теорема$^{\mathrm{Dirac}}$**.** (Lichnerowicz 1960)

$$D_g^2 = \Delta_g^s + \frac{1}{4} s_g.$$

Т.е. если $s_g > 0$, *то оператор* D_g *обратим.*

Для спинорного многообразия W имеем отображение

$$(W,g) \mapsto \frac{D_g}{\sqrt{D_g^2+1}} \in \mathbf{Fred}^{d,0},$$

где $\mathbf{Fred}^{d,0}$ – пространство $\mathcal{C}\ell^d$-линейных Фредгольмовых операторов, $d = \dim W$.

Пространство $\mathbf{Fred}^{d,0}$ также классифицирует вещественную K-теорию, т.е.

$$\pi_q \mathbf{Fred}^{d,0} = KO_{d+q}.$$

Получем отображение индекса:

$$\alpha : (W,g) \mapsto \mathrm{ind}(D_g) = [D_g] \in \pi_0 \mathbf{Fred}^{d,0} = KO_d.$$

Очевидно индекс $\mathrm{ind}(D_g)$ не зависит от метрики g.

Для спинорного многообразия W имеем отображение

$$(W,g) \mapsto \frac{D_g}{\sqrt{D_g^2+1}} \in \mathbf{Fred}^{d,0},$$

где $\mathbf{Fred}^{d,0}$ – пространство $\mathcal{C}\ell^d$-линейных Фредгольмовых операторов, $d = \dim W$.

Пространство $\mathbf{Fred}^{d,0}$ также классифицирует вещественную K-теорию, т.е.

$$\pi_q \mathbf{Fred}^{d,0} = KO_{d+q}.$$

Получем отображение индекса:

$$\alpha : (W,g) \mapsto \mathrm{ind}(D_g) = [D_g] \in \pi_0 \mathbf{Fred}^{d,0} = KO_d.$$

Очевидно индекс $\mathrm{ind}(D_g)$ не зависит от метрики g.
Теория Индекса дает гомоморфизм: $\alpha : \Omega_d^{\mathrm{Spin}} \longrightarrow KO_d$, т.е. $\alpha(W) := \mathrm{ind}(D_g)$ является препятствием к существованию psc-метрики.

Теорема$^{\text{non-spin}}$. (Gromov-Lawson, 1979) *Если W – замкнутое компактное неспинорное и односвязное многообразие с* $\dim W \geq 5$, *то $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$.*

Теорема$^{\text{spin}}$.(Gromov-Lawson 1979, Stolz 1993) *Если W – замкнутое спинорное односвязное многообразие с* $d = \dim W \geq 5$, *то $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$ тогда и только тогда* $\alpha(W) = 0$ *в группе KO_d.*

Теорема$^{\text{non-spin}}$**.** (Gromov-Lawson, 1979) *Если* W *– замкнутое компактное неспинорное и односвязное многообразие с* $\dim W \geq 5$, *то* $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$.

Теорема$^{\text{spin}}$**.**(Gromov-Lawson 1979, Stolz 1993) *Если* W *– замкнутое спинорное односвязное многообразие с* $d = \dim W \geq 5$, *то* $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$ *тогда и только тогда* $\alpha(W) = 0$ *в группе* KO_d.

Лемма$^{\mathrm{surgery}}$**.** (Gromov-Lawson, 1979) *Если* g *– метрика на* W *с* $s_g > 0$, *а* W' *– результат хирургии на* W *коразмерности как минимум три, то существует метрика* g' *на* W' *с* $s_{g'} > 0$.

Теорема$^{\text{non}-\text{spin}}$. (Gromov-Lawson, 1979) *Если W – замкнутое компактное неспинорное и односвязное многообразие с* $\dim W \geq 5$, *то* $\mathcal{R}^{\rm psc}(W) \neq \emptyset$.

Теорема$^{\text{spin}}$.(Gromov-Lawson 1979, Stolz 1993) *Если W – замкнутое спинорное односвязное многообразие с* $d = \dim W \geq 5$, *то* $\mathcal{R}^{\rm psc}(W) \neq \emptyset$ *тогда и только тогда* $\alpha(W) = 0$ *в группе* KO_d.

Лемма$^{\rm surgery}$. (Gromov-Lawson, 1979) *Если g – метрика на W с $s_g > 0$, а W' – результат хирургии на W коразмерности как минимум три, то существует метрика g' на W' с $s_{g'} > 0$.*

Теорема$^{\rm surgery}$ (Chernysh, 2006, Walsh, 2010) *Пусть W и W' – односвязные спинорно кобордантные многообразия,* $\dim \geq 5$. *Тогда*

$$\mathcal{R}^{\rm psc}(W) \cong \mathcal{R}^{\rm psc}(W').$$

Если $\partial W = \partial W' \neq \emptyset$, и $h \in \mathcal{R}^{\rm psc}(\partial W)$, то

$$\mathcal{R}^{\rm psc}(W)_h \cong \mathcal{R}^{\rm psc}(W')_h.$$

Теорема$^{\text{non-spin}}$**.** (Gromov-Lawson, 1979) *Если* W *– замкнутое компактное неспинорное и односвязное многообразие с* $\dim W \geq 5$*, то* $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$*.*

Теорема$^{\text{spin}}$**.**(Gromov-Lawson 1979, Stolz 1993) *Если* W *– замкнутое спинорное односвязное многообразие с* $d = \dim W \geq 5$*, то* $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$ *тогда и только тогда* $\alpha(W) = 0$ *в группе* KO_d*.*

Лемма$^{\mathrm{surgery}}$**.** (Gromov-Lawson, 1979) *Если* g *– метрика на* W *с* $s_g > 0$*, а* W' *– результат хирургии на* W *коразмерности как минимум три, то существует метрика* g' *на* W' *с* $s_{g'} > 0$*.*

Теорема$^{\mathrm{NEWsurgery}}$ (Ebert, Kordass and Wiemeler, 2020) *Пусть* W *и* W' *– односвязные спинорные многообразия,* $\dim \geq 6$*. Тогда*

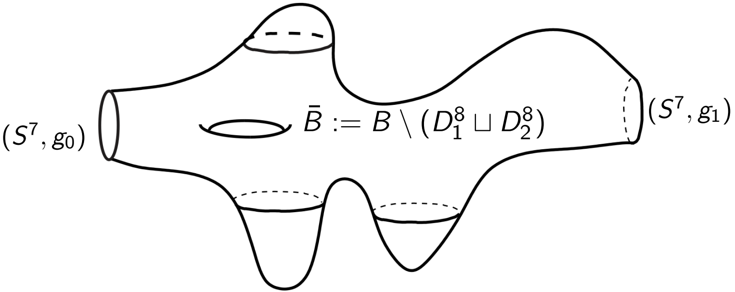
$$\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \cong \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W').$$

Если $\partial W = \partial W' \neq \emptyset$*, и* $h \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(\partial W)$*, то*

$$\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_h \cong \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W')_h.$$

Пример. Мы покажем что $\mathbf{Z} \subset \pi_0 \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(S^7)$.

Рассмотрим многообразие Ботта B, т.е. B – односвязное спинорное многообразие, $\dim B = 8$, и $\alpha(B^8) = \hat{A}(B) = 1$.



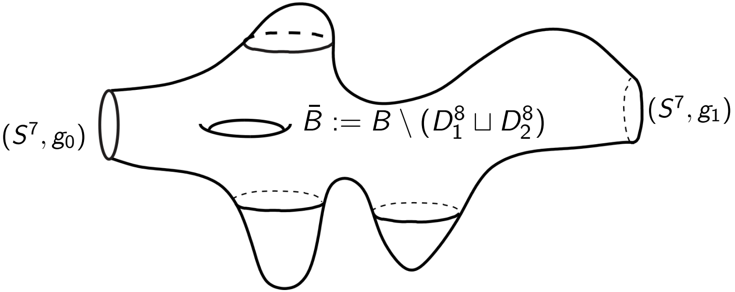
Таким образом, $\mathbf{Z} \subset \pi_0 \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(S^7)$.

Основной Вопрос: Какова топология пространства $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$ для **спинорного** многообразия W?

Частично мы ответим на этот вопрос.

Пример. Мы покажем что $\mathbf{Z} \subset \pi_0 \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(S^7)$.

Рассмотрим многообразие Ботта B, т.е. B – односвязное спинорное многообразие, $\dim B = 8$, и $\alpha(B^8) = \hat{A}(B) = 1$.

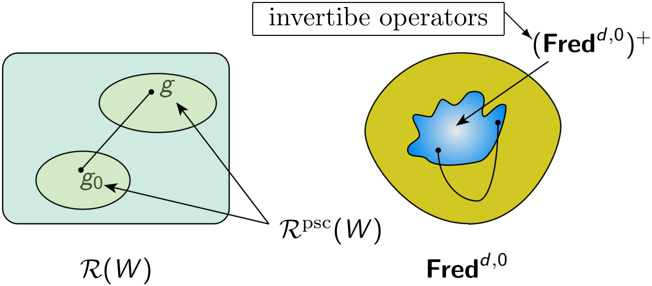


Таким образом, $\mathbf{Z} \subset \pi_0 \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(S^7)$.

Открытая Проблема: Какова топология пространства $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$ для **не спинорного** многообразия W?
Пока мы знаем только что $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$.

Отображение “Index-difference” (N.Hitchin):

Фиксируем метрику $g_0 \in \mathcal{R}^{\rm psc}(W) \neq \emptyset$ (отмеченная точка), и возьмем любую метрику $g \in \mathcal{R}^{\rm psc}(W)$.
Рассмотрим $g_t = (1-t)g_0 + tg$.



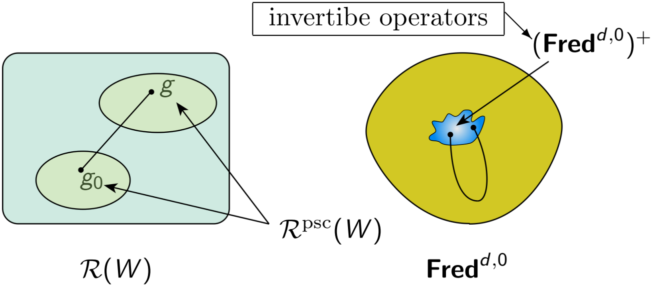
Факт: *Пространство* $(\mathbf{Fred}^{d,0})^+$ *стягиваемо.*

Получаем отображение: $\mathrm{A}_{g_0} : \mathcal{R}^{\rm psc}(W) \longrightarrow \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$ и, соответственно, гомоморфизм в гомотопических группах:

$$(\mathrm{A}_{g_0})_* : \pi_k\mathcal{R}^{\rm psc}(W) \longrightarrow \pi_k\Omega\mathbf{Fred}^{d,0} = KO_{k+d+1}$$

Отображение “Index-difference” (N.Hitchin):

Фиксируем метрику $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$ (отмеченная точка), и возьмем любую метрику $g \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$.
Рассмотрим $g_t = (1-t)g_0 + tg$.



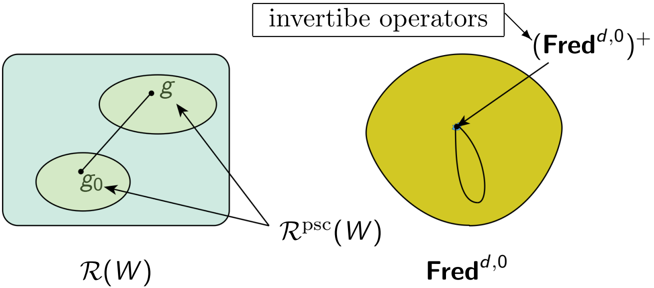
Факт: *Пространство* $(\mathbf{Fred}^{d,0})^+$ *стягиваемо.*

Получаем отображение: $\mathrm{A}_{g_0} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \longrightarrow \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$ и, соответственно, гомоморфизм в гомотопических группах:

$$(\mathrm{A}_{g_0})_* : \pi_k \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \longrightarrow \pi_k \Omega\mathbf{Fred}^{d,0} = KO_{k+d+1}$$

Отображение “Index-difference” (N.Hitchin):

Фиксируем метрику $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$ (отмеченная точка), и возьмем любую метрику $g \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$.
Рассмотрим $g_t = (1-t)g_0 + tg$.



Факт: *Пространство* $(\mathbf{Fred}^{d,0})^+$ *стягиваемо.*

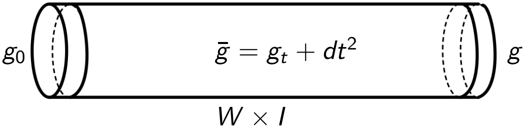
Получаем отображение: $\mathrm{A}_{g_0} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \longrightarrow \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$ и, соответственно, гомоморфизм в гомотопических группах:

$$(\mathrm{A}_{g_0})_* : \pi_k \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \longrightarrow \pi_k \Omega\mathbf{Fred}^{d,0} = KO_{k+d+1}$$

Имеется альтернативная конструкция отображения “index-difference”:

Опять $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \neq \emptyset$ – отмеченная точка, $g \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$ – любая метрика, и $g_t = (1-t)g_0 + tg$.

Получаем цилиндр $W \times I$ с метрикой $\bar{g} = g_t + dt^2$:



Получаем оператор Дирака $D_{\bar{g}}$ с АПС (Atyiah-Patodi-Singer) граничными условиями. Эта конструкция определяет второе отображение:

$$\mathbf{inddiff}_{g_0} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \to \Omega \mathbf{Fred}^{d,0}, \ g \mapsto \frac{D_{\bar{g}}}{\sqrt{D_{\bar{g}}^2+1}} \in \mathbf{Fred}^{d+1,0} \sim \Omega \mathbf{Fred}^{d,0}.$$

Теория Индекса: $\mathbf{inddiff}_{g_0} \sim A_{g_0}$.

Итак, рассмотрим отображение “index-difference”:

$$A_{g_0} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \longrightarrow \Omega\mathbf{Fred}^{d,0},$$

где $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$ – “отмеченная точка”.

Теорема. (B, Ebert, Randal-Williams, 2014) *Пусть W – спинорное многообразие,* $\dim W = d \geq 6$, *и $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$. Тогда гомоморфизм*

$$\pi_k \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \xrightarrow{(A_{g_0})_*} KO_{k+d+1} = \begin{cases} \mathbf{Z} & k+d+1 \equiv 0,4\ (8) \\ \mathbf{Z}_2 & k+d+1 \equiv 1,2\ (8) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

нетривиален когда группа в образе ненулевая.

Итак, рассмотрим отображение “index-difference”:

$$A_{g_0} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \longrightarrow \Omega \mathbf{Fred}^{d,0},$$

где $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$ – “отмеченная точка”.

Теорема. (B, Ebert, Randal-Williams, 2014) *Пусть W – спинорное многообразие,* $\dim W = d \geq 6$, *и* $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)$. *Тогда гомоморфизм*

$$\pi_k \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W) \xrightarrow{(A_{g_0})_*} KO_{k+d+1} = \begin{cases} \mathbf{Z} & k+d+1 \equiv 0, 4 \ (8) \\ \mathbf{Z}_2 & k+d+1 \equiv 1, 2 \ (8) \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

нетривиален когда группа в образе ненулевая.

- Теорема верна когда $\dim W = d \geq 5$ (Perlmutter 2017).
- Это включает и обобщает ранние результаты (Hitchin, 1975), (Crowley-Schick 2012), (Hanke-Schick-Steimle 2013).
- Дальнейшие обобщения получены для неодносвязных спинорных многообразий. (Ebert, Randal-Williams, 2018, 2019)

II: Идеи доказательства. Определим классифицирующее пространство $\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$. Для связного спинорного многообразия W с границей $\partial W \neq \emptyset$ зафиксируем воротник $\partial W \times (-\varepsilon_0, 0] \hookrightarrow W$ и определим

$$\mathrm{Diff}^{\partial}(W) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(W) \mid \varphi = Id \ \text{ near } \ \partial W\}.$$

Зафиксируем вложение $\iota^{\partial} : \partial W \times (-\varepsilon_0, 0] \hookrightarrow \mathbf{R}^m$ и рассмотрим следующее пространство вложений:

$$\mathbf{Emb}^{\partial}(W, \mathbf{R}^{d+\infty}) = \{\iota : W \hookrightarrow \mathbf{R}^{d+\infty} \mid \iota|_{\partial W \times (-\varepsilon_0, 0]} = \iota^{\partial} \}$$

Группа $\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ действует свободно на $\mathbf{Emb}^{\partial}(W, \mathbf{R}^{d+\infty})$ репараметризацией: $(\varphi, \iota) \mapsto (W \xrightarrow{\varphi} W \xhookrightarrow{\iota} \mathbf{R}^{d+\infty})$. Тогда

$$\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W) = \mathbf{Emb}^{\partial}(W, \mathbf{R}^{d+\infty})/\mathrm{Diff}^{\partial}(W).$$

Заметим что пространство $\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ классифицирует гладкие расслоения со слоем W.

II: Идеи доказательства. Определим классифицирующее пространство $\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$. Для связного спинорного многообразия W с границей $\partial W \neq \emptyset$ зафиксируем воротник $\partial W \times (-\varepsilon_0, 0] \hookrightarrow W$ и определим

$$\mathrm{Diff}^{\partial}(W) := \{\varphi \in \mathrm{Diff}(W) \mid \varphi = Id \ \ \text{near} \ \ \partial W\}.$$

Зафиксируем вложение $\iota^{\partial} : \partial W \times (-\varepsilon_0, 0] \hookrightarrow \mathbf{R}^m$ и рассмотрим следующее пространство вложений:

$$\mathbf{Emb}^{\partial}(W, \mathbf{R}^{d+\infty}) = \{\iota : W \hookrightarrow \mathbf{R}^{m+\infty} \mid \iota|_{\partial W \times (-\varepsilon_0, 0]} = \iota^{\partial} \ \}$$

Группа $\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ действует свободно на $\mathbf{Emb}^{\partial}(W, \mathbf{R}^{d+\infty})$ репараметризацией: $(\varphi, \iota) \mapsto (W \xrightarrow{\varphi} W \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathbf{R}^{d+\infty})$.

$$\begin{array}{c} E(W) \\ \big\downarrow w \\ \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W) \end{array} \qquad E(W) = \mathbf{Emb}^{\partial}(W, \mathbf{R}^{d+\infty}) \times_{\mathrm{Diff}^{\partial}(W)} W$$

Пространства модулей метрик. Пусть W – **связное спинорное** многообразие с границей $\partial W \neq \emptyset$, $h_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(\partial W)$. Напомним:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(W)_{h_0} &:= \{g \in \mathcal{R}(W) \mid g = h_0 + dt^2 \ \text{около} \ \partial W\}, \\ \mathrm{Diff}^{\partial}(W) &:= \{\varphi \in \mathrm{Diff}(W) \mid \varphi = Id \ \text{около} \ \partial W\}. \end{aligned}$$

Группа $\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ также действует свободно на $\mathcal{R}(W)_{h_0}$ и $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}$:

Пространства модулей метрик. Пусть W – **связное спинорное** многообразие с границей $\partial W \neq \emptyset$, $h_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(\partial W)$. Напомним:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(W)_{h_0} &:= \{g \in \mathcal{R}(W) \mid g = h_0 + dt^2 \ \text{ около } \ \partial W\}, \\ \mathrm{Diff}^{\partial}(W) &:= \{\varphi \in \mathrm{Diff}(W) \mid \varphi = Id \ \text{ около } \ \partial W\}. \end{aligned}$$

Группа $\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ также действует свободно на $\mathcal{R}(W)_{h_0}$ и $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(W)_{h_0} &= \mathcal{R}(W)_{h_0}/\mathrm{Diff}^{\partial}(W) = \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W), \\ \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} &= \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}/\mathrm{Diff}^{\partial}(W). \end{aligned}$$

Рассмотрим отображение $\mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ как расслоение Серра:

$$\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \to \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$$

Замечание: Хотя пространства psc-метрик гомотопически эквивалентны для всех односвязных спинорных многообразий (данной размерности), то пространсва модулей psc-метрик могут существенно отличаться.

Пример. $W = D^d$, и h_0 – стандартная круглая метрика на сфере $\partial D^d = S^{d-1}$.

Теорема$^{\text{moduli space}}$. (Farrell, Hsiang, 1978)

$$\pi_i B\mathrm{Diff}^{\partial}(D^d) \otimes \mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{if } d \text{ odd}, \ i = 4k, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \qquad \textit{for } 0 < i << d.$$

Обозначим $\iota : \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(D^d)_{h_0} \to \mathcal{M}(D^d)_{h_0}$ вложение.

Теорема$^{\text{pcs}-\text{moduli space}}$. (B, Hanke, Schick, Walsh, 2010)
Вложение $\iota : \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(D^d)_{h_0} \to \mathcal{M}(D^d)_{h_0}$ индуцирует эпиморфизм

$$\pi_i \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(D^d)_{h_0} \otimes \mathbf{Q} \to \pi_i \mathcal{M}(D^d)_{h_0} \otimes \mathbf{Q} \quad \textit{for } 0 < i << d.$$

Замечание: Хотя пространства psc-метрик гомотопически эквивалентны для всех односвязных спинорных многообразий (данной размерности), то пространсва модулей psc-метрик могут существенно отличаться.

Пример. $W = D^d$, и h_0 – стандартная круглая метрика на сфере $\partial D^d = S^{d-1}$.

Теорема$^{\text{moduli space}}$**.** (Farrell, Hsiang, 1978)

$$\pi_i B\mathrm{Diff}^{\partial}(D^d) \otimes \mathbf{Q} = \begin{cases} \mathbf{Q} & \text{if } d \text{ odd}, \ i = 4k, \\ 0 & \text{else.} \end{cases} \qquad \textit{for } 0 < i << d.$$

Обозначим $\iota : \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(D^d)_{h_0} \to \mathcal{M}(D^d)_{h_0}$ вложение.

Теорема$^{\text{pRc}-\text{moduli space}}$**.**(B, Walsh, Wraith, 2019) *Вложение* $\iota : \mathcal{M}^{\mathrm{pRc}}(D^d)_{h_0} \to \mathcal{M}(D^d)_{h_0}$ *индуцирует эпиморфизм*

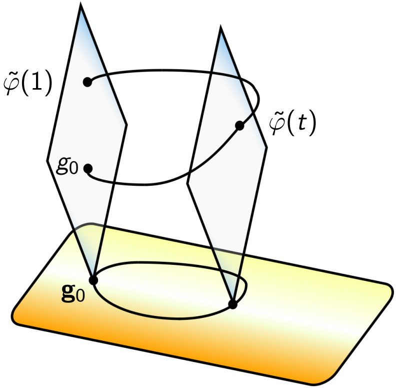
$$\pi_i \mathcal{M}^{\mathrm{pRc}}(D^d)_{h_0} \otimes \mathbf{Q} \to \pi_i \mathcal{M}(D^d)_{h_0} \otimes \mathbf{Q} \quad \textit{for } 0 < i << d.$$

Пусть $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}$ – “отмеченная точка”.

Получаем расслоение:

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \\ \Big\downarrow \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \\ \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W) \end{array}$$

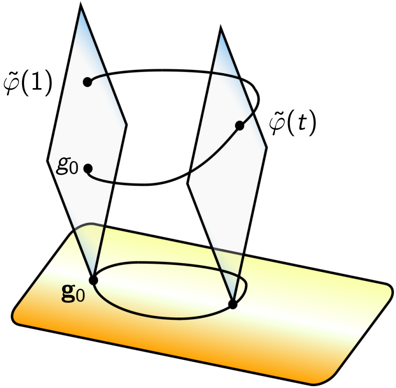
Если $\varphi : I \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ – петля, такая что $\varphi(0) = \varphi(1) = \mathbf{g}_0$, и $\tilde{\varphi} : I \to \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}$ – ее поднятие.



Пусть $g_0 \in \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}$ – “отмеченная точка”.

Получаем расслоение:

$$\begin{array}{c} \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}} \\ \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W) \end{array}$$

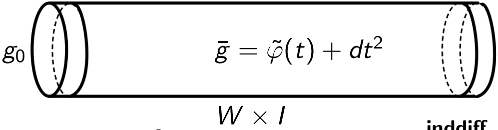


Если $\varphi : I \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W)$ – петля,

такая что $\varphi(0) = \varphi(1) = \mathbf{g}_0$, и

$\tilde{\varphi} : I \to \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0}$ – ее поднятие.

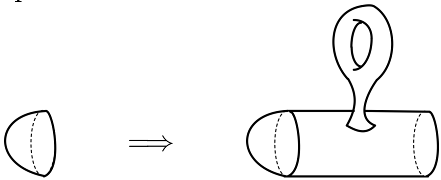
Получаем отображение голономии $e : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}(1)$, где
$\tilde{\varphi}(1) = \psi(g_0)$ для некоторого $\psi \in \mathrm{Diff}^{\partial}(W)$:



$e : \varphi \mapsto \tilde{\varphi}(1) = \psi(g_0)$

$$\Omega\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W) \xrightarrow{e} \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \xrightarrow{\mathbf{inddiff}_{g_0}} \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$$

Пусть $\dim W = d = 2n$. Предположим W – многообразие с границей $\partial W \neq \emptyset$, и W' – результат допустимой перестойки на W. Пример:



$W = D^{2n}$ $\qquad$ $W' = D^{2n} \cup ((S^{2n-1} \times I) \# (S^n \times S^n))$

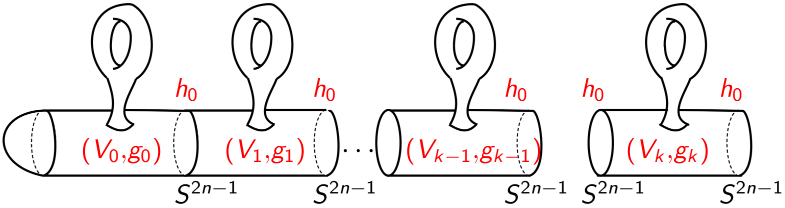
Получаем гомотопическую єквивалентность:

$$\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(D^{2n})_{h_0} \cong \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W')_{h_0},$$

где h_0 – стандартная круглая метрика на S^{2n-1}.

Наблюдение: Достаточно доказать наш результат для $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(D^{2n})_{h_0}$ или любого многообразия полученного из D^{2n} допустимыми перестройками.

Рассмотрим следующую последовательность **перестроек**:

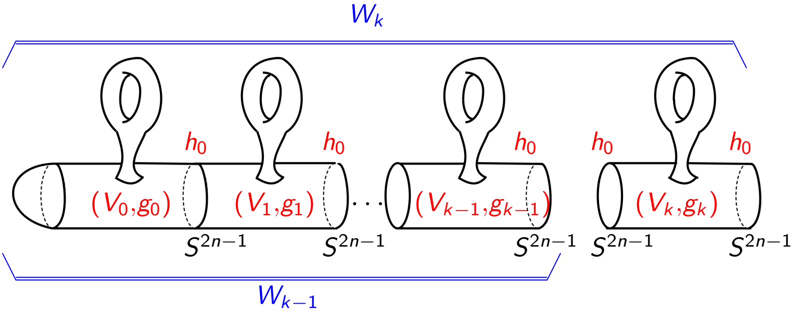


Где $V_0 = (S^n \times S^n) \setminus D^{2n}$,

$V_1 = (S^n \times S^n) \setminus (D^{2n}_- \sqcup D^{2n}_+), \ldots, V_k = (S^n \times S^n) \setminus (D^{2n}_- \sqcup D^{2n}_+)$.

Тогда $W_k := V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_k = \#_k(S^n \times S^n) \setminus D^{2n}$.

Выберем psc-метрики g_j на каждом многообразии V_j которые дают стандартную метрику h_0 на граничных сферах.



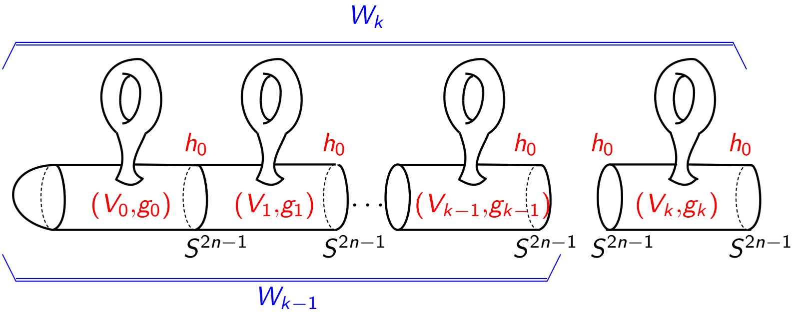
Получаем **отображение композиции:**

$$\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_{k-1})_{h_0} \times \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(V_k)_{h_0,h_0} \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0}.$$

Склеивание метрик вдоль границы порождает отображение:

$$\mathfrak{m} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_{k-1})_{h_0} \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0}, \quad g \mapsto g \cup g_k$$

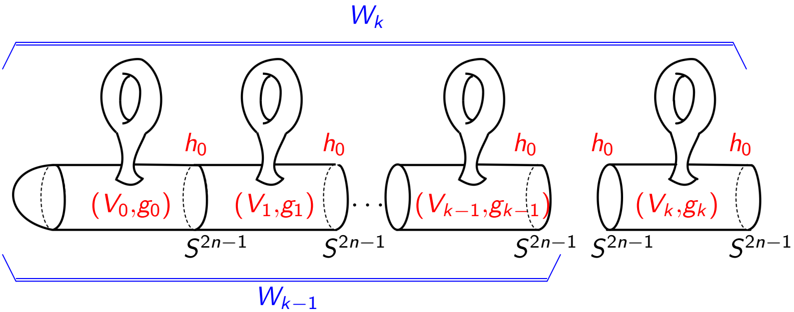
Нопомню: Отображение $\mathfrak{m} : \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_{k-1})_{h_0} \longrightarrow \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0}$ является гомотопической эквивалентностью.



Обозначим $s : W_k \hookrightarrow W_{k+1}$ – естественное отображение. Получаем отображения:

$$\mathrm{Diff}^{\partial}(W_0) \to \cdots \to \mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \to \mathrm{Diff}^{\partial}(W_{k+1}) \to \cdots$$

$$\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_0) \to \cdots \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_{k+1}) \to \cdots$$

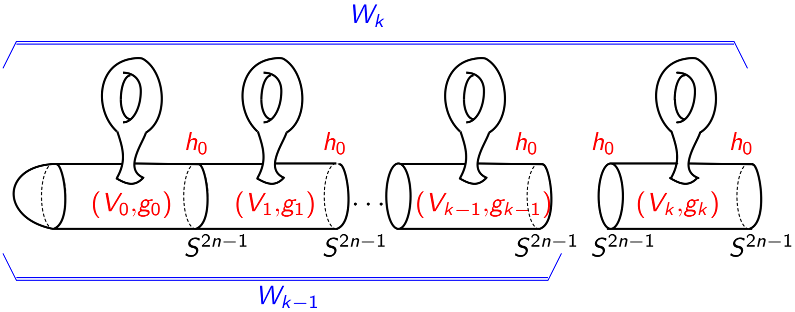


Обозначим $s : W_k \hookrightarrow W_{k+1}$ – естественное отображение. Получаем отображения:

$$\mathrm{Diff}^{\partial}(W_0) \to \cdots \to \mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \to \mathrm{Diff}^{\partial}(W_{k+1}) \to \cdots$$

$$\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_0) \to \cdots \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \to \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_{k+1}) \to \cdots$$

Напомню: Мы отождествляем пространство $\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k)$ с пространстом модулей всех Римановых метрик на W_k которые совпадают с метрикой $h_0 + dt^2$ около границы ∂W_k.



Обозначим $s : W_k \hookrightarrow W_{k+1}$ – естественное отображение. Получаем диаграмму расслоенные пространств:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W_0)_{h_0} \arrow[r] \arrow[dd] & \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W_1)_{h_0} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0} \arrow[r] \arrow[dd] & \cdots \\
\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_0)_{h_0} \arrow[r, "\cong"] & \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_1)_{h_0} \arrow[rr, "\cong"] & & \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0} \arrow[r, "\cong"] & {} \\
\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_0) \arrow[r] & \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

с гомотопически эквивалентными слоями:

$$\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_0)_{h_0} \cong \cdots \cong \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0}$$

Мы переходим к пределу и получаем расслоение:

$$\begin{array}{c} \mathbf{M}^{\mathrm{psc}}_{\infty} \\ \mathbf{R}^{\mathrm{psc}}_{\infty} \downarrow \\ \mathbf{B}_{\infty} \end{array} = \lim_{k\to\infty} \left(\begin{array}{c} \mathcal{M}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0} \\ \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0} \downarrow \\ \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \end{array} \right)$$

где $\mathbf{R}^{\mathrm{psc}}_{\infty}$ гомотопически эквивалентно $\mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0}$.

Замечание. Получаем отображение:

$$\Omega\mathbf{B}_{\infty} \xrightarrow{e_{\infty}} \mathbf{R}^{\mathrm{psc}}_{\infty} \xrightarrow{\textbf{inddiff}} \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$$

которое согласовано с отображениями:

$$\Omega\mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k) \xrightarrow{e_k} \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W_k)_{h_0} \xrightarrow{\textbf{inddiff}_{g_0}} \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$$

Магия Топологии: Оказывается что предельное пространство $\mathbf{B}_{\infty} := \lim_{k\to\infty} \mathbf{B}\mathrm{Diff}^{\partial}(W_k)$ уже хорошо известно.

В начале 2000', **Ib Madsen, Michael Weiss** открыли новую технологию, именно, хирургию которая зависит от параметров. Это позволило определить и изучить различные

Пространства модулей многообразий.

Теорема. (S. Galatius, O. Randal-Williams) *Имеется отображение*

$$\mathbf{B}_\infty \xrightarrow{\eta} \Omega_0^\infty \mathsf{MT}\Theta_n$$

индуцирующее изоморфизм в гомологиях.

Получаем расслоенные пространства:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M}_\infty^{\mathrm{psc}} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{M}}_\infty^{\mathrm{psc}} \\ {\scriptstyle \mathbf{R}_\infty^{\mathrm{psc}}}\downarrow & & {\scriptstyle \mathbf{R}_\infty^{\mathrm{psc}}}\downarrow \\ \mathbf{B}_\infty & \xrightarrow{\eta} & \Omega_0^\infty \mathsf{MT}\Theta_n \end{array}$$

Получаем отображение голономии: $\mathbf{e} : \Omega\Omega_0^\infty \mathsf{MT}\Theta_n \longrightarrow \mathbf{R}_\infty^{\mathrm{psc}}$

Пространство $\Omega_0^\infty MT\Theta_n$ – это **пространство модулей $(n-1)$-связных $2n$-многообразий**.

В частности, получаем отображение (спинорная ориентация)

$$\hat{\alpha} : \Omega_0^\infty MT\Theta_n \longrightarrow \mathbf{Fred}^{2n,0}$$

которое отображает многообразие W в соответсвующий оператор Дирака.

$$\begin{tikzcd}
\Omega\Omega_0^\infty MT\Theta_n \arrow[rr, "\Omega\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "\mathbf{e}"'] & & \Omega\mathbf{Fred}^{2n,0} \\
& \mathbf{R}_\infty^{\mathrm{psc}} \arrow[ur, "\mathbf{inddiff}"'] &
\end{tikzcd}$$

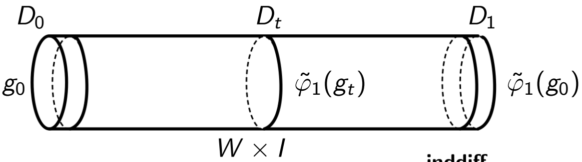
Пространство $\Omega_0^\infty \mathsf{MT}\Theta_n$ – это **пространство модулей $(n-1)$-связных $2n$-многообразий**.

В частности, получаем отображение (спинорная ориентация)

$$\hat{\alpha} : \Omega_0^\infty \mathsf{MT}\Theta_n \longrightarrow \mathbf{Fred}^{2n,0}$$

которое отображает многообразие W в соответсвующий оператор Дирака.

$$\begin{tikzcd} \Omega\Omega_0^\infty \mathsf{MT}\Theta_n \arrow[rr, "\Omega\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "\mathbf{e}"'] & & \Omega\mathbf{Fred}^{2n,0} \\ & \mathbf{R}_\infty^{\mathrm{psc}} \arrow[ur, "\mathbf{inddiff}"'] & \end{tikzcd}$$



$$\Omega\mathbf{B}\mathrm{Diff}^\partial(W) \xrightarrow{e} \mathcal{R}^{\mathrm{psc}}(W)_{h_0} \xrightarrow{\mathbf{inddiff}_{g_0}} \Omega\mathbf{Fred}^{d,0}$$

Пространство $\Omega_0^\infty MT\Theta_n$ – это **пространство модулей $(n-1)$-связных $2n$-многообразий**.

В частности, получаем отображение (спинорная ориентация)

$$\hat{\alpha} : \Omega_0^\infty MT\Theta_n \longrightarrow \mathbf{Fred}^{2n,0}$$

которое отображает многообразие W в соответсвующий оператор Дирака.

Теория Индекса дает нам коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Omega\Omega_0^\infty MT\Theta_n \arrow[rr, "\Omega\hat{\alpha}"] \arrow[dr, "\mathbf{e}"'] & \arrow[d, phantom, "\bigcirc"] & \Omega\mathbf{Fred}^{2n,0} \\ & \mathbf{R}_\infty^{\mathrm{psc}} \arrow[ur, "\mathbf{inddiff}"'] & \end{tikzcd}$$

Мы используем обычные методы алгебраической топологии для вычисления гомоморфизма

$$(\Omega\hat{\alpha})_* : \pi_k(\Omega\Omega_0^\infty MT\Theta_n) \longrightarrow \pi_k(\Omega\mathbf{Fred}^{2n,0}) = KO_{k+2n+1}$$

и доказываем что этот гомоморфизм нетривиален если группа в образе нетривиальна.

Некоторые ссылки:

- B. Botvinnik, J. Ebert, O. Randal-Williams, Infinite loop spaces and metrics of positive scalar curvature, Invent. Math. 209 (2017), no. 3, 749-835.

- J. Ebert, O. Randal-Williams, Infinite loop spaces and positive scalar curvature in the presence of a fundamental group. Geom. Topol. 23 (2019), no. 3, 1549-1610.

- J. Ebert, The two definitions of the index difference. Trans. Amer. Math. Soc. 369 (2017), no. 10, 7469-7507

- B. Botvinnik, J. Ebert, Positive scalar curvature and homotopy theory, survey, to appear in a book dedicated to Gromov's 75th birthday.

С благодарностью вспоминаю моих Учителей:

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!