Формула следа Сельберга. Часть I.

Лапштаев Максим

НГУ

08.12.2021

Формула суммирования Пуассона

Символ Виноградова: $x << y$, если существует константа C, что $x \leq Cy$.

Пусть функция $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ является «хорошей» функцией. «Хорошей» в том смысле, что ряд

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n)$$

сходится абсолютно. Например, $h \in C^2(\mathbb{R})$ и существует $\delta > 0$, что

$$|h(x)| << \frac{1}{(1+|x|)^{1+\delta}} \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

Определим преобразование Фурье по формуле

$$\widehat{h}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x)e^{-2\pi ixy}\,dx, \tag{1}$$

Теорема.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(n). \tag{2}$$

Доказательство. Введем функцию

$$H(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h(x+n).$$

Функция $H(x)$ удовлетворяет условиям

- $H(x+1) = H(x)$;
- $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |h(x+n)| < \infty \ \forall\, x \in \mathbb{R}$;
- $H(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$;

Разложим $H(x)$ в ряд Фурье на отрезке $[0,1]$, т.е. представим в виде

$$H(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{H}_k e^{2\pi i k x}.$$

Найдем коэффициенты Фурье

$$\widehat{H}_k = \int\limits_0^1 H(x) e^{-2\pi ikx} dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 h(x+n) e^{-2\pi ikx} dx =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int\limits_n^{n+1} h(x) e^{-2\pi ikx} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-2\pi ikx} dx = \widehat{h}(k).$$

Ряд Фурье запишется в следующем виде

$$H(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(k) e^{2\pi ikx}$$

При $x = 0$ получаем требуемую формулу

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(n). \blacksquare$$

Определение 1. Формула суммирования «хорошей» функции $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(n).$$

называется формулой суммирования Пуассона.

Формула следа Сельберга для окружности

Рассмотрим задачу на собственные значения лапласиана на окружности S^1:

$$-\Delta + \lambda = -\frac{d^2}{dx^2} + \lambda.$$

Собственные функции $\varphi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{imx}$ для собственных значений $m = 0, \pm 1, ..$

Определим интегральный оператор L для 2π периодических функций

$$[Lf](x) = \int\limits_0^{2\pi} k(x,y) f(y) dy,$$

где интегральное ядро

$$k(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(m) \varphi_m(x) \overline{\varphi}_m(y).$$

Определим формулу следа

$$Tr\ h(L) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{h}(m).$$

Здесь h - некоторая «хорошая» функция. Определим этот класс

Определение 2. Функция $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ называется «хорошей», если

(i) $\exists\ \sigma > 0$, что h аналитична для области $|\mathrm{Im}\ x| \leq \sigma$;

(ii) $\exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in \mathbb{C}$

$$|h(x)| << \frac{1}{(1 + |\mathrm{Re}\ x|)^{1+\delta}} \text{ при } |\mathrm{Im}\ x| \leq \sigma.$$

Резольвента лапласиана на окружности

Для $\operatorname{Im} x < 0$ рассмотрим резольвенту

$$R(x) = (\Delta + x^2)^{-1}.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = (x^2 - (x')^2)^{-1}$$

Формула Пуассона

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (x^2 - m^2)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i n y}}{x^2 - y^2} dy.$$

Из теории вычетов

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} (x^2 - m^2)^{-1} = \frac{i\pi}{x} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i n x}.$$

Из формулы

$$\operatorname{ctg} z = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n z}$$

находим, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (x^2 - n^2)^{-1} = \frac{\pi}{x} \operatorname{ctg}(\pi x)$$

Теорема 1. Если h удовлетворяет условиям $(i), (ii)$, то

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} h(n) = \frac{1}{2i}\int_{C_{=}} h(x)\,\mathrm{ctg}(\pi x)dx,$$

где

$$C_{=} = \{(x \pm i\sigma) \in \mathbb{C} |\; x \in \mathbb{R}\}.$$

Формула следа для сферы

На сфере S^2 также рассмотрим задачу на собственные значения для лапласиана Δ

$$(\Delta + \lambda) f = 0.$$

В сферических координатах собственные функции выражаются в виде сферических многочленов

$$Y_\ell^m = (-1)^m \sqrt{\frac{(2\ell+1)}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos\theta) e^{im\varphi},$$

где P_ℓ^m - полиномы Лежандра первого типа. Имеем дискретный спектр $\lambda = \ell(\ell+1)$ и

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$$

Условия на хорошую функцию

Обозначим $\rho_j = \sqrt{\lambda_j + \frac{1}{4}} = j + 1/2$. Выдвинем условие на «хорошую» функцию $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(i) $\exists\ \sigma > 0$, что $h(x)$ аналитична для $|\mathrm{Im}\ x| \leq \sigma$;

(ii) $h(x) = h(-x)\ \forall\ x \in \mathbb{C}$;

(iii) $\exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in \mathbb{C}$, что при $|\mathrm{Im}\ x| \leq \sigma$

$$|h(x)| << \frac{1}{(1 + |\mathrm{Re}\ x|)^{2+\delta}};$$

Суммирование Пуассона

В связи с особенностью спектра (он неотрицательный), мы рассмотрим сумму

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f(\rho_n), \tag{3}$$

где $f(x) = |x|h(x)$. Сделаем ряд формальных преобразований

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left| n + \frac{1}{2} \right| h\left(n + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \int\limits_0^{\infty} xh(x)\cos(2\pi nx)dx.$$

Абсолютная сходимость

Лемма 1. Пусть $h(x)$ - «хорошая функция». Тогда $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall\ \rho \in \mathbb{C}$, $|\mathrm{Im}\ x| \le \sigma\ \exists\ r_\rho > 0$, что

$$|h^{(k)}(\rho)| <<_k \frac{1}{r_\rho^k (1 + ||\mathrm{Re}\ \rho| - r_\rho|)^{2+\delta}}.$$

Здесь $r_\rho \in R_\rho$, где

$$R_\rho = \{r > 0\ | r < \sigma - |\mathrm{Im}\ \rho|\}.$$

Доказательство. Заметим, что функция

$$q(x) = \frac{1}{(1+x)^{2+\delta}}$$

при $x > 0$ монотонно убывает. Возьмем окружность

$$C_{r_\rho} = \{z \in \mathbb{C}|\ z = \rho_\rho + re^{i\varphi},\ \varphi \in [0, 2\pi)\}$$

и $r_\rho \in R_\rho$ (дабы не выходить из полосы аналитичности)

Используем интегральную формулу Коши для производной k - ого порядка

$$h^{(k)}(\rho) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r_\rho}} \frac{h(z)dz}{(z-\rho)^{k+1}}.$$

И оценим верхний интеграл

$$|h^{(k)}(\rho)| \leq \frac{k!}{2\pi r_\rho^{k+1}} \oint\limits_{C_r} |h(z)|ds.$$

Также заметим, что $|\mathrm{Re}\ z| \geq ||\mathrm{Re}\ \rho| - r_\rho|$ и

$$q(|\mathrm{Re}\ z|) \leq q(||\mathrm{Re}\ \rho| - r_\rho|),$$

получаем неравенство

$$|h^{(k)}(\rho)| \leq \frac{Ck!}{r_\rho^k(1+||\mathrm{Re}\ \rho| - r_\rho|)^{2+\delta}},$$

где C - некоторая константа ■

Замечание. Если ρ - вещественное, то просто берем любое число r из интервала $(0, \sigma)$. Теперь нетрудно показать абсолютную сходимость ряда 3. Оценим модуль интеграла (используя два раза интегрирование по частям)

$$\left|\int_0^\infty xh(x)\cos(2\pi nx)dx\right| \leq \frac{1}{4\pi^2 n^2}\int_0^\infty (2|h'(x)| + x|h''(x)|)dx.$$

Подинтегральная функция

$$2|h'(x)| + x|h''(x)| \leq \frac{(A(r) + xB(r))}{(1 + |x - r|)^{2+\delta}},$$

где $A(r)$ и $B(r)$ - некоторые константы, зависящие от числа r.

Интеграл

$$\int_0^\infty \frac{(A(r)+xB(r))dx}{(1+|x-r|)^{2+\delta}} < \infty.$$

Оценивая сверху

$$\left|\int_0^\infty xh(x)\cos(2\pi nx)dx\right| \leq \frac{1}{4\pi^2 n^2}\int_0^\infty \frac{(A(r)+xB(r))dx}{(1+|x-r|)^{2+\delta}}.$$

А значит ряд 3 сходится абсолютно!

Теорема 2. Если h удовлетворяет условиям $(i), (ii), (iii)$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\rho_n) = -\frac{1}{2i} \int\limits_{C_\times} xh(x)\,\mathrm{tg}(\pi x)dx,$$

где $C_x = C_1^{-1} \cup C_2^{-1} \cup C_1 \cup C_2$, то есть

$$C_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x(1 - i\sigma),\ x \in [0,1], z = x - i\sigma,\ x \in [1,\infty)\}$$

и

$$C_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x(1 - i\sigma),\ x \in [-1,0], z = x - i\sigma,\ x \in (-\infty,-1]\}.$$

Доказательство. Вспомним сначала формулу из ТФКП

$$\operatorname{tg} z = -i \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-2\pi i |n| z}.$$

Далее

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(\rho_j) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \int_0^{\infty} x h(x) \cos(2\pi n x) dx.$$

Используем формулу из ТФКП

$$\cos(2\pi n x) = \frac{e^{2\pi i |n| x} + e^{-2\pi i |n| x}}{2}$$

и после простых преобразований

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(\rho_j) = \underbrace{- \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \int_{-\infty}^{0} x h(x) e^{-2\pi i |n| x} dx}_{I_1} + \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \int_0^{\infty} x h(x) e^{-2\pi i |n| x} dx}_{I_2}.$$

Рассмотрим суммы I_1 и I_2. Начнем с интеграла I_2. Рассмотрим интеграл

$$\left|\int_0^\infty xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx}\,dx\right|.$$

Перейдем от $[0,\infty)$ к кривой C_1:

$$\left|\int_0^\infty xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx}\,dx\right| = \left|\int_{C_1} xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx}\,dx\right|.$$

Проведем оценку

$$\left|\int_{C_1} xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx}\,dx\right| \le \int_{C_1} |xh(x)| \left(1+\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2n\pi\mathrm{Im}\ z}\right) ds$$

Заметим, что

$$1+\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2n\pi \mathrm{Im}\ z} \leq 1+\int\limits_0^{\infty} e^{2x\pi \mathrm{Im}\ z} dx = 1-\frac{1}{2\pi \mathrm{Im}\ z}.$$

Получаем оценку

$$\left|\int\limits_{C_1} xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx} dx\right| \leq \int\limits_{C_1} |xh(x)| \left(1-\frac{1}{2\pi \mathrm{Im}\ z}\right) ds < \infty.$$

Можем поменять сумму и интеграл

$$I_2 = \int\limits_0^{\infty} xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx} dx.$$

А значит

$$\int\limits_0^{\infty} xh(x)\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n e^{-2\pi inx} dx = i\int\limits_{C_1} xh(x)\,\mathrm{tg}(\pi x) dx.$$

Аналогично сумму I_1

$$I_1 = -i \int\limits_{C_2} xh(x)\,\mathrm{tg}(\pi x)dx.$$

Используя четность функции $h(x)$ получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} f(\rho_j) = -\frac{1}{2i} \int\limits_{C_\times} xh(x)\,\mathrm{tg}(\pi x)dx \ \blacksquare$$

Общая схема построения формулы следа Сельберга

1) Берется некоторое многообразие M и рассматриваем задачу собственных значений для оператора Бельтрами - Лапласа. С помощью спектра, собственных функций, функции Грина или инным образом строится интегральный оператор L с помощью хорошей функции h.
2) Ищутся условия на «хорошую» функцию h.
3) Строится формула следа Сельберга.

В настоящий момент хорошо изучены формулы следа Сельберга на римановых поверхностях. И наибольший интерес представляют для нас гиперболические римановы поверхности.

Гиперболическая геометрия

Обозначим $\mathbb{H}^2$ - гиперболическую плоскость. На $\mathbb{H}^2$ гиперболической плоскости мы будем использовать два координатных представления (в зависисимости от удобства):
1) Плоскость $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \ |\mathrm{Im}\ z > 0\}$ с метрикой ds^2 и объем $d\mu$

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}, \ d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$$

2) Полярное представление $(\tau, \varphi) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi)$

$$ds^2 = d\tau^2 + \mathrm{sh}^2\,\tau d\varphi^2, \ d\mu = \mathrm{sh}\,\tau d\tau d\varphi.$$

Риманово расстояние между точками $z, w \in \mathbb{H}^2$ определяется по формуле

$$d(z, w) = \inf_{\gamma} \int\limits_{\gamma} \|\dot{\gamma}\| dt,$$

где γ - кривая, соединяющая точки z и w.

Пусть $SL_2(\mathbb{R})$ действует на $\mathbb{H}^2$, по формуле

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

где

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Обозначим $Isom(\mathbb{H}^2)$ - подгруппа изометрий в $SL_2(\mathbb{R})$, $Isom^+(\mathbb{R})$ - подгруппа изометрий, сохроняющих ориентацию.

Оператор Бельтрами - Лапласа на гиперболической плоскости

Общий вид оператора Бельтрами - Лапласа на римановом многообразии с метрикой $ds^2 = g_{ij} dx^i d^j$ имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

В координатах плоскости Лобачевского

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

и в полярных координатах

$$\Delta = \frac{1}{\operatorname{sh} \tau} \frac{d}{d\tau} \left(\operatorname{sh} \tau \frac{d}{d\tau} \right) + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \tau} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Длина изометрии

Определение 1. Длина изометрии $g \in Isom^{+}(\mathbb{H}^2)$ определяется по формуле
$$\ell_g = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d(gz, z).$$

Определение 2. Изометрия $g \in Isom^{+}(\mathbb{H}^2)$ называется строго гиперболической, если $\ell_g > 0$.

Функция Грина

Определение 1. Пусть Δ - оператор Лапласа и $f(z)$ - решение уравнения

$$(\Delta + \lambda) f(z) = 0.$$

Функция Грина формально определяется как интегральное ядро резольвенты

$$(\Delta + \lambda)^{-1} h(z) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} G(z, w; \lambda) h(w) d\mu(w),$$

где h - некоторая «хорошая» функция.
На функцию Грина накладывается условия

G1 $\forall\ w \in \mathbb{H}^2$ функция Грина $G(\cdot, w; \lambda) \in C^{\infty}(\mathbb{H}^2 \setminus w)$;

G2 $(\Delta + \lambda)G(z, w; \lambda) = \delta(z, w)$;

G3 как функция от (z, w) $G(z, w; \lambda) = u(d(z, w))$;

G4 $G(z, w; \lambda) \to 0$ при $d(z, w) \to \infty$;

Здесь δ- это функция Дирака, то есть

D1 $\delta(z, w)d\mu(z)$ - вероятностная мера;

D2 $\int\limits_{\mathbb{H}^2} f(z)\delta(z, w)d\mu(z) = f(w)$ для любой функции $f \in C(\mathbb{H}^2)$.

Предложение 1. Если $\rho \in \mathbb{C}$ и $\mathrm{Im}\,\rho < 1/2$, и $\lambda = \rho^2 + 1/4$, то

$$G(z, w; \lambda) = -\frac{1}{2\pi} Q_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch} d(z, w))$$

удовлетворяет условиям $G1 - G4$ и Q_ν - функция Лежандра 2 - ого типа.

Доказательство. Обозначим $\tau = d(z, w)$ и перепишем оператор Лапласа в полярных координатах

$$\left(\frac{1}{\operatorname{sh}\tau}\frac{d}{d\tau}\left(\operatorname{sh}\tau\frac{d}{d\tau}\right) + \lambda\right) u(\tau) = 0.$$

Положим $u(\tau) = G(z, w; \lambda)$. Пусть $r = \operatorname{ch}\tau$ и $\bar{u}(r) = u(\tau)$. Представим $\lambda = -\nu(\nu + 1)$. Тогда уравнение Лапласа перейдет в уравнение Лежандра

$$\left((1 - r^2)\frac{d^2}{dr^2} - 2r\frac{d}{dr} + \nu(\nu + 1)\right) \bar{u}(r) = 0 \ \blacksquare$$

Интегральное представление

Используем интегральное представление функции Лежандра

$$Q_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{\tau}^{\infty} \frac{e^{-i\rho t}}{\sqrt{\operatorname{ch}\tau - \operatorname{ch} t}}. \tag{4}$$

Это представление введет себя следующим образом

- $Q_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch}\tau) \to 0$ при $\tau \to \infty$;
- $Q_{-\frac{1}{2}+ix}(\operatorname{ch}\tau) = O(\log\tau)$ при $\tau \to 0$;

Лемма 1. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ C_\varepsilon = const$, что верно равенство

$$\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau)\right| \le C_\varepsilon(1+|\log\tau|)e^{\tau\left(\mathrm{Im}\ \rho-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}$$

для $\tau > 0$ и $\rho \in \mathbb{C}$ при $\mathrm{Im}\ \rho < \frac{1}{2}-\varepsilon$.

Доказательство. Используем интегральное представление

$$\left|Q_{-\frac{1}{2}+i\rho}(\operatorname{ch}\tau)\right| \le \frac{e^{\tau\left(\mathrm{Im}\ \rho-\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}{\sqrt{2}}\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{e^{t\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}{\sqrt{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\tau}}dt.$$

Интеграл имеет асимптотику при $\tau \to 0$

$$\int\limits_{\tau}^{\infty}\frac{e^{t\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)}}{\sqrt{\operatorname{ch}t-\operatorname{ch}\tau}}dt \le C_\varepsilon(1+\log\tau)$$

и при больших τ равномерно ограничен ■

Лемма 2. Пусть $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}$ такая функция, что $|f(z)| \leq Ae^{\alpha d(0,w)}$ с константами $A, \alpha > 0$. Тогда интеграл

$$I = \int\limits_{\mathbb{H}^2} G(z, w; \lambda) f(w) d\mu(w)$$

сходится абсолютно и равномернов при $\mathrm{Im}\ x < -\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)$. И сходится по z равномерно на компактах.

Доказательство. Используем неравенство треугольника

$$|f(w)| \leq Ae^{\alpha d(0,w)} \leq Ae^{\alpha d(z,0)} e^{\alpha d(0,z)} e^{\alpha d(z,w)}$$

и перейдем к полярным координатам $\tau = d(z, w)$, φ, $d\mu = \operatorname{sh} \tau d\tau d\varphi$. Используя интегральное представление и лемму 1 получаем

$$I <<_{\varepsilon} \int\limits_0^{\infty} |\log \tau| e^{\left(\frac{1}{2} - \mathrm{Im}\ \rho - \varepsilon - \alpha\right)} \operatorname{sh} \tau d\tau \ \blacksquare$$

Напомним, что $\lambda = \rho^2 + 1/4$ и будем обозначать $G_\rho(z, w) = G(z, w; \lambda)$.

Биинвариантная функция Сельберга

Пусть H - подгруппа группы $Isom^+(\mathbb{H}^2)$

Определение 1. Биинвариантной функцией Сельберга $k\colon \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}$ определяется соотношениями

- K1 $k(gz, gw) = k(g, w)$ для любого элемента $g \in H$ и ллюбых элементов $z, w \in \mathbb{H}^2$;
- K2 $k(z, w) = k(w, z)$ для $z \neq w$, $z, w \in \mathbb{H}^2$;

В нашем случае $H = Isom^+(\mathbb{H}^2)$ и построим нашу бииинвариантную функцию через функцию Грина (рассматривая x как вещественную переменную)

$$k(z, w) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} G_\rho(z, w) \rho h(\rho) d\rho,$$

где h - хорошая функция.

Условия на «хорошую» функцию

Определение 2. Функция $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является «хорошей», если она удовлетворяет следующим условиям

H1 h аналитична для $|\mathrm{Im}\ x| \leq \sigma$, где $\sigma > 1/2$;

H2 $h(x) = h(-x)$;

H3 $\exists\ \delta > 0\ \forall\ x$ в полосе $|\mathrm{Im}\ x| \leq 1/2\ |h(x)| << (1 + |\mathrm{Re}\ x|)^{-2-\delta}$;

Преобразование Фурье «хорошей» функции

Определим преобразование Фурье «хорошей функции»

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixt} dx.$$

Используя интегральное представление функции Грина мы получаем

$$k(z,w) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_{\tau}^{\infty} \frac{g'(t)dt}{\sqrt{\operatorname{ch} t - \operatorname{ch} \tau}},$$

где $\tau = d(z,w)$. Несложно показать (используя аналитичность h), что

$$|g^{(s)}(t)| <<_s e^{-\frac{|t|}{2}}.$$

Далее определим интегральный оператор L для некоторого пространства функций

$$[Lf](z) := \int\limits_{\mathbb{H}^2} k(z, w) f(w) d\mu(w)$$

Предложение 2. Предположим, что $f \in C^2(\mathbb{H}^2)$ - решение уравнения

$$(\Delta + x^2 + 1/4)f = 0$$

с условием $|\mathrm{Im}\ x| \leq 1/2$ и $|f(z)| \leq Ae^{\alpha d(0,z)}$, где $A > 0$, $0 \leq \alpha < \sigma - 1/2$ - константы. Тогда для h, удовлетворяющей условиям $(H1), (H2), (H3)$ верно

$$[Lf](z) = h(x)f(z).$$

Доказательство.

$$[Lf](z) = \int\limits_{\mathbb{H}^2} k(z,w)f(w)d\mu(w) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{H}^2} \left(\frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_x(z,w) x h(x) dx \right) f(w)d\mu(w) =$$

Меняем местами интегралы

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{H}^2} G_{x'}(z,w) f(w) d\mu(w) \right) x' h(x') dx' =$$

Смещаем контуры интегрирования на $i\sigma$

$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \left(\int\limits_{\mathbb{H}^2} G_{x'}(z,w) f(w) d\mu(w) \right) x' h(x') dx$$

Но мы знаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{H}^2} G_{x'}(z,w)f(w)d\mu(w) = (\Delta + x^2 + 1/4)^{-1} f(z),$$

то есть

$$(\Delta + x^2 + 1/4)^{-1} f(z) = (x^2 - (x')^2)^{-1} f(z).$$

Получаем

$$[Lf](z) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{x' h(x') dx'}{x^2 - (x')^2}$$

Используя четность функции h получаем результат теоремы ■

Введем следующие вспомогательные функции $\Phi, Q\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$

$$\Phi(2(\operatorname{ch}\tau - 1)) = k(\tau)$$

и

$$Q(2(\operatorname{ch} t - 1)) = g(t)$$

Лемма 3. Следующие утверждение эквивалентны:

1) h удовлетворяет условиям $(H1), (H2)$ и $(H3)$;
2) $Q \in C^\infty$ и $\forall\ m \in \mathbb{N}$

$$|Q^{(m)}(x)| <<_m (1+x)^{-\sigma-k}\ \forall\ x \in \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Интегральное представление Φ и Q

Φ связан с Q соотношением

$$Q(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{Q'(u)}{\sqrt{u-\xi}}\,du.$$