Формула следа Сельберга. Часть 2

Лапштаев Максим

НГУ

13.12.2021

Напоминание

Обозначим $G_\rho(z; w)$ - функция Грина на гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ (строится как интегральное ядро резольвенты оператора Бельтрами - Лапласа).

$k(z, w)$ - биинвариантная функция Сельберга с условиями

K1 $k(gz, gw) = k(z, w)$ для любого элемента $g \in H$ и любых элементов $z, w \in \mathbb{H}^2$;

K2 $k(z, w) = k(w, z)$ для $z \neq w$, $z, w \in \mathbb{H}^2$;

$$k(z, w) = \int\limits_{\mathbb{R}} G_\rho(z, w)\rho h(\rho) d\rho,$$

где h - «хорошая» функция.

Определение 2. Функция $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является «хорошей», если она удовлетворяет следующим условиям

- H1 h аналитична для $|\mathrm{Im}\ x| \le \sigma$, где $\sigma > 1/2$;
- H2 $h(x) = h(-x)$;
- H3 $\exists\ \delta > 0\ \forall\ x$ в полосе $|\mathrm{Im}\ x| \le 1/2\ |h(x)| << (1 + |\mathrm{Re}\ x|)^{-2-\delta}$;
- H3$*$ $|h(x)| <<_N (1 + |\mathrm{Re}\ x|)^{-N}$ для любого фиксированного $N > 1$, равномерно для всех x в полосе $|\mathrm{Im}\ x| \le \sigma$.

Также

$$\widehat{h}(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ixt} dx$$

- преобразование Фурье «хорошей» функции h и

$$\Phi(2(\operatorname{ch}\tau - 1)) = k(\tau),$$

$$Q(2(\operatorname{ch} t - 1)) = g(t).$$

Особенность биинвариантной функции Сельберга

При $z = w$ функция Грина имеет логарифмическую расходимость, а биинвариантная функция Сельберга $k(z, w)$ нет.
Действительно,

$$k(z,z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int\limits_0^\infty \frac{g'(t)}{\sqrt{\operatorname{ch} t - 1}} dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^\infty \frac{\sin \rho t}{\operatorname{sh}(t/2)} dt \right) \rho h(\rho) d\rho.$$

Также для $|\mathrm{Im}\ \rho| < 1/2$ мы знаем, что

$$\int_0^\infty \frac{\sin \rho t}{\operatorname{sh}(t/2)} dt = \pi \operatorname{th}(\pi\rho)$$

Получаем, что
$$k(z,z) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{th}(\pi\rho)\rho h(\rho)d\rho.$$

Напомним, что элемент группы $\gamma \in \Gamma$ называется строго гиперболическим, если длина геодезической на римановой поверхности
$$\ell_\gamma = \inf_{z\in\mathbb{H}^2} d(\gamma z, z) > 0.$$

Гиперболические поверхности

Пусть $Isom(H)$ - группа изометрий плоскости Лобачевского $\mathfrak{H}$

Определение 1. Подгруппа Γ группы $Isom(\mathfrak{H})$ называется дискретной, если индуцированная топология на Γ является дискретной, т.е. Γ является дискретным множеством в топологическом пространстве $Isom(H\mathfrak{H})$.

Определение 2. Дискретная подгруппа группы $Isom(\mathfrak{H})$ называется фуксовой группой, если она состоит из преобразований, сохраняющих ориентацию; другими словами фуксовы подгруппы - это дискретные подгруппы группы $PSL_2(\mathbb{R})$

Так как фуксова подгруппа Γ действует на $\mathbb{H}^2$, то обозначим $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$ пространство орбит и $\mathfrak{F}_\Gamma$ - фундаментальную область.

Согласно теореме о униформизации любую риманову поверхность можно представить в виде $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$.
Определим пространство $C^\infty(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$ и гильбертово пространство $L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$ со скалярным произведением

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int\limits_{\mathfrak{F}_\Gamma} f_1 \overline{f}_2 d\mu.$$

для любых $f_1, f_2 \in L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$.

Пусть Δ - оператор Лапласа на римановой поверхности $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$ и $G_\rho(z, w)$ - его функция Грина. Пусть $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ - «хорошая» функция.

Введем биинвариантную функцию

$$k(z, w) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G_\rho(z, w) \rho h(\rho) d\rho.$$

Введем функцию

$$k_\Gamma(z, w) = \sum_{\gamma \in \Gamma} k(\gamma z, w).$$

Покажем, что данная функция - это биинвариантная функция Сельберга подгруппы Γ.

Лемма 5. $\forall\ \delta > 0\ \exists$ константа C_δ, что верно неравенство

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-(1+\delta) d(\gamma z, w)} \leq C_\delta\ \forall\ (z, w) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2.$$

Доказательство. 1) Возьмем число r такое, что

$$r < \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \Gamma \setminus \{id\}} \ell_\gamma,$$

где ℓ_γ - гиперболическая длина. Обозначим

$$D_\gamma(r) = \{z' \in \mathbb{H}^2\ | d(\gamma z, z') \leq r\}$$

и $\mu(D_\gamma(r)) = Area(r)$.

Для любого $z' \in D_\gamma(r)$ и любой пары $(z, w) \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ верно неравенство треугольника

$$d(w, z') \leq d(w, \gamma z) + (\gamma z, z') \leq r + d(w, \gamma z).$$

Перепишем неравенство в более удобном виде

$$d(w, z') - r \leq d(w, \gamma z).$$

Домнажаем неравенство на $-(1+\delta)$ и применяя к обоим частям операцию, обратную логарифмированию (обе операции монотонны), получаем

$$e^{(1+\delta)(r-d(w,z'))} \geq e^{-(1+\delta)d(w,\gamma z)}.$$

2) Интегрируем (по переменной z') неравенство по $D_\gamma(r)$ и получаем неравенство

$$e^{-(1+\delta)d(w,\gamma z)} \leq \frac{e^{(1+\delta)r}}{Area(r)} \int\limits_{D_{\gamma(r)}} e^{-(1+\delta)(d(w,z'))} d\mu(z').$$

Суммируя по $\gamma \in \Gamma$, получаем

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-(1+\delta)d(w,\gamma z)} \leq \frac{e^{(1+\delta)r}}{Area(r)} \sum_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_{D_{\gamma(r)}} e^{-(1+\delta)(d(w,z'))} d\mu(z'),$$

где

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} \int\limits_{D_{\gamma(r)}} e^{-(1+\delta)(d(w,z'))} d\mu(z') = \int\limits_{\mathbb{H}^2} e^{-(1+\delta)(d(w,z'))} d\mu(z').$$

В свою очередь

$$\int\limits_{\mathbb{H}^2} e^{-(1+\delta)(d(w,z'))} d\mu(z') = 2\pi \int\limits_0^\infty e^{-(1+\delta)\tau} \operatorname{sh}\tau \, d\tau$$

Откуда и получаем константу C_δ

$$C_\delta = \frac{2\pi e^{r(1+\delta)}}{Area(r)} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1}{2+\delta}\right) \blacksquare$$

Предложение 4. Если h удовлетворяет условиям $(H1), (H2)$ и $(H3)$, то ядро $k_\Gamma(z,w) \in C^\infty(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2 \times \Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$ и $k_\Gamma(z,w) = k_\Gamma(w,z)$.

Доказательство. Используя лемму 5 (мы положим $\delta = \sigma - \frac{1}{2} - \varepsilon > 0$) и применив предложение 3, мы получаем, что $k_\Gamma(z,w) \in C^\infty(\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2)$.
Также $\forall\ \gamma \in \Gamma$

$$k_\Gamma(\gamma z, w) = k_\Gamma(z,w).$$

А значит k_Γ функция на $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$ от первого аргумента

$$k_\Gamma(z,w) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} k(\gamma' z, w) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} k(w, \gamma' z) = \sum_{\gamma' \in \Gamma} k(\gamma'^{-1} w, \gamma'^{-1}\gamma' z) =$$

$$= \sum_{\gamma' \in \Gamma} k(\gamma'^{-1} w, z) = k_\Gamma(w,z).$$

А значит $k_\Gamma \in C^\infty(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2 \times \Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$ ■

Предложение 5. Положим, что $f\colon C^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$ решение уравнения

$$\left(\Delta + \rho^2 + \frac{1}{4}\right) f = 0,$$

где $|\mathrm{Im}\ \rho| \leq \sigma$, и $|f(z)| \leq Ae^{\alpha d(z,0)}$ с константами $A > 0$ и $0 \leq \alpha < \sigma - 1/2$. Если h удовлетворяет условия $(H1), (H2)$ и $(H3)$, то верно

$$[Lf](z) = h(\rho)f(z).$$

Формула следа для гиперболического цилиндра

Зафиксируем элемент $\gamma \in Isom^+(\mathbb{H}^2)$, где ℓ_γ и положим $\Gamma = \Upsilon$, где

$$\Upsilon = \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Запишем преобразование γ в координатах верхней полуплоскости ($\ell := \ell_\gamma$)

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{\ell/2} & 0 \\ 0 & e^{-\ell/2} \end{pmatrix}$$

Определение 3. Риманова поверхность $\Upsilon \setminus \mathbb{H}^2$ называется гиперболическим цилиндром. Фундаментальная область имеет вид

$$\mathfrak{F}_\Upsilon = \{z \in \mathbb{H}^2 | 1 \leq y \leq e^\ell\},$$

где $z = x + iy$.

Введем координаты $(s, u) \in \mathbb{R}^2$: $x = ue^s, y = e^s$ с объемом $d\mu = dsdu$. Тогда

$$\mathfrak{F}\Upsilon = \{(s, u) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq s \leq \ell\}.$$

Заметим, что

$$\operatorname{ch}(d(\gamma^n z, z)) = 1 + \frac{|e^{n\ell} z - z|^2}{2e^{n\ell} y^2} = 1 + 2\operatorname{sh}^2(n\ell/2)(1 + u^2).$$

$$k_\Upsilon(z,z) = k(z,z) + \sum_{n\neq 0} k(\gamma^n z, z) = k(z,z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(4\,\mathrm{sh}^2(n\ell/2)(u^2+1)\right).$$

Предложение 6. Если h удовлетворяет условиям $(H1), (H2)$ и $(H3)$, то

$$\int\limits_{\Upsilon\backslash\mathbb{H}^2} (k_\Upsilon(z,z) - k(z,z))\, d\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell \widehat{h}(n\ell)}{\mathrm{sh}(n\ell/2)}.$$

Доказательство. Мы можем проинтегрировать ряд (т.к. он сходится абсолютно и равномерно)

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_{0}^{\ell} \Phi\left(4\,\mathrm{sh}^2(n\ell/2)(u^2+1)\right) dsdu =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{2\,\mathrm{sh}(n\ell/2)} \int\limits_{\mathbb{R}} \Phi\left(4\,\mathrm{sh}^2(n\ell/2)(u^2+1)\right) du =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell}{2\,\mathrm{sh}(n\ell/2)} Q(4\,\mathrm{sh}^2(n\ell/2)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell\widehat{h}(n\ell)}{\mathrm{sh}(n\ell/2)} \quad \blacksquare$$

Предложение 7. Если h удовлетворяет условиям $(H1), (H2)$ и $(H3)$, то

$$\int\limits_{\Upsilon\backslash\mathbb{H}^2} \left(k_\Upsilon(z,z) - k(z,z)\right) d\mu(z) = \int\limits_{\mathbb{R}} h(\rho) n_\Upsilon(\rho) d\rho,$$

где

$$n_\Upsilon(\rho) = \frac{\ell}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\exp(\ell(m+1/2+i\rho)) - 1}$$

- мероморфная функция с простыми полюсами в точках

$$\rho_{\nu m} = \frac{\nu}{2\pi\ell} + i(m+1/2), \ \nu \in \mathbb{Z}$$

и вычетами

$$res_{\rho_{\nu m}} n_\Upsilon = \frac{1}{\pi i}.$$

Произвольные гиперболические римановы поверхности

Пусть Γ - фуксова подгруппа (понимается, что она состоит из строго гиперболических элементов) и $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$- риманова поверхность.

Определение 4. Класс сопряженности произвольного элемента $\gamma \in \Gamma$ называется множество

$$\{\gamma\} = \{\overline{\gamma} \,|\overline{\gamma} = g\gamma g^{-1}\}.$$

$$\ell_{\overline{\gamma}} = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d(g\gamma g^{-1}z, z) = \inf_{z \in \mathbb{H}^2} d(\gamma z, z) = \ell_\gamma.$$

Централизатор $\Upsilon = \{g \in \Gamma \,|g\gamma = \gamma g\}$.

Лемма 7. Централизатор элемента $\gamma \in \Gamma$ Υ_γ - это циклическая подгруппа группы Γ, т.е. $\exists$ $m \in \mathbb{N}$, что $\forall$ $\gamma_* \in \Upsilon_\gamma$

$$\gamma_*^m = \gamma.$$

Доказательство. Возьмем представление элемента γ в виде матрицы

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{\ell_\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\ell_\gamma/2} \end{pmatrix},$$

где ℓ_γ. Тогда централизатор состоит из матриц, коммутирующих с γ:

$$\begin{pmatrix} e^{\ell_\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\ell_\gamma/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\ell_\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-\ell_\gamma/2} \end{pmatrix}$$

Получаем, что $b = c$ и $d = a^{-1}$. Значит Υ_γ - подгруппа диагональных матриц в дискретной группе. А значит тоже дискретна. А дискретная подгруппа - циклическая ■

Биинвариантная функция Сельберга циклической группы

Обозначим H - множество, содержащее по одному представителю класса сопряженности $\{\gamma\}$.

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} k(\gamma z, w) = k(z, w) + \sum_{\gamma\in H} \sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma} k(g^{-1}\gamma g z, w) =$$

$$= k(z, w) + \sum_{\gamma\in H} \sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma} k(\gamma g z, g w)$$

Пусть $H_* \subset H$ - подмножество примитивных элементов.

$$k(z,w)+\sum_{\gamma\in H}\sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma} k(\gamma gz, gw) = k(z,w)+\sum_{\gamma\in H_*}\sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma}\sum_{n=1}^{\infty} k(\gamma^n gz, gw).$$

Откуда

$$k_\Gamma(z,w)-k(z,w)=\frac{1}{2}\sum_{\gamma\in H_*}\sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma}\Big(k_{\Upsilon_\gamma}(gz,gw)-k(gz,gw)\Big).$$

Получаем, что

$$k_{\Upsilon_\gamma}=\sum_{n\in\mathbb{Z}} k(\gamma^n z, w).$$

Спектр компактной поверхности

Оператор $-\Delta$ на компактном многообразии имеет неотрицательный дискретный сректр

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n \leq \ldots$$

с собственными функциями $\varphi_0 = const, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \in C^\infty(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$.
$(\Delta + \lambda_j)\varphi_j = 0$ и $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ образуют ортонормированный базис Шаудера в $L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$.
Положим

$$\rho_j = \sqrt{\lambda_j - 1/4},\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg \rho_j < \frac{\pi}{2}.$$

Если $f \in C^2(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)$, то ряд

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(z), \;\; c_j = \langle f, \varphi_j \rangle$$

сходится абсолютно и равномерно.

Предложение 8. Если h удовлетворяет всем условия «хорошей» функции $(H1), (H2), (H3^*)$, то

$$L\varphi_j(z) = h(\rho_j)\varphi_j(z).$$

Предложение 9. Если h удовлетворяет всем условия «хорошей» функции $(H1), (H2), (H3^*)$, то биинвариантную функцию подгруппы Γ можно представить в виде ряда

$$k_\Gamma(z, w) = \sum_{j=0}^{\infty} h(\rho_j)\varphi_j(w)\varphi_j(z),$$

который сходится абсолютно и равномерно.

Предследовая формула Сельберга

Теорема 3. Если h удовлетворяет всем условия «хорошей» функции $(H1), (H2), (H3^*)$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(\rho_j)|\varphi_j(z)|^2 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\rho\,\mathrm{th}(\pi\rho)d\rho + \sum_{\Gamma\setminus\{id\}} k(\gamma z, z).$$

Доказательство. Так как по предложению 9

$$k_\Gamma(z,z) = \sum_{j=0}^{\infty} h(\rho_j)|\varphi_j(z)|^2,$$

и использую формулу при $z = w$, мы получаем

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{th}(\pi\rho)\rho h(\rho)d\rho + \sum_{\Gamma\setminus\{id\}} k(\gamma z, z) = \sum_{j=0}^{\infty} h(\rho_j)|\varphi_j(z)|^2 \blacksquare$$

Формула следа Сельберга

Теорема 4. Если h удовлетворяет всем условия «хорошей» функции $(H1), (H2), (H3^*)$, то

$$\sum_{j=0}^{\infty} h(\rho_j) = \frac{Area(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\rho \,\mathrm{th}(\rho) d\rho + \sum_{\gamma \in H_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_\gamma \widehat{h}(n\ell_\gamma)}{2\,\mathrm{sh}(n\ell_\gamma/2)},$$

где ряд сходится абсолютно.

Доказательство. 1) Проинтегрируем преследовую формулу Сельберга по z над $\Gamma \setminus \mathbb{H}^2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} h(\rho_j) \int_{\Gamma\setminus\mathbb{H}^2} |\varphi_j(z)|^2 d\mu(z) = \frac{Area(\Gamma \setminus \mathbb{H}^2)}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\rho \,\mathrm{th}(\rho) d\rho +$$

$$+\int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2}\sum_{\Gamma\backslash\{id\}} k(\gamma z, z)d\mu(z).$$

2) Вспомним, что

$$\sum_{\Gamma\backslash\{id\}} k(\gamma z, z) = \frac{1}{2}\sum_{\gamma\in H_*}\sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma}\Big(k_{\Upsilon_\gamma}(gz, gz) - k(gz, gz)\Big)$$

и

$$\sum_{g\in\Upsilon_\gamma\backslash\Gamma}\int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2} f(gz)d\mu(z) = \int\limits_{\Upsilon_\gamma\backslash\mathbb{H}^2} f(z)d\mu(z).$$

Интеграл и сумму можно менять местами.

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2} \sum_{\Gamma\backslash\{id\}} k(\gamma z, z) d\mu(z) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma\in H_*} \int\limits_{\Upsilon_\gamma\backslash\mathbb{H}^2} \Big(k_{\Upsilon_\gamma}(gz, gz) - k(gz, gz) \Big)\, d\mu(z).$$

Далее

$$\int\limits_{\Upsilon_\gamma\backslash\mathbb{H}^2} \Big(k_{\Upsilon_\gamma}(gz, gz) - k(gz, gz) \Big)\, d\mu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_\gamma \widehat{h}(n\ell_\gamma)}{\mathrm{sh}(n\ell_\gamma/2)}$$

и

$$\int\limits_{\Gamma\backslash\mathbb{H}^2} \sum_{\Gamma\backslash\{id\}} k(\gamma z, z) d\mu(z) = \sum_{\gamma\in H_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_\gamma \widehat{h}(n\ell_\gamma)}{\mathrm{sh}(n\ell_\gamma/2)}.$$

Ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} h(\rho_j)$ сходится абсолютно.

Действительно,

$$\left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} h(\rho)\rho\,\mathrm{th}(\rho)d\rho \right| << \frac{1}{\delta(1+\delta)}$$

и ,используя неравенство $|g(t)| << e^{-\sigma|t|}\ \forall\ t \in \mathbb{R}$, получаем

$$\sum_{\gamma\in H_*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell_\gamma|\widehat{h}(n\ell_\gamma)|}{\mathrm{sh}(n\ell_\gamma/2)} << \sum_{\gamma\in H_*}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ell_\gamma e^{-n\ell_\gamma(\sigma+1/2)}}{1-e^{-n\ell_\gamma/2}} <<$$

$$<< \frac{C_{\sigma-1/2}}{1-e^{\ell_{min}(\sigma+1/2)}},$$

где $\ell_{min} = \min\limits_{\gamma\in H_*}\ell_\gamma$ и мы воспользовались леммой 5 ■

Закон Вейля

Узнаем асимптотику количества собственных чисел оператора Бельтрами - Лапласа на римановых поверхностях. Пусть

$$N(\lambda) = \sharp\{j|\lambda_j \leq \lambda\}$$

- считающая мера. Найдем асимптотику меры N. Фиксируем λ и обозначим $A = [0, \lambda]$. Проинтегрируем функцию $e^{-\beta x}$, где $\beta\lambda \approx 0$ по множеству A

$$\int\limits_A e^{-\beta x} dN(x) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j} \chi_A(\lambda_j),$$

где χ_A - характеристическая функция множества A.

Тогда получаем

$$e^{-\beta\lambda}N(\lambda) \le \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j}\chi_A(\lambda_j).$$

или

$$N(\lambda) \le e^{\beta\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j}\chi_A(\lambda_j).$$

Мы можем положить $e^{\beta\lambda} = 1 + \beta\lambda + O(1)$ и получаем оценку

$$N(\lambda) \le \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j} + O(1).$$

Откуда видно, что можно применить формулу следа Сельберга.

Теорема (Закон Г.Вейля).

$$N(\lambda) \sim \frac{Area(M)}{4\pi}\lambda + O(1).$$

Докозательство. Для $\beta > 0$ возьмем «хорошую» функцию

$$h(\rho) = e^{-\beta\rho^2}.$$

Преообразование Фурье

$$\widehat{h}(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2\beta}}}{\sqrt{4\pi\beta}}.$$

Также напомним, что $\lambda_j = \rho_j^2 + 1/4$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j} = \frac{Area(M)}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\rho^2+1/4)} \rho \operatorname{th}(\pi\rho) d\rho +$$

$$+ \frac{e^{-\beta/4}}{\sqrt{4\pi\beta}} \sum_{\gamma \in H_*} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell_\gamma e^{-n^2\ell_\gamma^2/2\beta}}{2 \operatorname{sh}(n\ell_\gamma/2)}.$$

После всех вычислений получаем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j} = \frac{Area(M)}{4\pi\beta} + O(1).$$

Вспомним теорему Таубера:

Теорема Таубера. Пусть $L(t)$ - медленно меняющаяся функция на бесконечности, U - мера на $[0, \infty]$, а $\omega(z)$ - Преобразование Лапласа меры N. Положим $z = t^{-1}$. При $\rho \geq 0$ каждое из соотношений

$$\omega(z) \sim \frac{1}{z} L(1/z), \ z \to 0+,$$

и

$$U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(1+\rho)} t^{\rho} L(t), \ t \to \infty,$$

влечет другое. В частности

$$\omega(z) \sim \Gamma(1+\rho) U(t).$$

Вернемся к доказательству. Замечим, что интеграл

$$\omega(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} dN(x)$$

является преобразованием Лапласа считающей меры N.

Обозначим $L(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\beta\lambda_j}$. Полагая $\rho = 0$ в теореме Таубера и положив $\beta = 1/\lambda$ (условие,что $\beta = o(1/\lambda)$ можно опустить), то получаем требуемое утверждение ■

Следствие. Можно заменить $(H3^*)$ на $(H3)$ в теореме о следе Сельберга.