ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Бердинский Дмитрий Александрович

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЙЕРШТРАССА ПОВЕРХНОСТЕЙ В ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор, чл. корр. РАН
И. А. Тайманов

Новосибирск–2009

Оглавление

Введение

Представление Вейерштрасса (спинорное представление) поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве состоит в следующем. Поверхность представляется (локально) в виде

$$x^1 = x^1(0) + \int \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2 \right) dz - \frac{i}{2} \left(\psi_2^2 + \bar{\psi}_1^2 \right) d\bar{z} \right),$$

$$x^2 = x^2(0) + \int \left(\frac{1}{2} \left(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2 \right) dz + \frac{1}{2} \left(\psi_2^2 - \bar{\psi}_1^2 \right) d\bar{z} \right),$$

$$x^3 = x^3(0) + \int \left(\psi_1 \bar{\psi}_2 dz + \bar{\psi}_1 \psi_2 d\bar{z} \right),$$

где z–конформный параметр на поверхности, $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$ решение уравнения Дирака

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

и $\mathcal{D}$–оператор Дирака с некоторым вещественным потенциалом $U(z, \bar{z})$

$$\mathcal{D} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix} \right].$$

Хотя в различных видах это представление появлялось и ранее, в форме использующей уравнение Дирака оно, по-видимому, впервые возникло в работе Конопельченко [4], где показано как решение $U(z, \bar{z}, t)$ мо-

дифицированного уравнения Новикова-Веселова индуцирует деформацию некоторой поверхности, отвечающей потенциалу $U(z, \bar{z}, 0)$. В работе Тайманова [1] введено глобальное представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей рода $g \geqslant 1$ и в случае торов доказано, что модифицированное уравнение Новикова-Веселова индуцирует деформацию торов, сохраняя при этом конформную структуру и значение функционала Уиллмора

$$\mathcal{W}(M) = 4 \int_M U^2 \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} = \int_M H^2 d\mu,$$

где M–тор, H–средняя кривизна, $d\mu$–элемент площади. При этом Таймановым был предложен новый подход к исследованию гипотезы Уиллмора, основанный на установленной в [2] связи функционала Уиллмора и спектральной кривой оператора Дирака.

В [3] подход, основанный на операторе Дирака, был применен к изучению поверхностей в $S^3 = SU(2)$. В данной диссертации эта техника используется для исследования поверхностей в следующих трех однородных пространствах. Это группа Гейзенберга Nil, универсальная накрывающая $\widetilde{SL}_2$ группы $SL(2)$ и группа Sol, наделенные терстоновскими метриками [5]. Поверхность в произвольной трехмерной группе Ли G, наделенной левоинвариантной метрикой, представляется (локально) в терминах порождающих спиноров $\psi = (\psi_1, \psi_2)^\top$, удовлетворяющих деривационным уравнениям, записанным в форме уравнения Дирака

$$\mathcal{D}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0,$$

где потенциалы U и V выражаются через ψ_1, ψ_2 и среднюю кривизну поверхности H. При этом поверхность восстанавливается по ψ решением

следующего уравнения в группе G

$$g^{-1}g_z = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2)e_1 + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2)e_2 + \psi_1\bar{\psi}_2 e_3,$$

где e_1, e_2, e_3 некоторый ортонормированный базис алгебры Ли группы G. Полагая $H = 0$, получаем представление Вейерштрасса для минимальных поверхностей. Например, для группы Nil оно выглядит так

$$\bar{\partial}\psi_1 = \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_1, \quad \partial\psi_2 = -\frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_1$$

Далее мы представляем систему уравнений Гаусса-Вейнгартена в терминах спиноров ψ_1, ψ_2. И как следствие их совместности, получаем некоторые аналоги уравнений Гаусса-Кодацци (1.21), (1.31) и (1.39) для групп Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol соответственно. В результате, для поверхностей в группах Nil и $\widetilde{SL}_2$ получаем квадратичный дифференциал, который голоморфен на поверхностях постоянной средней кривизны (1.22), (1.32), иными словами находим обобщение дифференциала Хопфа для этих пространств. В случае Nil мы показываем, что квадратичный дифференциал (1.22) голоморфен только на поверхностях постоянной средней кривизны (предложение 3). Приведем здесь выражение (1.22) для обобщенного дифференциала Хопфа в Nil

$$\widetilde{A}dz^2 = \left(A + \frac{Z_3^2}{2H + i}\right)dz^2,$$

где z–конформный параметр на поверхности, Adz^2–обычный дифференциал Хопфа и Z_3 может быть определен из проекции вертикального вектора e_3 на касательную плоскость к поверхности (или см. (1.2) в §1.2). Пока лишь отметим, что как Nil так и $\widetilde{SL}_2$ представляются как линейное расслоение над поверхностью постоянной секционной кривизны и

левоинвариантное поле e_3 будет единичным касательным вектором к его слоям. Таким образом в Nil, обобщенный дифференциал Хопфа $\widetilde{A}dz^2$ отличается от обычного дифференциала Хопфа квадратичной добавкой $\frac{Z_3^2}{2H+i}dz^2$.

Отметим что методами отличными от наших, в совместной работе Абреша и Розенберга [6] строится обобщенный дифференциал Хопфа на поверхностях в пространствах $S^2 \times \mathbb{R}$, $H^2 \times \mathbb{R}$. Немного позднее, в [7] ими же было объяснено, что их конструкция обобщается для однородных пространств с группой изометрий размерности больше либо равной 4 (т.е в том чисел для групп Nil и $\widetilde{SL}_2$). Отметим что для групп Nil и $\widetilde{SL}_2$, квадратичный дифференциал в [7] отличается от нашего умножением на $H + i\tau$, где τ равно $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ соответственно. Результаты о голоморфных квадратичных дифференциалах послужили основанием для работы испанских математиков Мира и Фернандез [13]. В [13] для группы $\widetilde{SL}_2$ доказано, что если квадратичный дифференциал, предложенный нами в (1.32) голоморфен, то поверхность либо имеет постоянную среднюю кривизну, либо принадлежит описанному в [13] семейству. Что отличает этот случай от Nil (предложение 3). Тем не менее в [13] показано, что всякая компактная поверхность ненулевой эйлеровой характеристики, на которой дифференциал (1.32) голоморфен, является поверхностью постоянной средней кривизны.

Существование голоморфных квадратичных дифференциалов позволяет обобщить классическую теорему Хопфа в $\mathbb{R}^3$ о том, что сфера постоянной средней кривизны H, погруженная в $\mathbb{R}^3$, является с точностью до изометрий, стандартной сферой радиуса $\frac{1}{H}$. В диссертации мы обоб-

щаем теорему Хопфа для пространства Nil. Для этого мы строим сферы вращения постоянной средней кривизны (предложение 7). И пользуясь голоморфностью (1.22), доказываем предложение 9, что всякая сфера постоянно средней кривизны, погруженная в Nil, является, с точностью до изометрий,сферой вращения описанной в предложении 7. Нетрудно понять, что обобщение теорема Хопфа справедливо и в других однородных пространствах с четырехмерной группой изометрий [7]. Вопрос об аналоге теоремы Александрова в Nil остается пока открытым.

В диссертации мы изучаем следующий функционал, определенный на замкнутых поверхностях M в группе Nil

$$E(M) = \int_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2},$$

где z–конформный параметр на поверхности M, а U и V потенциалы (1.17) в операторе Дирака для Nil. Для тора M, функционал $E(M)$ измеряет отклонение спектральной кривой тора от плоской кривой(спектральная кривая оператора Дирака с нулевыми потенциалами $U = V = 0$). В дальнейшем будем называть такой функционал обобщенным функционалом Уиллмора или спинорной энергией поверхности. Для начала мы получаем выражение функционала в инвариантных терминах (предложение 5)

$$E(M) = \frac{1}{4} \int_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16} \right) d\mu,$$

где H–средняя кривизна, $\widehat{K}$–секционная кривизна касательной плоскости в точке, а $d\mu$–элемент площади. Сразу заметим, что в отличии от $\mathbb{R}^3$ или например S^3, функционал $E(M)$ в Nil не пропорционален известному обобщению функционала Уиллмора как $\int_M \left(H^2 + \widehat{K} \right) d\mu$ или что то

же с точностью до константы (в силу теоремы Гаусса) $\int_M (H^2 - K)\, d\mu$, где K–гауссова кривизна. Потом мы показываем, что функционал $E(M)$ принимает постоянное значение, равное π, на сферах постоянной средней кривизны в Nil (теорема 4). А в теореме 6 мы доказываем, что сферы постоянной средней кривизны являются критическими точками $E(M)$. Отметим здесь полную аналогию с $\mathbb{R}^3$, хотя предположение о том, что среди всех сфер в Nil минимум достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны нами не доказано. Тем не менее, в теореме 5 мы приводим строгое доказательство того факта, что минимум среди всех сфер вращения достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны. Для торов вращения мы доказываем оценку $E > 0$. Маловероятно, что эта оценка не может быть улучшена, мы предполагаем что $E > \frac{\pi^2}{2}$, по крайней мере на торах вращения.

В диссертации мы также изучаем поверхности постоянной средней кривизны в Nil. Для этого мы представляем уравнения Гаусса-Вейнгартена в новой форме, которые для поверхностей постоянной средней кривизны принимают вид уравнений (3.9) и (3.10). И ввиду голоморфности обобщенного дифференциала Хопфа, на поверхностях постоянной средней кривизны, условие совместности представляется как

$$v_{z\bar{z}} + e^{2v} - |B|^2 e^{-2v} = 0,$$

где $B = \frac{1}{4}(2H + i)\widetilde{A}$, а e^v–потенциал в операторе Дирака, то есть $e^v = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)$ или по-другому $e^v = \left(\frac{H}{2} + \frac{i}{4} n_3\right) e^{\alpha}$, где n_3–скалярное произведение вектора нормали n и e_3, а $e^{2\alpha} dz d\bar{z}$– индуцированная мера на поверхности. Нас интересуют те $v(z)$, при которых на найдется решение ψ_1, ψ_2 уравнений Гаусса-Вейнгартена (3.9),(3.10), такое

что $e^v = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)$. При $H = 0$ такие v естественно выделяются условием, что e^v чисто мнимое. При $H \neq 0$ вывод этого условия приведен в §3.2. Рассматривая поверхность постоянной средней кривизны в окрестности неомбилической точки ($\widetilde{A} \neq 0$), заключаем что в этой окрестности поверхность описывается решением системы

$$\begin{cases} v_{z\bar{z}} + 2\sinh 2v = 0, \\ \frac{\varphi_x^2}{(\cosh\rho)^2} + \frac{\varphi_y^2}{(\sinh\rho)^2} = 8\left(\cos 2\varphi - Re\frac{2H+i}{2H-i}\right), H \neq 0 \\ Re\,[e^v] = 0, H = 0, \end{cases},$$

где $v = \rho + i\varphi$. Появление эллиптического уравнения sinh-Gordon позволяет надеяться исследовать поверхности постоянной средней кривизны методами интегрируемых систем.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Каждая глава в свою очередь разбита на несколько параграфов. Нумерация формул состоит из двух чисел–номер главы и порядковый номер формулы в главе. Для предложений и теорем используется сплошная нумерация. Замечания пронумерованы номером главы и порядковым номером в главе.

В первой главе изучается представление Вейерштрасса для поверхностей в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol. Содержание главы основано на работе [19]. Структура главы устроена следующим образом. Начало главы состоит из предварительных сведений и обзора, полученных в главе результатов. В параграфе §1.1 приводятся формулы для связности Леви-Чевиты отвечающей некоторой левоинвариантной метрике в группе Ли G [11]. В параграфе §1.2 объясняется общая конструкция для вывода

деривационных уравнений на поверхности в произвольной трехмерной, наделенной левоинвариантной метрикой, группе Ли G. В параграфе §1.3 объясняется как из деривационных уравнений возникает оператор Дирака и соответственно как возникает понятие функционала спинорной энергии. В параграфах §1.4,1.5 приводится описание и левоинвариантные метрики для групп Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol, а также формулы для связности Леви-Чевиты и тензора кривизны. В параграфе §1.6 указывается как по спинору ψ, удовлетворяющему деривационным уравнениям, восстанавливается поверхность и объясняется общая конструкция получения уравнений Вейнгартена в терминах ψ. В параграфах §1.7-9 выводится представление Вейерштрасса для поверхностей в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol . Основными здесь являются следующие результаты. В теоремах 1,2,3 выводятся уравнения на порождающие спиноры ψ, и уравнения Вейнгартена и Кодацци для поверхностей в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol соответственно. В следствиях 1,3,5 выводятся уравнения на порождающие спиноры для минимальных поверхностей в этих группах. В следствиях 2,4 приводятся обобщенные дифференциалы Хопфа, голоморфные на поверхностях постоянной средней кривизны для групп Nil и $\widetilde{SL}_2$. В предложении 3 для случая Nil доказывается, что обобщенный дифференциал Хопфа голоморфен лишь в случае поверхностей постоянной средней кривизны. И наконец в предложении 4 указывается представление спинорной энергии замкнутой поверхности в Nil в инвариантных терминах.

Вторая глава посвящена изучению свойств функционала спинорной энергии и его связи с геометрией поверхностей для группы Гейзенберга Nil. Содержание главы основано на работе [20]. Структура главы устро-

ена следующим образом. Глава начинается с обзора полученных в ней результатов. В §2.1 напоминаются основные факты о группе Nil и функционале спинорной энергии для поверхностей в этой группе. В §2.2 выводятся уравнения для поверхностей с нулевым обобщенным дифференциалом Хопфа (это потребуется нам при описании сфер постоянной средней кривизны). В §2.3 выписываются формулы для сфер вращения постоянной средней кривизны. В §2.4 доказывается аналог теоремы Хопфа для Nil. В §2.5 вычисляются площадь, объем ограничиваемой области и соотношение их связывающее для сфер постоянной средней кривизны и высказывается предположение о том, что эти сферы суть решения изопериметрической задачи в Nil. В §2.5 изучаются свойства функционала спинорной энергии для поверхностей в Nil. Основными здесь являются следующие результаты. В теореме 4 вычисляется значение функционала спинорной энергии на сферах постоянной средней кривизны в Nil, и по аналогии с $\mathbb{R}^3$ оказывается, что это значение равно π на всех сферах п.с.к. В теореме 5 выводится формула для функционала спинорной энергии на поверхностях вращения и доказываются следствия 6,7, что для сфер вращение значение функционала больше либо равно π, причем минимум достигается в точности на сферах п.с.к., а для торов вращения функционал строго больше нуля. В теоремой 6 доказывается, что сфера п.с.к. является критической точкой функционала спинорной энергии. Вывод уравнения Эйлера-Лагранжа, используемого в теореме 6, вынесен в §2.6.

В третьей главе рассматриваются поверхности постоянной средней кривизны в группе Гейзенберга Nil. Структура главы устроена следую-

щим образом. Глава начинается с обзора полученных в ней результатов. В §3.1 уравнения Вейнгартена выписываются в новой форме. И для случая поверхностей постоянной средней кривизны приводится условие их совместности, которое выражено через логарифм от потенциала в операторе Дирака для Nil. В дополнении к условию совместности уравнений Вейнгартена, в §3.2 выводится необходимое "условие вещественности" на потенциал, при котором существует погружение поверхности постоянной средней кривизны отвечающее этому потенциалу. При подходящем выборе конформных координат, условием совместности уравнений Вейнгартена является эллиптический sinh-Gordon. Основные результаты главы содержатся в теореме 8 и предложении 10.

Автор благодарит научного руководителя И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные обсуждения. Также автор признателен Уве Абрешу за полезные обсуждения некоторых результатов диссертации.

Глава 1

Представление Вейерштрасса в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$ и Sol

Результаты этой главы опубликованы в [19]. В этой главе будут обобщены методы представления Вейерштрасса (или спинорного представления) поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [1, 2] и $SU(2) = S^3$ [3] на поверхности в трехмерных группах Ли, а именно группах Nil, $\widetilde{SL}_2$, и Sol, наделенных, так называемой, геометрией Терстона [5].

Функция ψ порождает поверхность в $\mathbb{R}^3$ посредством формул Вейерштрасса, в том и только в том случае, если удовлетворяет некоторым уравнениям типа Дирака, где оператор Дирака имеет в общем случае два потенциала U и V, которые совпадают в случае поверхности в $\mathbb{R}^3$. Для поверхности M в $\mathbb{R}^3$ интеграл

$$E(M) = \int_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2}$$

равен
$$\frac{1}{4}\int_M H^2 d\mu,$$
где H — это средняя кривизна и $d\mu$ индуцированная форма площади на M. Последний интеграл, с точностью до некоторых множителей и констант, равен функционалу Уиллмора, который имеет вид
$$\mathcal{W}(M) = \int_M (H^2 - K)d\mu.$$
Для замкнутых, ориентированных поверхностей, согласно теореме Гаусса–Бонне, имеем $\int K d\mu = 2\pi\chi(M)$ и поэтому $\mathcal{W}(M)$ и $E(M)$ имеют одинаковые экстремали. Все это объяснено в [1]. Аналогичные факты были установлены для поверхностей в группе $SU(2)$ в [3], хотя формулы Вейерштрасса должны быть заменены аналогичными конструкциями подходящими для некоммутативных групп Ли. В настоящей главе будут выведены формула для функционала $E(M)$ для поверхностей в Nil. Оказывается, что он имеет очень неожиданные геометрические свойства, которые будут обсуждаться во второй главе. Мы назовем его спинорной энергией или просто энергией поверхности. Проблема нахождения аналогов гипотезы Уиллмора для таких функционалов и описание их экстремалей представляется особенно интересной.

В этой главе также выводятся уравнения на ψ, соответствующие минимальным поверхностям в группах Ли и методами, приведенными в [19], выведено другое доказательство результата Абреша о том, что для поверхностей постоянной средней кривизны в Nil и $\widetilde{SL}_2$ некоторые квадратичные дифференциалы голоморфны [6, 7].

Отметим, что подход Абреша [6, 7] отличается от подхода использованного в этой главе и основывается на представлении Nil и $\widetilde{SL}_2$ как

линейных расслоений над поверхностями постоянной кривизны (см. также работу [8], где это свойство используется для изучения поверхностей в Nil и $\widetilde{SL}_2$). Похоже, что невозможность такого представления для Sol, объясняет почему наш подход не приводит к такой удовлетворительной картине, как в случае Nil и $\widetilde{SL}_2$.

Отметим также, что изучение поверхностей в произвольных группах Ли методом интегрируемых систем, было впервые предпринято в [9] и надеемся, что подход, примененный в этой главе, будет полезен в изучении глобальных свойств минимальных поверхностей и поверхностей постоянной средней кривизны в группах Ли в духе [6, 7, 10].

1.1 Левоинвариантные метрики на группах Ли

Напомним, что метрика $\langle \xi, \eta \rangle$ на группе Ли G называется левоинвариантной, если она инвариантна по отношению к левым сдвигам:

$$L_g : G \xrightarrow{\times g} G \quad : \quad h \to gh, \ h \in G,$$

т.е. для любых векторов ξ и η касательных к G в элементе группы h, скалярное произведение их сдвигов под действием g, и скалярное произведение ξ и η совпадают:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle L_g^* \xi, L_g^* \eta \rangle, \quad \xi, \eta \in T_h G, \ g, h \in G.$$

Ясно, что каждая левоинвариантная метрика определяется заданием скалярного произведения касательных векторов в единице $1 \in G$ группы G, т.е. скалярным произведением в алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы G.

Для вычисления связности Леви-Чевиты мы воспользуемся формализмом известным из математической физики. Пусть векторные поля $e_1, \dots, e_n$ на n-мерном многообразии M таковы, что в любой точке они задают образуют ортонормированный базис:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Связность Леви-Чевиты имеет следующий вид:

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(c^i_{kj} + c^j_{ik} + c^k_{ij}\right),$$

$$\nabla_{e_k} e_j = \Gamma^i_{jk} e_i,$$

где

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k.$$

В нашем случае, рассмотрим ортонормированный базис $\xi_1, \dots, \xi_n$ в касательной плоскости в единице группы G и продолжим его левыми сдвигами до векторных полей на всей группе:

$$e_i(g) = L^*_g \xi_i, \quad i = 1, \dots, n, \ g \in G.$$

Структурные константы c^i_{jk} алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы G вычисляются по формуле

$$\alpha_{ijk} = \langle [e_i, e_j], e_k \rangle = c^k_{ij}$$

и мы выводим:

$$\nabla_{e_k} e_j = \frac{1}{2} \sum_i \left(\alpha_{kji} + \alpha_{ikj} + \alpha_{ijk}\right) e_i. \tag{1.1}$$

В частности, α_{ijk} кососимметричный тензор для компактной группы Ли G с метрикой Киллинга и формула (1.1) имеет вид

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y],$$

где X и Y левоинвариантные векторные поля. За подробностями отсылаем к работе Милнора [11].

1.2 Деривационные уравнения

Пусть Σ — поверхность, вложенная в G, и

$$f : \Sigma \to G$$

— вложение. Выберем конформный параметр $z = x + iy$ на Σ (или, более точно, в области Σ) и обозначим через $\mathbf{I} = e^{2\alpha} dz d\bar{z}$ индуцированную метрику. Мы будем рассматривать случай, когда группа Ли G трехмерная и выберем левоинвариантный ортонормированный базис e_1, e_2, e_3 по отношению к скалярному группы G. Рассмотрим векторные поля $\partial f = \frac{1}{2}(\partial_x f - i\partial_y f)$ и $\bar{\partial} f = \frac{1}{2}(\partial_x f + i\partial_y f)$ на поверхности Σ. Первое деривационное уравнение возникает из условия коммутирования полей ∂f и $\bar{\partial} f$:

$$[\partial f, \bar{\partial} f] = 0$$

А из определения средней кривизны возникает второе деривационное уравнение :

$$\nabla_{\partial f} \bar{\partial} f + \nabla_{\bar{\partial} f} \partial f = e^{2\alpha} H N,$$

где H-средняя кривизна, а N-вектор нормали к поверхности.

Разложим векторы ∂f и $\bar{\partial} f$ в базисе e_1, e_2, e_3:

$$\partial f = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k, \quad \bar{\partial} f = \sum_{k=1}^{3} \bar{Z}_k e_k \tag{1.2}$$

и перепишем деривационные уравнения в обозначениях Z_k, $k = 1, 2, 3$, таким образом:

$$\sum_j (\partial \bar{Z}_j - \bar{\partial} Z_j) e_j + \sum_{j,k} (Z_j \bar{Z}_k - \bar{Z}_j Z_k) \nabla_{e_j} e_k = 0, \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered}\sum_j (\partial \bar{Z}_j + \bar{\partial} Z_j) e_j + \sum_{j,k} (Z_j \bar{Z}_k + \bar{Z}_j Z_k) \nabla_{e_j} e_k = \\ = 2iH \left[(\bar{Z}_2 Z_3 - Z_2 \bar{Z}_3) e_1 + (\bar{Z}_3 Z_1 - Z_3 \bar{Z}_1) e_2 + (\bar{Z}_1 Z_2 - Z_1 \bar{Z}_2) e_3 \right],\end{gathered} \tag{1.4}$$

где ∇ - связность Леви-Чевиты в G, и в (1.3) мы воспользовались очевидным соотношением $\nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i = [e_i, e_j]$. Мы полагаем, что базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ положительно ориентирован и поэтому:

$$N = 2ie^{-2\alpha} \left[(\bar{Z}_2 Z_3 - Z_2 \bar{Z}_3) e_1 + (\bar{Z}_3 Z_1 - Z_3 \bar{Z}_1) e_2 + (\bar{Z}_1 Z_2 - Z_1 \bar{Z}_2) e_3 \right]$$

Из условие того, что параметр $z = x + iy$ конформный вытекает:

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 0, \quad |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + |Z_3|^2 = \frac{1}{2} e^{2\alpha}.$$

Из первого уравнения следует, что вектор Z может быть представлен в виде:

$$Z_1 = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2. \tag{1.5}$$

1.3 Оператор Дирака и энергия поверхности

Теперь представление Вейерштрасса получается подстановкой ψ в (1.3) и (1.4) (см. [1, 3] для таких представлений поверхностей в $\mathbb{R}^3$ и S^3). Оказывается, что деривационные уравнения принимают вид уравнения Дирака:

$$\mathcal{D}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0, \tag{1.6}$$

решением которого является

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Первая квадратичная форма равна

$$\mathrm{I} = e^{2\alpha} dz d\bar{z} = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 dz d\bar{z}$$

и вектор нормали имеет следующее разложение

$$\begin{gathered} N = e^{-\alpha} \left[i(\psi_1 \psi_2 - \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) e_1 - \right. \\ \left. - (\psi_1 \psi_2 + \bar{\psi}_1 \bar{\psi}_2) e_2 + (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) e_3) \right]. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Так как $\Psi dz = (\sum Z_k e_k) dz$ — корректно определенная 1-форма , мы заключаем, что 1-формы:

$$\psi_1^2 dz, \quad \bar{\psi}_2^2 dz, \quad \psi_1 \bar{\psi}_2 dz$$

глобально определены на всей поверхности. С учетом уравнения Дирака, заключаем что

$$UV dz \wedge d\bar{z}$$

есть корректно определенная 2-форма на поверхности (см. подробности в [1]).

Для поверхности M, вложенной в $\mathbb{R}^3$, потенциалы оператора Дирака вещественные и совпадают: $U = V$. Для такой поверхности выполнено:

$$E(M) = \int_M UV \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2} = \frac{1}{4} \int_M H^2 d\mu,$$

где $d\mu = e^{2\alpha} dx \wedge dy$ индуцированная мера на поверхности и H средняя кривизна. Мы напомним, что функционал Уиллмора равен:

$$W(M) = \int_M (H^2 - K) d\mu. \tag{1.8}$$

Это наблюдение из [1] стало началом рассмотрения спектральных характеристик оператора $\mathcal{D}$ в качестве геометрических величин и физического объяснения гипотезы Уиллмора с помощью спектральных кривых вложенных торов (см. [1, 3]).

В общем случае U и V не обязательно совпадают и надо рассматривать энергию замкнутой поверхности как:

$$E(M) = \int_M UV dx \wedge dy = \int_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2}. \tag{1.9}$$

Не всегда даже удается выяснить, является ли функционал энергии вещественным. Мы проверим это в случае Nil. Для этого мы воспользуемся простым предложением, которое прямо следует из уравнения Дирака. Действительно:

$$\bar{\partial}\psi_1 = (\mathrm{Re}\, V + i\mathrm{Im}\, V)\psi_2, \quad \bar{\partial}\bar{\psi}_2 = (-\mathrm{Re}\, U + i\mathrm{Im}\, U)\bar{\psi}_1,$$

откуда следует

Предложение 1. *Пусть ψ удовлетворяет уравнению Дирака* (1.6)*, тогда верно следующее тождество:*

$$\bar{\partial}(\psi_1\bar{\psi}_2) = \left(-\mathrm{Re}\, U|\psi_1|^2 + \mathrm{Re}\, V|\psi_2^2|\right) + i\left(\mathrm{Im}\, U|\psi_1|^2 + \mathrm{Im}\, V|\psi_2|^2\right). \tag{1.10}$$

1.4 Геометрии Терстона на группах Ли $\mathrm{Nil}\,, \widetilde{SL}_2$ и Sol

Согласно теореме Терстона, все трехмерные максимальные односвязные геометрии $(X, \mathrm{Isom}\, X)$, допускающие компактные факторпространства, содержатся в следующем списке:

1) трехмерные геометрии с постоянной секционной кривизной: $X = \mathbb{R}^3, S^3$, or H^3;

2) произведение пар геометрий: $X = S^2 \times \mathbb{R}$ or $H^2 \times \mathbb{R}$;

3) геометрии на группах Ли $\mathrm{Nil}, \widetilde{SL}_2$, и Sol с некоторыми левоинвариантными метриками.

За подробностями об этой теореме и известной гипотезе Терстона о геометризации трехмерных многообразий, мы отсылаем к [12, 5]. В статье мы изучаем поверхности в геометриях, которые моделируются группами Ли $\mathrm{Nil}, \widetilde{SL}_2$, и Sol. Перед тем как перейти к самим поверхностям, мы кратко напомним основные факты об этих геометриях, отсылая за подробным изложением к [5].

1.4.1 Группа Nil

Эта группа образована всеми матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R},$$

с обычным матричным умножением и левоинвариантной метрикой вида:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2.$$

Алгебра Ли образована элементами:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Мы выводим из (1.1), что связность имеет вид:

$$\begin{gathered}
\nabla_{e_1} e_2 = -\nabla_{e_2} e_1 = \frac{1}{2} e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = \nabla_{e_3} e_1 = -\frac{1}{2} e_2, \\
\nabla_{e_2} e_3 = \nabla_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = 0.
\end{gathered} \tag{1.11}$$

1.4.2 Группа $\widetilde{SL}_2$

Группа $G = \widetilde{SL}_2$ является универсальным накрытием группы $SL(2)$, образованной всеми вещественными 2×2-матрицами с детерминантом равным единице. Группа $PSL(2) = SL(2)/\pm 1$ — это группа сохраняющих ориентацию изометрий гиперболической плоскости H^2 и она диффеоморфна UH^2 — расслоению единичных касательных векторов к гиперболической плоскости H^2. Более того, левоинвариантная метрика на $\widetilde{SL}_2$, соответствующая геометрии Терстона [5], получается поднятием при проекции:

$$\widetilde{SL}_2 \to SL(2) \to PSL(2) \approx UH^2$$

Рассмотрим гиперболическую плоскость как диск $|z| < 1$ в комплексной плоскости с метрикой

$$ds^2 = \frac{4dzd\bar{z}}{(1 - |z|^2)^2}$$

Положим $z = x + iy$. И метрику на UH^2 определим следующим образом:

$$dl^2 = 4\frac{dx^2 + dy^2}{(1 - (x^2 + y^2))^2} + \left(d\varphi - \frac{2}{1 - (x^2 + y^2)}(ydx - xdy)\right)^2,$$

где φ — угловая координата на единичных окружностях в касательных плоскостях к H^2. Подробный вывод этой формулы для метрики на UH^2

можно посмотреть в [5, 8]. Отождествим образующие алгебры Ли $\widetilde{SL}_2$ с образующими следующих однопараметрических подгрупп:

$$g_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{pmatrix}, \quad g_y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} & \frac{iy}{\sqrt{1-y^2}} \\ -\frac{iy}{\sqrt{1-y^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{pmatrix},$$

$$g_\varphi = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix},$$

которые действуют на H^2 дробно-линейными преобразованиями:

$$z \to \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(1,1) \approx SL(2)$$

Образующие этих подгрупп имеют вид:

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}.$$

и удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[f_1, f_2] = -4f_3, \quad [f_1, f_3] = -f_2, \quad [f_2, f_3] = f_1.$$

Искомая метрика на $\widetilde{SL}_2$ индуцируется скалярным произведением

$$\langle f_1, f_1\rangle = \langle f_2, f_2\rangle = 4, \ \langle f_3, f_3\rangle = 1,$$

и

$$\langle f_j, f_k\rangle = 0, j \neq k,$$

на алгебре Ли $\widetilde{SL}_2$ и, учитывая (1.1), получаем:

$$\begin{gathered} \nabla_{e_1} e_2 = -\nabla_{e_2} e_1 = -\frac{1}{2} e_3, \quad \nabla_{e_1} e_3 = \frac{1}{2} e_2, \quad \nabla_{e_3} e_1 = \frac{3}{2} e_2, \\ \nabla_{e_2} e_3 = -\frac{1}{2} e_1, \nabla_{e_3} e_2 = -\frac{3}{2} e_1, \quad \nabla_{e_1} e_1 = \nabla_{e_2} e_2 = \nabla_{e_3} e_3 = 0, \end{gathered} \qquad (1.12)$$

где

$$e_1 = \frac{1}{2}f_1, \quad e_2 = \frac{1}{2}f_2, \quad e_3 = f_3, \quad \langle e_j, e_k \rangle = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

Отметим, что на $\widetilde{SL}_2$ можно задавать различные левоинвариантные метрики, для которых $\widetilde{SL}_2$ можно рассматривать как линейное расслоение кривизны τ над поверхностью постоянной отрицательной кривизны k(подробности см. [7, 8]). Или, что эквивалентно, можно рассматривать расслоение касательных векторов длины l к поверхности постоянной отрицательной кривизны k (как и UH^2 это расслоение естественным образом отождествляется с PSL(2)) и затем рассматривать на этом расслоении метрику в соответствии с [5]. В этом случае, при поднятии метрики в $\widetilde{SL}_2$ получим, что величина τ связана с l следующим соотношением $\tau = \frac{lk}{2}$. Отметим также, что в статье [19] нами рассматривались значения $k = -1$ и $l = 2$ или, что то же самое, $k = -1$ и $\tau = -1$. В этой главе, для указанной выше метрики, значения $k = -1$ и $l = 1$, или по-другому, $k = -1$ и $\tau = -\frac{1}{2}$. Заметим, что изменение величины τ, при условии что $\tau \neq 0$, не влияет на геометрический смысл результатов, полученных как в этой главе, так и в [19].

1.4.3 Группа Sol

Эта группа состоит из всех матриц вида:

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x, y, z \in \mathbb{R},$$

с обычным матричным умножением и левоинвариантной метрикой вида:

$$ds^2 = e^{2z}dx^2 + e^{-2z}dy^2 + dz^2.$$

Алгебра Ли образована элементами:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_1, \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Учитывая (1.1), мы заключаем что:

$$\begin{aligned} \nabla_{e_1}e_2 = \nabla_{e_2}e_1 = 0, \quad \nabla_{e_1}e_3 = e_1, \quad \nabla_{e_3}e_1 = 0, \\ \nabla_{e_2}e_3 = -e_2, \quad \nabla_{e_3}e_2 = 0, \\ \nabla_{e_1}e_1 = -\nabla_{e_2}e_2 = -e_3, \quad \nabla_{e_3}e_3 = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

1.5 Тензоры кривизны трехмерных групп Ли

Используя (1.11), (1.12) и (1.13) вычислим тензор кривизны

$$\langle R(X,Y)Z, W\rangle = R_{lkji}W^l Z^k Y^j X^i = \langle \left(\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X,Y]}\right) Z, W\rangle$$

в группах Nil, $\widetilde{SL}_2$, и Sol. Мы не приводим здесь все эти простые вычисления и укажем лишь конечный результат

Предложение 2. *Для групп Ли* Nil, $\widetilde{SL}_2$, *и* Sol *если есть три различных индекса среди* i, j, k, l, *то* $R_{ijkl} = 0$. *Другие компоненты тензора*

кривизны имеют вид:

$$R_{1212} = \begin{cases} -\frac{3}{4} & for \ \mathrm{Nil} \\ -\frac{7}{4} & for \ \widetilde{SL}_2 \\ 1 & for \ \mathrm{Sol} \end{cases}, \quad R_{1313} = R_{2323} = \begin{cases} \frac{1}{4} & for \ \mathrm{Nil} \\ \frac{1}{4} & for \ \widetilde{SL}_2 \\ -1 & for \ \mathrm{Sol} \end{cases}.$$

Напомним, что если $|X| = |Y| = 1$ и эти векторы линейно независимы, то

$$K_{XY} = \langle R(X,Y)X, Y\rangle$$

есть секционная кривизна плоскости, натянутой на X и Y. Это предложение позволяет нам вычислять секционную кривизну любой плоскости.

1.6 Построение поверхности по ψ

В этой части мы выведем условия на вектор-функцию ψ, т.е. критерий на функцию ψ, соответствующую вложению поверхности в Nil, $\widetilde{SL}_2$, или Sol.

Пусть вектор-функция ψ удовлетворяет этим условиям для одной из рассматриваемых нами групп G. Тогда можно построить поверхность следующим образом. [1]

Пусть ψ определено на поверхности M с комплексным параметром z. Рассмотрим точку $P \in M$. Подставим ψ в формулу (1.5) для компонент Z_1, Z_2, Z_3 вектора $\Psi = \sum_{k=1}^{3} Z_k e_k = f^{-1}\partial f$ в алгебре Ли группы G. Затем

[1] Это обобщает представление Вейерштрасса поверхностей в $\mathbb{R}^3$ [2] и $SU(2)$ [3] на поверхности в этих группах.

решаем линейное дифференциальное уравнение в группе G:

$$f_z = f\Psi$$

с начальным условием $f(P) = g \in G$. Таким образом, мы получаем требуемую поверхность как отображение:

$$f : M \to G.$$

Из вывода условий совместности в §1.2 получается, что любая поверхность $f : M \to G$ может быть получена таким образом. Индуцированная метрика имеет вид:

$$ds^2 = e^{2\alpha} dz d\bar{z}, \quad e^{\alpha} = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2),$$

и индуцированная мера на поверхности M:

$$d\mu = e^{2\alpha} \frac{i dz \wedge d\bar{z}}{2}.$$

Квадратичный дифференциал Хопфа равен:

$$\omega = A dz^2, \quad A = \langle \nabla_{f_z} f_z, N \rangle.$$

Точная запись в терминах ψ, зависит от группы Ли и связности Леви-Чевиты на ней. В самом деле:

$$\begin{aligned} A &= \langle (\partial Z_i) e_i, N \rangle + \langle \sum_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \rangle = \\ &= (\bar{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \bar{\psi}_2) + \langle \sum_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N \rangle. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Условия совместности принимают форму уравнения Дирака (1.6) и описывают $\bar{\partial}\psi_1$ и $\partial\psi_2$:

$$\mathcal{D}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} \right] \psi = 0.$$

Другие производные $\partial\psi_1$ и $\bar\partial\psi_2$ получаются следующим образом. Мы дифференцируем e^α и получим:

$$\alpha_z e^\alpha = \bar\psi_1\partial\psi_1 + \psi_2\partial\bar\psi_2 + (\psi_1\partial\bar\psi_1 + \bar\psi_2\partial\psi_2),$$

где согласно уравнению Дирака, выражение в скобках записывается как:

$$\psi_1\partial\bar\psi_1 + \bar\psi_2\partial\psi_2 = (\bar V - U)\psi_1\bar\psi_2.$$

Вместе с формулой для дифференциала Хопфа, это позволяет выписать систему для $\partial\psi_1$ и $\partial\bar\psi_2$:

$$\begin{pmatrix} \bar\psi_1 & \psi_2 \\ \bar\psi_2 & -\psi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\psi_1 \\ \partial\bar\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_z e^\alpha + (U - \bar V)\psi_1\bar\psi_2 \\ A - \langle \sum_{j,k} Z_j Z_k \nabla_{e_j} e_k, N\rangle \end{pmatrix}.$$

Разрешая эту систему, мы получаем выражения для $\partial\psi_1$ и $\bar\partial\psi_2$, что вместе с уравнением Дирака дает нам полную систему уравнений Вейнгартена в терминах ψ:

$$(\partial - \mathcal{A})\psi = 0, \quad (\bar\partial - \mathcal{B})\psi = 0. \tag{1.15}$$

Теперь уравнения Кодацци выводятся из уравнений нулевой кривизны:

$$\partial\bar\partial\psi_k = \bar\partial\partial\psi_k, \quad k = 1, 2.$$

В дальнейшем мы будем называть функцию ψ порождающим спинором поверхности (см. [3] для объяснения такой терминологии).

1.7 Представление поверхностей в группе Nil

В силу (1.11), деривационные уравнения (1.3) и (1.4) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\partial\bar{Z}_1 - \bar{\partial}Z_1 &= 0, \\
\partial\bar{Z}_2 - \bar{\partial}Z_2 &= 0, \\
\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 + (Z_1\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 Z_2) &= 0, \\
\partial\bar{Z}_1 + \bar{\partial}Z_1 + (Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_2 Z_3 - Z_2\bar{Z}_3), \\
\partial\bar{Z}_2 + \bar{\partial}Z_2 - (Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_3 Z_1 - Z_3\bar{Z}_1), \\
\partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 &= 2iH(\bar{Z}_1 Z_2 - Z_1\bar{Z}_2).
\end{aligned} \tag{1.16}$$

При подстановке (1.5) в эти формулы, первая пара уравнений принимает вид:

$$\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 = 0,$$

а четвертое и пятое уравнения эквивалентны следующему:

$$\partial\psi_2^2 - \bar{\partial}\psi_1^2 + i\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) = -2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2).$$

Система этих двух уравнений в точке, где $\psi_1\psi_2 \neq 0$, может быть представлена в форме уравнения Дирака и по непрерывности продолжена на всю поверхность:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathrm{Nil}}\,\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{Nil}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{Nil}} \end{pmatrix}\right]\psi = 0, \\
U_{\mathrm{Nil}} = V_{\mathrm{Nil}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

где H средняя кривизна поверхности.

Замечание 1.1. Касательная плоскость в точке, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 = 0$, натянута на вектора, соответствующие левоинвариантным полям, образованным e_1 и e_2. Так как коммутатор этих векторных полей не лежит

в плоскостях, образованных этими векторами (согласно $[e_1, e_2] = e_3$), то левоинвариантное распределение плоскостей, натянутых на e_1 и e_2, нигде не интегрируемо. Поэтому тождество $Z_3 = 0$ не может иметь места в открытом подмножестве поверхности. Мы отметим, что потенциалы оператора Дирака всюду корректно определены и поэтому уравнение $\mathcal{D}\psi = 0$ продолжается, по непрерывности, на замыкание множества $\{Z_3 \neq 0\}$, которое, как мы показали выше, совпадает со всей поверхностью. То же выполнено для поверхностей в $SU(2)$ и $\widetilde{SL}_2$, но не выполняется в случае $G = \mathrm{Sol}$.

Дифференциал Хопфа имеет вид:

$$A = (\bar{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \bar{\psi}_2) + i\psi_1^2 \bar{\psi}_2^2 \tag{1.18}$$

и уравнения Вейнгартена (1.15) состоят из уравнения Дирака и следующей системы:

$$\begin{aligned} \partial \psi_1 &= \alpha_z \psi_1 + A e^{-\alpha} \psi_2 - \frac{i}{2} \psi_1^2 \bar{\psi}_2, \\ \bar{\partial} \psi_2 &= -\bar{A} e^{-\alpha} \psi_1 + \alpha_{\bar{z}} \psi_2 - \frac{i}{2} \bar{\psi}_1 \psi_2^2. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Из уравнений Вейнгартена вытекает, что:

$$(\partial - \mathcal{A})(\bar{\partial} - \mathcal{B})\psi - (\bar{\partial} - \mathcal{B})(\partial - \mathcal{A})\psi = (\mathcal{A}_{\bar{z}} - \mathcal{B}_z + [\mathcal{A}, \mathcal{B}])\psi = 0.$$

Замечание 1.2. В случае $G = \mathbb{R}^3$ или $G = SU(2)$ спинор $\psi^* = (-\bar{\psi}_2, \bar{\psi}_1)^\perp$ удовлетворяет уравнению:

$$R\psi^* = (\mathcal{A}_{\bar{z}} - \mathcal{B}_z + [\mathcal{A}, \mathcal{B}])\psi^* = 0$$

и вместе с $R\psi = 0$ это дает:

$$R = \mathcal{A}_{\bar{z}} - \mathcal{B}_z + [\mathcal{A}, \mathcal{B}] = 0$$

(см. [3]). В случае $G = \mathrm{Nil}$, также как и для $G = \widetilde{SL}_2$ или $G = \mathrm{Sol}$ уравнение $R\psi^* = 0$ не выполняется и, в частности, ядро оператора Дирака не может быть рассмотрено как векторное пространство над кватернионами. Поэтому в нашей ситуации уравнения Кодацци будут выведены по-другому. Имеет место:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_z - \frac{i}{2}Z_3 & Ae^{-\alpha} \\ -W & -\frac{i}{2}Z_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}\bar{Z}_3 & \overline{W} \\ -\bar{A}e^{-\alpha} & \alpha_{\bar{z}} - \frac{i}{2}\bar{Z}_3 \end{pmatrix},$$

где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2$ и $W = \left(\frac{H}{2} - \frac{i}{4}\right)e^{\alpha}$. Уравнение $R\psi = 0$ записывается как система двух уравнений:

$$\kappa_1 = ((\alpha_{z\bar{z}} - |A|^2e^{-2\alpha} + |W|^2) + \frac{i}{2}(\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3))\psi_1 + (A_{\bar{z}}e^{-\alpha} - \overline{W}_z + \alpha_z\overline{W})\psi_2 = 0,$$

$$\kappa_2 = (\bar{A}_z e^{-\alpha} - W_{\bar{z}} + \alpha_{\bar{z}}W)\psi_1 + (-(\alpha_{z\bar{z}} - |A|^2e^{-2\alpha} + |W|^2) + \frac{i}{2}(\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3))\psi_2 = 0.$$

Напомним, что для поверхностей в Nil имело место:

$$\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 = -\frac{i}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4), \quad \partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 = H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4). \qquad (1.20)$$

Теперь система уравнений Кодацци примет вид

$$\kappa_1\bar{\psi}_1 - \bar{\kappa}_2\psi_2 = 0, \quad \kappa_1\bar{\psi}_2 + \bar{\kappa}_2\psi_1 = 0$$

и переписывается как

$$\alpha_{z\bar{z}} - |A|^2e^{-2\alpha} + \frac{H^2}{4}e^{2\alpha} = \frac{1}{16}(3|\psi_1|^4 + 3|\psi_2|^4 - 10|\psi_1|^2|\psi_2|^2),$$
$$A_{\bar{z}} - \frac{H_z}{2}e^{2\alpha} + \frac{1}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2 = 0.$$

Используя (1.20), мы запишем эту систему так:

$$\begin{aligned} \alpha_{z\bar{z}} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 &= \frac{3}{16}e^{2\alpha} - |Z_3|^2, \\ \bar{\partial}\left(A + \frac{Z_3^2}{2H+i}\right) &= \frac{1}{2}H_z e^{2\alpha} + \bar{\partial}\left(\frac{1}{2H+i}\right)Z_2^3 \end{aligned} \qquad (1.21)$$

Теперь мы можем сформулировать теорему.

Теорема 1. *Для поверхности в* $G = \mathrm{Nil}$ *ее порождающий спинор* ψ *удовлетворяют уравнению Дирака* (1.17). *Более того, вектор-функция* ψ, *удовлетворяющая* (1.17), *является порождающим спинором некоторой поверхности в* Nil. *Система уравнений Вейнгартена эквивалентна* (1.17) *и* (1.19). *Дифференциал Хопфа имеет вид* (1.18) *и уравнения Кодацци имеют вид* (1.21).

Следствие 1. *Порождающий спинор* ψ *минимальной поверхности в* Nil *удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\bar{\partial}\psi_1 = \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_2, \quad \partial\psi_2 = -\frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\psi_1.$$

Следствие 2 (Абреш [2]). *Для поверхностей постоянной средней кривизны в* Nil *квадратичный дифференциал Хопфа*

$$\widetilde{A}dz^2 = \left(A + \frac{Z_3^2}{2H+i}\right)dz^2 \tag{1.22}$$

голоморфен.

[2]Поскольку в [6] ранее было показано, что для поверхностей постоянной средней кривизны в $S^2 \times \mathbb{R}$ и $H^2 \times \mathbb{R}$ некоторые обобщения дифференциала Хопфа голоморфны и это же утверждение было анонсировано в [7] для поверхностей в Nil и других трехмерных геометриях с четырехмерной группой изометрий [6] и поскольку эти результаты Абреша и Розенберга послужили для нас мотивом доказать это утверждение нашими методами, в нашей работе [19] мы отнесли авторство результата о голоморфности этого дифференциала для поверхностей постоянной средней кривизны Абрешу. Тем не менее тщательный анализ формул из [6, 7] показывает, что дифференциал Абреша–Розенберга имеет вид

$$(H + i\tau)\widetilde{A}dz^2,$$

где пространство Nil локально рассматривается как одномерное расслоение над евклидовой плоскостью с кривизной расслоения равной τ.

Предложение 3. *Если дифференциал Хопфа $\widetilde{A}dz^2$ голоморфный, то поверхность в* Nil *имеет постоянную среднюю кривизну.*

Доказательство. Мы докажем это от противного. Предположим, что $H_z \neq 0$ в некоторой области. Тогда

$$\frac{1}{2}e^{2\alpha}H_z = \frac{2H_{\bar{z}}}{(2H+i)^2}Z_3^2$$

и из равенства модулей левой и правой частей уравнения следует, что

$$\frac{1}{2}e^{2\alpha} = \frac{2|\psi_1|^2|\psi_2|^2}{4H^2+1}.$$

Поскольку $e^{\alpha} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$, имеет место равенство

$$(4H^2+1)(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 = 4|\psi_1|^2|\psi_2|^2$$

и отсюда мы выводим, что

$$4H^2e^{2\alpha} + (|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2)^2 = 0.$$

Ясно, что это тождество имеет место в том и только в том случае, если $|\psi_1| = |\psi_2|$ и $H = 0$, т.е поверхность минимальная. Это противоречит первоначальному предположению.

Замечание 1.3. В уравнениях Кодацци (1.21), помимо первой и второй формы, выраженной через e^{α}, H и A, участвует также Z_3. Таким образом, для того чтобы получить полную систему уравнений совместности, необходимо к уравнениям (1.21) добавить уравнения возникающие прямым образом из уравнений Вейнгартена. Эти уравнения будут выра-

жать производные функций $n_3 = \langle N, e_3\rangle$ и $Z_3 = \langle f_z, e_3\rangle$:

$$\begin{aligned}\bar\partial Z_3 &= \left(\frac{H}{2} + \frac{i}{4}\right) n_3 e^{2\alpha},\\ \partial Z_3 &= 2\alpha_z Z_3 + A n_3, \\ \partial n_3 &= -2Ae^{-2\alpha}\bar Z_3 - \left(H - \frac{i}{2}\right) Z_3\end{aligned} \tag{1.23}$$

Мы не будем здесь исключать лишние уравнения. Заметим также, что величины n_3 и Z_3 связаны тождеством

$$n_3^2 + e^{-2\alpha}|Z_3|^2 = 1$$

Следует отметить, что подобная система уравнений совместности, в несколько других терминах, представлена в [8]. Но вместо комплексной функции на поверхности Z_3, в [8] используется вектор проекции e_3 на касательную плоскость к поверхности. В наших терминах этот вектор представляется как $Re[4e^{-2\alpha}Z_3 f_{\bar z}]$. В главе 3 мы покажем как переписать систему уравнений совместности, в случае поверхностей постоянной средней кривизны, в форме позволяющей вести исследования методами интегрируемых систем.

В заключении мы вычислим функционал энергии для замкнутых поверхностей в группе Nil.

Предложение 4. *Для замкнутой, ориентированной поверхности M в группе* Nil*, функционал энергии вещественный и равен:*

$$E(M) = \int_M \left(\frac{H^2}{4}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 - \frac{1}{16}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)^2\right)\frac{idz\wedge d\bar z}{2} \tag{1.24}$$

Доказательство. Подставим выражения U_{Nil} и V_{Nil} в тождество (1.10) и получим, что:

$$\bar\partial(\psi_1\bar\psi_2) = \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) + i\frac{1}{4}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4).$$

Согласно формуле Стокса:

$$\int_M \frac{H}{2}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} + i\int_M \frac{1}{4}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} = 0. \quad (1.25)$$

Вещественная часть левой части этого выражения, с точностью до постоянной, равна $\operatorname{Im} E(M)$. Откуда следует, что функционал энергии вещественный. Далее подставляя U_{Nil} и V_{Nil} в $\operatorname{Re} E(M)$ получаем (2.15). Что доказывает наше предложение. Отметим, что равенство нулю мнимой части выражения (1.25) вместе с (1.7) влечет за собой:

$$\int_M \langle N, e_3\rangle d\mu = \int_M (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} = 0.$$

Предложение 5. *Функционал энергии для поверхности M в группе* Nil *равен:*

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu, \quad (1.26)$$

где $\widehat{K}$ секционная кривизна касательной плоскости в точке.

Доказательство. Воспользовавшись предложением 2 заключаем, что секционная кривизна касательной плоскости в единице группы равна:

$$\widehat{K} = \frac{1}{4} - \cos^2\varphi,$$

где φ — угол между нормалью к плоскости и e_3. Учитывая (1.7), подынтегральное выражение в (2.15) равно

$$\frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 - \frac{1}{16}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)^2 = \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 - \frac{1}{16}e^{2\alpha}\langle N, e_3\rangle^2 =$$
$$\frac{1}{4}e^{2\alpha}\left(H^2 - \frac{1}{4}\cos^2\varphi\right) = \frac{1}{4}e^{2\alpha}\left(H^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \widehat{K}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4}e^{2\alpha}\left(H^2 + \frac{1}{4}\widehat{K} - \frac{1}{16}\right).$$

Предложение доказано.

1.8 Представление поверхностей в группе $\widetilde{SL}_2$

Подставляя (1.12) в деривационные уравнения (1.3) и (1.4) получаем, что:

$$\begin{aligned}
\partial\bar{Z}_1 - \bar{\partial}Z_1 + (Z_2\bar{Z}_3 - \bar{Z}_2 Z_3) &= 0,\\
\partial\bar{Z}_2 - \bar{\partial}Z_2 + (Z_3\bar{Z}_1 - \bar{Z}_3 Z_1) &= 0,\\
\partial\bar{Z}_3 - \bar{\partial}Z_3 - (Z_1\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1 Z_2) &= 0,\\
\partial\bar{Z}_1 + \bar{\partial}Z_1 - 2(Z_2\bar{Z}_3 + \bar{Z}_2 Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_2 Z_3 - Z_2\bar{Z}_3),\\
\partial\bar{Z}_2 + \bar{\partial}Z_2 + 2(Z_1\bar{Z}_3 + \bar{Z}_1 Z_3) &= 2iH(\bar{Z}_3 Z_1 - Z_3\bar{Z}_1),\\
\partial\bar{Z}_3 + \bar{\partial}Z_3 &= 2iH(\bar{Z}_1 Z_2 - Z_1\bar{Z}_2).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

При подстановке (1.5) в первые два уравнения, получится уравнение

$$\partial\psi_2^2 + \bar{\partial}\psi_1^2 - i\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) = 0,$$

а четвертое и пятое уравнения эквивалентны следующему:

$$\partial\psi_2^2 - \bar{\partial}\psi_1^2 - 2i\psi_1\psi_2(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) = -2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$$

Эти два уравнения в совокупности также могут представлены в виде уравнения Дирака (вывод аналогичен выводу для группы Nil , см. (1.17) в §1.7):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\mathrm{SL}}\psi &= \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{SL}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{SL}} \end{pmatrix}\right]\psi = 0,\\
U_{\mathrm{SL}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{2}|\psi_1|^2 - \frac{3}{2}|\psi_2|^2\right),\\
V_{\mathrm{SL}} &= \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{2}\left(\frac{3}{2}|\psi_1|^2 - \frac{1}{2}|\psi_2|^2\right),
\end{aligned} \tag{1.28}$$

где H — средняя кривизна поверхности. Дифференциал Хопфа равен

$$A = (\bar{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \bar{\psi}_2) - 2i\psi_1^2 \bar{\psi}_2^2 \tag{1.29}$$

и мы имеем

$$\begin{aligned} \partial \psi_1 &= \alpha_z \psi_1 + A e^{-\alpha} \psi_2 + i\psi_1^2 \bar{\psi}_2, \\ \bar{\partial} \psi_2 &= -\bar{A} e^{-\alpha} \psi_1 + \alpha_{\bar{z}} \psi_2 + i \bar{\psi}_1 \psi_2^2 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ принимают вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_z + iZ_3 & Ae^{-\alpha} \\ -W & iZ_3 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} i\bar{Z}_3 & \overline{W} \\ -\bar{A}e^{-\alpha} & \alpha_{\bar{z}} + i\bar{Z}_3 \end{pmatrix},$$

где $W = \frac{1}{2}(H + \frac{i}{2})e^{\alpha}$. Тождество $R\psi = 0$ эквивалентно уравнениям:

$$\kappa_1 = ((\alpha_{z\bar{z}} - |A|^2 e^{-2\alpha} + |W|^2) - i(\partial \bar{Z}_3 - \bar{\partial} Z_3))\psi_1 + (A_{\bar{z}} e^{-\alpha} - \overline{W}_z + \alpha_z \overline{W})\psi_2 = 0,$$

$$\kappa_2 = (\bar{A}_z e^{-\alpha} - W_{\bar{z}} + \alpha_{\bar{z}} W)\psi_1 + (-(\alpha_{z\bar{z}} - |A|^2 e^{-2\alpha} + |W|^2) - i(\partial \bar{Z}_3 - \bar{\partial} Z_3))\psi_2 = 0.$$

Так как порождающие спиноры поверхности в $\widetilde{SL}_2$ удовлетворяют равенствам

$$\partial \bar{Z}_3 - \bar{\partial} Z_3 = \frac{i}{2}(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4), \quad \partial \bar{Z}_3 + \bar{\partial} Z_3 = H(|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4),$$

мы запишем уравнения $\kappa_1 \bar{\psi}_1 - \bar{\kappa}_2 \psi_2 = 0$ и $\kappa_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\kappa}_2 \psi_1 = 0$ как следующую систему:

$$\begin{aligned} \alpha_{z\bar{z}} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4} e^{2\alpha} H^2 &= \frac{7}{16} e^{2\alpha} - 2|Z_3|^2, \\ \bar{\partial}\left(A + \frac{Z_3^2}{H - \frac{i}{2}}\right) &= \frac{1}{2} H_z e^{2\alpha} + \bar{\partial}\left(\frac{1}{H - \frac{i}{2}}\right) Z_3^2 \end{aligned} \tag{1.31}$$

Таким образом имеет место

Теорема 2. *Для поверхности в группе $G = \widetilde{SL}_2$, ее порождающий спинор ψ удовлетворяет уравнению Дирака* (1.28)*. Любая вектор-функция ψ, удовлетворяющая уравнению Дирака* (1.28)*, является порождающим спинором для некоторой поверхности в $\widetilde{SL}_2$. Система уравнений Вейнгартена эквивалентна системе, состоящей из двух уравнений* (1.28) *и* (1.30)*. Дифференциал Хопфа имеет вид* (1.29)*, а уравнения Кодацци имеют вид* (1.31)*.*

Следствие 3. *Порождающий спинор минимальной поверхности в $\widetilde{SL}_2$ удовлетворяет уравнениям:*

$$\bar{\partial}\psi_1 = i\left(\frac{3}{4}|\psi_1|^2 - \frac{1}{4}|\psi_2|^2\right)\psi_2, \quad \partial\psi_2 = -i\left(\frac{1}{4}|\psi_1|^2 - \frac{3}{4}|\psi_2|^2\right)\psi_1$$

Следствие 4 (Абреш)**.** *Для поверхностей постоянной средней кривизны в $\widetilde{SL}_2$ квадратичный дифференциал*

$$\widetilde{A}dz^2 = \left(A + \frac{Z_2^3}{H - \frac{i}{2}}\right)dz^2 \tag{1.32}$$

голоморфен.

Замечание 1.4. В [13] доказывается, что поверхность для которой квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ голоморфен, либо поверхность постоянной средней кривизны, либо принадлежит некоторому, описанному в [13], семейству поверхностей. Там же объяснено, что компактная поверхность ненулевой эйлеровой характеристики, на которой квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ голоморфен, является поверхностью постоянной средней кривизны.

Замечание 1.5. Как и в замечании 1.3 предыдущего параграфа, уравнения Кодации (1.31) нужно дополнить еще тремя уравнениями:

$$\begin{aligned} \bar\partial Z_3 &= \left(\frac{H}{2} - \frac{i}{4}\right) n_3 e^{2\alpha}, \\ \partial Z_3 &= 2\alpha_z Z_3 + A n_3, \\ \partial n_3 &= -2Ae^{-2\alpha}\bar Z_3 - \left(H + \frac{i}{2}\right) Z_3 \end{aligned} \tag{1.33}$$

1.9 Представление поверхностей в группе Sol

Согласно (1.13), деривационные уравнения (1.3) и (1.4) для поверхностей в группе Sol имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial\bar Z_1 - \bar\partial Z_1 + (Z_1\bar Z_3 - \bar Z_1 Z_3) &= 0, \\ \partial\bar Z_2 - \bar\partial Z_2 - (Z_2\bar Z_3 - \bar Z_2 Z_3) &= 0, \\ \partial\bar Z_3 - \bar\partial Z_3 &= 0, \\ \partial\bar Z_1 + \bar\partial Z_1 + (Z_1\bar Z_3 + \bar Z_1 Z_3) &= 2iH(\bar Z_2 Z_3 - Z_2\bar Z_3), \\ \partial\bar Z_2 + \bar\partial Z_2 - (Z_2\bar Z_3 + \bar Z_2 Z_3) &= 2iH(\bar Z_3 Z_1 - Z_3\bar Z_1), \\ \partial\bar Z_3 + \bar\partial Z_3 - 2(|Z_1|^2 - |Z_2|^2) &= 2iH(\bar Z_1 Z_2 - Z_1\bar Z_2) \end{aligned} \tag{1.34}$$

Также как в §1.7 и §1.8 мы подставляем (1.5) в эти уравнения и получаем следующую пару уравнений:

$$\partial\psi_2^2 + \bar\partial\psi_1^2 - \bar\psi_1\bar\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) = 0,$$

$$\partial\psi_2^2 - \bar\partial\psi_1^2 + \bar\psi_1\bar\psi_2(|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2) = -2H\psi_1\psi_2(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)$$

Видно, что в точке, где $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 \neq 0$, эти уравнения принимают форму уравнения Дирака:

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Sol}}\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{\mathrm{Sol}} & 0 \\ 0 & V_{\mathrm{Sol}} \end{pmatrix}\right]\psi = 0,$$

$$U_{\mathrm{Sol}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) - \frac{1}{2}\bar{\psi}_2^2\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1}, \qquad (1.35)$$

$$V_{\mathrm{Sol}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{1}{2}\bar{\psi}_1^2\frac{\bar{\psi}_2}{\psi_2}$$

Замечание 1.6. Так как левоинвариантные векторные поля e_1 и e_2 коммутируют, уравнение $Z_3 = \psi_1\bar{\psi}_2 = 0$ может выполняться на открытом подмножестве B поверхности. Поэтому уравнение Дирака не может быть продолжено на всю поверхность и не описывает деформацию ψ в множестве B. Так как $H = 0$ в B, можно считать,что $U_{\mathrm{Sol}} = V_{\mathrm{Sol}} = 0$ внутри этой области. Тем не менее на границе множества $\{Z_3 \neq 0\}$ потенциалы U_{Sol} и V_{Sol} не всегда корректно определены, в силу неопределенности выражений $\frac{\bar{\psi}_1}{\psi_1}$ и $\frac{\bar{\psi}_2}{\psi_2}$, вместе с тем мера этого множества равна нулю.

Дифференциал Хопфа поверхности Sol равен:

$$A = (\bar{\psi}_2\partial\psi_1 - \psi_1\partial\bar{\psi}_2) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}_2^4 - \psi_1^4), \qquad (1.36)$$

а система уравнений Вейнгартена образована (1.35) и следующей парой уравнений:

$$\partial\psi_1 = \alpha_z\psi_1 + Ae^{-\alpha}\psi_2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_2^3, \qquad (1.37)$$

$$\bar{\partial}\psi_2 = -\bar{A}e^{-\alpha}\psi_1 + \alpha_{\bar{z}}\psi_2 - \frac{1}{2}\bar{\psi}_1^3$$

Уравнения Кодацци записываются так:

$$\alpha_{z\bar{z}} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 = \frac{1}{4}(6|\psi_1|^2|\psi_2|^2 - (|\psi_1|^4 + |\psi_2|^4)), \qquad (1.38)$$

$$A_{\bar{z}} - \frac{1}{2}H_z e^{2\alpha} = (|\psi_2|^4 - |\psi_1|^4)\psi_1\bar{\psi}_2,$$

или, с использованием n_3 и Z_3, в следующем виде:

$$\begin{aligned}\alpha_{z\bar z} - e^{-2\alpha}|A|^2 + \frac{1}{4}e^{2\alpha}H^2 = 2|Z_3|^2 - \frac{1}{4}e^{2\alpha},\\ A_{\bar z} - \frac{1}{2}H_z e^{2\alpha} = n_3 e^{2\alpha} Z_3\end{aligned} \qquad (1.39)$$

Теперь мы можем сформулировать теорему

Теорема 3. *Пусть отображение $f : M \to \mathrm{Sol}$ задает поверхность. Обозначим через B подмножество M, где $Z_3 = \langle f^{-1} f_z, e_3\rangle = 0$. Пусть B_0 — внутренность B, и пусть C — подмножество в M, выделенное неравенством $Z_3 \neq 0$. Поскольку $M = B_0 \cup \bar C$, множество $B \setminus B_0$ лежит в замыкании $\bar C$ множества C и имеет нулевую меру. Тогда порождающий спинор ψ поверхности M удовлетворяет уравнению Дирака* (1.35) *в C и уравнению Дирака с нулевыми потенциалами: $\bar\partial\psi_1 = \partial\psi_2 = 0$, — в B_0. Любая вектор-функция ψ, удовлетворяющая* (1.35) *на некотором множестве $D \subset M$, является порождающим спинором для некоторой поверхности $f : D \to \mathrm{Sol}$. Дифференциал Хопфа равен* (1.36)*. На множестве $B_0 \cup C$ уравнения Вейнгартена записываются как* (1.37) *и уравнение Дирака для ψ. Система уравнений Кодацци имеет вид* (1.39).

Следствие 5. *Порождающий спинор ψ минимальной поверхности в* Sol *удовлетворяет уравнениям:*

$$\bar\partial\psi_1 = \frac{1}{2}\bar\psi_1^2\bar\psi_2, \quad \partial\psi_2 = \frac{1}{2}\bar\psi_1\bar\psi_2^2$$

Замечание 1.7. В [7] объяснено, что квадратичный дифференциал на поверхности $\widetilde{A}dz^2$, полученный из обычного дифференциала Хопфа Adz^2 корректирующей квадратичной добавкой вида (1.22),(1.32) и голоморфный на поверхностях постоянной средней кривизны, возможен

лишь в случае объемлющего многообразия с размерностью группы изометрий больше либо равной 4. Но в случае Sol группа изометрий трехмерна.

Глава 2

Поверхности вращения в группе Nil и обобщенный функционал Уиллмора

Результаты этой главы изложены в [20].

В этой главе изучается спектральное обобщение функционала Уиллмора для поверхностей в трехмерной группе Гейзенберга Nil (см. первую главу). Представление Вейерштрасса для поверхностей в Nil было рассмотрено нами в первой главе, где следуя спектральному подходу, принятому в [1, 14], было предложено следующее обобщение функционала Уиллмора

$$E(M) = \int_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2},$$

где U и V потенциалы оператора Дирака, полученного из представления Вейерштрасса.

В случае поверхностей в $\mathbb{R}^3$, такой подход дает четверть функционала

Уиллмора $\mathcal{W} = \int H^2 d\mu$. Тем не менее для поверхностей в Nil функционал E не пропорционален известному обобщению функционала Уиллмора вида $\int (H^2 + \widehat{K}) d\mu$, где $\widehat{K}$ — секционная кривизна объемлющего пространства вдоль касательной плоскости к поверхности.

В этой главе мы покажем, что для поверхностей в пространстве Nil функционал $E(M)$ аналогичен функционалу Уиллмора для поверхностей в $\mathbb{R}^3$ во многих отношениях. В частности будет доказано, что $E > 0$ для замкнутых поверхностей вращения, а для сфер вращения минимум достигается в точности на сферах постоянной средней кривизны (теорема 5 и ее следствия). Кроме того, эти сферы есть критические точки функционала E (теорема 6). Более того, мы указываем связь функционалов E и $\mathcal{W}$ с изопериметрической задачей: в частности, оба функционала E и $\frac{1}{4}\mathcal{W}$ принимают одно и то же значение равное π на сферах постоянной средней кривизны в Nil и $\mathbb{R}^3$ соответственно (теорема 4). В случае $\mathbb{R}^3$ такие сферы суть изопериметрические поверхности и имеет место гипотеза, что то же верно и для Nil. В §2.3 мы также покажем, как получить некоторые результаты из [7] и [10] с помощью представления Вейерштрасса.

Мы находим, что связь между теорией функционала Уиллмора и изопериметрической задачей достаточно интересна. Эта связь рассматривается в §2.6. Уравнения Эйлера-Лагранжа для функционала E выведено в §2.7.

2.1 Предварительные сведения

Группа Nil является нильпотентной группой Ли, и мы полагаем, что она наделена левоинвариантной метрикой вида

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2.$$

Алгебра Ли имеет три образующие $e_1 = e_x, e_2 = e_y, e_3 = e_z$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

Скалярное произведение в алгебре Ли, заданное левоинвариантной метрикой, будем обозначать как

$$\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{3} u^i v^i, \quad u = \sum u^i e_i, \ v = \sum v^k e_k.$$

Как гладкое многообразие, пространство Nil диффеоморфно $\mathbb{R}^3$ и на нем возможно ввести цилиндрические координаты следующим образом:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = \frac{\rho^2}{2}\cos\varphi\sin\varphi + h.$$

Для этого из точки $z = h$ на оси z проведем геодезическую длины ρ, перпендикулярно оси z. Направление геодезической задается величиной φ, углом между геодезической и осью x. Конечная точка этой геодезической имеет координаты (ρ, φ, h). В цилиндрических координатах метрика принимает следующий вид

$$ds^2 = d\rho^2 - \rho^2 dh d\varphi + \frac{1}{4}\rho^2(4 + \rho^2)d\varphi^2 + dh^2 \tag{2.1}$$

Заметим, что вращения вокруг оси z заданные преобразованиями $\varphi \to \varphi + \theta$ являются изометриями. Напомним основные факты касающиеся

представления Вейерштрасса для поверхностей в группе Nil, представленные в первой главе. Представление Вейерштрасса для поверхности

$$f : M \to \mathrm{Nil}$$

определяет ее в терминах решения $\psi(z)$ нелинейного уравнения

$$\mathcal{D}_{\mathrm{Nil}}\,\psi = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar\partial & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix}\right]\psi = 0,$$

где z — конформный параметр на поверхности. Нелинейность скрыта в потенциалах U и V. Для группы Nil мы имеем

$$U_{\mathrm{Nil}} = V_{\mathrm{Nil}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2),$$

где H — средняя кривизна. Для компактных поверхностей без края в группе Nil мы ввели(см.первую главу) функционал (спинорной) энергии следующим образом

$$E(M) = \int_M UV\frac{idz \wedge d\bar z}{2}.$$

Для представления Вейерштрасса поверхностей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ потенциалы U и V вещественны и совпадают, и кроме того функционал энергии равен $E(M) = \frac{1}{4}\mathcal{W}$, где $\mathcal{W}$ — функционал Уиллмора [1]. Точка зрения, основанная на спектральной теории оператора Дирака $\mathcal{D}$, возникающего из представления Вейерштрасса, и продемонстрированная в [1, 14], дает основания полагать, что спектральные свойства оператора $\mathcal{D}$ должны иметь существенный геометрический смысл. Поэтому мы рассматриваем функционал E как спектральное обобщение функционала Умллмора. Хотя произведение UV и комплекснозначно, в первой

главе мы показали, что интеграл от формы $UV\frac{idz\wedge d\bar z}{2}$ по компактной поверхности без края равен

$$E(M)=\frac{1}{4}\int_M\left(H^2+\frac{\widehat{K}}{4}-\frac{1}{16}\right)d\mu, \tag{2.2}$$

где $\widehat{K}$ — секционная кривизна касательной плоскости поверхности в Nil и $d\mu=e^{2\alpha}dx\wedge dy$ — индуцированная мера на M.

2.2 Основные тождества для поверхностей на которых обобщенный дифференциал Хопфа $\widetilde{A}=0$

Следующие уравнения получены прямыми вычислениями из деривационных уравнений в Nil и приведены в §1.7:

$$\frac{\partial n_3}{\partial z}=-2e^{-2\alpha}A\bar Z_3-\left(H-\frac{i}{2}\right)Z_3, \tag{2.3}$$

где $n_3=\langle n,e_3\rangle$, а n-вектор нормали к поверхности,

$$e^{2\alpha}=\frac{4|Z_3|^2}{1-{n_3}^2} \tag{2.4}$$

и

$$\frac{\partial \overline{Z}_3}{\partial z}=(2H-i)|Z_3|^2\frac{n_3}{1-{n_3}^2}. \tag{2.5}$$

Предположим, что дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ равен нулю, что в частности означает что поверхность имеет постоянную среднюю кривизну и таким образом:

$$A=-\frac{{Z_3}^2}{2H+i},\quad H=\mathrm{const} \tag{2.6}$$

и где A-обычный дифференциал Хопфа(см. §1.7). Подставляя (2.6) в (2.3) и выражая $e^{2\alpha}$ через (2.4), мы получим

$$\frac{\partial n_3}{\partial z} = \left(-H + \frac{i}{2} + \frac{1-{n_3}^2}{4H+2i}\right) Z_3, \tag{2.7}$$

что вместе с (2.5) дает следующее уравнение

$$\Delta n_3 + \frac{2n_3({n_{3x}}^2 + {n_{3y}}^2)}{1-{n_3}^2} = 0, \tag{2.8}$$

которое будет использовано нами в дальнейшем при описании сфер вращения постоянной средней кривизны. Таким образом справедливо

Предложение 6. *Для поверхностей в* Nil, *на которых* $\widetilde{A}dz^2 = 0$, *имеет место уравнение (2.8). Кроме того, метрика* $e^{2\alpha}$ *однозначно выражается через* n_3 *и константу* H.

Первое утверждение уже доказано. Для того чтобы показать второе утверждение, достаточно выразить Z_3 из (2.7) и затем, используя (2.4), получить

$$e^{2\alpha} = \frac{4}{1-n_3^2}\frac{16H^2+4}{(4H^2+{n_3}^2)^2}\left|\frac{\partial n_3}{\partial z}\right|^2. \tag{2.9}$$

Следует отметить, что в [6] указаны все поверхности в пространствах $S^2 \times R$ и $H^2 \times R$ на которых квадратичный дифференциал Абреша-Розенберга(для нашего случая Nil он равен $(2H+i)\widetilde{A}dz^2$) равен нулю. Мы не будем здесь формулировать подобного утверждения для Nil, однако из дальнейшего изложения станет ясно как это сделать.

2.3 Сферы вращения постоянной средней кривизны в Nil

Поверхности вращения постоянной средней кривизны в Nil, и в частности сферы вращения, описаны в пионерской работе [15]. А в [10] разбирается еще и случай поверхностей постоянной средней кривизны с винтовой симметрией. Однако об этих работах автор узнал не сразу и описание сфер вращения постоянной средней кривизны проводилось методами настоящего параграфа(см. также [20]). Здесь мы продемонстрируем, как описание сфер постоянной средней кривизны прямо выводится с помощью представления Вейерштрасса. Кроме того эти вычисления будут использованы для нахождения значений различных функционалов (площади, объема ограничиваемой области и спинорной энергии) на этих сферах, а также при доказательстве того, что сферы постоянной средней кривизны суть критические точки функционала спинорной энергии. Тем не менее результаты [15, 10] будут применяться нами при выводе нижних оценок для значений функционала спинорной энергии на поверхностях вращения. Для поверхностей постоянной средней кривизны в Nil квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ голоморфен. Следовательно для сфер постоянной средней кривизны он тождественно равен нулю и, таким образом, справедливо уравнение (2.8). Рассмотрим следующее решение для уравнения (2.8):

$$n_3 = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}, \tag{2.10}$$

где $r^2 = x^2 + y^2, z = x + iy$. Согласно тождеству (2.9), в этом случае индуцированная метрика $e^{2\alpha} dz d\bar{z}$ принимает вид:

$$e^{2\alpha} = \frac{16(1+4H^2)(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2 + 4H^2(1+r^2)^2)^2}. \tag{2.11}$$

Пусть сфера получена вращением кривой $\gamma(r) = (\rho(r), \varphi(r), h(r))$ вокруг оси z. На этой сфере естественно определить координаты r и θ, где θ отвечает за поворот γ вокруг оси z. Предполагая теперь, что координаты на сфере $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$ — конформные, будем искать $\gamma(r)$ при которых индуцированная метрика совпадает с (2.11). В терминах координат r и θ индуцированная метрика на поверхности вращения равна

$$\left(\rho^2 + \frac{\rho^4}{4}\right) d\theta^2 + \left(\left(2\rho^2 + \frac{\rho^4}{2}\right)\varphi' - \rho^2 h'\right) dr d\theta +$$

$$+ \left(h'^2 + \rho^2\varphi'^2 + \frac{1}{4}\rho^4\varphi'^2 - \rho^2 h'\varphi' + \rho'^2\right) dr^2.$$

Такая метрика совпадает с (2.11), если и только если, ρ, h и φ удовлетворяют системе уравнений:

$$\rho^2 + \frac{\rho^4}{4} = r^2 e^{2\alpha}, \qquad \left(2\rho^2 + \frac{\rho^4}{2}\right)\varphi' - \rho^2 h' = 0,$$

$$h'^2 + \rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 + \frac{1}{4}\rho^4\varphi'^2 - \rho^2 h'\varphi' = e^{2\alpha},$$

которую можно упростить следующим образом:

$$\rho = \sqrt{\sigma}, \qquad h' = \sqrt{1 + \frac{\sigma}{4}}\sqrt{e^{2\alpha} - \frac{\sigma'^2}{4\sigma}}, \qquad \varphi' = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e^{2\alpha} - \frac{\sigma'^2}{4\sigma}}{1 + \frac{\sigma}{4}}},$$

где $\sigma = 2\sqrt{1 + r^2 e^{2\alpha}} - 2$. Из (2.11) теперь следует, что

$$\sigma = \frac{16r^2}{(r^2-1)^2 + 4H^2(r^2+1)^2}$$

и окончательно получаем:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \frac{4r}{\sqrt{(r^2-1)^2+4H^2(r^2+1)^2}},\\
h &= \frac{1+4H^2}{4H^2}\left(-\frac{4H(1-r^2+4H^2(1+r^2))}{(r^2-1)^2+16H^4(1+r^2)^2+8H^2(1+r^4)}+\right.\\
&\qquad \left. +\arctan\left[\frac{1}{4H}(r^2-1+4H^2(r^2+1))\right]\right),\\
\varphi &= \arctan\left[\frac{1}{4H}(4H^2-1+(1+4H^2)r^2)\right],
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

где $r \in (0, \infty)$. Следующее предложение проверяется прямыми вычислениями.

Предложение 7. *Для любого $H, 0 < H < \infty$, кривая* (2.12) *порождает посредством вращения сферу постоянной средней кривизны H.*

Пусть теперь $T_1\mathrm{Nil}$ — S^1-расслоение над Nil, образованное касательными векторами единичной длины. Обозначим через $\widehat{f} : M \to T_1\mathrm{Nil}$ гауссово отображение, которое сопоставляет точке $p \in M$ нормаль к поверхности выходящую из точки p.

Предложение 8. *Для любого значения $H, 0 < H < \infty$ и любой точки $q \in T_1\mathrm{Nil}$ существует сфера вращения M постоянной средней кривизны H, такая что $q \in \widehat{f}(M)$.*

В дальнейшем, если не оговорено противное, под сферами вращения постоянной средней кривизны мы будем подразумевать не только сферы заданные формулами (2.12), но также их образы при изометриях в Nil.
Доказательство предложения 8. Пусть $q = (p, \xi) \in T_1\mathrm{Nil}$, где $p \in \mathrm{Nil}$ и $\xi \in T_p\mathrm{Nil}$. Рассмотрим сферу S_H, заданную вращением кривой (2.12).

Из (2.12) вытекает, что $n_3 = \langle n, e_3 \rangle$ принимает все возможные значения лежащие в отрезке $[-1, 1]$. Рассмотрим теперь точку $p_1 \in S_H$ такую, что $\xi_3 = \langle \xi, e_3 \rangle = n_3(p_1)$ и действуя на S_H левым сдвигом $g \to hg$ таким, что $hp_1 = p$, получим сферу S_1. Для удобства понимания, можем теперь подействовать левым сдвигом на сферу S_1 так, чтобы точка p перешла в точку на оси z и пусть теперь нормаль к сфере в этой точке равна (ξ_1', ξ_2', ξ_3). Поворачивая эту сферу вокруг оси z и, действуя затем обратным сдвигом, получим сферу S_2, для которой нормаль в точке p равна ξ, что доказывает предложение.

2.4 Обобщение теоремы Хопфа для Nil

Здесь мы обобщаем известную теорему Хопфа, о том что сфера постоянной средней кривизны H, погруженная в R^3, является, с точностью до параллельного переноса, стандартной сферой радиуса $\frac{1}{H}$. Мы покажем, что сферы постоянной средней кривизны в Nil являются сферами вращения. Обобщение теоремы Хопфа для поверхностей в $S^2 \times R$ и $H^2 \times R$ было впервые было доказано в [6], а в [7] сформулировано для других трехмерных геометрий с четырехмерной группой изометрий. Более того в [7] объяснено, что доказательство в последнем случае фактически то же, что и для случая произведений [6]. Здесь мы и излагаем такое доказательство для случая поверхностей в Nil.

Предложение 9 (Абреш–Розенберг [7])**.** *Для любого H такого, что $0 < H < \infty$, любая замкнутая поверхность постоянной средней кривизны H и такая, что $\widetilde{A} = 0$, есть сфера вращения.*

Доказательство. Одно из уравнений Гаусса–Вейнгартена записывается в виде

$$\nabla_{f_z} n = -H f_z - 2Ae^{-2\alpha} f_{\bar{z}}, \tag{2.13}$$

где ∇ означает связность Леви-Чевиты в Nil, а $z = x + iy$ конформный параметр. Так как $\widetilde{A} = 0$, мы имеем $A = -\frac{Z_3^2}{2H+i}$ и потому для произвольной точки p векторы $\nabla_{f_x} n$ и $\nabla_{f_y} n$ однозначно определяется касательными векторами f_x, f_y в точке p. А из тождества $(\nabla_{f_x} n)^i = \frac{\partial n^i}{\partial x} + \Gamma^i_{jk}(p) f_x^j n^k$, следует что и производные поля n нормалей к поверхности вдоль касательных векторов f_x и f_y определены однозначно через сами векторы f_x, f_y. Вид уравнения (2.13) не зависит от выбора на поверхности конформных координат $w = w(z)$. И таким образом в $T_q(T_1\mathrm{Nil})$, где $q = (p, n)$, однозначно определена двумерная плоскость Π_q, которая является касательной к образу гауссово отображения любой поверхности с $\widetilde{A} = 0$ и заданной средней кривизной H. Таким образом в $T_1\mathrm{Nil}$ задано двумерное распределение Π и любая интегральная поверхность этого распределения однозначно восстанавливается по любой своей точке. Но мы уже показали, что через любую точку $T_1\mathrm{Nil}$ проходит образ гауссова отображения сферы вращения постоянной средней кривизны H. Таким образом, предложение доказано.

2.5 Замечание к изопериметрической задаче в группе Nil

Вычислим площадь поверхности и объем ограничиваемой области для сферы постоянной средней кривизны H. Мы уже показали, что эта сфе-

ра, с точностью до изометрий, получена вращением кривой (2.12) вокруг оси z. Рассмотрим на сфере естественные координаты r и θ, где θ отвечает за поворот кривой (2.12) вокруг оси z. Координаты $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ будут конформными и тогда метрика и элемент площади на сфере имеют вид $ds^2 = e^{2\alpha}(dx^2 + dy^2) = e^{2\alpha}(dr^2 + r^2 d\theta^2)$ и $d\mu = re^{2\alpha} dr d\theta$, где формула для $e^{2\alpha}$ выписана в (2.11).

Тем самым площадь $A(H)$ сферы S_H постоянной средней кривизны H равна

$$A(H) = \int_{S_H} d\mu = 2\pi \int_0^\infty re^{2\alpha} dr =$$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{16(1+4H^2)r(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2 + 4H^2(r^2+1)^2)^2}\, dr =$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{H^2} + \frac{1+4H^2}{4H^3} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{4H^2-1}{4H} \right] \right) \right).$$

В области D_H ограниченной сферой S_H, выберем координаты $\delta \in [0,1]$, $r \in (0,\infty)$ и $\theta \in [0, 2\pi]$, так что точке с координатами (δ, r, θ), в цилиндрических координатах (ρ, φ, h) соответствует точка с координатами $(\delta\rho(r), \varphi(r) + \theta, h(r))$, где $\rho(r)$, $h(r)$, и $\varphi(r)$ функции из (2.12). Следующее выражение для формы объема $d\nu$ проверяется с помощью (2.1) прямыми вычислениями:

$$d\nu = \frac{256H(1+4H^2)r^3(1+r^2)^2\delta}{((r^2-1)^2 + 4H^2(1+r^2)^2)^3}\, d\delta dr d\theta$$

Таким образом объем $V(H)$ области D_H равен

$$V(H) = \int_{D_H} d\nu = 2\pi \int_0^\infty \frac{256H(1+4H^2)r^3(1+r^2)^2}{((r^2-1)^2 + 4H^2(1+r^2)^2)^3}\, dr =$$

$$= \frac{\pi}{16H^4} \left(4H(4H^2+3) - (4H^2+1)(4H^2-3) \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{4H^2-1}{4H} \right] \right) \right).$$

Окончательно, мы получаем соотношение между площадью сферы постоянной средней кривизны $S(H)$ и объемом $V(H)$ области, ограниченной этой сферой:

$$V(H) = \frac{2\pi}{H} - \frac{4H^2 - 3}{8H} A(H) \tag{2.14}$$

Это позволяет сформулировать гипотезу о том что соотношение (2.14) между $A(H)$ и $V(H)$ дает решение изопериметрической задачи в Nil.

В случае $\mathbb{R}^3$ изопериметрические поверхности суть круглые сферы. Использую метод симметризации [16], впервые этот факт был доказан в 30-е Шмидтом. Тем не менее этот результат может быть получен из теоремы Александрова о том, что все замкнутые поверхности постоянной средней кривизны вложенные в $\mathbb{R}^3$ гомеоморфны сфере, и из теоремы Хопфа о том, что все сферы постоянной средней кривизны погруженные в $\mathbb{R}^3$ это — в точности, круглые сферы.

Хотя аналог теоремы Александрова неизвестен для группы Nil, предположение, что некоторые изопериметрические поверхности не гомеоморфны сфере, выглядит очень неправдоподобно. Тем самым возникает вполне естественная гипотеза, что изопериметрические поверхности в Nil гомеоморфны сфере. Если она верна, то сферы постоянной кривизны $S_H, 0 < H < \infty$ дают решение изопериметрической задачи для всех значений объемов. Следует отметить, что после первого появления приведенных выше вычислений в интернете, автору было указано на, уже упоминавшуюся, работу [15] в которой впервые были описаны не только поверхности вращения постоянной средней кривизны в Nil, но и сделаны вычисления $A(H)$, $V(H)$ и соотношения их связывающего.

2.6 Свойства обобщенного функционала Уиллмора

Для замкнутых ориентированных поверхностей в Nil, функционал спинорной энергии, введенный в первой главе (см. также [19]), имеет вид

$$\begin{gathered} E(M) = \int_M UV \frac{idz \wedge d\bar{z}}{2} = \\ = \frac{1}{4}\int_M \left(H^2 - \frac{n_3^2}{4}\right) d\mu = \frac{1}{4}\int_M \left(H^2 + \frac{\widehat{K}}{4} - \frac{1}{16}\right) d\mu. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Для сфер постоянной средней кривизны S_H, функционал спинорной энергии равен

$$E(S_H) = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \left(H^2 - \frac{1}{4}n_3^2\right) e^{2\alpha} r dr, \tag{2.16}$$

где n_3 и $e^{2\alpha}$ определяются из (2.10) и (2.11). Подставляя эти формулы в в (2.16), мы получим следующую теорему.

Теорема 4. *На каждой сфере постоянной средней кривизны в* Nil *функционал спинорной энергии равен* π*:*

$$E(S_H) = \pi. \tag{2.17}$$

Вычислим теперь классический функционал Уиллмора

$$\mathcal{W}(M) = \int_M (H^2 + \widehat{K}) d\mu \tag{2.18}$$

для этих сфер S_H. Поскольку для поверхностей в Nil выполнено тождество $\widehat{K} = \frac{1}{4} - n_3^2$, из формул (2.15) и (2.18) вытекает, что $\int_{S_H} \widehat{K} d\mu = 16\pi - \left(4H^2 - \frac{1}{4}\right) A(H)$, и мы окончательно получим, что

$$\mathcal{W}(S_H) = 10\pi + \frac{\pi}{2H^2} - \pi\frac{(1+4H^2)(3H^2 - \frac{1}{4})}{2} H^3 \left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left[\frac{4H^2-1}{4H}\right]\right).$$

Откуда следует, что функционал Уиллмора не равен какой-либо постоянной на сферах постоянной средней кривизны.

Вычислим теперь спинорную энергию для замкнутых поверхностей вращения. На пространстве Nil группа $SO(2)$ действует вращениями вокруг оси z и фактор-пространство $\mathrm{Nil}/SO(2)$ есть полуплоскость $u \geqslant 0$ с локальными координатами $u = \rho$ и $v = z$, где ρ, φ, и z — цилиндрические координаты. В силу (2.1) имеет место субмерсия

$$\mathrm{Nil} \to B = \mathrm{Nil}/SO(2),$$

где $\mathrm{Nil}/SO(2)$ наделена метрикой

$$du^2 + \frac{4u^2}{4u^2 + u^4} dv^2.$$

Пусть $\gamma(s) = (u(s), v(s))$ — кривая в B, порождающая при вращении гладкую поверхность в Nil. Здесь s обозначает натуральный параметр на γ. Пусть σ — угол между γ и направлением $\frac{\partial}{\partial u}$. Тогда верны следующие формулы для касательного и нормального векторов t и n:

$$t = (\cos\sigma, (2u)^{-1}\sqrt{4u^2 + u^4}\sin\sigma), \quad n = (-\sin\sigma, (2u)^{-1}\sqrt{4u^2 + u^4}\cos\sigma).$$

Кроме того u, v, и σ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{u} = \cos\sigma \\ \dot{v} = (2u)^{-1}\sqrt{4u^2 + u^4}\sin\sigma \\ \dot{\sigma} = 2H - u^{-1}\sin\sigma, \end{cases} \tag{2.19}$$

где точка обозначает производную по s. Из (2.19) вытекает, что

$$H = \frac{1}{2}(\dot{\sigma} + u^{-1}\sin\sigma).$$

Отметим, что формулы для t, n, и H были получены в [10]. Нетрудно вычислить, что

$$n_3 = \left\langle n, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle = \frac{2u}{\sqrt{4u^2+u^4}} \cos\sigma, \quad d\mu = \frac{1}{2}\sqrt{4u^2+u^4} d\theta ds.$$

Переписывая функционал E в терминах u и σ мы получаем, что

$$E(M) = \frac{\pi}{4}\int_\gamma \left[\frac{(\dot\sigma + \frac{sin\sigma}{u})^2}{4} - \frac{u^2}{4u^2+u^4} cos^2\sigma \right] \sqrt{4u^2+u^4}\, ds =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_\gamma \left[\frac{(\dot\sigma - \frac{\sin\sigma}{u})^2}{4}\sqrt{4u^2+u^4} + \frac{\dot\sigma \sin\sigma}{u}\sqrt{4u^2+u^4} - \frac{u^2\cos^2\sigma}{\sqrt{4u^2+u^4}} \right] ds.$$

Заметим, что

$$\frac{\pi}{4}\int_\gamma \left(\frac{\dot\sigma \sin\sigma}{u}\sqrt{4u^2+u^4} - \frac{u^2}{\sqrt{4u^2+u^4}}\cos^2\sigma \right) ds =$$

$$= -\frac{\pi}{4}\int_\gamma \left(\ddot u\sqrt{4+u^2} + \frac{u}{\sqrt{4+u^2}}\dot u^2 \right) ds = -\frac{\pi}{4}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial s}(\dot u\sqrt{4+u^2}) ds.$$

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть замкнутая поверхность M в* Nil *получена в результате вращения кривой $\gamma \subset B$ вокруг оси z, тогда функционал спинорной энергии на M равен*

$$E(M) = \frac{1}{4}\int_\gamma \left(H^2 - \frac{1}{4}{n_3}^2 \right) d\mu =$$

$$\frac{\pi}{16}\int_\gamma \left(\dot\sigma - \frac{\sin\sigma}{u} \right)^2 \sqrt{4u^2+u^4} ds - \frac{\pi}{4}\int_\gamma \frac{\partial[\dot u\sqrt{4+u^2}]}{\partial s} ds = \tag{2.20}$$

$$\frac{\pi}{16}\int_\gamma \left(\dot\sigma - \frac{\sin\sigma}{u} \right)^2 \sqrt{4u^2+u^4} ds + \frac{\pi\chi(M)}{2},$$

где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика M. Кроме того, если $\dot\sigma = \frac{\sin\sigma}{u}$ всюду на поверхности, то эта поверхность есть сфера постоянной средней кривизны.

Следствие 6. *Для сфер вращения $E(M) \geqslant \pi$ и равенство достигается, в точности, на сферах постоянной средней кривизны.*

Следствие 7. *Для торов вращения $E(M) > 0$.*

Также справедлива

Теорема 6. *Сферы постоянной средней кривизны в* Nil *являются критическими точками функционала спинорной энергии E.*

Доказательство. Уравнение Эйлера–Лагранжа для функционала E имеет вид

$$\Delta H + 2H(H^2 - K) + 2e^{-4\alpha}(A\bar{Z}_3^2 + \bar{A}Z_3^2) = 0$$

(теорема 7 в §2.7), K здесь означает гауссову кривизну. На сфере постоянной средней кривизны H выполнено тождество $A = -\frac{Z_3^2}{2H+i}$, которое влечет, что

$$\Delta H = 0, \quad 2H(H^2 - K) = 8e^{-4\alpha}H|A|^2 = 8e^{-4\alpha}H\frac{|Z_3|^4}{4H^2+1},$$

$$2e^{-4\alpha}(A\bar{Z}_3^2 + \bar{A}Z_3^2) = -8e^{-4\alpha}H\frac{|Z_3|^4}{4H^2+1}.$$

Из этих формул следует, что сферы постоянной средней кривизны в Nil удовлетворяют уравнению Эйлера–Лагранжа. Теорема доказана. Таким образом, мы видим что во многих геометрических аспектах, функционал спинорной энергии ведет себя подобно функционалу

$$\frac{\mathcal{W}(M)}{4} = \frac{1}{4}\int_M H^2 d\mu$$

для замкнутых ориентированных поверхностей в $\mathbb{R}^3$. В самом деле

1. как и в случае (2.17) верно, что

$$\frac{\mathcal{W}}{4} = \pi$$

на всех изопериметрических поверхностях, т.е. круглых сферах в $\mathbb{R}^3$;

2. мы имеем

$$\frac{\mathcal{W}(M)}{4} = \frac{1}{4}\int_M \left(\left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{2}\right)^2 + \varkappa_1\varkappa_2\right) d\mu =$$

$$= \frac{1}{4}\int_M \left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{2}\right)^2 d\mu + \frac{\pi}{2}\chi(M),$$

где $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ главные кривизны.

Последняя формула схожа с (2.20), но величины $\dot{\sigma}$ и $\frac{\sin\sigma}{u}$ не являются главными кривизнами поверхности вращения;

3. среди полных компактных поверхностей в $\mathbb{R}^3$ уравнение $A = 0$ выделяет, в точности, сферы постоянной средней кривизны, минимизирующие функционал Уиллмора $\mathcal{W}$ среди всех сфер. Для замкнутых поверхностей вращения в Nil уравнение $\widetilde{A} = 0$ выделяет, в точности, сферы постоянной средней кривизны, минимизирующие среди всех сфер вращения значение функционала E.

Эти геометрические наблюдения подтверждают, что функционал E, полученный из спектральной теории представления Вейерштрасса, является правильным обобщением функционала Уиллмора для случая поверхностей в Nil. Мы также должны рассматривать поверхности, на которых справедливо тождество $\widetilde{A} = 0$, как обобщенные омбилические поверхности: как в $\mathbb{R}^3$, так и в Nil замкнутые омбилические поверхности —

это, в точности, сферы постоянной средней кривизны. Отметим что для сфер постоянной средней кривизны в Nil лишь полюса, т.е. точки инвариантные относительно вращений, являются омбилическими точками в обычном смысле.

2.7 Уравнение Эйлера-Лагранжа для функционала E

Теорема 7. *Пусть $f : M \to \mathrm{Nil}$ — регулярная поверхность и $r : M \times [0,1] \to \mathrm{Nil}$ — ее гладкая вариация: $r_0 = f$. Предположим, что r постоянно на границе M, если такая существует, т.е. $r(p,t) = f(p)$ для $p \in \partial M$. Пусть $\frac{\partial r(p,t)}{\partial t}|_{t=0} = \varphi n$, где n — единичное нормальное векторное поле к M. Тогда вариация функционала E при $t = 0$ равна*

$$\delta E(M) = \frac{1}{4}\int_M (\Delta H + 2H(H^2 - K) + 2e^{-4\alpha}(A\bar{Z}_3^2 + \bar{A}Z_3^2))\varphi d\mu. \qquad (2.21)$$

Доказательство. Мы должны вычислить вариацию

$$\delta E = \frac{1}{4}\left(\delta \int_M H^2 d\mu - \delta \int_M \frac{1}{4} n_3^2\right) d\mu. \qquad (2.22)$$

Для локальных координат x и y на M обозначим через r_1 и r_2 производные $\frac{\partial r}{\partial x}$ и $\frac{\partial r}{\partial y}$ соответственно. Уравнения Гаусса-Вейнгартена имеют вид

$$\nabla_j r_i = \Gamma_{ij}^k r_k + h_{ij} n, \quad \nabla_i n = -h_i^j r_j = -g^{kj} h_{ki} r_j,$$

где g_{ij} и h_{ij} — первая и вторая фундаментальные формы на M. Из определения средней кривизны вытекает, что

$$\delta d\mu = -2H\varphi d\mu.$$

а) Вычислим

$$\delta \int H^2 d\mu = 2\int H\delta H d\mu + \int H^2 \delta d\mu = 2\int H(\delta H) d\mu - 2\int H^3 \varphi d\mu.$$

Справедливо тождество

$$2\delta H = \delta 2H = \delta(g^{ij}h_{ij}) = (\delta g^{ij})h_{ij} + g^{ij}\delta h_{ij}, \qquad (2.23)$$

и из уравнений Гаусса-Вейнгартена следует, что $\delta g_{ij} = \delta\langle r_i, r_j\rangle = -2\varphi h_{ij}$. Так как $0 = \delta\left(g_{ij}g^{jk}\right) = g_{ij}\delta g^{jk} + g^{jk}\delta g_{ij} = g_{ij}\delta g^{jk} - 2\varphi h_{ij}g^{jk}$, то

$$\delta g^{ij} = 2\varphi g^{jk}h^i_k.$$

Вычислим δh_{ij}. Мы имеем $\delta h_{ij} = \delta\langle\nabla_j r_i, n\rangle = \langle\nabla_j r_i, \delta n\rangle + \langle\delta\nabla_j r_i, n\rangle$. Согласно уравнениям Гаусса–Вейнгартена $\delta n = -g^{ij}\varphi_j r_i$, откуда следует, что $\langle\nabla_j r_i, \delta n >= -\Gamma^k_{ij}\varphi_k$. Кроме того $\delta\nabla_j r_i = \nabla_{\partial t}\nabla_j r_i = \nabla_j\nabla_{\partial t} r_i + (\nabla_{\partial t}\nabla_j r_i - \nabla_j\nabla_{\partial t} r_i) = \nabla_j\nabla_i(\varphi)n + \varphi R(r_j, n)r_i$, и прямыми вычислениями мы убеждаемся, что $\langle\nabla_j\nabla_i\varphi n, n\rangle = \varphi_{ij} - \varphi h^k_i h_{kj}$. Объединяя предыдущие вычисления, мы получим

$$\delta h_{ij} = -\Gamma^k_{ij}\varphi_k + \varphi_{ij} - \varphi h^k_i h_{kj} + \varphi\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle.$$

Подставляя полученные выражения для δg^{ij} и δh_{ij} в (2.23) мы придем к выводу, что

$$2\delta H = g^{ij}(\varphi_{ij} - \Gamma^k_{ij}\varphi_k) + \varphi g^{jk}h^i_k h_{ij} + \varphi g^{ij}\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle =$$

$$= \Delta\varphi + \varphi h^i_k h^k_i + \varphi g^{ij}\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle,$$

где Δ – оператор Лапласа-Бельтрами, заданный на поверхности. Так как $h^i_k h^k_i = \operatorname{Tr} h^2 = k_1^2 + k_2^2 = (k_1 + k_2)^2 - 2k_1k_2 = 4H^2 - 2K$, предыдущая формула переписывается следующим образом

$$2\delta H = \Delta\varphi + (4H^2 - 2K)\varphi + g^{ij}\langle R(r_j, n)r_i, n\rangle\varphi.$$

Поэтому, воспользовавшись равенством $\int_M(\Delta\varphi)Hd\mu = \int_M(\Delta H)\varphi d\mu$, мы получим

$$\delta\int_M H^2 d\mu = \int_M (\Delta H + 2H(H^2-K)\varphi + Hg^{ij}\langle R(r_j,n)r_i,n\rangle)\varphi d\mu.$$

Полагая координаты x, y ортогональными: $g_{12}=0$, мы имеем

$$g^{ij}\langle R(r_j,n)r_i,n\rangle = g^{11}\langle R(r_1,n)r_1,n\rangle + g^{22}\langle R(r_2,n)r_2,n\rangle =$$

$$= \widehat{K}(r_1,n) + \widehat{K}(r_2,n),$$

где $\widehat{K}(u,v)$ — секционная кривизна объемлющего пространства вдоль плоскости, натянутой на векторы u и v. Выпишем теперь окончательную формулу для $\delta\int H^2 d\mu$ для поверхностей в Nil. В нашем случае секционная кривизна зависит лишь от n_3 и равна $\frac{1}{4}-n_3^2$ и поэтому $\widehat{K}(r_1,n)+\widehat{K}(r_2,n) = {n_3}^2 - \frac{1}{2}$, что влечет

$$\delta\int_M H^2 d\mu = \int_M (\Delta H + 2H(H^2-K) + H(n_3^2 - \frac{1}{2}))\varphi d\mu. \qquad (2.24)$$

б) Вычислим

$$\delta\int_M {n_3}^2 d\mu = \int 2n_3\delta n_3 d\mu + \int_M {n_3}^2 \delta d\mu.$$

Мы предположим, что $z = x+iy$ — конформный параметр на поверхности и метрика имеет вид $e^{2\alpha}dzd\bar{z}$. Поскольку $\langle n, \delta e_3\rangle = \langle n, \nabla_{\varphi n}e_3\rangle = \langle n, \varphi(\frac{1}{2}n_2e_1 - \frac{1}{2}n_1e_2)\rangle = \frac{1}{2}\varphi(n_2n_1 - n_1n_2) = 0$ [1], то $\delta n_3 = \delta\langle n, e_3\rangle = \langle\delta n, e_3\rangle$, и мы получаем, что $\langle\delta n, e_3\rangle = \langle -g^{ij}\varphi_j r_i, e_3\rangle = -2e^{-2\alpha}\langle\varphi_z r_{\bar{z}} + \varphi_{\bar{z}} r_z, e_3\rangle$. Таким образом

$$2\int_M n_3\delta n_3 d\mu = -4\int_M n_3\langle\varphi_z r_{\bar{z}} + \varphi_{\bar{z}} r_z, e_3\rangle dx\wedge dy =$$

[1] Здесь мы воспользовались формулами для связности Леви-Чевиты в Nil, изложенными нами в первой главе.

$$= 4\int_M ((n_3\langle r_{\bar z}, e_3\rangle)_z + (n_3\langle r_z, e_3\rangle)_{\bar z})\varphi dx\wedge dy.$$

Поскольку метрика метрика левоинвариантна, мы заключаем что

$$\int_M n_3\delta n_3 d\mu = 2\int_M (n_3(\partial\overline{Z}_3 + \overline{\partial}Z_3) + (\langle\nabla_{\partial z}n, e_3\rangle + \langle n, \nabla_{\partial z}e_3\rangle)\overline{Z}_3 +$$

$$+(\langle\nabla_{\partial\bar z}n, e_3\rangle + \langle n, \nabla_{\partial\bar z}e_3\rangle)Z_3)\varphi dx\wedge dy.$$

Поскольку $\partial\overline{Z}_3 + \overline{\partial}Z_3 = Hn_3e^{2\alpha}$ (см. главу 1), из формулы (2.13) следует, что $\langle\nabla_{\partial z}n, e_3\rangle = -HZ_3 - 2Ae^{-2\alpha}\overline{Z}_3$. Из формул для связности Леви-Чевиты в Nil также следует, что $\langle n, \nabla_{\partial z}e_3\rangle = \langle n, \nabla_{Z_1e_1+Z_2e_2+Z_3e_3}e_3\rangle = \langle n_1e_1 + n_2e_2 + n_3e_3, \frac{1}{2}Z_2e_1 - \frac{1}{2}Z_1e_2\rangle = \frac{1}{2}(n_1Z_2 - n_2Z_1) = \frac{i}{2}Z_3$. Подставляя эти формулы в $\int_M n_3\delta n_3 d\mu$, получим

$$\int_M n_3\langle\delta n, e_3\rangle d\mu = 2\int_M Hn_3^2\varphi d\mu +$$

$$2\int_M (-2H|Z_3|^2 - 2A\bar Z_3^2 e^{-2\alpha} - 2\bar A Z_3^2 e^{-2\alpha})\varphi dx\wedge dy$$

Поскольку $4|Z_3|^2 = e^{2\alpha}(1 - n_3^2)$ (см. (2.4)), мы имеем

$$\int_M n_3\langle\delta n, e_3\rangle d\mu = \frac{1}{2}\int_M (6Hn_3^2 - 2H - 8e^{-4\alpha}(A\bar Z_3^2 + \bar A Z_3^2))\varphi d\mu,$$

и окончательно выводим, что

$$\delta\int_M n_3^2 d\mu = \int_M (4Hn_3^2 - 2H - 8e^{-4\alpha}(A\bar Z_3^2 + \bar A Z_3^2))\varphi d\mu. \qquad (2.25)$$

Подставляя (2.24) и (2.25) в (2.22), получаем утверждение теоремы.

Глава 3

Поверхности постоянной средней кривизны в Nil

Результаты этой главы частично изложены в [21] и [17].

В этой главе мы перепишем уравнения Вейнгартена в Nil в новой форме. Окажется, что для случая поверхностей постоянной средней кривизны, условие совместности уравнений Вейнгартена, при соответствующей нормировке голоморфного дифференциала $\widetilde{A}dz^2$, будет эквивалентно эллиптическому уравнению sinh-Gordon на логарифм потенциала уравнения Дирака (1.17) в Nil, вообще говоря комплексного.

Напомним, что в евклидовом пространстве поверхности постоянной ненулевой средней кривизны (в окрестности неомбилической точки) описываются решениями эллиптического уравнения sinh-Gordon для логарифма потенциала уравнения Дирака в $\mathbb{R}^3$ (см. например [14]), который является вещественной функцией. То есть по некоторому вещественному решению sinh-Gordon мы можем построить поверхность постоянной

средней кривизны в $\mathbb{R}^3$.

В этой главе мы покажем как получается "условие вещественности" в случае Nil.

3.1 Уравнения Вейнгартена и их условия совместности

Пусть e^v означает потенциал оператора Дирака в Nil (см. (1.17)):

$$e^v := U_{\mathrm{Nil}} = V_{\mathrm{Nil}} = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) \tag{3.1}$$

Из (1.22), (1.18) следует, что в терминах ψ_1, ψ_2, квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ выражается как:

$$\widetilde{A} := A + \frac{{Z_3}^2}{2H+i} = \overline{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \overline{\psi}_2 + \frac{2Hi}{2H+i} \psi_1^2 {\overline{\psi}_2}^2 \tag{3.2}$$

Используя (1.17), представим производную $\frac{\partial}{\partial z} U_{\mathrm{Nil}}$ в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} U_{\mathrm{Nil}} = v_z e^v = \frac{1}{4}(2H+i)\psi_2 \partial \overline{\psi}_2 + \frac{1}{4}(2H-i)\overline{\psi}_1 \partial \psi_1 - \frac{iH}{2}\psi_1 \overline{\psi}_2 |\psi_2|^2 + \\ + \frac{1}{2} H_z (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\end{aligned} \tag{3.3}$$

Теперь уравнения (3.2) и (3.3) приводят к следующему выражению для производной $\partial \psi_1$:

$$\partial \psi_1 = (v_z - \frac{1}{2} H_z e^{-v} e^{\alpha})\psi_1 + \frac{1}{4}(2H+i)\widetilde{A} e^{-v} \psi_2, \tag{3.4}$$

где $e^{\alpha} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$. Аналогичным образом, производная $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ равна:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} U = v_{\bar{z}} e^v = \frac{1}{4}(2H+i)\overline{\psi}_2 \bar{\partial} \psi_2 + \frac{1}{4}(2H-i)\psi_1 \bar{\partial} \overline{\psi}_1 - \frac{iH}{2}\psi_2 \overline{\psi}_1 |\psi_1|^2 + \\ + \frac{1}{2} H_{\bar{z}} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Что вместе с (3.2) приводит к выражению для $\bar\partial\psi_2$:

$$\bar\partial\psi_2 = -\frac{1}{4}(2H-i)e^{-v}\overline{\widetilde{A}}\psi_1 + (v_{\bar z} - \frac{1}{2}H_{\bar z}e^{-v}e^{\alpha})\psi_2 \tag{3.6}$$

Положим $B := \frac{1}{4}(2H+i)\widetilde{A}$. Уравнение Дирака (1.17) вместе (3.4),(3.6) позволяет представить уравнения Вейнгартена в новой форме :

$$\partial \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z - \frac{1}{2}H_z e^{-v}e^{\alpha} & Be^{-v} \\ -e^{v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

и

$$\bar\partial \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{v} \\ -\overline{B}e^{-v} & v_{\bar z} - \frac{1}{2}H_{\bar z}e^{-v}e^{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

В дальнейшем будем считать, что поверхность имеет постоянную среднюю кривизну $H = const$ и соответственно квадратичный дифференциал $\widetilde{A}dz^2$ будет голоморфен. В этом случае производные $H_z = H_{\bar z} = 0$ и уравнения Вейнгартена упрощаются существенным образом:

$$\partial \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z & Be^{-v} \\ -e^{v} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

и

$$\bar\partial \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{v} \\ -\overline{B}e^{-v} & v_{\bar z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Очевидно, что квадратичный дифференциал Bdz^2 голоморфен. И тем самым, из условия совместности уравнений (3.9), (3.10) следует, что

$$v_{z\bar z} + e^{2v} - |B|^2 e^{-2v} = 0 \tag{3.11}$$

3.2 Об условии вещественности

Безусловно нас будут интересовать не все решения (3.11). Необходимо найти дополнительное условие на функцию $v(z)$, при котором для системы (3.9),(3.10) существует решение $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющее тождеству

$$e^v = \frac{H}{2}(|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4}(|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2) \tag{3.12}$$

Этого условия нам достаточно, так как равенство (3.2), с соответствующей заменой $\widetilde{A}$ на B, будет выполняться автоматически. Именно при таких функциях $v(z)$, соответствующее решение (3.9) и (3.10) будет являться порождающим спинором некоторой поверхности постоянной средней кривизны. Перепишем теперь (3.12) в следующей форме:

$$1 = \begin{pmatrix} \overline{\psi}_1 & \overline{\psi}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2H-i)e^{-v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(2H+i)e^{-v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Обозначим через $\hat{h}$ матрицу

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2H-i)e^{-v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}(2H+i)e^{-v} \end{pmatrix}$$

и пусть M_1 и M_2 означают матрицы из (3.9) и (3.10) соответственно. Используя (3.13), получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} 0 = \partial(\overline{\psi}^t \hat{h} \psi) = \overline{\psi}^t (\overline{M}_2^t \hat{h} + \partial \hat{h} + \hat{h} M_1)\psi = \\ = \overline{\psi}^t D_1 \hat{h} \psi = tr \left[D_1 \hat{h} \begin{pmatrix} |\psi_1|^2 & \psi_1 \overline{\psi}_2 \\ \overline{\psi}_1 \psi_2 & |\psi_2|^2 \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$0=\bar\partial(\overline{\psi}^t\hat h\psi)=\overline{\psi}^t(\overline{M}_1^t\hat h+\bar\partial\hat h+\hat h M_2)\psi=$$
$$=\overline{\psi}^t D_2\hat h\psi=tr\left[D_2\hat h\begin{pmatrix}|\psi_1|^2 & \psi_1\overline{\psi}_2\\ \overline{\psi}_1\psi_2 & |\psi_2|^2\end{pmatrix}\right], \tag{3.15}$$

где матрицы $D_1\hat h$ и $D_2\hat h$ принимают вид

$$D_1\hat h=\frac{1}{4}e^{-v}\begin{bmatrix}0 & \frac{i\tau B}{|e^v|^2}\\ i\tau & \varkappa\end{bmatrix}, \tag{3.16}$$

$$D_2\hat h=\frac{1}{4}e^{-v}\begin{bmatrix}-\overline{\varkappa} & i\sigma\\ \frac{i\sigma\overline{B}}{|e^v|^2} & 0\end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

а их коэффициенты выражаются через функции τ, σ и $\varkappa$ определенные следующими равенствами

$$i\tau=(2H-i)e^{\overline{v}}-(2H+i)e^v,$$

$$i\sigma=(2H-i)e^v-(2H+i)e^{\overline{v}},$$

$$\varkappa=(2H+i)(\overline{v}-v)_z$$

Замечание 3.1. Для минимальных поверхностей H=0 "условием вещественности" будет равенство $Im[v]=\pm\frac{\pi}{2}$ и матрицы $D_1\hat h$, $D_2\hat h$ тождественно равны нулю, т.е (3.14), (3.15) выполняются автоматически. Для $H\neq 0$ мнимая часть v не является константой и поэтому, вообще говоря, коэффициенты матриц $D_1\hat h$, $D_2\hat h$ не обращаются в ноль.

Без ограничения общности, будем считать что $\psi_1\psi_2\neq 0$. Тогда матрица $\Omega=\begin{pmatrix}|\psi_1|^2 & \psi_1\overline{\psi}_2\\ \overline{\psi}_1\psi_2 & |\psi_2|^2\end{pmatrix}$, может быть представлена так:

$$\Omega=|\psi_1|^2\begin{pmatrix}1 & \frac{\overline{\psi}_2}{\overline{\psi}_1}\\ \frac{\psi_2}{\psi_1} & |\frac{\psi_2}{\psi_1}|^2\end{pmatrix}=l\begin{pmatrix}1 & \bar\xi\\ \xi & |\xi|^2\end{pmatrix},$$

для $l = |\psi_1|^2$ и $\xi = \frac{\psi_2}{\psi_1}$. Тогда уравнения (3.14) и (3.15) представляются в виде системы

$$\frac{i\tau B}{|e^v|^2}\xi + i\tau\bar{\xi} + \varkappa|\xi|^2 = 0,$$
$$\frac{i\sigma B}{|e^v|^2}\xi + i\sigma\bar{\xi} + \varkappa = 0$$

Из которой очевидно следует, что $|\xi|^2 = \frac{\tau}{\sigma}$. И с учетом этого, полученная система запишется так

$$\frac{B}{|e^v|^2}\xi + \bar{\xi} = -\frac{\varkappa}{i\sigma},$$
$$\xi + \frac{\overline{B}}{|e^v|^2}\bar{\xi} = \frac{\overline{\varkappa}}{i\sigma}$$

Разрешая ее относительно ξ, получим

$$\xi = \frac{\overline{\varkappa} + \varkappa\frac{\overline{B}}{|e^v|^2}}{i\sigma\left(1 - \frac{|B|^2}{|e^v|^4}\right)}$$

И таким образом, необходимо выполняется

$$\left(\overline{\varkappa} + \varkappa\frac{\overline{B}}{|e^v|^2}\right)\left(\varkappa + \overline{\varkappa}\frac{B}{|e^v|^2}\right) = \tau\sigma\left(1 - \frac{|B|^2}{|e^v|^4}\right)^2$$

Что в терминах функции $v(z)$ может быть записано как

$$\begin{aligned} &\left|(2H+i)(\overline{v}-v)_z - (2H-i)(\overline{v}-v)_{\bar{z}}\frac{B}{|e^v|^2}\right|^2 = \\ &= -((2H-i)e^{\overline{v}} - (2H+i)e^v)((2H-i)e^v - (2H+i)e^{\overline{v}})* \\ &\qquad * \left(1 - \frac{|B|^2}{|e^v|^4}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Прямой проверкой можем убедиться, что новых уравнений на v мы не получим.

Мы можем исключить из рассмотрения поверхности на которых $\widetilde{A}$, а соответственно и B, тождественно равно нулю (см. главу 2). Рассмотрим

достаточно малую окрестность некоторой точки поверхности постоянной средней кривизны, в которой $B \neq 0$. Сделав замену конформного параметра можем считать, что в этой окрестности $B = \frac{2H+i}{2H-i}$. Тогда (3.18) эквивалентно следующему

$$\left|(\overline{v}-v)_z - (\overline{v}-v)_{\overline{z}}\frac{1}{|e^v|^2}\right|^2 = \left[e^{2v}+e^{2\overline{v}} - 2Re\frac{2H+i}{2H-i}|e^v|^2\right]\left[1-\frac{1}{|e^v|^4}\right]^2 \tag{3.19}$$

Положим теперь $v = \rho + i\varphi$. Тогда $\bar{v} - v = -2i\varphi$ и $|e^v| = e^\rho$. И тогда получим

Предложение 10. *Дополнительное "условие вещественности" на функцию $v = \rho + i\varphi$ выглядит как*

$$\frac{\varphi_x^2}{(\cosh\rho)^2} + \frac{\varphi_y^2}{(\sinh\rho)^2} = 8\left(\cos 2\varphi - Re\frac{2H+i}{2H-i}\right), \tag{3.20}$$

где $z = x + iy$.

И далее получаем теорему.

Теорема 8. *Поверхности постоянной ненулевой средней кривизны в некоторой окрестности неомбилической точки (где $\widetilde{A} \neq 0$) описываются решениями $v = \rho + i\varphi$ системы уравнений*

$$\begin{cases} v_{z\bar{z}} + 2\sinh 2v = 0 \\ \frac{\varphi_x^2}{(\cosh\rho)^2} + \frac{\varphi_y^2}{(\sinh\rho)^2} = 8\left(\cos 2\varphi - Re\frac{2H+i}{2H-i}\right) \end{cases} \tag{3.21}$$

Полезно также представить систему в виде

$$\begin{cases} \Delta\rho + 8\cos 2\varphi \sinh 2\rho = 0 \\ \Delta\varphi + 8\sin 2\varphi \cosh 2\rho = 0 \\ \frac{\varphi_x^2}{(\cosh\rho)^2} + \frac{\varphi_y^2}{(\sinh\rho)^2} = 8\left(\cos 2\varphi - Re\frac{2H+i}{2H-i}\right) \end{cases}$$

Теорема 8 приближает нас к ответу о существовании торов постоянной средней кривизны в Nil. Возможно, применение преобразований типа Бэклунда, или техники типа анзаца Лэмба (см. например [18] где эта техника возникает при построении торов п.с.к в $\mathbb{R}^3$), либо других методов теории солитонов поможет в поиске решений (3.21), которые отвечают торам.

Литература

[1] Taimanov I. A. Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 133–151.

[2] Тайманов И. А. Представление Вейерштрасса замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Функциональный анализ и его прил. 1998. Т. 32, №4. С. 49–62.

[3] Тайманов И. А. Операторы Дирака и конформные инварианты торов в $\mathbb{R}^3$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2004. Т. 244. С. 233–263.

[4] Konopelchenko B. G. Induced surfaces and their integrable dynamics // Stud. Appl. Math. 1996. V. 96. P. 9–52.

[5] Scott P. The geometries of 3-manifolds // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15, N 5. P. 401–487.

[6] Abresch U., Rosenberg H. The Hopf differential for constant mean curvature surfaces in $S^2 \times \mathbb{R}$ and $H^2 \times \mathbb{R}$ // Acta Math. 2004. V. 193. P. 141–174.

[7] Abresch U., Rosenberg H. Generalized Hopf differentials // Mat. Contemp. 2005. V. 28. P. 1–28.

[8] Daniel B. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds // Comment. Math. Helv. 2007. V. 82. P. 87—131.

[9] Fokas A. S., Gelfand I. M. Surfaces on Lie groups, on Lie algebras, and their integrability // Comm. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 203–220.

[10] Figueroa C., Mercuri F., Pedrosa R. Invariant surfaces of the Heisenberg groups // Ann. Math. Pura Appl. 1999. V. 177. P. 173–194.

[11] Milnor J. W. Curvatures of left invariant metrics on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.

[12] Thurston W. P. Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 357–381.

[13] Fernandez I., Mira P. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds // Diff. Geom. Appl. 2007. V. 25. P. 281—289.

[14] Тайманов И. А. Двумерный оператор Дирака и теория поверхностей // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, №1. С. 85–164.

[15] Tomter P. Constant mean curvature surfaces in the Heisenberg group // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 1993. V. 54, N 1. P. 485–495.

[16] Schmidt E. Der Brun–Minkowskische Satz und ein Spiegel-theorem sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugeln in der euklidischen und hyperbolischen Geometrie // Math. Ann. 1949. V. 120. P. 307–429.

[17] Taimanov I. A. Surfaces in three-dimensional Lie groups in terms of spinors // RIMS Kokyuroku. 2008. V. 1605. P. 133–150.

[18] Abresch U. Constant mean curvature tori in terms of elliptic functions // J. Reine Angew. Math. 1987. V. 374. P. 169—192.

Работы автора по теме диссертации

[19] Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности в трехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, №6. С. 1248–1264.

[20] Бердинский Д. А., Тайманов И. А. Поверхности вращения в группе Гейзенберга и спектральное обобщение функционала Уиллмора // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, №3, С. 496–511.

[21] Berdinsky D. A. Surfaces of revolution in the Heisenberg group and the spectral generalization of the Willmore functional // Oberwolfach reports. 2007. V. 4, N 2. P. 1356–1358.