

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Новосибирский национальный исследовательский
государственный университет

На правах рукописи

Богоявленская Ольга Анатольевна

**Полные римановы метрики
с группой голономии G_2
на разрешениях конуса над $S^3 \times S^3$**

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
академик РАН, профессор
Тайманов Искандер Асанович
доктор физико-математических наук
Базайкин Ярослав Владимирович

Новосибирск — 2013

Содержание

Введение	3
1 Определения	10
1.1 Группа голономии	10
1.2 G_2 -структура на многообразии	13
2 G_2-структура на конусе над $S^3 \times S^3$	15
2.1 Семейство новых решений.	20
2.2 Начальные условия.	28
3 Метрики на $S^3 \times \mathbb{R}^4$ с группой голономии G_2	30
4 Метрики на $S^3 \times H^4$ с группой голономии G_2	44

Введение

Диссертация посвящена построению и исследованию метрик со специальной группой голономии G_2 .

Группа голономии - это инвариант риманова многообразия, несущий информацию о глобальных свойствах геометрии данного многообразия. Понятие группы голономии было введено Э.Картаном [6, 7, 8] и, кратко, заключается в следующем: фиксируя точку многообразия размерности n и рассмотрев всевозможные петли, начинающиеся и заканчивающиеся в выбранной точке, можно получить группу, состоящую из всех параллельных переносов вдоль таких петель - это и есть группа голономии, по своему определению лежащая в $O(n)$. Первые примеры специальных групп голономии связаны с понятием симметрического пространства, также изучавшегося Э.Картаном. Оказалось, что для симметрического пространства группа голономии совпадает с группой изотропии фиксированной точки, рассмотренной относительно группы трансвекций. В дальнейшем, Борель и Лихнерович [2] показали, что для односвязного многообразия (или для любого многообразия, но при рассмотрении лишь стягиваемых петель) группа голономии является подгруппой Ли в ортогональной группе. Случай не односвязного пространства оказался сложнее: как показал Вилкинг [20], группа голономии не односвязного риманова многообразия может не быть замкнутой подгруппой Ли в $O(n)$. Теорема де Рама [19] подчеркнула глобальный характер понятия голономии: оказалось,

что если группа голономии (вместе со своим представлением на касательном пространстве в фиксированной точке) раскладывается в прямое произведение (т.е. приводима), то само многообразие распадается в соответствующее прямое произведение римановых многообразий.

Следующий крупный шаг в понимании структуры групп голономии был сделан Берже [1]. В предположении, что риманово односвязное многообразие неприводимо и не является симметрическим, он доказал, что группа голономии принадлежит списку кандидатов, конечному в каждой фиксированной размерности. Доказательство Берже было алгебраическим и не позволяло ответить вопрос, существует ли риманово многообразие с данной группой голономии из списка. Возникла задача реализации групп голономии из списка Берже, которая постепенно была решена положительно для всех кандидатов.

Для нас особый интерес представляет группа голономии G_2 . Вместе с группой $Spin(7)$ для нее не было примеров реализации римановым многообразием вплоть до 1987 года, когда Брайант и Саламон [5] построили первое (некомпактное и даже не полное) риманово многообразие с группой голономии G_2 и $Spin(7)$. В 1989 они же построили первый пример полного пространства с данными группами голономии. Построение компактного пространства оказалось трудной задачей, и было сделано лишь Джойсом [15, 16] в 1996 году. После Джойса Ковалев [18] в 2003 году предложил новую конструкцию, которая привела к построению компактного риманова многообразия с группой голономии G_2 .

Для объяснения мотивации данной диссертации, схематично опишем конструкции Джойса и Ковалева. Джойс рассмотрел специальное действие дискретной группы на плоском торе размерности 7, особенности факторпространства рассмотренного действия имеют окрестности, изометричные $T^4 \times \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$. Произведя хирургию Джойс при-

клеил вместо каждой такой окрестности пространство $T^3 \times T^*S^2$, где на кокасательном расслоении рассмотрена метрика Эгучи-Хансона с группой голономии $SU(2)$. После этого было показано, что результирующая метрика на полученном семимерном компактном многообразии может быть деформирована в метрику с группой голономии G_2 . Ковалев рассмотрел некомпактное многообразие с группой голономии $SU(3)$ с цилиндрическим концом и специальным образом склеил два таких пространства, умноженных на окружность (мы здесь опустили многие детали). Опять, на полученном пространстве существует риманова метрика с группой голономии G_2 . В обеих конструкциях центральную роль играет некоторая хирургия, склеивающая метрики с группой голономии, лежащей в G_2 , причем эти метрики определены на некомпактных пространствах.

С другой стороны, интерес к некомпактным пространствам с группой голономии G_2 стимулировался применением их в физике, а именно в M -теории. Дело в том, что риманово многообразие с группой голономии G_2 является автоматически Риччи-плоским, то есть построение метрики с группой голономии G_2 дает решение уравнения Эйнштейна с нулевой космологической постоянной. Это привело к построению дополнительных примеров некомпактных римановых многообразий с группой голономии G_2 с интересными геометрическими и топологическими свойствами. При этом некомпактный случай позволяет либо явно выписать метрику в элементарных функциях, либо детально изучить ее свойства. Большинство некомпактных примеров строятся как деформации конусов над специальными пространствами.

Диссертация изложена на 59 страницах и состоит из введения и четырех глав, каждая из которых разбита на параграфы. Библиография содержит 26 наименований.

Первая Глава является вводной. В ней мы приводим основные опре-

деления и факты, необходимые для дальнейшего изложения. Параграф 1.1 касается групп голономии римановых многообразий; в параграфе 1.2 содержится определение G_2 структуры на римановом многообразии. Глава 1 содержит лишь необходимые нам утверждения и не претендует на какую-либо полноту.

Во второй Главе мы приводим общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии G_2 по заданному 7-мерному многообразию M . Мы рассматриваем стандартную конусную метрику над пространством $S^3 \times S^3$ и деформируем ее при помощи четырех функций, зависящих от переменной, меняющейся вдоль образующей конуса.

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 A_i(t)^2 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^3 B_i(t)^2 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2, \quad (1)$$

где $\eta_i, \tilde{\eta}_i$ — это стандартный корепер из 1-форм, а функции $A_i(t), B_i(t)$ задают деформацию конусной особенности.

Эта четверка функций задает размеры сечения конуса на данном уровне t . Условие принадлежности группе голономии G_2 при этом записывается как нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений на данную четверку функций (**Лемма 2.1** Главы 2).

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2} \right) \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1 B_2} - \frac{A_1}{A_2} \right) \\ \frac{dB_1}{dt} &= \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2 B_2} \\ \frac{dB_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2 B_1} + \frac{A_1}{B_2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Для того, чтобы решение системы (2) было определено на некотором римановом многообразии, необходимо выполнение дополнительных краевых условий в точке t_0 , которые обеспечивают разрешение конусной особенности. В диссертации рассмотрены два типа разре-

ния особенности, мы формулируем их в **Лемме 3.1** Главы 3 и **Лемме 4.1** Главы 4 соответственно.

Лемма 3.1. Для того, чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на \mathcal{M} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (1) $A_1(0) = A_2(0) = 0, |A'_1(0)| = |A'_2(0)| = \frac{1}{2}$;
- (2) $B_1(0) = B_2(0) \neq 0, B'_1(0) = B'_2(0) = 0$;
- (3) функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Лемма 4.1. Для того, чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на \mathcal{M} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (1) $B_1(0) = 0, |B'_1(0)| = 2$;
- (2) $A_2(0) = B_2(0) \neq 0, A'_2(0) = -B'_2(0)$,
- (3) $A_1(0) \neq 0, A'_1(0) = 0$;
- (4) функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Два различных типа разрешения особенности приводят к двум различным топологическим типам пространств, на которых определена соответствующая метрика с группой голономии G_2 .

Основной целью Главы 3 является доказательство **Теоремы 3.1**.

Теорема 3.1. Для каждого параметра $p < 0$ существует полная риманова метрика вида (1) с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$, такая, что $p = \frac{12}{B_1^2(0)(A_1'''(0) - A_2'''(0))}$.

При $t \rightarrow \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ — конус над произведением сфер.

Изложение доказательства **Теоремы 3.1** построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (2) (**Леммы 2.3 и 2.4**), они определяют асимптотику

соответствующих метрик (**Лемма 2.5**). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия **Леммы 3.1**, необходимые для гладкости метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит однопараметрическое семейство траекторий системы (2) (**Лемма 3.3**). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области Π и Γ системы (2) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (**Лемма 2.6**); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику (**Лемма 3.4**).

Основной целью Главы 4 является доказательство **Теоремы 4.1**.

Теорема 4.1. *Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных полных римановых метрик вида $d\bar{s}^2$ с группой голономии G_2 на $H^4 \times S^3$, причем метрики можно параметризовать набором начальных данных $(A_1(0), A_2(0), B_1(0), B_2(0)) = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, где $\lambda, \mu > 0$ и $\mu^2 + \lambda^2 = 1$.*

При $t \rightarrow \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ — конус над произведением сфер. При этом сфера S^2 возникает как факторизация диагонально вложенной в $S^3 \times S^3$ трехмерной сферы по действию окружности, соответствующей векторному полю $\xi^1 + \tilde{\xi}_1$.

Изложение доказательства **Теоремы 4.1** проводится аналогично доказательству **Теоремы 3.1** и построено следующим образом. Сначала находятся все стационарные и условно стационарные точки системы (2) (**Леммы 2.3 и 2.4**), они определяют асимптотику соответствующих метрик (**Лемма 2.5**). Далее выясняется, каким начальным точкам S_0 отвечают условия **Леммы 4.1**, необходимые для гладкости

метрики; доказывается, что из каждой такой точки выходит ровно одна траектория системы (2) (**Лемма 4.2**). После этого остается установить, куда сходятся эти траектории. Для этого определяются инвариантные области Π и Γ системы (2) и устанавливаются полезные для дальнейшего доказательства дифференциальные соотношения вдоль траекторий системы (**Лемма 2.6**); эти соотношения показывают монотонность специально подобранных функций вдоль траекторий, что позволяет точно определить их асимптотику (**Лемма 4.3**)

Глава 1

Определения

1.1 Группа голономии

Пусть M^n - риманово многообразие с метрикой g . Тогда на TM существует и единственна связность ∇ , симметричная и согласованная с этой метрикой g .

Наличие связности в касательном расслоении позволяет определить операцию параллельного переноса вдоль путей, лежащих в M^n . Пусть $\gamma : [0, 1] \rightarrow M^n$ - произвольный кусочно-гладкий путь, такой что $\gamma(0) = x$ и $\gamma(1) = y$ для некоторых $x, y \in M^n$. Тогда для любого вектора $v_0 \in T_x M$ существует единственное гладкое векторное поле $v(t)$, такое что $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} v(t) = 0$ и $v(0) = v_0$, и говорят, что $v(1)$ получен из v_0 параллельным переносом вдоль пути $\gamma(t)$.

Параллельный перенос вдоль замкнутых путей (петель), т.е. таких $\gamma(t)$, что $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, порождает линейное преобразование P_γ касательного пространства $T_x M$. Множество всех таких преобразований P_γ образует группу $Hol_x(M^n)$, которая называется группой голономии многообразия M^n :

$$Hol_x(M^n) = \{P_\gamma : \gamma(0) = \gamma(1) = x\} \subset O(n)$$

Известно, что если многообразие M^n - связно, то группа голономии $Hol_x(M^n)$ не зависит от фиксированной точки x , а именно, группы $Hol_x(M^n)$ и $Hol_y(M^n)$ для различных x и y сопряжены в $O(n)$.

Группа голономии является подгруппой Ли в $O(n)$, как замкнутая подгруппа группы Ли.

Естественным образом возникает задача классификации римановых групп голономии: какие группы могут быть группами голономии риманова многообразия?

Риманово многообразие (M, ds_M^2) называется (локально) приводимым, если у каждой точки существует окрестность, изометричная риманову произведению $(P \times Q, ds_P^2 + ds_Q^2)$. M неприводимо, если оно не является локально приводимым. Очевидно, что если риманово многообразие приводимо, то $Hol(M) = Hol(P) \times Hol(Q)$. В случае, если риманово многообразие является полным, то верно и обратное утверждение:

Теорема: Пусть M - полное риманово многообразие, группа голономии G которого является произведением двух групп G_1 и G_2 , а представление голономии группы G раскладывается в сумму представлений G_1 и G_2 . Тогда M изометрично прямому произведению двух римановых пространств P и Q , где $Hol(P) = G_1$ и $Hol(Q) = G_2$, а представления групп G_1 и G_2 совпадают с представлениями голономии P и Q .

Таким образом, в силу теоремы разложения де Рама можно сразу ограничиться полными неприводимыми римановыми многообразиями.

Одним из важных примеров таких многообразий являются симметрические пространства.

Односвязное многообразие M называется симметрическим пространством, если для любой точки x существует изометрия (движе-

ние) s_x , для которой точка x является изолированной неподвижной точкой и такая, что все касательные векторы в точке x испытывают отражение: v переходит в $-v$. Это преобразование s_x называется "симметрией" в точке x .

Теорема: Пусть M - симметрическое пространство и G - группа Ли изометрий M , порожденная всеми отражениями, переворачивающими геодезические. Предположим, что $H \subset G$ - группа изотропии M относительно выбранной точки. Тогда $M = G/H$, и группа голономии $Hol(M)$ совпадает с H , а представление голономии совпадает с представлением изотропии G/H .

Список всех односвязных римановых симметрических пространств был получен Картаном.

Следующая теорема была доказана Берже:

Теорема: Пусть M - односвязное неприводимое риманово многообразие размерности n , не являющееся симметрическим пространством. Тогда имеет место один из следующих случаев:

- 1) $Hol(M) = SO(n)$ - общий случай,
- 2) $n = 2m$, где $m \geq 2$ и $Hol(M) = U(m) \subset SO(2m)$ - кэлеровы многообразия,
- 3) $n = 2m$, где $m \geq 2$ и $Hol(M) = SU(m) \subset SO(2m)$ - специальные кэлеровы многообразия,
- 4) $n = 4m$, где $m \geq 2$ и $Hol(M) = Sp(m) \subset SO(4m)$ - гиперкэлеровы многообразия,
- 5) $n = 4m$, где $m \geq 2$ и $Hol(M) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$ - кватернионно-кэлеровы многообразия,
- 6) $n = 7$ и $Hol(M) = G_2 \subset SO(7)$,
- 7) $n = 8$ и $Hol(M) = Spin(7) \subset SO(8)$.

Таким образом, только группы из списка могут быть римановыми

группами голономии. Действительно ли каждая из них может быть реализована как группа голономии некоторого риманова многообразия? Утвердительный ответ для групп G_2 и $Spin(7)$ был получен только в 1989 году Брайантом.

Римановы многообразия (M, g) с $Hol(M) \subseteq U(m)$ называются кэлеровыми многообразиями. Многообразия (M, g) с $Hol(M) \subseteq SU(m)$ называются многообразиями Калаби-Яу. Многообразия с группой голономии $Sp(m)$ называются гиперкэлеровыми. Метрики Калаби-Яу и гиперкэлеровы метрики являются риччи-плоскими. Многообразия с группой голономии $Sp(m)Sp(1)$ называются кватернионно-кэлеровыми и являются эйнштейновыми. Последние два случая - исключительные метрики - также являются риччи-плоскими.

Группа $Spin(7)$ - это двулистное, односвязное накрытие группы $SO(7)$. Группа G_2 - это группа автоморфизмов алгебры октав Кэли $\mathbb{C}a$.

1.2 G_2 -структура на многообразии

Пусть $\{e^i\}, i = 0, 1, 2, \dots, 7$ - ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве \mathbb{R}^7 . Положив $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, рассмотрим следующую 3-форму Ψ_0 на \mathbb{R}^7 :

$$\Psi_0 = e^{564} + e^{527} + e^{513} + e^{621} + e^{637} + e^{432} + e^{417}.$$

Дифференциальная 3-форма Ψ на ориентированном римановом 7-мерном многообразии (M, g) задает G_2 -структуру, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^7$, такая, что $\phi_p^* \Psi_0 = \Psi|_p$. При этом форма Ψ определяет единственную метрику g_Ψ , такую, что $g_\Psi(v, w) = \langle \phi_p v, \phi_p w \rangle$ для $v, w \in T_p M$. Если форма Ψ параллельна ($\nabla \Psi = 0$), то группа голоно-

мии риманова многообразия M будет содержаться в G_2 . Параллельность формы Ψ эквивалентна ее замкнутости и козамкнутости [14]:

$$d\Psi = 0, d * \Psi = 0.$$

Глава 2

G_2 -структура на конусе над $S^3 \times S^3$

Рассмотрим группу Ли $G = SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$ со стандартной биинвариантной метрикой

$$\langle X, Y \rangle = -\text{tr} (XY),$$

где $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$. На G рассмотрим три киллинговых векторных поля:

$$\xi^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \xi^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно посчитать, что они удовлетворяют соотношениям

$$[\xi^i, \xi^{i+1}] = 2\xi^{i+2},$$

где индексы $i = 1, 2, 3$ приводятся по модулю 3. Действительно,

$$[\xi^1, \xi^2] = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$[\xi^2, \xi^3] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

$$[\xi^3, \xi^1] = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть η_1, η_2, η_3 — двойственный базис из 1-форм, т.е. $\eta_i(\xi^j) = \delta_i^j$. Тогда из формулы Маурера-Картана

$$d\omega(X, Y) = \frac{1}{2} (X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]))$$

для левоинвариантных векторных полей X, Y имеем:

$$d\omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\omega([X, Y]).$$

Поэтому значение формы $d\eta_1(X, Y) = -\frac{1}{2}\eta_1([X, Y])$ отлично от нуля только при $X = \xi_2, Y = \xi_3$, действительно, $d\eta_1(\xi_2, \xi_3) = -\frac{1}{2}\eta_1(2\xi_1) = -1$. С другой стороны, рассмотрим 2-форму $\eta_2 \wedge \eta_3$. Ее значение $(\eta_2 \wedge \eta_3)(X, Y) = \frac{1}{2}(\eta_2(X)\eta_3(Y) - \eta_2(Y)\eta_3(X))$, поэтому $(\eta_2 \wedge \eta_3)(\xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}$, и, значит,

$$d\eta_1 = -2\eta_2 \wedge \eta_3.$$

Аналогично можно показать, что $d\eta_2 = -2\eta_3 \wedge \eta_1$ и $d\eta_3 = -2\eta_1 \wedge \eta_2$. То есть

$$d\eta_i = -2\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2},$$

где индексы $i = 1, 2, 3$ приводятся по модулю 3.

Пусть $M = G \times G$, тогда на M возникает 6 киллинговых полей $\xi^i, \tilde{\xi}^i, i = 1, 2, 3$, касательных, соответственно, первому и второму множителю, и 6 двойственных 1-форм $\eta_i, \tilde{\eta}_i$. Рассмотрим конус $\overline{M} = \mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой

$$d\bar{s}^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 A_i(t)^2 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=1}^3 B_i(t)^2 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2, \quad (*)$$

где $A_i(t)$ и $B_i(t)$ — некоторые положительные функции, определяющие деформацию стандартной конусной метрики.

Введя в рассмотрение ортонормированный корепер

$$\begin{aligned} e^1 &= A_1 (\eta_1 + \tilde{\eta}_1), & e^4 &= B_1 (\eta_1 - \tilde{\eta}_1), \\ e^2 &= A_2 (\eta_2 + \tilde{\eta}_2), & e^5 &= B_2 (\eta_2 - \tilde{\eta}_2), \\ e^3 &= A_3 (\eta_3 + \tilde{\eta}_3), & e^6 &= B_3 (\eta_3 - \tilde{\eta}_3), \\ e^7 &= dt, \end{aligned}$$

определим следующую 3-форму:

$$\Psi = e^{564} + e^{527} + e^{513} + e^{621} + e^{637} + e^{432} + e^{417},$$

где $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$. Форма Ψ задает G_2 -структуру на \overline{M} , которая является параллельной, в случае выполнения уравнений

$$d\Psi = 0, d * \Psi = 0. \quad (2.1)$$

В диссертации рассматривается частный случай, когда $A_2 = A_3$, $B_2 = B_3$.

Лемма 2.1. *Уравнения (2.1) равносильны следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2} \right) \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1 B_2} - \frac{A_1}{A_2} \right) \\ \frac{dB_1}{dt} &= \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2 B_2} \\ \frac{dB_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2 B_1} + \frac{A_1}{B_2} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Доказательство. Пользуясь соотношениями

$$d\eta_i = -2\eta_{i+1} \wedge \eta_{i+2}, d\tilde{\eta}_i = -2\tilde{\eta}_{i+1} \wedge \tilde{\eta}_{i+2},$$

где индексы $i = 1, 2, 3$ приводятся по модулю 3, можно вычислить $d\Psi$:

$$\begin{aligned} d\Psi &= (-4B_3A_3 + B_2A_3 \frac{dA_1}{dt} + B_2A_1 \frac{dA_3}{dt} + A_1A_3 \frac{dB_2}{dt} + B_2B_3 \frac{dB_1}{dt} + B_1B_3 \frac{dB_2}{dt} + \\ &B_1B_2 \frac{dB_3}{dt} - B_3A_2 \frac{dA_1}{dt} - B_3A_1 \frac{dA_2}{dt} - A_2A_1 \frac{dB_3}{dt} + B_1A_3 \frac{dA_2}{dt} + B_1A_2 \frac{dA_3}{dt} + \\ &A_3A_2 \frac{dB_1}{dt})\eta_1 \wedge \eta_2 \wedge \tilde{\eta}_3 \wedge dt + (4B_1A_1 - B_2A_3 \frac{dA_1}{dt} - B_2A_1 \frac{dA_3}{dt} - A_1A_3 \frac{dB_2}{dt} - \\ &B_2B_3 \frac{dB_1}{dt} - B_1B_3 \frac{dB_2}{dt} - B_1B_2 \frac{dB_3}{dt} - B_3A_2 \frac{dA_1}{dt} - B_3A_1 \frac{dA_2}{dt} - A_2A_1 \frac{dB_3}{dt} + \\ &B_1A_3 \frac{dA_2}{dt} + B_1A_2 \frac{dA_3}{dt} + A_3A_2 \frac{dB_1}{dt})\eta_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \tilde{\eta}_3 \wedge dt + (-4B_1A_1 + B_2A_3 \frac{dA_1}{dt} + \\ &B_2A_1 \frac{dA_3}{dt} + A_1A_3 \frac{dB_2}{dt} + B_2B_3 \frac{dB_1}{dt} + B_1B_3 \frac{dB_2}{dt} + B_1B_2 \frac{dB_3}{dt} + B_3A_2 \frac{dA_1}{dt} + B_3A_1 \frac{dA_2}{dt} + \\ &A_2A_1 \frac{dB_3}{dt} - B_1A_3 \frac{dA_2}{dt} - B_1A_2 \frac{dA_3}{dt} - A_3A_2 \frac{dB_1}{dt})\eta_2 \wedge \eta_3 \wedge \tilde{\eta}_1 \wedge dt + (4B_3A_3 - \\ &B_2A_3 \frac{dA_1}{dt} - B_2A_1 \frac{dA_3}{dt} - A_1A_3 \frac{dB_2}{dt} - B_2B_3 \frac{dB_1}{dt} - B_1B_3 \frac{dB_2}{dt} - B_1B_2 \frac{dB_3}{dt} + \\ &B_3A_2 \frac{dA_1}{dt} + B_3A_1 \frac{dA_2}{dt} + A_2A_1 \frac{dB_3}{dt} - B_1A_3 \frac{dA_2}{dt} - B_1A_2 \frac{dA_3}{dt} - A_3A_2 \frac{dB_1}{dt})\eta_3 \wedge \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& dt + (B_2 A_3 \frac{dA_1}{dt} + B_2 A_1 \frac{dA_3}{dt} + A_1 A_3 \frac{dB_2}{dt} - B_2 B_3 \frac{dB_1}{dt} - B_1 B_3 \frac{dB_2}{dt} - B_1 B_2 \frac{dB_3}{dt} + \\
& B_3 A_2 \frac{dA_1}{dt} + B_3 A_1 \frac{dA_2}{dt} + A_2 A_1 \frac{dB_3}{dt} + B_1 A_3 \frac{dA_2}{dt} + B_1 A_2 \frac{dA_3}{dt} + A_3 A_2 \frac{dB_1}{dt}) dt \wedge \\
& \eta_2 \wedge \eta_1 \wedge \eta_3 + (B_2 A_3 \frac{dA_1}{dt} + B_2 A_1 \frac{dA_3}{dt} + A_1 A_3 \frac{dB_2}{dt} - B_2 B_3 \frac{dB_1}{dt} - B_1 B_3 \frac{dB_2}{dt} - \\
& B_1 B_2 \frac{dB_3}{dt} + 4B_2 A_2 - B_3 A_2 \frac{dA_1}{dt} - B_3 A_1 \frac{dA_2}{dt} - A_2 A_1 \frac{dB_3}{dt} - B_1 A_3 \frac{dA_2}{dt} - B_1 A_2 \frac{dA_3}{dt} - \\
& A_3 A_2 \frac{dB_1}{dt}) dt \wedge \eta_2 \wedge \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_3 + (-B_2 A_3 \frac{dA_1}{dt} - B_2 A_1 \frac{dA_3}{dt} - A_1 A_3 \frac{dB_2}{dt} + B_2 B_3 \frac{dB_1}{dt} + \\
& B_1 B_3 \frac{dB_2}{dt} + B_1 B_2 \frac{dB_3}{dt} - 4B_2 A_2 + B_3 A_2 \frac{dA_1}{dt} + B_3 A_1 \frac{dA_2}{dt} + A_2 A_1 \frac{dB_3}{dt} + B_1 A_3 \frac{dA_2}{dt} + \\
& B_1 A_2 \frac{dA_3}{dt} + A_3 A_2 \frac{dB_1}{dt}) dt \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \eta_1 \wedge \eta_3 + (-B_2 A_3 \frac{dA_1}{dt} - B_2 A_1 \frac{dA_3}{dt} - A_1 A_3 \frac{dB_2}{dt} + \\
& B_2 B_3 \frac{dB_1}{dt} + B_1 B_3 \frac{dB_2}{dt} + B_1 B_2 \frac{dB_3}{dt} - B_3 A_2 \frac{dA_1}{dt} - B_3 A_1 \frac{dA_2}{dt} - A_2 A_1 \frac{dB_3}{dt} - \\
& B_1 A_3 \frac{dA_2}{dt} - B_1 A_2 \frac{dA_3}{dt} - A_3 A_2 \frac{dB_1}{dt}) dt \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_3.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение $d\Psi = 0$ приводит к четырем независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка на функции $A_i(t), B_i(t), i = 1, 2, 3$. Полагая здесь $A_3 = A_2, B_3 = B_2$, получаем 3 дифференциальных уравнения на функции $A_i(t), B_i(t), i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
& -4B_2 A_2 + (B_2)^2 \frac{dB_1}{dt} + 2B_1 B_2 \frac{dB_2}{dt} + 2B_1 A_2 \frac{dA_2}{dt} + (A_2)^2 \frac{dB_1}{dt} = 0, \\
& 4B_1 A_1 - 2(B_2)^2 \frac{dB_1}{dt} - 4B_1 B_2 \frac{dB_2}{dt} + 4B_1 A_2 \frac{dA_2}{dt} + 2(A_2)^2 \frac{dB_1}{dt} = 0, \\
& 4B_1 A_1 - 4B_2 A_2 \frac{dA_1}{dt} - 4B_2 A_1 \frac{dA_2}{dt} - 4A_1 A_2 \frac{dB_2}{dt} = 0.
\end{aligned}$$

Рассмотрим аналогично форму $*\Psi$ и ее внешний дифференциал:

$$\begin{aligned}
& d*\Psi = (-4A_1 A_2 A_3 - 4A_2 B_1 B_3 - 4A_3 B_2 B_1 + 4A_1 B_3 B_2 + 4A_3 B_2 B_3 \frac{dA_2}{dt} + \\
& 4A_2 B_2 B_3 \frac{dA_3}{dt} + 4A_2 A_3 B_3 \frac{dB_2}{dt} + 4A_2 A_3 B_2 \frac{dB_3}{dt}) \eta_2 \wedge \eta_3 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \tilde{\eta}_3 \wedge dt + (4A_1 A_2 A_3 - \\
& 4A_2 B_1 B_3 + 4A_3 B_2 B_1 + 4A_1 B_3 B_2 - 4A_3 B_1 B_3 \frac{dA_1}{dt} - 4A_1 B_1 B_3 \frac{dA_3}{dt} - \\
& 4A_1 A_3 B_3 \frac{dB_1}{dt} - 4A_1 A_3 B_1 \frac{dB_3}{dt}) \tilde{\eta}_1 \wedge \eta_3 \wedge \eta_1 \wedge \tilde{\eta}_3 \wedge dt + (-4A_1 A_2 A_3 - 4A_2 B_1 B_3 + \\
& 4A_3 B_2 B_1 - 4A_1 B_3 B_2 + 4A_2 B_1 B_2 \frac{dA_1}{dt} + 4A_1 B_1 B_2 \frac{dA_2}{dt} + 4A_1 A_2 B_2 \frac{dB_1}{dt} + \\
& 4A_1 A_2 B_1 \frac{dB_2}{dt}) \tilde{\eta}_1 \wedge \tilde{\eta}_2 \wedge \eta_1 \wedge \eta_2 \wedge dt.
\end{aligned}$$

Получаем 2 дифференциальных уравнения на функции $A_i(t), B_i(t), i = 1, 2$:

$$-4A_1 A_2^2 - 8A_2 B_1 B_2 + 4A_1 B_2^2 + 8A_2 B_2^2 \frac{dA_2}{dt} + 8A_2^2 B_2 \frac{dB_2}{dt} = 0,$$

$$4A_1A_2^2 - 4A_2B_1B_2\frac{dA_1}{dt} - 4A_1B_1B_2\frac{dA_2}{dt} - 4A_1A_2B_2\frac{dB_1}{dt} - 4A_1A_2B_1\frac{dB_2}{dt} + 4A_1B_2^2 = 0.$$

Разрешая полученную систему линейных уравнений из 5 уравнений относительно производных неизвестных функций $A_i(t), B_i(t), i = 1, 2$, находим, что:

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - \frac{A_1^2}{B_2^2} \right) \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{B_2^2 - A_2^2 + B_1^2}{B_1B_2} - \frac{A_1}{A_2} \right) \\ \frac{dB_1}{dt} &= \frac{A_2^2 + B_2^2 - B_1^2}{A_2B_2} \\ \frac{dB_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left(\frac{A_2^2 - B_2^2 + B_1^2}{A_2B_1} + \frac{A_1}{B_2} \right)\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Приведем известные явные решения системы (2.2). В [3] для системы (2.2) было найдено точное решение следующего вида (остальные решения семейства, найденного в [3] гомотетичны данному):

$$\begin{aligned}A_1(r) &= \sqrt{\frac{(r-9/4)(r+9/4)}{(r-3/4)(r+3/4)}}, \\ A_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(r+3/4)(r-9/4)}, \\ B_1(r) &= 2r/3, \\ B_2(r) &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(r-3/4)(r+9/4)},\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $r \geq 9/4$, и переменная r связана с t заменой

$$dt = \frac{dr}{A_1(r)}, t|_{r=9/4} = 0.$$

Метрика (2.3) является полной метрикой с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$. Если рассмотреть случай $A_1 = A_2 = A_3 = A$ и $B_1 = B_2 = B_3 = B$, то система (2.2) принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dt} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A^2}{B^2} \right), \\ \frac{dB}{dt} &= \frac{A}{B}\end{aligned}$$

и интегрируется в элементарных функциях, и мы получаем другую

полную метрику с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$:

$$d\bar{s}^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{1}{r^3}} + \frac{r^2}{9} \left(1 - \frac{1}{r^3}\right) \sum_{i=1}^3 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \frac{r^2}{3} \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2. \quad (2.4)$$

Метрика (2.4) была впервые построена в [5], см. также [13]. Насколько мы знаем, метрики (2.3) и (2.4) исчерпывают список известных явных решений системы (2.2), отвечающих полным римановым метрикам с группой голономии G_2 .

Если сделать формальную замену $r \rightarrow -r$ в решении (2.4), то мы получим следующее решение (2.2):

$$d\bar{s}^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{1}{r^3}} + \frac{r^2}{9} \left(1 + \frac{1}{r^3}\right) \sum_{i=1}^3 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2 + \frac{r^2}{3} \sum_{i=1}^3 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2. \quad (2.5)$$

Решение (2.5) определено при $0 < r < \infty$, но не задает никакую гладкую риманову метрику, поскольку имеет особенность при $r = 0$.

2.1 Семейство новых решений.

Действуя аналогично [21], рассмотрим стандартное пространство \mathbb{R}^4 и обозначим через $R(t) \in \mathbb{R}^4$ вектор, состоящий из функций $A_1(t), A_2(t), B_1(t), B_2(t)$. Пусть $V : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ — функция от аргумента R , определенная правой частью системы (2.2) (функция V , конечно, определена лишь в области, где $A_i, B_i \neq 0$). Таким образом, система (2.2) имеет вид:

$$\frac{dR}{dt} = V(R).$$

Пользуясь инвариантностью V относительно гомотетий \mathbb{R}^4 , сделаем замену: $R(t) = f(t)S(t)$, где

$$\begin{aligned} |S(t)| &= 1, f(t) = |R(t)|, \\ S(t) &= (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \alpha_4(t)). \end{aligned}$$

Таким образом, наша система распадается на «радиальную» и «тангенциальную» части:

$$\frac{dS}{du} = V(S) - \langle V(S), S \rangle S = W(S), \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{df}{du} &= \langle V(S), S \rangle, \\ dt &= f du. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Следовательно, нужно сначала решить автономную систему (2.6) на трехмерной сфере $S^3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) | \sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 = 1\}$, и далее решения (2.2) находятся обычным интегрированием из уравнений (2.7).

Имеет место следующая лемма:

Лемма 2.2. *Системы (2.2) и (2.6) допускают следующие симметрии:*

$$\begin{aligned} (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) &\mapsto (-\alpha_1, \alpha_4, \alpha_3, \alpha_2), \\ ((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u))) &\mapsto (-\alpha_1(-u), \alpha_2(-u), \alpha_3(-u), -\alpha_4(-u)), \\ ((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u))) &\mapsto (-\alpha_1(-u), \alpha_2(-u), -\alpha_3(-u), \alpha_4(-u)), \\ ((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u))) &\mapsto (-\alpha_1(-u), -\alpha_2(-u), \alpha_3(-u), \alpha_4(-u)), \\ ((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u))) &\mapsto (\alpha_1(u), \alpha_2(u), -\alpha_3(u), -\alpha_4(u)), \\ ((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u))) &\mapsto (\alpha_1(u), -\alpha_2(u), \alpha_3(u), -\alpha_4(u)), \\ ((\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u), \alpha_4(u))) &\mapsto (\alpha_1(u), -\alpha_2(u), -\alpha_3(u), \alpha_4(u)) \end{aligned}$$

Лемма 2.3. *Стационарные решения системы (2.6) на S^3 исчерпываются следующим списком нулей векторного поля W с точностью до симметрий леммы 2.2:*

$$\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \right), \quad \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \right).$$

Доказательство. В точках, где векторное поле W обращается в нуль, поле $V(S)$ параллельно $S(u)$, следовательно, стационарные ре-

шения системы (2.6) удовлетворяют следующей системе уравнений

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_4^2} \right) &= \beta \alpha_1, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_3 \alpha_4} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) &= \beta \alpha_2, \\ \frac{\alpha_2^2 + \alpha_4^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_4} &= \beta \alpha_3, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_4^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) &= \beta \alpha_4, \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 &= 1,\end{aligned}$$

где $\beta = \langle V(S), S \rangle \in \mathbb{R}$. Решение системы распадается на два случая: если $\alpha_1 = 0$, то без труда получаем вторую точку из условия леммы. Если $\alpha_1 \neq 0$, то исключая β , выражаем α_1, α_3 через α_2, α_4 :

$$\alpha_1^2 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_2^2 \alpha_4^2}{\alpha_2^2 + \alpha_4^2}, \alpha_3^2 = 3 \frac{(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)^2}{\alpha_2^2 + \alpha_4^2},$$

после чего получаем соотношение

$$4 (\alpha_4^2 - \alpha_2^2)^2 = (\alpha_4^2 + \alpha_2^2)^2,$$

откуда немедленно получаем оставшиеся точки. Лемма доказана.

Точку $S \in S^3$, в которой поле W не определено, назовем *условно стационарной*, если существует вещественно-аналитическая кривая $\gamma(u)$ на S^3 , $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\gamma(0) = S$ такая, что поля V, W определены во всех точках $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $u \neq 0$, непрерывно продолжаются на всю кривую $\gamma(u)$, и $\lim_{u \rightarrow 0} W(\gamma(u)) = 0$.

Лемма 2.4. Система (2.6) не имеет условно-стационарных решений на S^3 .

Доказательство. Пусть точка $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^2 = 1$ является условно стационарной, т.е. существует кривая $\gamma(u)$, $u \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ с указанными выше свойствами. Очевидно, что такое возможно только в случае, когда выполнено хотя бы одно из условий: $\alpha_2(0) = 0$, $\alpha_3(0) = 0$ или $\alpha_4(0) = 0$.

1) Рассмотрим сначала случай, когда выполнены все соотношения одновременно: $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = \alpha_4(0) = 0$, $\alpha_1(0) = \pm 1$. Положим для $i = 2, 3, 4$

$$\alpha_i(u) = c_i u^{k_i} (1 + o(1)), \text{ при } u \rightarrow 0,$$

где $c_i \neq 0$, $k_i > 0$. Заметим, что если $\alpha_2(u) = \alpha_4(u) + cu^k$, где $c \neq 0$, то V_1 не может быть непрерывно продолжено вдоль $\gamma(u)$ вплоть до $u = 0$. Из вещественной аналитичности следует, что $\alpha_2(u) = \alpha_4(u)$ и, в частности, $k_2 = k_4$. Тогда

$$V_2 = \frac{\pm 1}{2c_2} u^{-k_2} (1 + o(1))$$

— противоречие с существованием предела $V(S)$ при $u \rightarrow 0$.

2) Пусть две из трех функций $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ обращаются в нуль при $u = 0$. Рассмотрим возникающие случаи.

Случай $\alpha_2(0) = \alpha_3(0) = 0$, $\alpha_4(0) \neq 0$. Если при этом $\alpha_1(0) \neq 0$, то

$$V_1 = \frac{\alpha_1(0)}{2c_2^2} u^{-2k_2} (1 + o(1)),$$

что приводит к противоречию. Если $\alpha_1(u) = c_1 u^{k_1} (1 + o(1))$, $c_1 \neq 0$, $k_1 > 0$, то $k_1 \geq k_2$ (из непрерывности V_1) и

$$V_2 = \frac{\alpha_4(0)}{c_3} u^{-k_3} (1 + o(1))$$

— снова противоречие.

Случай $\alpha_2(0) \neq 0$, $\alpha_3(0) = \alpha_4(0) = 0$ симметричен предыдущему и исключается аналогично.

Случай $\alpha_2(0) = \alpha_4(0) = 0$, $\alpha_3(0) \neq 0$. Этот случай исключаем, поскольку

$$V_3 = -\frac{\alpha_3(0)^2}{c_2 c_4} u^{-k_2 - k_4} (1 + o(1)).$$

3) Предположим, что только одна из функций $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ обращается в нуль при $u = 0$.

Случай $\alpha_2(0) = 0, \alpha_3(0), \alpha_4(0) \neq 0$. Непрерывность V_1 и V_3 влечет в этом случае $\alpha_1(0) = 0$ и $\alpha_3(0) = \pm\alpha_4(0) \neq 0$, причем $k_1 \geq k_2$. В этом случае $\lim_{u \rightarrow 0} V(\gamma(u)) = (0, 1, 0, 0)$ и $\lim_{u \rightarrow 0} W(\gamma(u)) = (0, 1, 0, 0) \neq 0$ — противоречие.

Случай $\alpha_4(0) = 0, \alpha_2(0), \alpha_3(0) \neq 0$ исключается аналогично.

Случай $\alpha_3(0) = 0, \alpha_2(0), \alpha_4(0) \neq 0$. Непрерывность V сразу влечет $\alpha_2(0) = \pm\alpha_4(0)$. Тогда $\lim_{u \rightarrow 0} V_3(\gamma(u)) = 2$ и $\lim_{u \rightarrow 0} W_3(\gamma(u)) = 2 \neq 0$ — снова противоречие. Лемма доказана.

Метрика $d\bar{s}^2$ называется асимптотически локально конической, если существуют функции $\tilde{A}_i(t), \tilde{B}_i(t)$, линейные по t с точностью до сдвига, такие что

$$\left|1 - \frac{A_i}{\tilde{A}_i}\right| \rightarrow 0, \quad \left|1 - \frac{B_i}{\tilde{B}_i}\right| \rightarrow 0, \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

Метрика, определяемая функциями $\tilde{A}_i(t), \tilde{B}_i(t)$ называется локально конической. Следующая лемма доказана в [21], однако для полноты изложения мы приводим ее доказательство полностью.

Лемма 2.5. *Стационарным решениям системы (2.6) отвечают локально конические метрики на \overline{M} , а траекториям системы (2.6), асимптотически стремящимся к стационарным решениям отвечают асимптотически локально конические метрики на \overline{M} .*

Доказательство. Пусть S_0 - стационарное решение системы (2.6), т.е. $W(S_0) = 0$. Интегрируя (2.7), получаем $f = e^{c_1 u + c_2}$, где c_1, c_2 - константы, $c_1 = \langle V(S_0), S_0 \rangle$. Тогда $R(t) = f(t)S_0 = (c_0 + c_1 t)S_0$ для некоторой константы c_0 . Таким образом, $R(t)$ задает локально коническую метрику.

Пусть теперь S_0 - (условно) стационарное решение системы (2.6) и траектория $S(u)$ стремится к S_0 при $u \rightarrow \infty$. Ясно, что $W(S(u)) \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. Как и ранее, рассмотрим константу $c_1 = \langle V(S_0), S_0 \rangle$. В силу гладкости поля $V(S)$ вдоль кривой $S(u)$ можно сделать вывод,

что $\langle V(S(u)), S(u) \rangle \rightarrow c_1$ при $u \rightarrow \infty$. Значит, $\frac{d}{du}(\ln f(u)) \rightarrow c_1$ при $u \rightarrow \infty$, и мы заключаем, что функция f не может стремиться к нулю при $u \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$t = t_0 + \int_{u_0}^u f(\xi) d\xi \rightarrow \infty \text{ при } u \rightarrow \infty$$

для некоторых констант u_0, t_0 . Рассмотрим величину

$$\Delta = \left| 1 - \frac{f(t)}{c_1 t} \right| = \frac{|c_1 t - f(t)|}{|c_1 t|} \quad (2.8)$$

Если числитель правой части выражения (2.8) не стремится к ∞ , то $\Delta \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$. В противном случае

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \Delta = \left| \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{c_1 \frac{dt}{du} - \frac{df}{du}}{c_1 \frac{dt}{du}} \right| = \left| \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{c_1 - \frac{d}{du}(\ln f)}{c_1} \right| = 0.$$

Итак, $\Delta \rightarrow 0$ при $u \rightarrow \infty$, т.е. и при $t \rightarrow \infty$. Осталось заметить, что $R(t) = f(t)S(t)$, где $S(t) \rightarrow S_0$ при $t \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Для дальнейшего анализа поведения траекторий систем (2.2) и (2.6) нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.6. *Если $R = (A_1, A_2, B_1, B_2)$ — решение системы (2.2) и $S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ — решение системы (2.6), то имеют место следующие соотношения:*

- 1) $\frac{d}{dt} (2A_1 A_2 B_2 - B_1 (B_2^2 - A_2^2)) = 0,$
- 2) $\frac{d}{du} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 ((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} \right) = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 ((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)},$
- 3) $\frac{d}{du} \left(\ln \frac{\alpha_3 ((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4} \right) = \frac{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 ((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)}{\alpha_2 \alpha_4 ((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)},$
- 4) $\frac{d}{du} \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_4} = -\frac{\alpha_1}{(\alpha_4)^2} \text{ при } \alpha_2 = \alpha_4,$
- 5) $\frac{d}{du} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) = \frac{3}{2\alpha_4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) \text{ при } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = \alpha_4.$

Доказательство. Лемма 2.6 доказывается прямыми вычислениями. Приведем, однако, некоторые соображения, существенно упростившие наши вычисления. Пусть $F(S) = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{P_1(S)}{P_2(S)}$ -

некоторая однородная рациональная функция нулевой степени. Очевидно, что

$$\frac{d}{dt} \ln F(R) = \frac{1}{F(R)} \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, \frac{dR}{dt} \right\rangle = \frac{1}{F(R)} \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, V(R) \right\rangle$$

- является однородной рациональной функцией от R степени -1, то есть может быть представлена в виде $\frac{d}{dt} \ln F(R) = \frac{P_k(R)}{Q_{k+1}(R)} = \frac{P_k(A_1, A_2, B_1, B_2)}{Q_{k+1}(A_1, A_2, B_1, B_2)}$, где $P_k(R)$ и $Q_{k+1}(R)$ - это многочлены от переменных A_1, A_2, B_1, B_2 , причем $\deg P_k = k$, $\deg Q_{k+1} = k + 1$ и $\deg P = \deg Q - 1$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \ln F(S) &= f \frac{d}{dt} \ln F(fS) = f \frac{d}{dt} \ln F(R) = \\ &= f \frac{P_k(R)}{Q_{k+1}(R)} = \frac{P_k(S)}{Q_{k+1}(S)} = \frac{d}{dt} \ln F(S) \end{aligned}$$

(здесь и далее используются обозначения из (2.6) и (2.7)). Таким образом, для вычисления $\frac{d}{du} \ln F(S)$ достаточно вычислить $\frac{d}{dt} \ln F(S)$, т.е. в ходе вычислений в 3)-4) леммы 2.6 мы пользуемся вполне обозримой системой уравнений (2.2) вместо чрезвычайно громоздкой системы (2.6).

Пусть, как и прежде, $F(S) = F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{P_1(S)}{P_2(S)}$ - некоторая однородная рациональная функция нулевой степени. Предположим, что мы хотим посчитать $\frac{d}{du} F(S)$. Ясно, что функция

$$\frac{d}{dt} F(R) = \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, \frac{dR}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F(R)}{\partial R}, V(R) \right\rangle$$

является однородной рациональной функцией от R степени -1, поэтому, используя аналогичные рассуждения, имеем:

$$\frac{d}{du} F(S) = f \frac{d}{dt} F(fS) = f \frac{d}{dt} F(R) = \frac{d}{dt} F(S)$$

Таким образом, как и выше, при вычислении производной функции $F(S)$ (именно такая ситуация имеет место в 2), 5) леммы 2.6) мы пользуемся соотношениями (2.2) вместо необозримых (2.6). Соотношение (1) очевидно следует из вида системы (2.2). Действительно,

1)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} (2A_1(t)A_2(t)B_2(t) - B_1(t)(B_2(t)^2 - A_2(t)^2)) = \\
& = 2 \left(\frac{d}{dt} A_1(t) \right) A_2(t)B_2(t) + 2A_1(t) \left(\frac{d}{dt} A_2(t) \right) B_2(t) + \\
& + 2A_1(t)A_2(t) \left(\frac{d}{dt} B_2(t) \right) - \left(\frac{d}{dt} B_1(t) \right) (B_2(t)^2 - A_2(t)^2) - \\
& - B_1(t) (2B_2(t) \left(\frac{d}{dt} B_2(t) \right) - 2A_2(t) \left(\frac{d}{dt} A_2(t) \right)) = \\
& = 2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{A_1(t)^2}{A_2(t)^2} - \frac{A_1(t)^2}{B_2(t)^2} \right) \right) A_2(t)B_2(t) + \\
& + 2A_1(t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{B_2(t)^2 - A_2(t)^2 + B_1(t)^2}{B_1(t)B_2(t)} - \frac{A_1(t)}{A_2(t)} \right) \right) B_2(t) + \\
& + 2A_1(t)A_2(t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{A_2(t)^2 - B_2(t)^2 + B_1(t)^2}{A_2(t)B_1(t)} + \frac{A_1(t)}{B_2(t)} \right) \right) - \\
& - \left(\frac{A_2(t)^2 + B_2(t)^2 - B_1(t)^2}{A_2(t)B_2(t)} \right) (B_2(t)^2 - A_2(t)^2) - \\
& - B_1(t) \left(2B_2(t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{A_2(t)^2 - B_2(t)^2 + B_1(t)^2}{A_2(t)B_1(t)} + \frac{A_1(t)}{B_2(t)} \right) \right) \right) + \\
& + B_1(t) \left(2A_2(t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{B_2(t)^2 - A_2(t)^2 + B_1(t)^2}{B_1(t)B_2(t)} - \frac{A_1(t)}{A_2(t)} \right) \right) \right) = 0,
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} \right) = \\
& = \frac{\frac{d}{dt}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4)}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} = \frac{(\frac{d}{dt} \alpha_1) \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 (\frac{d}{dt} \alpha_2) \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 (\frac{d}{dt} \alpha_4)}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} = \\
& = \frac{\left(\left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} - \frac{\alpha_1^2}{\alpha_4^2} \right) \right) \alpha_2 \alpha_4 + \alpha_1 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_3 \alpha_4} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \right) \alpha_4 + \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_4^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) \right) \right)}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} = \\
& = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)},
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{du} \left(\ln \frac{\alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4} \right) = \frac{d}{dt} \left(\ln \frac{\alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4} \right) = \\
& = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{\alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} \frac{\frac{d}{dt}(\alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2))}{(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4)^2} \frac{d}{dt}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4) = \\
& = \frac{\frac{d}{dt}(\alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2))}{\alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} - \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4} = \frac{\frac{d}{dt} \alpha_3}{\alpha_3} + \frac{\frac{d}{dt}((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)}{((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)} - \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4} = \\
& = \frac{\alpha_2^2 + \alpha_4^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4} + \frac{\alpha_4}{(\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_4^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) - \frac{\alpha_2}{(\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2} \left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_3 \alpha_4} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) - \frac{\alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)}{\alpha_2\alpha_4((\alpha_4)^2 - (\alpha_2)^2)},$$

4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{du}(\ln \frac{\alpha_2}{\alpha_4})|_{\alpha_2=\alpha_4} &= \frac{d}{dt}(\ln \frac{\alpha_2}{\alpha_4})|_{\alpha_2=\alpha_4} = \left(\frac{\frac{d}{dt}(\alpha_2)}{\alpha_2} - \frac{\frac{d}{dt}(\alpha_4)}{\alpha_4} \right) |_{\alpha_2=\alpha_4} = \\ &= \left(\frac{1}{2\alpha_2} \left(\frac{\alpha_4^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_3\alpha_4} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) - \frac{1}{2\alpha_4} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_4^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) \right) |_{\alpha_2=\alpha_4} = -\frac{\alpha_1}{(\alpha_4)^2}, \end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) |_{\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_4} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) |_{\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_4} = \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_4} \frac{d}{dt}(\alpha_3) - \frac{\alpha_3}{(\alpha_4)^2} \frac{d}{dt}(\alpha_4) \right) |_{\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_4} = \\ &= \left(\frac{\alpha_2^2 + \alpha_4^2 - \alpha_3^2}{\alpha_2(\alpha_4)^2} - \frac{\alpha_3}{2\alpha_4^2} \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_4^2 + \alpha_3^2}{\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_1}{\alpha_4} \right) \right) |_{\alpha_1=0, \alpha_2=\alpha_4} = \\ &= \frac{3}{2\alpha_4} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\alpha_3}{\alpha_4} \right). \end{aligned}$$

Замечание. Таким образом, функция $F(t) = 2A_1A_2B_2 - B_1(B_2^2 - A_2^2)$ является интегралом системы (2.2).

2.2 Начальные условия.

При $t = 0$ мы имеем конусную особенность пространства \overline{M} , которая может быть разрешена заданием начальных значений функций A_i, B_i . При этом, с точностью до симметрий системы (2.2), возникает два следующих типа разрешения особенности (ср. с [21, 22, 23]).

Тип 1. $A_i(0) = 0, B_i(0) \neq 0$. В этом случае происходит коллапс интегральных трехмерных сфер, порожденных векторными полями $\xi^i + \tilde{\xi}^i$. Эти сферы являются орбитами свободного действия G на M , заданного соотношением $h \in G : (g_1, g_2) \mapsto (hg_1, hg_2)$. Можно показать, что при этом метрика $d\bar{s}^2$ на \overline{M} продолжается на пространство \mathcal{M} , гомеоморфное $S^3 \times \mathbb{R}^4$.

Тип 2. $B_1(0) = 0, B_2(0) \neq 0, A_i(0) \neq 0$. При этом метрика $d\bar{s}^2$ на \overline{M} продолжается на пространство \mathcal{M} , гомеоморфное $\mathcal{M} = H^4 \times G$, где

H^4 — четвертая тензорная степень расслоения H , канонического (или тавтологического) расслоения над S^2 .

Каждый из этих случаев подробно рассмотрен в главах 3 и 4 соответственно.

Глава 3

Метрики с группой голономии G_2 , определенные на $S^3 \times \mathbb{R}^4$.

Этот случай отвечает первому типу разрешения конусной особенности системы (2.2), а именно, $A_i(0) = 0, B_i(0) \neq 0$. В этом случае происходит коллапс интегральных трехмерных сфер, порожденных векторными полями $\xi^i + \tilde{\xi}^i$. Эти сферы являются орбитами свободного действия $SU(2) = S^3$ на M , заданного соотношением:

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2) : (U, V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} U, \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} V \right), |a|^2 + |b|^2 = 1$$

Диффеоморфизм

$$\phi : M \rightarrow M : (U, V) \mapsto (V^{-1}U, V)$$

преобразует рассмотренное выше действие $SU(2)$ в действие следующего вида:

$$h \in SU(2) : (U, V) \mapsto \left(U, \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} V \right).$$

Факторизация по действию $SU(2)$ на втором сомножителе даёт $S^3 \times \{*\}$. После затягивания в точку орбит этого действия при $t = 0$ в объемлющем пространстве $[0, \infty) \times G$, мы получаем произведение $S^3 \times \mathbb{R}^4$,

где проколотое $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ расслаивается над открытым лучом $(0, \infty)$ на концентрические сферы S^3 . Таким образом, метрика $d\bar{s}^2$ на \bar{M} продолжается на пространство, гомеоморфное $S^3 \times \mathbb{R}^4$, обозначим его через \mathcal{M} .

Лемма 3.1. Для того, чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на \mathcal{M} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (1) $A_1(0) = A_2(0) = 0, |A'_1(0)| = |A'_2(0)| = \frac{1}{2}$;
- (2) $B_1(0) = B_2(0) \neq 0, B'_1(0) = B'_2(0) = 0$;
- (3) функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Доказательство. Доказательство проводится аналогично [21].

Ясно, что для того, чтобы получить риманову метрику на \mathcal{M} необходимо, чтобы функции $A_i(t), B_i(t)$ были знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$ и $A_1(0) = A_2(0) = 0, B_1(0), B_2(0) \neq 0$. При этом при $\{t > 0\}$ гладкость метрики $d\bar{s}^2$ равносильна гладкости функций $A_i(t), B_i(t)$ при $t > 0$. Выясним, что происходит в окрестности $B = \{t = 0\}$ (заметим, что B диффеоморфно S^3).

Рассмотрим произвольную точку $q \in \mathcal{M}$, лежащую в множестве B . Некоторая окрестность точки q в \mathcal{M} гомеоморфна $U \times \mathbb{R}^4$, где U — окрестность в B . Таким образом, для гладкости метрики $d\bar{s}^2$ нужно показать гладкость метрики, ограниченной на каждую окрестность $U \times \mathbb{R}^4$.

Для каждого $p \in U$ рассмотрим ограничение метрики $d\bar{s}^2$ на $\{p\} \times \mathbb{R}^4$:

$$d\bar{s}_v^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 A_i(t)^2 (\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2. \quad (3.1)$$

Здесь t — радиальный параметр на \mathbb{R}^4 и метрика $d\bar{s}_v^2$ не зависит от выбора p . Нам понадобится следующий результат:

Лемма 3.2. [24, 25]. *Метрика*

$$g = dr^2 + h^2(r)d\phi^2,$$

заданная в полярной системе координат (r, ϕ) на стандартном двумерном диске $r \leq r_0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$ является гладкой римановой метрикой тогда и только тогда, когда $|h(r)| > 0$ при $r \in (0, r_0]$ и функция $h(r)$ продолжается до гладкой нечетной функции $h(r)$, определенной на $(-r_0, r_0)$ такой, что $|h'(0)| = 1$.

Пусть метрика $d\bar{s}^2$ — гладкая, следовательно метрика (3.1) — гладкая. Будем считать, что векторные поля $\xi^i + \tilde{\xi}^i$, ограниченные на $S^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ представлены на языке кватернионов как qi , qj , qk , где $q = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k$. Рассмотрим ограничение метрики (3.1) на плоскость, порожденную векторами 1 и i в \mathbb{H} :

$$d\bar{s}_v^2|_{1,i} = dt^2 + A_1(t)^2(\eta_1 + \tilde{\eta}_1)^2.$$

Эта метрика гладкая, если $d\bar{s}_v^2$ гладкая. Далее, заметим, что длина вектора ξ_i равна $\sqrt{2}$, значит $|\xi^i + \tilde{\xi}^i| = 2$, поэтому лемму ?? следует применить к функции $2A_1$. Итак, функция A_1 с необходимостью удовлетворяет условию (1) леммы 3.1. Аналогично, из гладкости $d\bar{s}_v^2$ следует выполнение условия (1) леммы 3.1 для A_2 .

Теперь рассмотрев систему (2.2) при $t \rightarrow 0$ мы немедленно получаем $B_1(0) = B_2(0)$ (из второго уравнения системы) и $B'_1(0) = B'_2(0) = 0$ (из 3-го и 4-го уравнений системы (2.2)). Итак, условия (2) леммы 3.1 также выполнены.

Обратно, пусть условия (1)-(3) леммы 3.1 выполнены. Выражение для dA_i/dt позволяет произвести k -кратное формальное дифференцирование по t . Пусть $V_i^{(k)} = d^k A_i/dt^k$ — рациональная функция от переменных $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, $i = 1, 2, 3$. Аналогично $V_{i+3}^{(k)} = d^k B_i/dt^k$, $i = 1, 2, 3$. Из условий на функции A_i следует, что

существуют функции $a_i(t)$, определенные и C^∞ -гладкие при $t \geq 0$ такие, что $A_i(t) = ta_i(t)$, $|a_i(0)| = 1/2$.

Положим $\tilde{A}_i(t) = -A_i(-t)$ и $\tilde{B}_i(t) = B_i(-t)$ при $t \leq 0$, $i = 1, 2, 3$. Ясно, что полученные функции $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{B}_i(t)$ принадлежат классу C^∞ на промежутке $t \leq 0$ и $\tilde{A}_i(t) = ta_i(-t)$ при $t \leq 0$. Более того, из инвариантности системы (2.3) относительно преобразования $(t, A_i, B_i) \mapsto (-t, -A_i, -B_i)$ следует, что $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{B}_i(t)$ — решение системы (2.3). Далее,

$$\frac{d^k}{dt^k} \Big|_{t>0} (A_i(t)) = V_i^{(k)}(A_i(t), B_i(t)) = t^m \frac{P(a_i(t), B_i(t))}{Q(a_i(t), B_i(t))}, \quad (3.2)$$

где полиномы P и Q имеют ненулевые значения при $t = 0$. Поскольку по условию решения $A_i(t), B_i(t)$ — бесконечно гладкие при $t \geq 0$, то должен существовать предел выражения (3.2) при $t \rightarrow 0$, и, следовательно, $m \geq 0$. Подставив в (3.2) кривую $\tilde{A}_i(t)$, $\tilde{B}_i(t)$ мы видим, что производные всех порядков функций $A_i(t)$ в точке $t = 0$ справа совпадают с соответствующими производными функций $\tilde{A}_i(t)$ в точке $t = 0$ слева (заметим, что отсюда, в частности, следует тривиальность производных четного порядка). Итак, функции $A_i(t)$ и $\tilde{A}_i(t)$ вместе образуют C^∞ -гладкие нечетные функции в окрестности точки $t = 0$. Совершенно аналогично, функции $B(t)$ и $\tilde{B}(t)$ образуют C^∞ -гладкую четную функцию в окрестности точки $t = 0$.

В каждой точке $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ можно разложить стандартный координатный базис $\partial/\partial q_i$ по базису $\frac{q}{|q|}, qi, qj, qk$, двойственному формам $dt, \eta_1 + \tilde{\eta}_1, \eta_2 + \tilde{\eta}_2, \eta_3 + \tilde{\eta}_3$. Это немедленно позволяет посчитать компоненты метрического тензора (3.1) относительно стандартных координат q_0, q_1, q_2, q_3 в \mathbb{H} :

$$g_{00}(q) = \frac{q_0^2 |q|^2 + A_1^2(|q|) q_1^2 + A_2^2(|q|) q_2^2 + A_3^2(|q|) q_3^2}{|q|^4},$$

$$g_{11}(q) = \frac{q_1^2 |q|^2 + A_1^2(|q|) q_0^2 + A_2^2(|q|) q_3^2 + A_3^2(|q|) q_2^2}{|q|^4},$$

$$g_{01} = \frac{q_0 q_1 (|q|^2 - A_1^2(|q|)) + q_2 q_3 (A_2^2(|q|) - A_3^2(|q|))}{|q|^4},$$

$$g_{12} = \frac{q_1 q_2 (|q|^2 - A_3^2(|q|)) + q_0 q_3 (A_1^2(|q|) - A_2^2(|q|))}{|q|^4},$$

(мы приводим лишь некоторые компоненты; остальные получаются из данных соответствующей перестановкой индексов 1, 2, 3). Далее, мы используем следующий несложный факт: если гладкая функция $f(t)$, определенная в окрестности точки $t = 0$ является нечетной, то $f^2(t)$ является гладкой функцией аргумента $u = t^2$ в окрестности точки $t = 0$. Для доказательства надо лишь заметить, что в разложении Тейлора функции f до любого порядка будут присутствовать лишь четные степени переменной t , и $\frac{d}{du} = \frac{1}{t} \frac{d}{dt}$. Отсюда без труда выводится существование и непрерывность в точке $t = 0$ производной любого порядка функции $f(u)$. Поскольку мы доказали, что функции $A_i(t)$ продолжаются до нечетных функций, то тем самым показано, что компоненты метрического тензора, а с ними и метрика (3.1) являются гладкими.

Осталось заметить, что $d\bar{s}^2$ является (обобщенным) скрещенным произведением U и \mathbb{R}^4 со скрещивающими функциями $B_i(t)$, рассматриваемыми как функции на \mathbb{R}^4 . Следовательно, гладкость метрики равносильна гладкости функций $B_i(t)$. Схожими рассуждениями (см. также [25]), доказываем, что гладкость B_i на \mathbb{R}^4 равносильна продолжаемости $B_i(t)$ до четной функции в окрестности $t = 0$, что гарантируется условием (2) леммы. Лемма доказана.

В силу леммы 3.1 для построения регулярной метрики на \mathcal{M} необходима траектория системы (2.6), выходящая из точки $S_0 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Остальные решения получаются из рассмотренного нами случая при помощи симметрий системы (2.6).

Для построения гладкой метрики на \mathcal{M} выполним раздутие сферы S^3 в точке $S_0 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Операция раздутия выглядит следую-

щим образом. В окрестности точки S_0 рассмотрим локальные координаты $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{2}})$ и шар $B = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{2}}) | \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + (\alpha_3 - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 \leq \varepsilon^2\}$ радиуса ε . Его пересечение с плоскостью $\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ это круг $U = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \sum_{i=1}^2 \alpha_i^2 \leq \varepsilon^2\}$ радиуса ε .

В U введем геодезическую систему координат, т.е. рассмотрим две координаты: радиальную $-\varepsilon < r < \varepsilon$ и тангенциальную $s \in S^1$, где $S^1 = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \sum_{i=1}^2 \alpha_i^2 = 1\}$. Таким образом $(\alpha_1, \alpha_2) = rs$. Теперь рассмотрим произведение $(-\varepsilon, \varepsilon) \times S^1$ и действие группы \mathbb{Z}_2 на нем:

$$(r, s) \mapsto (-r, -s).$$

Ясно, что действие свободно и мы получаем фактор пространство $\tilde{U} = (-\varepsilon, \varepsilon) \times S^1 / \mathbb{Z}_2$, представляющее собой лист Мебиуса. Сопоставление

$$\pm(r, s) \mapsto rs$$

определяет гладкое отображение $\tilde{U} \rightarrow U$, которое, очевидно, является диффеоморфизмом $\tilde{U} \setminus P \rightarrow U \setminus S_0$, где $P = \{(r, s) | r = 0\}$ — вложенная в \tilde{U} проективная прямая.

Удалим точку S_0 из окрестности U и приклеим \tilde{U} по построенному выше диффеоморфизму. Говорят, что полученное многообразие получено из S^3 раздутием в точке S_0 .

Обозначим через \tilde{S} сферу S^3 , раздутую в точке S_0 (заметим, что \tilde{S} можно представить, как связную сумму сферы S^3 и вещественного проективного пространства $\mathbb{R}P^3$). Нам потребуются локальные координаты в окрестности P . Рассмотрим $U_i = \{\pm(r, s) | \alpha_i \neq 0\}$, $i = 1, 2$. Положим в окрестности U_i

$$\alpha_i^i = \alpha_i, \alpha_j^i = \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \quad \text{для } i \neq j.$$

Мы, тем самым определили локальные координаты α_1^i, α_2^i на \tilde{U} в окрестности U_i , $i = 1, 2$. Дополним \tilde{U} до трехмерной окрестности точки S_0 , положив $\alpha_3^i = \alpha_3$, $i = 1, 2$.

Лемма 3.3. Для точки $S_0 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ существует однопараметрическое семейство траекторий системы (2.6), выходящих из точки S_0 в область $\alpha_2 \geq \alpha_1 > 0$.

Доказательство. Мы перенесем систему (2.6) на \tilde{S} , после чего проекции траекторий на S^3 будут доставлять необходимые решения. В силу предыдущих рассуждений и результатов леммы 3.1 мы должны исследовать траектории системы (2.6) на \tilde{S} , выходящие из точки $\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 0, \alpha_3^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Пересчитаем поле W в окрестности U_2 в новых координатах. Для простоты положим $x = \alpha_1^2, y = \alpha_2^2, z = \alpha_3^2$. Тогда система (2.6) равносильна следующей:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dv} &= W_1(xy, y, z) - xW_2(xy, y, z) = \tilde{W}_1(x, y, z) \\ \frac{dy}{dv} &= yW_2(xy, y, z) = \tilde{W}_2(x, y, z) \\ \frac{dz}{dv} &= yW_3(xy, y, z) = \tilde{W}_3(x, y, z),\end{aligned}\tag{3.3}$$

где $du = ydv$.

Непосредственно проверяется, что векторное поле \tilde{W} обращается в нуль в точке $p = (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, рассмотрим линеаризацию системы (3.3) в окрестности этой точки:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dv} &= x \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{1}{2}y \\ \frac{dz}{dv} &= -3z.\end{aligned}$$

Таким образом, в окрестности точки $p = (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ существует поверхность, заметаемая траекториями системы (3.3), выходящими экспоненциально по переменной v из точки p . Причем эта поверхность в точке $p = (1, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ касается двумерной плоскости, натянутой на первые два собственных вектора $e_1 = \{1, 0, 0\}$ и $e_2 = \{0, 1, 0\}$, а именно, если рассмотреть фазовую плоскость с координатами $\tilde{x} = x - 1, \tilde{y} = y$, то в ней наши траектории представляют собой параболы $\tilde{y}^2 = 2p\tilde{x}$, выходящие параллельно выделенному направлению e_2 . Каждая такая парабола - это параметризованная кривая $\gamma(v) = (\alpha e^v, \beta e^{\frac{v}{2}})$ или

$\gamma(u) = (\frac{\alpha u^2}{4\beta^2}, \frac{u}{2})$; ее вектор скорости $\frac{d\gamma}{du} = (\frac{\alpha u}{2\beta^2}, \frac{1}{2})$, вектор ускорения $\frac{d^2\gamma}{du^2} = (\frac{\alpha}{2\beta^2}, 0)$, отсюда $\frac{\alpha}{2\beta^2} = \frac{d^2x}{du^2}$.

Нетрудно посчитать, что $\frac{d^2x}{du^2} = f \frac{d}{dt} \left(f \frac{d}{dt} \left(\frac{A_1}{A_2} \right) \right) |_{t=0} = \frac{1}{8} b_0^2 (a_1 - a_2)$, где $b_0 = B_1(0) = B_2(0)$, $a_1 = \frac{A_1'''(0)}{6}$, $a_2 = \frac{A_2'''(0)}{6}$. Тогда фокальный параметр параболы p находится из условия $2p = \frac{\beta^2}{\alpha}$ и мы получаем, что $p = \frac{12}{B_1^2(0)(A_1'''(0) - A_2'''(0))}$.

Отметим, что он однозначно (с точностью до гомотетии) определяет нашу траекторию. При этом, если $p < 0$, то траектория выходит в область $\alpha_1 < \alpha_2$, если же $p > 0$ — в область $\alpha_1 > \alpha_2$. Стоит отметить, что известные ранее частные решения (2.3) и (2.4) системы (2.1) в начальный момент времени также касаются вектора e_2 , при этом решение (2.4) представляет собой прямую $\tilde{x} = 0$ (можно считать, что это решение отвечает предельному значению $p = \pm\infty$), а решение (2.3) содержится в найденном семействе парабол $\tilde{y}^2 = 2p\tilde{x}$ и отвечает значению параметра $p = -1/5$.

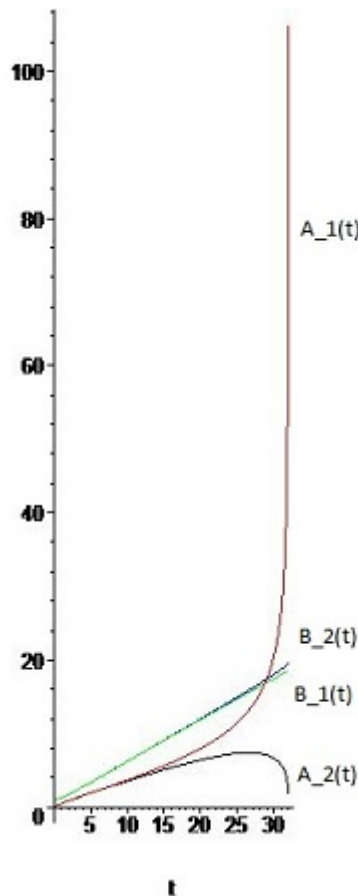
Тем самым мы показали, что в окрестности точки $S_0 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ существует однопараметрическое семейство траекторий системы (6), выходящее из точки S_0 за конечное время по переменной u . Причем это семейство в точке S_0 касается плоскости, параллельной координатной плоскости $O\alpha_1\alpha_2$, и касательный вектор в начальный момент времени имеет вид $\{\alpha_1, \alpha_2, 0, 0\}$, где $\alpha_1 < \alpha_2$. Лемма доказана.

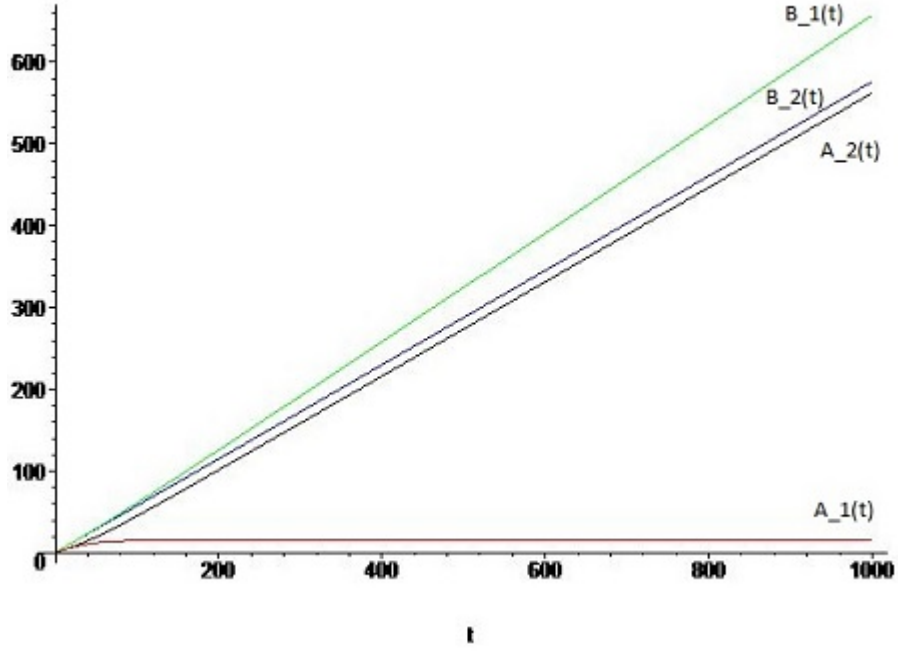
Замечание. Заметим, что наши рассуждения показывают, что существует семейство решений и при $p > 0$, однако численный анализ показывает, что эти решения не могут продолжены на всю область изменения времени t , и, значит, не дают примеров полных римановых метрик. Действительно, условие того, что $p > 0$, равносильно условию $A_1'''(0) - A_2'''(0) > 0$, которое, в свою очередь, эквивалентно условию $\alpha > -\frac{1}{24\gamma^2}$, здесь параметры α и γ — это коэффициенты, участвующие в разложении неизвестных функций $A_i(t), B_i(t)$ в ряд Тейлора в

окрестности нуля. То есть, если

$$\begin{aligned} A_1(t) &= \frac{1}{2}t + \alpha t^3, \\ A_2(t) &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{8\gamma^2}\right)t^3, \\ B_1(t) &= \gamma + \frac{1}{4\gamma}t^2, \\ B_2(t) &= \gamma + \frac{1}{4\gamma}t^2, \end{aligned}$$

- указанное разложение, и параметр $\gamma = 1$, то при значениях параметра $\alpha > -\frac{1}{24\gamma^2} = -0,041(6)$ происходит обращение в нуль одной из функций, задающих метрику ($A_2(t)$), при этом функция $A_1(t)$ уходит к бесконечности, и, как следствие, функции $B_1(t)$ и $B_2(t)$ не могут быть продолжены для всех t . На приведенных ниже графиках показаны решения при значениях параметра $\alpha = -0,041$ и $\alpha = -0,042$ соответственно.





Таким образом, класс решений, отвечающий значению $p > 0$, не содержит новых примеров полных метрик с группой голономии G_2 , и в диссертации мы не исследуем глобальное поведение соответствующих траекторий.

Лемма 3.4. *Траектория системы (2.6), определенная начальной точкой $S_0 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, стремится при $u \rightarrow \infty$ к стационарной точке $S_\infty = (0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}})$.*

Доказательство. Введем обозначения для следующих точек в S^3 :

$$O = (0, 0, 1, 0), \quad A = (0, 0, 0, 1), \quad B = (1, 0, 0, 0), \quad C = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Рассмотрим область $\Pi \subset S^3$, определенную неравенствами:

$$\Pi : \alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что область Π является сферическим тетраэдром

$(OABC)$. Границами области служат следующие множества:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= (OAB) = \{\alpha_4 \geq 0, \alpha_2 = 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_2 &= (OBC) = \{\alpha_2 = \alpha_4, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_3 &= (OAC) = \{\alpha_4 - \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_4 &= (ABC) = \{\alpha_4 - \alpha_2 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 = 0\}.\end{aligned}$$

Начальная точка $S_0 = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \in (OA)$. При малых u траектория системы (2.6), определенная начальной точкой S_0 попадает в Π .

Рассмотрим сначала возможность достижения траекторией границы области Π за конечное время. Рассмотрим множество Π_1 и определим функцию F_1 на S^3 :

$$F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}.$$

В начальный момент $F_1(S_0) = 0$. Поскольку $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = f(t)^{-3}F(S_0) < 0$, то из соотношения 2) леммы 2.6 вытекает, что производная функции F_1 отрицательна, и, значит, она строго убывает вдоль траекторий системы (2.6), идущих внутри области Π . На множестве $\Pi_1 \setminus ((AB) \cup (OB))$ функция $F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = 0$, следовательно, траектория не может вернуться и пересечь эту стенку, за исключением, возможно, дуг $(AB) = \{\alpha_3 = 0\}$ и $(OB) = \{\alpha_4 = 0\}$. Далее, на Π_2 мы имеем

$$\frac{d(\alpha_4 - \alpha_2)}{du} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0,$$

при $\alpha_1 \neq 0$, т.е траектория не может пересечь некоторую окрестность множества Π_2 за конечное время, или даже подойти к ней достаточно близко, за исключением дуги $(OC) = \{\alpha_1 = 0\}$. Заметим, что это же соображение заодно исключает окрестность дуги (OB) . Наконец, на множестве Π_4 производная функции $\alpha_3(u)$ строго положительна и отграничена от нуля:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_3}{du} &= \frac{d}{du} \left(\frac{B_1}{f} \right) = f \frac{d}{dt} \left(\frac{B_1}{f} \right) \Big|_{B_1=0} = \frac{2A_1^2(A_2^2+B_2^2)+3A_2^4+2A_2^2B_2^2+3B_2^4}{2A_2B_2(A_1^2+A_2^2+B_2^2)} = \\ &= \frac{2\alpha_1^2(\alpha_2^2+\alpha_4^2)+3\alpha_2^4+2\alpha_2^2\alpha_4^2+3\alpha_4^4}{2\alpha_2\alpha_4(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_4^2)},\end{aligned}$$

поэтому траектория не пересекает Π_4 и некоторую ее окрестность (заметим, что тем самым мы исключили и остававшуюся возможность приближения к дуге (AB)). Поскольку Π_3 является инвариантным подмножеством системы (2.6), то траектория не может пересечь Π_3 за конечное время (в том числе дугу (OC)).

Допустим теперь, что C — предельное множество рассматриваемой траектории. Тогда в C могут попасть:

1) стационарные или условно стационарные точки системы (2.6) (т. е., в соответствии с леммами 2.3 и 2.4 имеются только две такие возможности: точки S_∞ и $S_1 = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}})$);

2) точки, лежащие на критическом уровне функции F_1 ;

3) наконец, пусть $p \in C$ и не принадлежит к типу 1) или 2). Если $p \in \text{Int}\Pi$, то траектория имеет в точке p ненулевую скорость и в силу убывания F_1 не может больше вернуться в некоторую окрестность точки p — противоречие с предельностью p . Итак, $p \in \partial\Pi$. Аналогичное соображение показывает, что p лежит на минимальном уровне F_1 .

Совершенно аналогично, рассмотрим функцию $F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln \frac{\alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}$. Тогда из соотношения 3) леммы 2.6 следует, что F_2 убывает вдоль траектории, и значит множество $C \cap \partial\Pi$ лежит на минимальном уровне F_2 в Π . Заметим, что минимальным (в Π) уровнем функции F_2 служит множество $\Pi_2 \cup \Pi_4$. Выше было показано, что нельзя приблизиться к окрестности Π_4 , следовательно, возможен только случай $C \cap \partial\Pi \subset \Pi_2$.

Далее, из соотношения 4) леммы 2.6 следует, что функция $F_3 = \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_4}$ убывает вдоль траектории (для достаточно больших u) к минимальному значению на Π_2 , которое достигается при $\alpha_1 = 0$. Итак, наша траектория стремится при $u \rightarrow \infty$ к инвариантному одномерному множеству $\Pi_2 \cap \Pi_3 = (OC)$. Соотношение 5) леммы 2.6 показывает, что в окрестности (OC) функция $F_4 = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ возрастает при $F_4 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ и убывает

при $F_4 \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, следовательно $C \cap \partial\Pi$ может содержать только точку S_∞ , определяемую условием $F_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Итак, мы пришли к выводу, что рассматриваемая траектория сходится либо к S_1 , либо к S_∞ . Для завершения доказательства леммы нам осталось показать, что сходимость к S_1 не имеет места.

Рассмотрим линеаризацию системы (2.6) в окрестности стационарной точки S_1 в локальных координатах $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Прямое вычисление показывает, что линеаризованная система имеет три собственных числа кратности один:

$$\lambda_1 = -2\sqrt{2}, \lambda_2 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{290}, \lambda_3 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{290}.$$

Таким образом, в окрестности точки S_1 существует (локально определенная) поверхность, заметаемая траекториями, входящими в точку S_1 , причем эта поверхность в точке S_1 касается двумерной плоскости, натянутой на первые два собственных вектора e_1 и e_2 . Остальные траектории в окрестности S_1 выходят из S_1 . При этом первый собственный вектор имеет координаты (в \mathbb{R}^4): $e_1 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, 1)$ и является касательным к траектории, которая задается как $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$. Нетрудно увидеть, что собственному числу λ_1 отвечают в точности решения (2.4) и (2.5) (обе траектории входят в точку S_1 с противоположных сторон; траектория (2.4) отвечает $F < 0$, траектория (2.5) — $F > 0$). Поскольку $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, то остальные входящие в S_1 траектории (кроме одной) касаются в точке S_1 траектории (2.4) или (2.5). Упомянутая нами единственная не касательная к (2.4), (2.5) траектория отвечает собственному числу λ_2 , и непосредственно проверяется, что она лежит на инвариантной поверхности $F = 0$, и следовательно не может совпадать с нашей траекторией.

Рассмотрим пару функций: $G_1 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3$ и $G_2 = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$. Начальная точка S_0 и стационарная точка S_1 лежат в области $\{G_1 = 0, G_2 = 0\}$. Непосредственное вычисление показывает,

что вектор e_2 направлен внутрь областей $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 < 0\}$ (область зависит от выбора направления e_2 : $e_2 = \pm\{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{145}}{10}, 1, -\frac{11\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{145}}{6}, \frac{5}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{145}}{5\sqrt{3}}\}$).

Легко проверить, что $\frac{d}{du}G_1 = -\frac{2}{\alpha_2}G_2$, в точках, где $G_1 = 0$; и $\frac{d}{du}G_2 = -\frac{2}{\alpha_2}G_1$ в тех точках, где $G_2 = 0$. Значит траектория может достичь точки S_1 только находясь в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$, если она перейдет в одну из областей $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 > 0\}$, то уже не сможет из них выйти (отметим, что S_∞ лежит в $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$). В том числе, это соображение определяет направление вектора e_2 — он направлен внутрь области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$.

С другой стороны, в начальный момент времени касательный вектор к нашей траектории имеет вид $\{\alpha_1, \alpha_2, 0, 0\}$, $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ и поэтому он направлен в одну из областей $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 > 0\}$ в зависимости от знака $(\alpha_2 - \alpha_1)$. Осталось только вспомнить, что $\alpha_2 > \alpha_1$ (см. доказательство леммы 3.2) и, значит, траектория сразу же входит в область $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$, где единственной предельной точкой является точка S_∞ . Лемма доказана.

Основная теорема теперь является непосредственным следствием лемм 3.3 и 3.4: начальная точка траектории определяет топологическое строение пространства, на котором определена наша метрика, группа голономии которой очевидно совпадает со всей G_2 . Предельная точка S_∞ означает, что функция A_1 аппроксимируется на бесконечности константой, а остальные функции, определяющие метрику, — линейными непостоянными функциями. Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.1. *Для каждого параметра $p < 0$ существует полная риманова метрика вида $d\bar{s}^2$ с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$, такая, что $p = \frac{12}{B_1^2(0)(A_1'''(0) - A_2'''(0))}$. При $t \rightarrow \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ — конус над произведением сфер.*

Глава 4

Метрики с группой голономии G_2 , определенные на $S^3 \times H^4$.

Тип 2. $B_1(0) = 0$, $B_2(0) \neq 0$, $A_i(0) \neq 0$. Рассмотрим свободное действие группы $U(1) = S^1$ на M :

$$z \in U(1) : (U, V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} U, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} V \right).$$

Понятно, что орбиты этого действия совпадают с интегральными кривыми поля $\xi_1 - \tilde{\xi}_1$. Значит можно продолжить метрику $d\bar{s}^2$ на $[0, \infty) \times M$, затянув при $t = 0$ каждую орбиту в точку. Дiffeоморфизм

$$\phi : M \rightarrow M : (U, V) \mapsto (U, U^{-1}V).$$

преобразует рассмотренное выше действие $U(1)$ в действие следующего вида:

$$z \in U(1) : (U, V) \mapsto \left(\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} U, V \right).$$

Факторизация по действию $U(1)$ на первом сомножителе задаёт расслоение Хопфа $G = S^3 \rightarrow S^2 = G/U(1)$. После затягивания в точку орбит этого действия при $t = 0$ в пространстве $[0, \infty) \times G$, мы получаем цилиндр расслоения Хопфа, который, как нетрудно увидеть,

гомеоморфен линейному \mathbb{C} -расслоению H над S^2 , называемому каноническим (или тавтологическим) расслоением над S^2 . Это расслоение однозначно определяется условием, что его первый класс Чженя является образующим в $H^2(S^2)$. Поскольку на втором сомножителе действие тривиально, то получаем, что метрика $d\bar{s}^2$ продолжается на пространство $H \times G$.

Рассмотрим теперь циклическую подгруппу \mathbb{Z}_4 в $U(1)$.

$$\mathbb{Z}_4 = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Группа \mathbb{Z}_4 (следом за $U(1)$) действует на M , поэтому можно распространить это действие на все пространство \bar{M} . Поскольку данное дискретное действие согласовано с затягиванием орбит при $t = 0$, то мы получаем действие \mathbb{Z}_4 на $H \times G$. Фактор-пространство $(H \times G)/\mathbb{Z}_4$ естественным образом диффеоморфно $\mathcal{M} = H^4 \times G$, где H^4 — четвертая тензорная степень расслоения H . Итак, в рассматриваемом случае метрика $d\bar{s}^2$ может быть продолжена на многообразие \mathcal{M} .

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 4(5) из [21].

Лемма 4.1. Для того, чтобы метрика $d\bar{s}^2$ продолжалась до гладкой метрики на \mathcal{M} , необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

- (1) $B_1(0) = 0, |B'_1(0)| = 2$;
- (2) $A_2(0) = B_2(0) \neq 0, A'_2(0) = -B'_2(0)$,
- (3) $A_1(0) \neq 0, A'_1(0) = 0$;
- (4) функции A_i, B_i знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$.

Доказательство. Доказательство проводится в целом аналогично доказательству леммы 3.1. Как и ранее, обозначим через B подмногообразие в \mathcal{M} , определяемое уравнением $\{t = 0\}$. Как следует из рассуждений в начале главы, B диффеоморфно $S^3 \times S^2$.

Чтобы получить риманову метрику на \mathcal{M} необходимо, чтобы функции $A_i(t)$, $B(t)_i$ были знакоопределены на промежутке $(0, \infty)$ и $B_1(0) = 0$, $A_1(0) \neq 0$, $A_2(0) \neq 0$ и $B_2(0) \neq 0$. Вне $B \subset \mathcal{M}$ гладкость метрики $d\bar{s}^2$ равносильна гладкости функций $A_i(t)$, $B_i(t)$ при $t > 0$. Выясним, что происходит в окрестности B .

Пусть $S \subset S^3 \times S^3$ — окружность, интегрирующая поле $\xi^1 - \tilde{\xi}^1$. Обозначим через $\pi : S^3 \times S^2 \rightarrow S^3$ — проекцию со слоем $S^2 = \Delta S^3 / S$ (здесь ΔS^3 — диагонально вложенная в $S^3 \times S^3$ подгруппа S^3). Пусть $q \in S^3$. Рассмотрим небольшую окрестность U точки q . Если окрестность U выбрана достаточно малой, то $\pi^{-1}(U) = (U \times S^2) / \mathbb{Z}_4$. Тогда небольшая окрестность точки $\pi^{-1}(q)$ в \mathcal{M} диффеоморфна $(U \times (S^3 \times \mathbb{C}) / S) / \mathbb{Z}_4$ и гладкость метрики $d\bar{s}^2$ равносильна гладкости метрики, поднятой на каждую такую окрестность.

Положим

$$d\bar{s}_v^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 B_i(t)^2 (\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2. \quad (4.1)$$

Метрика $d\bar{s}^2$ представляет собой обобщенное скрещенное произведение метрики (4.1), естественно интерпретируемой на пространстве $(S^3 \times \mathbb{C}) / S$, и метрики g' на U , со скрещивающими функциями $A_i(t)$. Если мы ограничим метрику (4.1) на \mathbb{C} (сравните с леммой 3.1), то из и из леммы 3.2 главы 3 следует, что функция $2B_1$ должна иметь единичную по модулю производную в начальной точке, если мы хотим гладкости нашей метрики на $U \times (S^3 \times \mathbb{C}) / S$. Дополнительная факторизация по \mathbb{Z}_4 означает, что функция $8B_1$ должна иметь единичную по модулю производную при $t = 0$, что дает условие (1) леммы 4.1. Далее, из третьего уравнения (2.2) при $t \rightarrow 0$ следует, что $A_2(0) = B_2(0)$. Тогда из первого уравнения системы (2.2) немедленно следует, что $A'_1(0) = 0$, и сложив второе и четвертое уравнения мы получим $A'_2(0) = -B'_2(0)$. Итак, из гладкости метрики $d\bar{s}^2$ следуют условия (1)-(4) леммы 4.1.

Обратно, пусть гладкие на $[0, \infty)$ функции A_i, B_i удовлетворяют всем условиям леммы 4.1. Как и в лемме 3.1 показывается, что функций A_1 продолжается до четной гладкой функции аргумента t , поэтому для доказательства гладкости метрики скрещенного произведения $d\bar{s}^2$ достаточно доказать гладкость следующей метрики:

$$d\bar{s}_b^2 = dt^2 + \sum_{i=1}^3 B_i(t)^2(\eta_i - \tilde{\eta}_i)^2 + \sum_{i=2}^3 A_i(t)^2(\eta_i + \tilde{\eta}_i)^2. \quad (4.2).$$

Рассмотрим проекцию $p : (S^3 \times S^3 \times \mathbb{C})/S \rightarrow (S^3 \times S^3)/S$. Ясно, что $(S^3 \times S^3 \times \mathbb{C})/S$ диффеоморфно $S^3 \times H$, при этом расслоение p — это каноническое расслоение над двумерной сферой S^3/S , являющееся римановой субмерсией со слоем, диффеоморфным \mathbb{C} . Пусть \mathcal{V} и \mathcal{H} — взаимно ортогональные распределения вертикальных и горизонтальных векторов субмерсии p , соответственно. Ограничение метрики (4.2) на \mathcal{V} выглядит следующим образом:

$$dt^2 + B_1^2(t)(\eta_1 - \tilde{\eta}_1)^2. \quad (4.3)$$

Как в доказательстве леммы 3.1 показывается, что $B_1(t)$ продолжается до гладкой нечетной функции, откуда следует гладкость метрики (4.3) на \mathcal{V} . Рассмотрим небольшую окрестность $V \subset (S^3 \times S^3)/S$ и точку (орбиту действия) $(g, h)S \in V$. Прообраз точки $(g, h)S$ при отображении p выглядит как $(g, h, z)S \in p^{-1}((g, h)S)$, где $z \in \mathbb{C}$. Горизонтальный касательный вектор в точке $(g, h, z)S$ можно отождествить с вектором (gX, hX') , где $X, X' \in \mathfrak{sp}(1) = \text{Im}(\mathbb{H})$, $X = x_2j + x_3k$, $x_i \in \mathbb{R}$, $X' = x'_2j + x'_3k$, $x'_i \in \mathbb{R}$. При этом для $s \in S$ векторы (gX, hX') и (gsY, hsY') проектируются в один и тот же вектор, касательные к $(S^3 \times S^3)/S$ в точке $(g, h)S$ тогда и только тогда, когда $Y = s^{-1}Xs$, $Y' = s^{-1}X's$. Рассмотрим поля X_1, X'_1 и X_2, X'_2 на $(S^3 \times S^3 \times \mathbb{C})/S$, определив их в каждой точке $(g, h, z)s$ как $(g, h)(s^{-1}(j, j)s)$, $(g, h)(s^{-1}(j, -j)s)$ и $(g, h)(s^{-1}(k, k)s)$, $(g, h)(s^{-1}(k, -k)s)$, соответственно. Тогда поля X_1, X'_1, X_2, X'_2 проектируются в некоторые гладкие

поля $\tilde{X}_1, \tilde{X}'_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}'_2$ в окрестности V . Ясно, что поля $\tilde{X}_1, \tilde{X}'_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}'_2$ образуют базис модуля гладких векторных полей в окрестности V и нам нужно проверить гладкость компонент $g_{ij} = g(\tilde{X}_i, \tilde{X}_j) = g(X_i, X_j)$ (аналогично $g_{i'j'}, g_{ij'}$):

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{A_2^2(|w|) + B_2^2(|w|)}{2} + \frac{x}{2|w|}(A_2^2(|w|) - B_2^2(|w|)), \\ g_{2'2'} &= \frac{A_2^2(|w|) + B_2^2(|w|)}{2} + \frac{x}{2|w|}(B_2^2(|w|) - A_2^2(|w|)), \\ g_{12'} &= \frac{y}{2|w|}(A_2^2(|w|) - B_2^2(|w|)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $s = e^{i\phi} \in S$, $t = |z|$ и мы положили $w = x + yi = te^{4i\phi}$.

Доопределим функцию $A_2(t)$ при $t \leq 0$, положив $A_2(t) = -B_2(-t)$ при $t \leq 0$, и аналогично положим $B_2(t) = -A_2(-t)$ при $t \leq 0$. Точно также как в доказательстве леммы 3.1, показывается, что продолженные таким образом функции $A_2(t)$ и $B_2(t)$ являются C^∞ -гладкими в окрестности точки $t = 0$. Отсюда, в частности, вытекает, что четные коэффициенты в разложении функций A_2 и B_2 в полином Тейлора противоположны по знаку, а нечетные — совпадают. Далее уже нетрудно показать, что функция $A_2^2 + B_2^2$ является гладкой функцией аргумента $|w|^2$. Совершенно аналогично, функция $\frac{A_2^2 - B_2^2}{|w|}$ является гладкой функцией аргумента $|w|^2$. Следовательно, функции, входящие в правые части (4.3) — гладкие, откуда следует гладкость ограничения метрики (4.2) на \mathcal{H} , и гладкость $d\bar{s}^2$. Лемма доказана.

В силу леммы 4.1 регулярной метрике на \mathcal{M} может отвечать только траектория системы (2.6), выходящая из точки $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, где $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$. В силу симметрий леммы 2.2, можно считать, что $\lambda, \mu > 0$.

Лемма 4.2. *Для любой рассмотренной выше точки $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$ существует единственная гладкая траектория системы (2.6), выходящая из точки S_0 в область $\alpha_3 > 0, \alpha_4 > \alpha_2$.*

Доказательство. Пусть $J = \{(\mu, \lambda, 0, \lambda) | \mu > 0, \lambda > 0, 2\lambda^2 + \mu^2 = 1\}$ — дуга окружности, на которой выбирается точка S_0 . Обозначим через

U открытый круг в \mathbb{R}^2 с координатами $x = \alpha_3$, $y = \alpha_4 - \alpha_2$ радиуса ε с центром в нуле. Тогда в окрестности дуги J можно рассмотреть локальные координаты $x, y, z = \alpha_1$. В этих координатах поле W имеет следующие компоненты:

$$W_x = W_3, \quad W_y = W_2 - W_4, \quad W_z = W_1,$$

где

$$W_j(S) = V_j(S) - \langle V(S), S \rangle \alpha_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

$$S = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$$

$$\left(z, \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 - 2x^2 - y^2 - 2z^2} - y \right), x, \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 - 2x^2 - y^2 - 2z^2} + y \right) \right),$$

а формулы для $V_i(S)$ получаются соответствующей заменой координат. Поскольку в точках J изначальная система имеет особенность, то мы рассмотрим в окрестности $J \times U$ модифицированную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dv} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xW_x \\ xW_y \\ xW_z \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Очевидно, что траектории системы (4.5) совпадают с траекториями системы (2.6) с точностью до замены параметра $du = xdv$. Векторное поле xW является гладким в окрестности $J \times U$, и непосредственное вычисление показывает, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ стационарными точками системы (4.5) в $J \times U$ будут в точности точки интервала J . Рассмотрим линеаризацию системы (4.5) в окрестности точки S_0 :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dv} &= 2x, \\ \frac{dy}{dv} &= \frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} - y, \\ \frac{dz}{dv} &= 0. \end{aligned}$$

Линеаризованная система имеет три собственных вектора $e_1 = (3, \frac{\mu}{\sqrt{2-2\mu^2}}, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ с собственными числами 2, -1 и 0, соответственно.

Непосредственное вычисление показывает, что если $(x, y, z) \rightarrow S_0 = (0, 0, \mu)$, то $\langle (0, 0, 1), \frac{xW}{|xW|} \rangle \rightarrow 0$, т. е. угол между вектором xW и вектором, касательным к дуге J , стремится к $\pi/2$ при подходе к точкам J . Это позволяет восстановить «фазовый портрет» системы (4.5) в окрестности $J \times U$ аналогично тому, как это делается в классическом случае. А именно, рассмотрим область Γ в $J \times U$, ограниченную параболическими цилиндрами $-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y + \alpha x^2 = 0$, $-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y - \alpha x^2 = 0$ и плоскостью $x = \delta$, где $\alpha, \delta > 0$. Эти цилиндры на фиксированном уровне z представляют собой параболы, касающиеся по вектору e_1 . Легко посчитать, что в точках первого параболического цилиндра

$$\frac{d}{dv} \left(-\frac{\mu x}{\sqrt{2-2\mu^2}} + 3y + \alpha x^2 \right) = 5\alpha x^2 + O(x^2 + y^2) \geq 0,$$

если выбрать константу α достаточно большой (причем равенство достигается только на J). Значит, траектории пересекают первый параболический цилиндр, проходя снаружи области Γ внутрь. Аналогично показывается, что траектории системы (4.5) пересекают второй параболический цилиндр, ограничивающий область Γ также проходя снаружи области внутрь. Тогда для каждого значения $z = z_0$ найдется траектория, кончающаяся на плоской стенке области в точке (δ, y, z_0) , которая выходит из точки на оси J , если выбрать δ достаточно малым, а α достаточно большим (это следует из того, что такая траектория не может сильно отклониться вдоль J , поскольку угол, который она составляет с J стремится к $\pi/2$). Следовательно, если фиксировать точку $S_0 = (0, 0, \mu)$ на дуге J , то при уменьшении δ и увеличении α можно найти траекторию, выходящую экспоненциально с порядком e^{2v} из точки S_0 в область $x > 0$. Аналогично, будет существовать

траектория, выходящая из S_0 с противоположной стороны, т.е. со стороны области $x < 0$. Поскольку порядок сходимости x к нулю равен e^{-2v} , то относительно параметра u произойдет «выход» из точки S_0 за конечное время. аналогичными рассуждениями показывается единственность каждой из траекторий.

Заметим теперь, что при переходе от параметра u к параметру v происходит обращение ориентации траекторий в области $x < 0$. Это означает, что для каждой точки S_0 существует единственная траектория, за конечное время выходящая из точки S_0 и входящая в область $x > 0$. При этом выходящая из S_0 траектория будет касаться вектора e_1 , т.е. при малых u будем иметь $\alpha_4 > \alpha_2$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Траектория системы (2.6), определенная начальной точкой $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, $\lambda, \mu > 0$, $2\lambda^2 + \mu^2 = 1$, стремится при $u \rightarrow \infty$ к стационарной точке $S_\infty = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)$.*

Доказательство. Доказательство шриводится аналогично доказательству Леммы 3.4 Главы 3, однако для полноты и строгости изложения мы приводим его полностью. Введем обозначения для следующих точек в S^3 так же, как это сделано в доказательстве Леммы 3.4 Главы 3:

$$O = (0, 0, 1, 0), \quad A = (0, 0, 0, 1), \quad B = (1, 0, 0, 0), \quad C = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Рассмотрим область $\Pi \subset S^3$, определенную неравенствами:

$$\Pi : \alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0.$$

Нетрудно убедиться, что область Π является сферической пирамидой $(OABC)$. Границами области служат следующие множества:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= (OAB) = \{\alpha_2 = 0, \alpha_4 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_2 &= (OBC) = \{\alpha_4 = \alpha_2, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_3 &= (OAC) = \{\alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 = 0, \alpha_3 \geq 0\}, \\ \Pi_4 &= (ABC) = \{\alpha_4 \geq \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 \geq 0, \alpha_3 = 0\}. \end{aligned}$$

Начальная точка $S_0 = (\mu, \lambda, 0, \lambda) \in (BC)$. Согласно лемме 4.2 при всех малых $u > 0$ траектория системы (2.6), определенная начальной точкой S_0 , находится внутри области Π .

Рассмотрим сначала возможность достижения траекторией границы области Π за конечное время. На $\Pi_1 \setminus ((AB) \cup (OB))$ интеграл $F(t) = -\alpha_3 \alpha_4^2 f(t)^3$ строго отрицателен, а в начальной точке $F(S_0) = 2\lambda^2 \mu > 0$, значит траектория не может пересечь некоторую окрестность этой стенки, за исключением возможно дуг (AB) и (OB) . Далее, на Π_2 мы имеем

$$\frac{d(\alpha_4 - \alpha_2)}{du} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} > 0,$$

при $\alpha_1 \neq 0$, т.е траектория не может пересечь некоторую окрестность множества Π_2 за конечное время, или даже подойти к ней достаточно близко, за исключением дуги (OC) . Заметим, что это соображение заодно исключает окрестность дуги (OB) . Наконец, на множестве Π_4 производная функции $\alpha_3(t)$ строго положительна и отграничена от нуля, поэтому траектория не пересекает Π_4 и некоторую ее окрестность (заметим, что тем самым мы исключили и остававшуюся возможность приближения к дуге (AB)). Поскольку Π_3 является инвариантным подмножеством системы (2.6), то траектория не может пересечь Π_3 за конечно время (в том числе дугу (OC)).

Определим функцию F_1 на S^3 : $F_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_4}{F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)}$. Поскольку $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = f(t)^{-3} F(S_0) > 0$, то из соотношения 2) леммы 2.6 вытекает, что функция F_1 строго возрастает вдоль траекторий системы (2.6), идущих внутри области Π . Допустим, что C — предельное множество рассматриваемой траектории. Тогда, в C могут попасть: либо стационарные и условно стационарные точки системы (2.6) (т. е., в соответствии с леммами 2.3 и 2.4 мы имеем только две такие возможности: точки S_∞ и $S_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$); либо точки, лежащие на критическом уровне функции F_1 (ясно, что внутри

П таких точек нет, поскольку в окрестности каждой внутренней в П точки из C можно отграничить от нуля производную $F_1(u)$; наконец, все точки C , лежащие на границе П должны находится на максимальном уровне функции F_1 . Совершенно аналогично, рассмотрим функцию $F_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \ln \frac{\alpha_3(\alpha_4^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_4 \alpha_2 \alpha_1}$. Тогда из соотношения 3) леммы 2.6 следует, что F_2 возрастает вдоль траектории, и значит множество $C \cap \partial\Pi$ лежит на максимальном уровне F_2 в П. Заметим, что максимальным (в П) уровнем функции F_2 служит множество $\Pi_3 \cup \Pi_1$. Выше было показано, что нельзя приблизиться к окрестности к $\Pi_1 \setminus (OA)$, следовательно, возможен только случай $C \cap \partial\Pi \subset \Pi_3$.

Далее, из соотношения 4) леммы 2.6 следует, что функция $F_3 = \ln \frac{\alpha_2}{\alpha_4}$ возрастает вдоль траектории (для достаточно больших u) к максимальному значению на Π_3 , которое достигается при $\alpha_2 = \alpha_4$. Итак наша траектория стремится при $u \rightarrow \infty$ к инвариантному одномерному множеству $\Pi_3 \cap \Pi_2 = (OC)$. Соотношение 5) леммы 2.6 показывает, что в окрестности (OC) функция $F_4 = \frac{\alpha_3}{\alpha_4}$ возрастает при $F_4 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ и убывает при $F_4 \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, следовательно $C \cap \partial\Pi$ может содержать только точку S_∞ , определяемую условием $F_4 = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Итак, мы пришли к выводу, что рассматриваемая траектория сходится либо к S_1 , либо к S_∞ . Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что сходимость к S_1 не имеет места.

Прямое вычисление показывает, что линеаризация системы (2.6) в окрестности стационарной точки S_1 имеет три собственных числа кратности один:

$$\lambda_1 = -2\sqrt{2}, \lambda_2 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}\sqrt{290}, \lambda_3 = -\frac{7}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{290}.$$

Таким образом, в окрестности точки S_1 существует (локально определенная) поверхность, заметаемая траекториями, входящими в точку S_1 , причем эта поверхность в точке S_1 касается двумерной плоскости, натянутой на первые два собственных вектора e_1 и e_2 . Остальные тра-

ектории в окрестности S_1 выходят из S_1 . При этом первый собственный вектор имеет координаты (в \mathbb{R}^4): $e_1 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1, 1)$ и является касательным к траектории, которая задается как $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$. Нетрудно увидеть, что собственному числу λ_1 отвечают в точности решения (2.4) и (2.5) (обе траектории входят в точку S_1 с противоположных сторон; траектория (2.4) отвечает $F < 0$, траектория (2.5) — $F > 0$). Поскольку $|\lambda_2| > |\lambda_1|$, то остальные входящие в S_1 траектории (кроме одной) касаются в точке S_1 траектории (2.4) или (2.5). Упомянутая нами единственная не касательная к (2.4), (2.5) траектория отвечает собственному числу λ_2 , и непосредственно проверяется, что она лежит на инвариантной поверхности $F = 0$, и следовательно на может совпадать с нашей траекторией.

Рассмотрим пару функций: $G_1 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3$ и $G_2 = \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2\alpha_3$. Начальная точка S_0 находится в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$, точка S_1 лежит в $\{G_1 = 0, G_2 = 0\}$. Непосредственное вычисление показывает, что вектор e_2 направлен внутрь областей $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 < 0\}$ (область зависит от выбора направления e_2 ; мы не приводим здесь явные координаты e_2 , чтобы избежать громоздких формул). Легко проверить, что $\frac{d}{du}G_1 = -\frac{2}{\alpha_2}G_2$, в точках, где $G_1 = 0$; и $\frac{d}{du}G_2 = -\frac{2}{\alpha_1}G_1$ в тех точках, где $G_2 = 0$. Значит траектория может достичь точки S_1 только находясь в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$, если она перейдет в одну из областей $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$ либо $\{G_1 < 0, G_2 > 0\}$, то уже не сможет из них выйти (отметим, что S_∞ лежит в $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$). В том числе, это соображение определяет направление вектора e_2 — он направлен внутрь области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$.

Теперь, рассмотрим функцию $F_5 = \alpha_4^2 - \alpha_3^2$. Очевидно, что $F_5(S_0) = \lambda^2 > 0$, $F_5(S_1) = 0$. Далее,

$$\frac{d}{du}F_5 = \frac{G_2}{2\alpha_1\alpha_4},$$

в тех точках, где $F_5 = 0$. Таким образом, на поверхности уровня

$\{F_5 = 0\}$ производная функции вдоль траектории неотрицательна и обращается в нуль в точности в точках, в которых $\alpha_1 = \alpha_2$ и $\alpha_3 = \alpha_4$. Поскольку эти точки принадлежат траектории решения (2.4), то рассматриваемая траектория не может выйти за пределы области $\{F_5 > 0\}$. С другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что вектор e_2 (по которому приходят траектории к точке S_1) направлен внутрь области $\{F_5 < 0\}$. Таким образом, находясь в области $\{G_1 > 0, G_2 > 0\}$ траектория не может подойти к S_1 . Остается одна возможность: выход в область $\{G_1 > 0, G_2 < 0\}$, где единственной предельной точкой является S_∞ . Лемма доказана.

Основная теорема теперь является непосредственным следствием лемм 4.2 и 4.3: начальная точка траектории определяет топологическое строение пространства, на котором определена наша метрика, группа голономии которой очевидно совпадает со всей G_2 . Предельная точка S_∞ означает, что функция B_1 аппроксимируется на бесконечности константой, а остальные функции, определяющие метрику, — линейными непостоянными функциями, что дает на бесконечности произведение S^1 и конуса над $S^2 \times S^3$. Таким образом, доказана

Теорема 4.1. *Существует однопараметрическое семейство попарно негомотетичных полных римановых метрик вида $d\tilde{s}^2$ с группой голономии G_2 на $H^4 \times S^3$, причем метрики можно параметризовать набором начальных данных $(A_1(0), A_2(0), B_1(0), B_2(0)) = (\mu, \lambda, 0, \lambda)$, где $\lambda, \mu > 0$ и $\mu^2 + \lambda^2 = 1$.*

При $t \rightarrow \infty$ метрики данного семейства сколь угодно близко аппроксимируются прямым произведением $S^1 \times C(S^2 \times S^3)$, где $C(S^2 \times S^3)$ — конус над произведением сфер. При этом сфера S^2 возникает как факторизация диагонально вложенной в $S^3 \times S^3$ трехмерной сферы по действию окружности, соответствующей векторному полю $\xi^1 + \tilde{\xi}_1$.

Список литературы

- [1] Berger, M. Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes / M. Berger. — Bull. Soc. Math. France. — 1955.— V. 83. — P. 279–330.
- [2] Borel, A. Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes / A. Borel, A. Lichnerowicz. — C. R. Acad. Sci. Paris. — 1952. — V. 234. — P. 1835–1837.
- [3] Brandhuber, A. Gauge theory at large N and new G_2 holonomy metrics / A. Brandhuber, J. Gomis, S.S. Gubser, S. Gukov. — Nucl. Phys. B. — 2001. — V. 611(1–3). — P. 179–204. — <http://arxiv.org/abs/hep-th/0106034v2>
- [4] Brandhuber, A. G_2 holonomy spaces from invariant three-forms / A. Brandhuber. — Nucl. Phys. B. — 2002. — V. 629(1–3). — P. 393–416. — <http://arxiv.org/abs/hep-th/0112113v2>
- [5] Bryant, R.L. On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy / R.L. Bryant, S. Salamon. — Duke Math. J. — 1989. — V. 58(3). — P. 829–850.
- [6] Cartan, E. Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée / E. Cartan. I & II // Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. — 1923. — V. 40. — P. 325–412. 1924. — V. 41. — P. 1–25 ou Oeuvres complètes, tome III, P. 659–746 et P. 799–824.
- [7] Cartan, E. La géométrie des espaces de Riemann / E. Cartan. — Mémorial des Sciences Mathématiques. Paris, Gauthier-Villars. — 1925. — V. 5.

- [8] Cartan, E. Les groupes d'holonomie des espaces généralisés / E. Cartan. // Acta Math. — 1926. — V. 48. — P. 1–42 ou Oeuvres complètes. Tome III. — V. 2. — P. 997–1038.
- [9] Chong, Z.W. General metrics of G_2 holonomy and contraction limits / Z.W. Chong, M. Cvetič, G.W. Gibbons, H. Lu, C.N. Pope, P. Wagner. // Nucl. Phys. B. — 2002. — V. 638(3). — P. 459–482. — <http://arxiv.org/abs/hep-th/0204064v1>
- [10] Cvetič, M. Cohomogeneity one manifolds of $Spin(7)$ and G_2 holonomy / M. Cvetič, G.W. Gibbons, H. Lu, C.N. Pope. // Phys. Rev. D (3). — 2002. — V. 65(10). — 106004, 29 pp. — <http://arxiv.org/abs/hep-th/0108245v2>
- [11] Cvetič, M. Orientifolds and slumps in G_2 and $Spin(7)$ metrics / M. Cvetič, G.W. Gibbons, H. Lu, C.N. Pope // Ann. Phys. — 2004. — V. 310(2). — P. 265–301. — <http://arxiv.org/abs/hep-th/0111096v2>
- [12] Cvetič, M. A G_2 unification of the deformed and resolved conifolds / M. Cvetič, G.W. Gibbons, H. Lu, C.N. Pope // Phys. Lett. B. — 2002. — V. 534(1-4). — P. 172–180. — <http://arxiv.org/abs/hep-th/0112138v3>
- [13] Gibbons, G.W. Einstein Metrics on S^3 , \mathbb{R}^3 , and \mathbb{R}^4 bundles / G.W. Gibbons, D.N. Page, C.N. Pope // Commun. Math. Phys. — 1990. — V. 127(3). — P. 529–553.
- [14] Gray, A. Weak holonomy groups / A. Gray // Math Z. V. — 123(1971). — P. 290–300.
- [15] Joyce, D. D. Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2 / D. D. Joyce. I and II // J. Differential Geometry. — 1996. — V. 43(2). — P. 291–375.

- [16] Joyce, D. D. Compact 8-manifolds with holonomy $Spin(7)$ / D. D. Joyce // Inv. Math. — 1996. — V. 123. — P. 507–552.
- [17] Joyce, D. D. Compact manifolds with special holonomy / D. D. Joyce. — Oxford, 2000.
- [18] Kovalev, A. Twisted connected sums and special Riemannian holonomy / A. Kovalev // J. Reine Angew. Math. — 2003. — V. 565. — P. 125–160.
- [19] de Rham, G. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann / G. de Rham // Comm. Math. Helv. — 1952. — V. 26. — P. 328–344.
- [20] Wilking, B. On compact Riemannian manifolds with noncompact holonomy groups / B. Wilking // J. Diff. Geom. — 1999. — V. 52(2). — P. 223–257.
- [21] Базайкин, Я. В. О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии $Spin(7)$ / Я. В. Базайкин // Сибирский математический журнал. — 2007. — Т. 48(1). — С. 11–32.
- [22] Базайкин, Я. В. Некомпактные римановы пространства с группой голономии $Spin(7)$ и 3-сасакиевы многообразия / Я. В. Базайкин // Тр. МИАН. — 2008. — Т. 263. — С. 6–17.
- [23] Базайкин, Я. В. $Spin(7)$ -структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии $SU(4)$ / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Матем. сб. — 2011. — Т. 202(4). — С. 3–30.
- [24] Бессе, А. Многообразия Эйнштейна. / А. Бессе. — М.: Мир, 1990.
- [25] Каждан, Д. Л. Функции-кривизны для открытых двумерных многообразий / Д. Л. Каждан, Ф. У. Уорнер // Сб. Исследования по метрической теории поверхностей. — М.: Мир, 1980. — С. 60–80.

- [26] Малькович, Е. Г. О новых явных римановых метриках с группой голономии $SU(4)$ / Е. Г. Малькович // Сибирский математический журнал. — 2011. — Т. 52(1). — С. 95–99.

Список работ автора по теме диссертации

- [27] Богоявленская, О. А. Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$ / Я. В. Базайкин, О. А. Богоявленская // Матем. заметки. — 2013. — Т. 93(5). — С. 645-657.
- [28] Богоявленская, О. А. Об одном новом семействе полных римановых метрик с группой голономии G_2 на $S^3 \times \mathbb{R}^4$ / О. А. Богоявленская // Сибирский математический журнал. — 2013. — Т. 54(3). — С. 551-562.
- [29] Богоявленская, О. А. Полные римановы метрики с группой голономии G_2 на деформациях конусов над $S^3 \times S^3$ / О. А. Богоявленская // Материалы международной конференции “Fourth geometry meeting dedicated to the centenary of A.D.Alexandrov”. — СПб.: ВВМ, 2012. — С. 39.