ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.К. АММОСОВА
НИИ МАТЕМАТИКИ

На правах рукописи

Егоров Дмитрий Владимирович

ТЭТА-ФУНКЦИИ НА КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ДВУМЕРНЫХ ТОРОВ

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д. ф.-м. н., профессор, чл.-корр. РАН
И. А. Тайманов

Якутск–2009

Оглавление

1 Введение **3**
- 1.1 Постановка задачи . . . 3
- 1.2 Симплектические и кэлеровы многообразия . . . 4
- 1.3 Классическая тэта-функция . . . 8
- 1.4 Общие результаты о вложении в комплексное проективное пространство . . . 11
- 1.5 Ниль- и солвмногообразия . . . 13
- 1.6 Косые произведения двумерных торов . . . 14
- 1.7 План работы . . . 16

2 Тэта-функции на многообразии Кодаиры–Терстона **19**
- 2.1 Свойства классической тэта-функции . . . 20
- 2.2 Тэта-функции многообразия Кодаиры–Терстона . . . 21
  - 2.2.1 Тэта-функция — сечение линейного комплексного расслоения . . . 22
  - 2.2.2 Мультипликативное свойство θ_{KT} . . . 24
- 2.3 Вложение M_{KT} в комплексное проективное пространство . 24
- 2.4 Вложение является симплектическим отображением . . . 31

3 Тэта-функции на косых произведениях двумерных торов с нулевым классом Эйлера **36**
- 3.1 Расслоения . . . 37
- 3.2 Тэта-функции на расслоениях . . . 39
  - 3.2.1 θ_M — сечение линейного комплексного расслоения. . 42
  - 3.2.2 Мультипликативное свойство θ_M . . . 43
- 3.3 Вложение в комплексное проективное пространство . . . 44
- 3.4 Вложение является симплектическим отображением . . . 51
- 3.5 Связь с другими обобщениями тэта-функций . . . 55

Глава 1

Введение

1.1 Постановка задачи

В диссертации рассматривается важная и интересная задача симплектической геометрии — построение канонических симплектических вложений замкнутых многообразий с целочисленной симплектической формой в комплексное проективное пространство. Отображения вложения при этом строятся при помощи обобщенных тэта-функций.

Как известно, классическая тэта-функция абелева многообразия, с геометрической точки зрения, является сечением голоморфного линейного расслоения над комплексным тором. Классическая теорема Лефшеца утверждает, что сечения достаточно большой тензорной степени этого расслоения задают комплексно-аналитическое вложение абелева многообразия в некоторое комплексное проективное пространство.

Зададимся целью обобщить данную конструкцию на некоторые расслоения, где слой и база — одномерные комплексные торы. Мы вводим аналоги классических тэта-функций как сечения линейных комплексных расслоений над данными расслоениями. Нам однако придется отказаться от голоморфности вложения, так как на данных расслоениях, вообще говоря, нет не только кэлеровой структуры, но и комплексной. Тем не менее, данные многообразия являются симплектическими. Мы будем строить тэта-функции так, чтобы для них выполнялся симплектический аналог теоремы Лефшеца — тэта-функции с характеристиками, которые являются сечениями тензорной степени данного линейного расслоения, задают симплектическое вложение многообразия в $\mathbb{CP}^k$ (для достаточно больших тензорных степеней). Симплектическое вложение означает, что вкладываемое многообразие наследует симплектическую структуру комплексного проективного пространства.

Автор благодарит Искандера Асановича Тайманова за постановку задачи и терпение. Автор также благодарит Андрея Евгеньевича Миронова за полезные обсуждения.

1.2 Симплектические и кэлеровы многообразия

Гладкое многообразие M размерности $2n$ называется симплектическим, если на нем существует невырожденная дифференциальная 2-форма ω, являющаяся замкнутой ($d\omega = 0$). Условие невырожденности можно

определить двумя эквивалентными способами. Форма невырождена если для любого ненулевого касательного вектора $u \in TM$ существует касательный вектор $v \in TM$ такой, что $\omega(u, v) \neq 0$, или эквивалентно $\omega^n \neq 0$ всюду на M, то есть ω^n пропорциональна форме объема.

Пусть (M, ω) и (N, ω') обозначают два многообразия M, N с симплектическими формами ω и ω' соответственно. Отображение $f : M \to N$ называется симплектическим отображением из (M, ω) в (N, ω') если $f^*(\omega') = \omega$.

Исторически первыми примерами симплектических многообразий были кэлеровы многообразия. Компактное комплексное многообразие называется кэлеровым, если на нем существует эрмитова метрика $h_{ij} dz^i d\overline{z}^j$ такая, что ассоциированная с ней форма

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \cdot h_{ij} dz^i \wedge d\overline{z}^j$$

замкнута, то есть $d\omega = 0$. Сама метрика при этом тоже называется кэлеровой.

Таким образом все кэлеровы многообразия являются симплектическими. Возник естественный вопрос о том, существуют ли симплектические многообразия, не являющиеся кэлеровыми. Терстон в своей работе [1] привел первый пример такого многообразия. Позже выяснилось, что данный пример был ранее известен Кодаире [4], поэтому это многообразие называется многообразием Кодаиры–Терстона. Известно, что если многообразие кэлерово, то это налагает серьезные топологические ограничения. Так например, нечетномерные числа Бетти должны быть четны. Терстон для многообразия Кодаиры–Терстона вычислил b^1, оказавшееся равным 3, и тем самым доказал, что

данное многообразие не является кэлеровым.

Если класс когомологий $[\omega]$ формы ассоциированной с кэлеровой метрикой лежит в целочисленном классе когомологий,

$$[\omega] \in H^2(M;\mathbb{Z}) \subset H^2(M;\mathbb{R}),$$

то данное многообразие называется ходжевым, а сама форма ходжевой. Целочисленность означает, что периоды ω по всем циклам из $H_2(M;\mathbb{Z})$ являются целыми числами. Пример ходжева многообразия — это комплексное проективное пространство с формой, ассоциированной с метрикой Фубини–Штуди.

Пространство $\mathbb{CP}^n$ определяется как фактор-пространство $\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ по действию $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$(z^0, z^1, \ldots, z^n) \to (\lambda z^0, \lambda z^1, \ldots, \lambda z^n), \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

На этом пространстве задана метрика Фубини–Штуди, имеющая в однородных координатах $(z^0 : \ldots : z^n)$ вид

$$\frac{(\sum_j z^j \overline{z}^j) \cdot (\sum_k dz^k d\overline{z}^k) - (\sum_j z^j d\overline{z}^j) \cdot (\sum_k \overline{z}^k dz^k)}{(\sum_k z^k \overline{z}^k)^2}.$$

Этой эрмитовой метрике сопоставим однозначно форму

$$\omega_{FS} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \cdot \frac{(\sum_j z^j \overline{z}^j) \cdot \sum_k dz^k \wedge d\overline{z}^k - (\sum_j z^j d\overline{z}^j) \wedge (\sum_k \overline{z}^k dz^k)}{(\sum_k z^k \overline{z}^k)^2}.$$

Комплексное многообразие называется проективным алгебраическим, если оно вкладывается в комплексное проективное пространство $\mathbb{CP}^n$ как множество нулей системы однородных многочленов.

Легко заметить, что свойства кэлеровости и ходжевости наследуются подмногообразиями: если многообразие Y является подмногообразием кэлерова (ходжева) многообразия X, то кэлерова метрика (ходжева форма) на X индуцирует при вложении кэлерову метрику (ходжеву форму) на Y. Отсюда следует, что проективные алгебраические многообразия являются ходжевыми. Классическая теорема Кодаиры о вложении утверждает, что верно и обратное утверждение.

Теорема (Кодаира)**.** *Комплексное многообразие проективно алгебраично тогда и только тогда, когда оно ходжево.*

Доказательство теоремы Кодаиры состоит в построении вложения ходжева многообразия в проективное пространство достаточно большой размерности и применения следующей теоремы Чжоу.

Теорема (Чжоу)**.** *Аналитическое подмножество $X \subset \mathbb{CP}^n$ выделяется в пространстве $\mathbb{CP}^n$ как множество нулей системы однородных многочленов, то есть является проективно алгебраическим многообразием.*

Это одно из проявлений знаменитого принципа GAGA, «Géometrie Algébrique et Géométrie Analytique», сформулированного Серром.

Для комплексных торов эквивалентность ходжевости и алгебраичности доказывается теоремой Лефшеца, в которой строится каноническое вложение торов в комплексное проективное пространство при помощи тэта-функций.

1.3 Классическая тэта-функция

Рассмотрим подробнее классическую тэта-функцию на n-мерном торе и теорему Лефшеца (см. например [17, 18]). Рассмотрим формальный ряд

$$\theta(z,\Omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i\langle\Omega m, m\rangle + 2\pi i\langle m, z\rangle). \tag{1.1}$$

Если мнимая часть матрицы Ω положительно определена, то этот ряд сходится в любой компактной области в $\mathbb{C}^n$ и определяет целую функцию. Из (1.1) следует, что тэта-функция удовлетворяет условиям периодичности

$$\theta(z+m,\Omega) = \theta(z,\Omega), \quad m\in\mathbb{Z}^n, \tag{1.2}$$

$$\theta(z+\Omega m,\Omega) = \exp\left(-\pi i\langle\Omega m, m\rangle - 2\pi i\langle m, z\rangle\right)\cdot\theta(z,\Omega). \tag{1.3}$$

С геометрической точки зрения, тэта-функция является сечением линейного голоморфного расслоения L над комплексным тором, $\mathbb{C}^n/(\mathbb{Z}^n+\Omega\mathbb{Z}^n)$. Сечения состоят во взаимно однозначном соответствии с функциями f на универсальной накрывающей тора $\mathbb{C}^n$ такими, что $f(z+\lambda) = e_\lambda(z)f(z)$, где λ — элемент решетки $\Lambda = \mathbb{Z}^n+\Omega\mathbb{Z}^n$; $e_\lambda(z)$ — мультипликаторы, то есть ненулевые функции $e_\lambda : \mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$, удовлетворяющие тождествам

$$e_\lambda(z+\mu)\,e_\mu(z) = e_\mu(z+\lambda)\,e_\lambda(z) = e_{\lambda+\mu}(z), \quad \lambda,\mu\in\Lambda,$$

$$e_0(z) = 1.$$

Мультипликаторы следующим образом задают линейное расслоение над тором — прямое произведение $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}$ факторизуется по действию Λ:

$$(z,w)\sim(z+\lambda, e_\lambda(z)w).$$

Для любой пары векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ определяется тэта-функция с характеристиками a и b:

$$\theta[a,b](z,\Omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^n} \exp(\pi i\langle\Omega(m+a),(m+a)\rangle + 2\pi i\langle(m+a),(z+b)\rangle). \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что тэта-функция с характеристиками удовлетворяет следующим условиям периодичности

$$\theta[a,b](z+m,\Omega) = \exp(2\pi i\langle m,a\rangle)\cdot\theta[a,b](z,\Omega), \quad m\in\mathbb{Z}^n \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}\theta[a,b](z+\Omega m,\Omega) &= \exp\left(-\pi i\langle\Omega n,n\rangle - 2\pi i\langle n,(z+b)\rangle\right) \\ &\quad\times\ \theta[a,b](z,\Omega).\end{aligned} \tag{1.6}$$

Семейство функций

$$\theta[0,b/d](z,d^{-1}\cdot\Omega), \quad 0\leqslant b^i<d, \quad d\in\mathbb{N}$$

задает базис глобальных сечений расслоения $L^{\otimes d}$, d-й тензорной степени расслоения L.

Введем отображение тора в комплексное проективное пространство

$$\varphi_d : M = \mathbb{C}^n/\{\mathbb{Z}^n+\Omega\mathbb{Z}^n\} \to \mathbb{CP}^{d^n-1}$$

$$\varphi_d(z) = \left(\theta\left[0,\frac{b_0}{d}\right](z,d^{-1}\cdot\Omega) : \ \ldots\ : \theta\left[0,\frac{b_{d^n-1}}{d}\right](z,d^{-1}\cdot\Omega)\right) \in \mathbb{CP}^{d^n-1}.$$

Следующая теорема задает каноническое вложение тора в комплексное проективное пространство при помощи тэта-функций.

Теорема (Лефшец)**.** *Отображение φ_d корректно определено, и при $d\geqslant 3$ является вложением.*

На M можно определить инволюцию

$$\sigma : M \to M \ : \ \sigma(z) = -z.$$

Эта инволюция объясняет, почему утверждение теоремы Лефшеца неверно при $d = 2$. Отображение φ_2 порождено сечениями $\theta[0, e](z, \Omega/2)$ $(2e \in \mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n)$. Все эти функции четны, и ранг отображения φ_2 в точке $z = 0$ равен нулю. Это также означает, что φ_2 разлагается в композицию

$$M \xrightarrow{\pi} M/\sigma \xrightarrow{\Phi} \mathbb{CP}^{2^n-1}, \quad \varphi_2 = \Phi \circ \pi,$$

где π — естественная проекция.

Многообразие $\Phi(M/\sigma)$ называется многообразием Куммера, а отображение Φ — отображением Куммера.

Комплексный тор $\mathbb{C}^n / \left\{\mathbb{Z}^n + \Omega\mathbb{Z}^n\right\}$ называется разложимым, если Ω симплектическими преобразованиями из $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ приводится к блочному виду. Группа $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z})$ является подгруппой $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{Z})$, и состоит из элементов g таких, что

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

и A, B, C и D — целочисленные $(n \times n)$-матрицы, I — единичная $(n \times n)$-матрица.

Теорема (Куммер)**.** *Если комплексный тор* $M = \mathbb{C}^n / \left\{\mathbb{Z}^n + \Omega\mathbb{Z}^n\right\}$ *неразложим, то отображение Куммера*

$$\Phi : z \to \left(\theta\left[0, b_0\right](z, \Omega/2) : \ldots : \theta\left[0, b_{2^n-1}\right](z, \Omega/2)\right)$$

($\{2b_j\} = \mathbb{Z}^n/2\mathbb{Z}^n$) является вложением многообразия (с особенностями) M/σ в $\mathbb{CP}^{2^n-1}$.

1.4 Общие результаты о вложении в комплексное проективное пространство

Напомним (см. например [2]), что многообразие $\mathbb{CP}^\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{CP}^n$ является базой универсального S^1-расслоения. Следовательно все главные S^1-расслоения и ассоциированные с ними линейные комплексные расслоения порождены отображением базы в $\mathbb{CP}^\infty$, а точнее в $\mathbb{CP}^n$, для достаточно большого n. Линейные комплексные расслоения классифицируются первым классом Чжэня, который порождается формой кривизны расслоения. Определим данную форму следующим образом.

Пусть M является вещественной базой. Структура расслоения со слоем $\mathbb{C}^1$ и структурной группой $U(1) = S^1$ определяется функциями склейки $T^{\alpha\beta}(x) = e^{i\varphi_{\alpha\beta}(x)}$ в области $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. Связность в области задается 1-формой ω_α, «горизонтальное» направление задается условием $\omega_\alpha(\cdot) = 0$, причем разность этих форм в пересечении областей U_α, U_β имеет вид

$$\omega_\alpha - \omega_\beta = dq_{\alpha\beta}(x),$$

где $q_{\alpha\beta}(x)$ — числовая функция. Форма кривизны Ω определяется формулой

$$2\pi i\Omega = d\omega_\alpha, \text{ в области } U_\alpha.$$

Очевидно в области $U_{\alpha\beta}$

$$d\omega_\alpha - d\omega_\beta = ddq_{\alpha\beta} = 0.$$

Таким образом, форма Ω корректно определена на всей базе M.

Для многообразия $\mathbb{CP}^n$ формой кривизны универсального расслоения является форма Фубини–Штуди Ω_{FS}. Таким образом, вследствие функториального свойства характеристических классов, если Ω является формой кривизны линейного расслоения $L \to M$, индуцированного отображением $f : M \to \mathbb{CP}^n$, то

$$f^*[\Omega_{FS}] = [\Omega].$$

Костант в работе [3] показал, что любая замкнутая 2-форма с целыми периодами является формой кривизны некоторого S^1-расслоения. Данные утверждения могут служить отправной точкой для следующих теорем вложения Громова и Тишлера.

Напомним, что теорема Кодаиры утверждает, что кэлерово многообразие можно вложить в комплексное проективное пространство тогда и только тогда, когда оно ходжево, то есть форма, ассоциированная с кэлеровой метрикой, лежит в целочисленном классе когомологий. Рассмотрим аналогичные результаты для симплектической категории.

Теорема (Громов[5])**.** *Если ω целочисленная симплектическая форма на многообразии M, то существует симплектическое погружение M в $\mathbb{CP}^n$ для достаточно большого n.*

Тишлер обобщил данный результат в своей работе [6].

Теорема (Тишлер). *Пусть M замкнутое многообразие с целочисленной замкнутой 2-формой ω. Тогда существует симплектическое отображение $f : M \to \mathbb{CP}^n$ для достаточно большого n.*

1.5 Ниль- и солвмногообразия

Многообразия, для которых мы строим вложение в $\mathbb{CP}^n$, принадлежат к классам ниль- и солвмногообразий. Мы определяем данные классы следующим образом. Нильмногообразие (солвмногообразие) — это компактное однородное пространство вида G/Γ, где G — это односвязная нильпотентная (разрешимая) группа Ли, и Γ дискретная подгруппа G. Очевидно, что любое нильмногообразие является также и солвмногообразием. Простейшим примером нильмногообразия может служить тор, являющийся однородным пространством абелевой группы Ли.

В работе [7] Бенсон и Гордон показали, что любое кэлерово нильмногообразие диффеоморфно комплексному тору. Позже [8] они предположили, что любое кэлерово солвмногообразие также диффеоморфно тору. Контрпримеры был указаны в работе [9]. Ими оказались гиперэллиптические поверхности — фактор-многообразия двумерного комплексного тора по действию конечной циклической группы, одновременно обладающие структурой расслоения, где слой и база одномерные комплексные торы (см. следующий параграф). Хасегава в работах [10, 11] показал, что любое кэлерово солвмногообразие — это либо тор, либо гиперэллиптическая поверхность.

Всего существует семь гиперэллиптических поверхностей. Для четырех из них мы построим вложение в комплексное проективное пространство при помощи введенных на них голоморфных тэта-функций.

Таким образом мы строим вложение четырехмерных симплектических ниль- и солвмногообразий в комплексное проективное пространство, которое в общем случае будет симплектическим, так как вообще говоря данные многообразия не являются кэлеровыми. В случае гиперэллиптических поверхностей вложение будет голоморфным.

1.6 Косые произведения двумерных торов

Среди четырехмерных ниль- и солвмногообразий мы выделяем для дальнейшего рассмотрения класс многообразий, являющихся пространствами расслоения, где слой и база двумерные (вещественные) торы. При этом мы сможем опираться на классическую теорию тэта-функций на одномерном комплексном торе.

Классификация данных многообразий была проведена в работе [19]. Приведем результаты данного исследования, основываясь на работе [13], в которой для каждого типа многообразий был определен его геометрический тип по Терстону. Мы не будем касаться геометрий данных многообразий, так как это не относится к теме диссертации.

Для заданных коммутирующих матриц $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$ и пары целых чисел m, n расслоение, отвечающее $\{A, B, (m, n)\}$, строится следующим

Таблица 1.1: Косые произведения двумерных торов

	$\{A, B, (m, n)\}$	Примечание
(a)	$\{I, I, (0, 0)\} = T^2 \times T^2$	Произведение двумерных торов
(b)	$\{I, I, (m, n)\}, (m, n) \neq (0, 0)$	Многообразие Кодаиры–Терстона
(c)	(1) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, I, (0, 0)\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, I, (-1, 0)\right\}$ (3) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I, (0, 0)\right\}$ (4) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I, (-1, 0)\right\}$ (5) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I, (0, 0)\right\}$ (6) $\{-I, I, (0, 0)\}$ (7) $\{-I, I, (-1, 0)\}$	Гиперэллиптические поверхности
(d)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I, (m, n)\right\}$, $k \neq 0$, $n \neq 0$	Нильмногообразие
(e)	$\left\{\begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I, (m, n)\right\}$, $k \neq 0$	Нильмногообразие
(f)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -I, (m, n)\right\}$, $k \neq 0$	Нильмногообразие
(g)	$\{A, I, (m, n)\}$, $\lvert\operatorname{tr} A\rvert > 2$	Солвмногообразие
(h)	$\{A, -I, (m, n)\}$, $\operatorname{tr} A > 2$	Солвмногообразие

образом. Обозначим через $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$ точку $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ соответствующую $\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Тогда расслоение, соответствующее $\{A, B, (0,0)\}$, получается при факторизации $T^2 \times \mathbb{R}^2/\sim$ по действию матриц A,B:

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} A\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

и

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} B\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

$\{A, B, (m,n)\}$ получается из $\{A, B, (0,0)\}$ если вырезать $T^2 \times D^2$ и приклеить обратно с помощью отображения отождествления $T^2 \times \partial D^2 \to T^2 \times \partial D^2$

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \varphi\right) \to \left(\begin{bmatrix} s + m\varphi/2\pi \\ t + n\varphi/2\pi \end{bmatrix}, \varphi\right).$$

В полученном расслоении A, B являются матрицами монодромии, (m,n) — классом Эйлера.

Полный список расслоений, с точностью до диффеоморфизма пространства расслоения (не изоморфизма расслоений), приведен в таблице 1.1. I обозначает единичную матрицу.

1.7 План работы

В дальнейших главах мы строим симплектические вложения многообразий, являющихся T^2-расслоениями над T^2, в комплексное проективное пространство.

Напомним, что данные расслоения характеризуются двумя инвариантами: матрицами монодромии и классом Эйлера. Мы ограничимся рассмотрением расслоений, где один из данных инвариантов является тривиальным. Во второй главе мы рассмотрим многообразие Кодаиры–Терстона, представленное в виде $\{I, I, (m, n)\}$. В третьей — расслоения с нулевым классом Эйлера, $\{A, B, (0, 0)\}$. Согласно работе [12] на всех данных расслоениях существует симплектическая форма.

Структура каждой главы будет следующей. Для каждого многообразия мы определяем линейное комплексное расслоение над ним так, чтобы первый класс Чжэня порождался симплектической формой. Сечения данного расслоения по определению — тэта-функции на нем. Сечения линейного расслоения задают отображение в $\mathbb{CP}^n$. Мы доказываем, что данное отображение, при достаточно больших n, будет симплектическим вложением, то есть форма Фубини–Штуди индуцирует симплектическую форму на образе вложения.

Многообразие Кодаиры–Терстона единственное кроме тора расслаивается двумя различными (расслоения не изоморфны) способами (см. [19]):

$$\{I, I, (m, n)\}, \qquad \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I, (0, 0) \right\}.$$

В связи с этим данное многообразие рассматривается и во второй, и в третьей главах, где предложены два различных варианта тэта-функций. После того как результаты третьей главы были готовы, выяснилось, что тэта-функции на многообразии Кодаиры–Терстона, введенные там, с

определенной степенью точности совпадают с тэта-функциями Кирвина и Урибе [15], которые определили их, исходя из теории представлений. Мы покажем это в §3.5. Заметим, что в третьей главе мы вводим тэта-функции на целом классе многообразий, включающем в себя многообразие Кодаиры–Терстона.

Глава 2

Тэта-функции на многообразии Кодаиры–Терстона

Результаты этой главы изложены в [23].

В данной главе мы строим аналог классической тэта-функции на абелевом многообразии для нильмногообразия Кодаиры–Терстона M_{KT}.

Многообразие Кодаиры–Терстона M_{KT} является фактор-многообразием $\mathbb{R}^4$ по действию дискретной группы Γ, которая задается следующими образующими:

$$\begin{aligned} a:(x,y,z,t) &\to (x+1,y,z+\lambda y,t), \quad \lambda\in\mathbb{Z},\ \lambda\neq 0 \\ b:(x,y,z,t) &\to (x,y+1,z,t) \\ c:(x,y,z,t) &\to (x,y,z+1,t) \\ d:(x,y,z,t) &\to (x,y,z,t+1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Многообразие Кодаиры–Терстона замечательно тем, что оно является первым известным примером симплектического, но не кэлерова многообразия [1].

Заметим, что вложение M_{KT} в $\mathbb{CP}^n$ не может быть голоморфным так, как многообразие M_{KT} не является кэлеровым. Тем не менее мы докажем, что данное отображение будет симплектическим. Другими словами, форма Фубини–Штуди на $\mathbb{CP}^n$ индуцирует симплектическую структуру на многообразии M_{KT}.

2.1 Свойства классической тэта-функции

В этой и последующих главах при определении симплектических тэта-функций мы будем использовать тэта-функцию с характеристиками

$$\theta[1/2, 1/2](z, \tau).$$

Наш выбор именно этой тэта-функции, в обозначениях книги Мамфорда [17] — θ_{11}, связан с тем, что данная функция умножается на экспоненту при всех модулярных преобразованиях:

$$\theta_{11}(\frac{z}{c\tau+d}, \frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = \zeta(c\tau+d)^{1/2}\exp(\frac{cz^2}{c\tau+d})\cdot\theta_{11}(z,\tau), \tag{2.2}$$

где ζ является ненулевой константой, зависящей от матрицы

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1.$$

Заметим, что для тэта-функции $\theta[0,0](z,\tau)$ дополнительно требуется чтобы произведения ab, cd были четны. Из (1.5)-(1.6) следует, что

$$\begin{aligned} \theta_{11}(z+1,\tau) &= -\theta_{11}(z,\tau), && (2.3) \\ \theta_{11}(z+\tau,\tau) &= -\exp(-2\pi iz - \pi i\tau)\cdot\theta_{11}(z,\tau). && (2.4) \end{aligned}$$

Тэта-функция θ_{11} порождает линейное комплексное расслоение L. Сечения расслоения $L^{\otimes d}$ мы будем называть тэта-функциями степени d. Функции

$$\theta[1/2, 1/2 + b/d](z, \tau/d), \quad b \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} \tag{2.5}$$

образуют базис пространства тэта-функций степени d. Размерность данного пространства равна d.

Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$ — набор констант такой, что их сумма равна нулю. Тогда следующее произведение является тэта-функцией степени d

$$\prod_{i=1}^{d} \theta[a, b](z + \alpha_i, \tau).$$

Тэта-функция $\theta[1/2, 1/2](z, \tau)$ удовлетворяет следующему уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{4\pi i} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}. \tag{2.6}$$

Всюду далее мы будем обозначать тэта-функцию $\theta_{11}(z, \tau)$ просто через $\theta(z, \tau)$.

2.2 Тэта-функции многообразия Кодаиры–Терстона

Многообразие M_{KT} расслаивается над двумерным тором T^2 при проекции

$$(x, y, z, t) \to (y, t).$$

Слои являются также двумерными торами.

Левоинвариантная симплектическая форма $\omega_{KT} = (dz - \lambda x dy) \wedge dx + dy \wedge dt$ совместна со структурой расслоения. Это значит, что ω_{KT} является суммой двух форм. Ограничение формы $(dz - \lambda x dy) \wedge dx$ на любой слой невырождено, а форма $dy \wedge dt$ является образом симплектической формы на базе при проектировании.

Исходя из этих фактов, мы определим пространство тэта-функций степени $k \in \mathbb{N}$ на многообразии M_{KT}, как линейную оболочку попарных произведений обыкновенных базисных тэта-функций степени k (2.5) на слое и на базе:

$$\theta_k^p(z + ix, \lambda y + i) \cdot \theta_k^q(y + it, i); \quad p, q = 1, \ldots, k$$

Обозначим данное пространство как $\mathcal{L}_k$. Заметим, что размерность данного пространства равна k^2.

Тэта-функцию степени один будем обозначать как

$$\theta_{KT}(x, y, z, t) = \theta(z + ix, \lambda y + i) \cdot \theta(y + it, i).$$

2.2.1 Тэта-функция — сечение линейного комплексного расслоения

Из (2.3)-(2.4) следует, что:

$$\begin{aligned}
\theta_{KT}(x+1, y, z+\lambda y, t) &= -e^{-2\pi i(z+ix) - \pi i(\lambda y + i)} \cdot \theta_{KT}(x, y, z, t), \\
\theta_{KT}(x, y+1, z, t) &= -\theta_{KT}(x, y, z, t), \\
\theta_{KT}(x, y, z+1, t) &= -\theta_{KT}(x, y, z, t), \\
\theta_{KT}(x, y, z, t+1) &= -e^{-2\pi i(y+it) + \pi} \cdot \theta_{KT}(x, y, z, t).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Из этих формул следует, что тэта-функция является сечением линейного комплексного расслоения над многообразием M_{KT}, которое получается при факторизации $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$ по действию группы Γ

$$(u, w) \sim (\lambda \cdot u, e_\lambda(u)w), \quad u \in \mathbb{R}^4, w \in \mathbb{C}, \lambda \in \Gamma$$

где $e_\lambda(u)$ - мультипликаторы, то есть ненулевые функции

$$e_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^*$$

удовлетворяющие тождествам

$$e_\lambda(\mu \cdot u) \cdot e_\mu(u) = e_{\lambda\mu}(u), \quad \lambda, \mu \in \Gamma$$

$$e_0(u) = 1.$$

Сечения расслоения, заданного мультипликаторами, находятся во взаимно однозначном соответствии с функциями f на $\mathbb{R}^4$, такими, что

$$f(\lambda \cdot u) = e_\lambda(u) f(u), \quad \lambda \in \Gamma, u \in \mathbb{R}^4.$$

При этом необходимо проверить, чтобы соотношения в группе Γ выполнялись и для мультипликаторов. Образующие (2.1) группы Γ связаны одним нетривиальным соотношением

$$c^\lambda = a^{-1} b^{-1} a b.$$

Это означает, что мультипликаторы линейного комплексного расслоения над M_{KT} должны удовлетворять следующему тождеству:

$$e_c(c^{\lambda-1} \cdot u) \times \ldots \times e_c(u) = \frac{e_b(u) e_a(b \cdot u)}{e_b(b^{-1} a b \cdot u) e_a(c \cdot u)}, \quad u \in \mathbb{R}^4.$$

Легко проверить, что мультипликаторы (2.7) удовлетворяют этому тождеству.

2.2.2 Мультипликативное свойство θ_{KT}

Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^k$ - набор констант. Как и для классической тэта-функции нам хотелось бы, чтобы произведение $\prod_{i=1}^k \theta(z+\alpha_i, \tau)$ было тэта-функцией степени k при выполнении условия

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 0. \tag{2.8}$$

Данное свойство тэта-функции является ключевым при доказательстве теоремы о вложении в комплексное проективное пространство.

Однако у θ_{KT} период зависит от аргумента функции. Мы не можем перемножить тэта-функции со сдвинутыми периодами и получить тэта-функцию степени k. Поэтому мы не будем сдвигать периоды. Более формально, введем действие $\zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in \mathbb{C}^2$

$$(\zeta \cdot \theta_{KT})(x,y,z,t) = \theta(z+ix+\zeta^1, \lambda y + i) \cdot \theta(y+it+\zeta^2, i). \tag{2.9}$$

Тогда, как не трудно убедиться, при выполнении условия (2.8), следующее произведение является тэта-функцией степени k:

$$\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i \cdot \theta_{KT})(x,y,z,t) \in \mathcal{L}_k. \tag{2.10}$$

2.3 Вложение M_{KT} в комплексное проективное пространство

Перенумеруем базисные тэта-функции пространства $\mathcal{L}_k$: $\{s_i\}_{i=1}^{k^2}$. Тогда отображение

$$\varphi_k = (s_1, s_2, \ldots, s_{k^2})$$

будет отображением многообразия M_{KT} в $\mathbb{CP}^{k^2-1}$.

Теорема 1. *Отображение φ_k корректно определено и является вложением при $k \geqslant 3$.*

Доказательство. Докажем теорему для $k = 3$. При $k > 3$ доказательство аналогичное.

Сперва установим инъективность отображения φ_k. Здесь мы будем следовать доказательству классической теоремы Кодаиры о вложении для алгебраических многообразий (см. ее изложение, например, в [16, глава 1, §4]).

Прежде всего заметим, что пространство тэта-функций степени k — это глобальные сечения k-й тензорной степени расслоения заданного мультипликаторами (2.7).

Заметим, что если верно, что для любых точек $u \neq v \in M_{KT}$ существует сечение $s \in \mathcal{L}_k$ такое, что $s(u) = 0$ и $s(v) \neq 0$, то отображение φ_k является инъективным. Действительно, допустим отображение «склеивает» точки u и v. Это значит, что для всех сечений $s \in \mathcal{L}_k$ верно, что $s(v) = \zeta \cdot s(u)$, где ζ - некоторая ненулевая константа. Если s - сечение удовлетворяющее вышеуказанному условию, то мы приходим к противоречию.

Также заметим, что при выполнении данного условия верно, что для любой точки $u \in M_{KT}$ не все сечения обращаются в ноль в точке u. Отсюда следует корректность φ_k.

Будем подбирать требуемую тэта-функцию степени три в виде

произведения двух функций $s = f \cdot g$:

$$f(x,y,z,\alpha,\beta) = \theta(z+ix+\alpha, \lambda y+i)\theta(z+ix+\beta, \lambda y+i)\times \\ \times\,\theta(z+ix-\alpha-\beta, \lambda y+i), \quad (2.11)$$

$$g(y,t,\gamma,\delta) = \theta(y+it+\gamma, i)\theta(y+it+\delta, i)\theta(y+it-\gamma-\delta, i). \qquad (2.12)$$

Из (2.10) следует, что функция $f \cdot g$ действительно является тэта-функцией степени три на многообразии M_{KT}.

Обозначим координаты точек u, v как (x,y,z,t) и (x',y',z',t') соответственно. Выберем γ так, чтобы $\theta(y+it+\gamma, i) = 0$. Теперь подберем δ так, чтобы остальные сомножители в определении функции g были не равны нулю в точке v

$$\theta(y'+it'+\delta, i)\theta(y'+it'-\gamma-\delta, i) \neq 0.$$

Мы можем этого добиться, так как нули тэта-функции изолированы. Также малым шевелением α, β можно добиться, чтобы функция f не равнялась нулю в точке v.

Построенное сечение решило бы задачу, если бы $\theta(y'+it'+\gamma, i) \neq 0$. Допустим, что это так. Так как у тэта-функции в фундаментальной области решетки, образованной ее периодами, единственный нуль, то отсюда следует, что $y = y', t = t'$. Равенство по модулю решетки, но без ограничения общности можно считать, что u, v находятся в фундаментальной области, единичном кубе, $0 \leqslant x,y,z,t < 1$.

Выберем α так, чтобы $\theta(z+ix+\alpha, \lambda y+i) = 0$. Заметим, что теперь $\theta(z'+ix'+\alpha, \lambda y'+i) \neq 0$. Так как иначе $u = v$. Подберем β так, чтобы функция $f(v) \neq 0$; γ, δ так, чтобы $g(v) \neq 0$.

Таким образом мы построили необходимое сечение и доказали инъективность отображения φ_k.

Теперь докажем, что ранг φ_k максимален. Здесь мы будем следовать доказательству теоремы Лефшеца, изложенному в [18]. Для начала покажем, что ранг отображения максимален, если максимален ранг (над $\mathbb{C}$) следующей матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{k^2} \\ \partial_x s_1 & \dots & \partial_x s_{k^2} \\ \partial_y s_1 & \dots & \partial_y s_{k^2} \\ \partial_z s_1 & \dots & \partial_z s_{k^2} \\ \partial_t s_1 & \dots & \partial_t s_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что отображение φ_k, записанное в однородных координатах, является композицией отображения $\widetilde{\varphi}_k$ в $\mathbb{C}^{k^2}$ и дальнейшей проекции $\pi : \mathbb{C}^{k^2} \backslash \{0\} \to \mathbb{CP}^{k^2-1}$. Очевидно, дифференциал $\widetilde{\varphi}_k$ совпадает с подматрицей J, получающейся при вычеркивании первой строки.

Теперь допустим, что в точке $u \in M_{KT}$ первая строка J является линейной комбинацией остальных. Это означает, что радиус-вектор $\widetilde{\varphi}_k(u)$ коллинеарен образу некоторого касательного вектора в точке u. Так как π проецирует вдоль комплексных прямых проходящих через начало координат, то ядро дифференциала π как раз и состоит из таких векторов. Следовательно, максимальность ранга матрицы J является необходимым и достаточным условием максимальности ранга φ_k.

Преобразуем матрицу J к удобному для нас виду. Ранг следующей

матрицы совпадает с рангом J:

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_{k^2} \\ (\partial_y - i\partial_t)s_1 & \dots & (\partial_y - i\partial_t)s_{k^2} \\ (\partial_z - i\partial_x)s_1 & \dots & (\partial_z - i\partial_x)s_{k^2} \\ (\partial_y + i\partial_t)s_1 & \dots & (\partial_y + i\partial_t)s_{k^2} \\ (\partial_z + i\partial_x)s_1 & \dots & (\partial_z + i\partial_x)s_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Последняя две строки $\widetilde{J}$ — это условия Коши-Римана. Так как сечения s_j являются голоморфными относительно $z + ix$, то последняя строчка $\widetilde{J}$ всегда нулевая.

Предположим, что ранг $\widetilde{J}$ (над $\mathbb{C}$) в некоторой фиксированной точке $u = u^* = (x^*, y^*, z^*, t^*) \in M_{KT}$ меньше 4. Это означает, что существует нетривиальный набор констант a, b, c, d такой, что

$$as_j(u^*) + \frac{b}{2}(\partial_y - i\partial_t)s_j(u^*) + \frac{c}{2}(\partial_z - i\partial_x)s_j(u^*) + \frac{d}{2}(\partial_y + i\partial_t)s_j(u^*) = 0,$$
$$j = 1, \dots, k^2.$$

Из (2.10) следует, что функция

$$s(u, \mu, \nu) = (\mu \cdot \theta_{KT})(u)(\nu \cdot \theta_{KT})(u)((-\mu - \nu) \cdot \theta_{KT})(u).$$

лежит в $\mathcal{L}_k(k = 3)$ при любых μ, ν. Значит она раскладывается по базису s_j и для нее верно равенство

$$as(u^*, \mu, \nu) + \frac{b}{2}(\partial_y - i\partial_t)s(u^*, \mu, \nu) + \frac{c}{2}(\partial_z - i\partial_x)s(u^*, \mu, \nu) + \\ + \frac{d}{2}(\partial_y + i\partial_t)s(u^*, \mu, \nu) = 0. \quad (2.13)$$

Введем обозначение $L = \frac{b}{2}(\partial_y - i\partial_t) + \frac{c}{2}(\partial_z - i\partial_x) + \frac{d}{2}(\partial_y + i\partial_t)$ и перепишем последнее равенство в виде:

$$L \log(\mu\cdot\theta_{KT})(u^*) = -a - L\log(\nu\cdot\theta_{KT})(u^*) - L\log((-\mu-\nu)\cdot\theta_{KT})(u^*). \quad (2.14)$$

Для любых u, μ существует ν такое, что

$$(\nu \cdot \theta_{KT})(u)((-\mu - \nu)\cdot\theta_{KT})(u) \neq 0. \quad (2.15)$$

Из (2.14)-(2.15) следует, что функция

$$\xi(\mu) = L\log(\mu\cdot\theta_{KT})(u^*) \quad (2.16)$$

является целой функцией от $\mu = (\mu^1, \mu^2)$. Согласно (2.7) функция $\xi(\mu)$ удовлетворяет следующим условиям периодичности:

$$\begin{aligned}
\xi(\mu^1 + 1, \mu^2) &= \xi(\mu^1, \mu^2), && (2.17)\\
\xi(\mu^1 + y^* + i, \mu^2) &= \xi(\mu^1, \mu^2) - 2\pi i c - \frac{\pi i(b+d)}{2}, && (2.18)\\
\xi(\mu^1, \mu^2 + 1) &= \xi(\mu^1, \mu^2), && (2.19)\\
\xi(\mu^1, \mu^2 + i) &= \xi(\mu^1, \mu^2) - 2\pi i b. && (2.20)
\end{aligned}$$

Следовательно производные $\partial_{\mu^j}\xi$ являются целыми двоякопериодическими функциями. Это означает, что они постоянны, и $\xi = \alpha\mu^1 + \beta\mu^2 + \gamma$. Из (2.17),(2.19) следует, что $\alpha = \beta = 0$, и функция ξ постоянна. Из (2.18),(2.20) следует, что

$$b = 2c + \frac{b+d}{2} = 0.$$

Тогда верно следующее соотношение:

$$\xi(\mu) = \frac{c}{2}\left[\frac{(\partial_z - i\partial_x)\theta(z + ix + \mu^1, \lambda y + i)}{\theta(z + ix + \mu^1, \lambda y + i)}\right]_{u=u^*} - \\ - 2c\left[\frac{\partial_y\theta(z + ix + \mu^1, \lambda y + i)}{\theta(z + ix + \mu^1, \lambda y + i)}\right]_{u=u^*} = \gamma. \quad (2.21)$$

Здесь мы неявно использовали условия Коши-Римана:

$$(\partial_y + i\partial_t)\theta(y + it, i) = 0.$$

Обозначим через D дифференцирование по переменной $z + ix$:

$$D = \frac{1}{2}(\partial_z - i\partial_x).$$

Из (2.6) следует, что

$$\partial_y\theta(z + ix, \lambda y + i) \equiv \frac{\lambda}{4\pi i}(D^2\theta)(z + ix, y + i). \tag{2.22}$$

Подставляя (2.22) в (2.21) и учитывая при этом, что

$$(D\theta)(z + ix + \mu^1, y + i) = \partial_{\mu^1}\theta(z + ix + \mu^1, y + i),$$

получим, что функция $\theta(z^* + ix^* + \mu^1, y^* + i)$, как функция от μ^1, удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$c\left[\frac{\lambda}{2\pi i}\theta'' - \theta'\right] + \gamma\theta = 0.$$

Выписав общее решение, можно легко убедиться, что это приводит к противоречию с условиями периодичности тэта-функции (2.7) и следовательно $c = d = \gamma = 0$. Из (2.13) следует, что $a = 0$.

Мы получаем, что набор постоянных a, b, c, d тривиален и матрица $\widetilde{J}$ имеет максимальный ранг. Так как точка u^* была выбрана произвольной, то ранг φ_k всюду равен 4. Теорема доказана.

2.4 Вложение является симплектическим отображением

Многообразие M_{KT} является симплектическим многообразием, где симплектическая форма может быть к примеру задана следующей левоинвариантной 2-формой: $\omega_{KT} = (dz - \lambda x dy) \wedge dx + dy \wedge dt$. В этом разделе мы докажем следующее утверждение:

Теорема 2. *1. При $k \geqslant 3$ отображение φ_k индуцирует симплектическую структуру на многообразии M_{KT}.*

2. Индуцированная симплектическая форма когомологична $k \cdot \omega_{KT}$.

Доказательство. В определении отображения φ_k выберем в качестве базисных тэта-функций из $\mathcal{L}_k$ следующие функции:

$$\theta_k^p(z + ix, \lambda y + i) \cdot \theta_k^q(y + it, i); \quad p, q = 1, \ldots, k.$$

Заметим, что отображение φ_k является композицией отображения Сегре $\sigma_k : \mathbb{CP}^{k-1} \times \mathbb{CP}^{k-1} \to \mathbb{CP}^{k^2-1}$, которое задается в однородных координатах формулой

$$\sigma_k\left([z^1 : \ldots : z^k], [w^1 : \ldots : w^k]\right) = [z^1 w^1 : z^1 w^2 : \ldots : z^k w^{k-1} : z^k w^k]$$

и отображения $\psi_k : M_{KT} \to \mathbb{CP}^{k-1} \times \mathbb{CP}^{k-1}$, $\psi_k = (\psi'_k, \psi''_k)$. Где

$$\psi'_k(x, y, z) = [\theta_k^1(z + ix, \lambda y + i) : \ldots : \theta_k^k(z + ix, \lambda y + i)],$$

$$\psi''_k(y, t) = [\theta_k^1(y + it, i) : \ldots : \theta_k^k(y + it, i)].$$

Итак, $\varphi_k = \sigma_k \circ \psi_k$. Обозначим через Ω' симплектическую форму (ассоциированную с метрикой Фубини–Штуди) на первом сомножителе

$\mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^k$, через Ω'' на втором. Тогда $\Omega' + \Omega''$ является симплектической формой на произведении. Так как отображение Сегре является голоморфным вложением, то нам достаточно доказать, что индуцированная форма $\psi_k^*(\Omega' + \Omega'')$ является симплектической.

Заметим, что базис внешней алгебры левоинвариантных форм можно выбрать в следующем виде: $dx, dy, dz - \lambda x dy, dt$.

Отображение ψ_k'' является голоморфным вложением комплексного тора в $\mathbb{CP}^k$ из классической теоремы Лефшеца, и значит форма Фубини-Штуди индуцирует симплектическую форму на торе:

$$(\psi_k'')^*(y,t)(\Omega'') = \alpha \cdot dy \wedge dt,$$

где функция α нигде на M_{KT} не равна нулю.

Пусть

$$(\psi_k')^*(x,y,z)(\Omega') = f \cdot (dz - \lambda x dy) \wedge dx + g \cdot (dz - \lambda x dy) \wedge dy + h \cdot dx \wedge dy.$$

Здесь f, g, h - некоторые функции на M_{KT}. Это общий вид 2-формы на M_{KT}, которая индуцирована отображением зависящим от x, y, z.

Заметим, что для любого фиксированного y отображение ψ_k' также является голоморфным вложением из теоремы Лефшеца и следовательно

$$(\psi_k')^*(\Omega') = \beta \cdot dz \wedge dx,$$

где функция β нигде на M_{KT} не равна нулю. Отсюда следует, что $f \equiv \beta$. Собирая все вместе получим:

$$\left(\psi_k^*(\Omega' + \Omega'')\right)^2 = \left((\psi_k')^*(\Omega') + (\psi_k'')^*(\Omega'')\right)^2 =$$
$$\left(\beta \cdot (dz - \lambda x dy) \wedge dx + g \cdot (dz - \lambda x dy) \wedge dy + h \cdot dx \wedge dy + \alpha \cdot dy \wedge dt\right)^2.$$

Раскрывая скобки получим:

$$(\psi_k^*(\Omega' + \Omega''))^2 = 2\alpha\beta \cdot dx \wedge dy \wedge dz \wedge dt.$$

Последнее равенство эквивалентно условию невырожденности индуцированной формы. Замкнутость следует из того, что дифференциал коммутирует с ψ_k^*. Следовательно, $\psi_k^*(\Omega' + \Omega'')$ является замкнутой и невырожденной то есть симплектической формой. Мы доказали первый пункт утверждения теоремы.

Докажем второй пункт. Обозначим через L — расслоение, заданное мультипликаторами (2.7). При доказательстве вложения мы отмечали, что тэта-функции степени k являются сечениями $L^{\otimes k}$.

Напомним, что любое линейное комплексное расслоение над многообразием M индуцируется универсальным расслоением над $\mathbb{CP}^n$ при отображении M в комплексное проективное пространство. Следовательно расслоение $L^{\otimes k}$ и его форма кривизны являются образами универсального расслоения и его формы кривизны, которая есть форма Фубини–Штуди. Также вспомним, что первый класс Чжэня линейных расслоений реализуется именно формой кривизны. Следовательно когомологический класс индуцированной формы совпадает с первым классом Чжэня $c_1(L^{\otimes k}) = k \cdot c_1(L)$ и нам нужно доказать, что

$$c_1(L) = [(dz - \lambda x dy) \wedge dx + dy \wedge dt].$$

Воспользуемся теорией когомологий Чеха для того, чтобы вычислить $c_1(L)$. Введем покрытие $\mathbb{R}^4$ множествами

$$U_\lambda = \lambda \cdot U_0, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Для этого разнесем сдвигами из решетки Γ множество

$$U_0 = \{|u^k| < 3/4\}.$$

Заметим, что данное покрытие является хорошим — все непустые конечные пересечения диффеоморфны $\mathbb{R}^4$. Поэтому когомологии нерва этого покрытия изоморфны когомологиям всего пространства M_{KT}.

Функции перехода $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathbb{C}^*$ можно выразить через мультипликаторы

$$g_{\lambda\mu}(u) = e_\lambda(u) \cdot e_{\mu^{-1}}(\mu \cdot u); \quad \lambda, \mu \in \Gamma. \tag{2.23}$$

Нерв $N(\mathcal{U})$ минимального подпокрытия построенного выше покрытия U_λ гомеоморфен M_{KT}, и его когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ совпадают с $H^*(M_{KT}; \mathbb{Z})$. Коцикл $z_{\lambda\mu\nu} \in C^2(\mathcal{U}; \mathbb{Z})$

$$z_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i}(\log(g_{\lambda\mu}) + \log(g_{\mu\nu}) - \log(g_{\nu\lambda})) \tag{2.24}$$

по определению реализует первый класс Чжэня расслоения L. Данная формула задает значение z на двумерном симплексе $(\lambda, \mu, \nu) \in N(\mathcal{U})$.

Второе число Бетти многообразия M_{KT} равно 4. Базисные 2-циклы реализуются двумерными торами $T_{ac}, T_{bc}, T_{da}, T_{db}$, образованными коммутирующими сдвигами (2.1).

Определим функции $f_\lambda(u)$ по формуле

$$e_\lambda(u) = e^{2\pi i f_\lambda(u)}. \tag{2.25}$$

Согласно (2.23)—(2.25)

$$c_1([T_{\lambda\mu}]) = f_\mu(u) + f_\lambda(\mu \cdot u) - f_\lambda(u) - f_\mu(\lambda \cdot u).$$

Вычисляя первый класс Чжэня на базисных 2-циклах, получим:

$$c_1([T_{ca}]) = c_1([T_{bd}]) = 1;\ c_1([T_{cb}]) = c_1([T_{ad}]) = 0. \tag{2.26}$$

Так как многообразие M_{KT} является однородным пространством нильпотентной группы Ли, то любой элемент из $H^2(M_{KT};\mathbb{R})$ реализуется левоинвариантными формами двойственными к базисным 2-циклам. Группа $H^2(M_{KT};\mathbb{R})$ порождается классами когомологий форм $(dz - \lambda x dy) \wedge dx, dy \wedge dt, (dz - \lambda x dy) \wedge dy$ и $dx \wedge dt$.

Из (2.26) следует, что $c_1(L) = [(dz - \lambda x dy) \wedge dx + dy \wedge dt]$. Теорема доказана.

Глава 3

Тэта-функции на косых произведениях двумерных торов с нулевым классом Эйлера

Результаты этой главы изложены в [24].

В этой главе мы предлагаем иную конструкцию тэта-функций на четырехмерных симплектических многообразий, которую распространяем на косые произведения двумерных торов с нулевым классом Эйлера.

Мы вводим аналоги классических тэта-функций как сечения линейных комплексных расслоений над данными расслоениями. Нам однако придется отказаться от голоморфности вложения, так как на данных расслоениях, вообще говоря, нет не только кэлеровой структуры, но и комплексной. Тем не менее, данные многообразия являются симплектическими. Мы будем строить тэта-функции так, чтобы для них

выполнялся симплектический аналог теоремы Лефшеца — тэта-функции с характеристиками, которые являются сечениями тензорной степени данного линейного расслоения, задают симплектическое вложение многообразия в $\mathbb{CP}^k$ (для достаточно больших тензорных степеней).

3.1 Расслоения

Используя таблицу 1.1, выпишем из нее расслоения с нулевым классом Эйлера. Результат, с точностью до диффеоморфизма пространства расслоения (не изоморфизма расслоений), приведен в таблице 3.1. I обозначает единичную матрицу.

Покажем, что все расслоения с нулевым классом Эйлера являются однородными пространствами вещественных групп Ли. Пусть G — это вещественная группа Ли с координатами (x, y, s, t) и следующим линейным представлением:

$$\rho : (x, y, s, t) \to \left(\begin{array}{cc|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$A^x B^y$}} & s \\ & & t \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Обозначим через Γ дискретную подгруппу элементов с целыми координатами. Тогда однородное пространство $\Gamma \backslash G$ является пространством расслоения соответствующего $\{A, B\}$. Заметим, что ρ является точным представлением не G, а $\Gamma \backslash G$.

Очевидно, можно перейти к определению расслоений в виде фактор-многообразия $\mathbb{R}^4$ по действию группы Γ со следующими образующими

Таблица 3.1: Косые произведения двумерных торов с нулевым классом Эйлера

	$\{A, B\}$	Примечание
(A)	$\{I, I\} = T^2 \times T^2$	Произведение торов
(B)	(1) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$ (2) $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I\right\}$ (3) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I\right\}$ (4) $\{-I, I\}$	Гиперэллиптические поверхности
(C)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $k \neq 0$	Многообразие Кодаиры–Терстона
(D)	$\left\{\begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I\right\}$, $k \neq 0$	
(E)	$\left\{\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -I\right\}$, $k \neq 0$	
(F)	$\{A, I\}$, $\lvert\operatorname{tr} A\rvert > 2$	
(G)	$\{A, -I\}$, $\operatorname{tr} A > 2$	

(если $B = I$):

$$a \ : \ (x+1, y, \alpha s + \beta t, \gamma s + \delta t), \tag{3.1}$$

$$b \ : \ (x, y+1, s, t), \tag{3.2}$$

$$c \ : \ (x, y, s+1, t), \tag{3.3}$$

$$d \ : \ (x, y, s, t+1), \tag{3.4}$$

где $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Если $B = -I$, то

$$b \ : \ (x, y+1, -s, -t). \tag{3.5}$$

Зная точное представление $\Gamma \backslash G$, мы можем вычислить образующие алгебры левоинвариантных форм. Для этого как обычно вычислим

$$\rho^{-1} d\rho = \left(\begin{array}{c|c} C dx + D dy & A^{-x} B^{-y} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix} \\ \hline 0 \quad 0 & 0 \end{array} \right),$$

где C, D некие постоянные матрицы. Таким образом 1-формы dx, dy, ω_1, ω_2, где

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A^{-x} B^{-y} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix},$$

являются образующими.

3.2 Тэта-функции на расслоениях

Здесь и далее через M будем обозначать пространство расслоений, где слой и база — двумерные торы и класс Эйлера — нулевой.

Введем формально функцию на $\mathbb{R}^4$, универсальной накрывающей M:

$$\theta_M(x, y, s, t) = \theta(s + \omega t, \omega) \cdot \theta(x + iy, i). \tag{3.6}$$

Здесь $\theta(z, \tau)$ — это классическая тэта-функция с характеристиками $[1/2, 1/2]$, заданная мультипликаторами (2.3)-(2.4). В следующей таблице приведены функции ω в зависимости от расслоения. i обозначает $\sqrt{-1}$.

	ω
(B1), (B3)	$(-1 + \sqrt{-3})/2$
(B2), (B4)	i
(C), (E)	$-kx + i$
(D)	$kx + i$
(F), (G)	$(\lambda^{-x}v^+ + i\lambda^x v^-)/(\lambda^{-x}u^+ + i\lambda^x u^-)$

Здесь λ, λ^{-1} собственные значения A, а $(u^+, v^+)^T, (u^-, v^-)^T$ собственные вектора транспонированной матрицы A:

$$A^T \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u^+ \\ v^+ \end{pmatrix}, \quad A^T \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} u^- \\ v^- \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Причем отнормируем вектора так, чтобы $u^+v^- - u^-v^+ = 1$.

Лемма 1. *Для всех расслоений* $\operatorname{Im}\omega > 0$.

Доказательство. Неочевиден только последний случай:

$$\operatorname{Im}\omega = \frac{u^+v^- - u^-v^+}{(\lambda^{-x}u^+)^2 + (\lambda^x u^-)^2} > 0.$$

Лемма доказана. Это значит, что ряд, определяющий тэта-функцию, сходится и функция θ_M корректно определена.

Лемма 2. *Под действием образующей* (3.1) *из* Γ*:*

$$(x, y, s, t) \to (x + 1, y, \alpha s + \beta t, \gamma s + \delta t)$$

функции ω*,* $s + \omega t$ *преобразуются следующим образом:*

$$\omega \to \frac{\alpha\omega - \beta}{-\gamma\omega + \delta}, \quad s + \omega t \to \frac{s + \omega t}{-\gamma\omega + \delta}.$$

Доказательство. Очевидно достаточно показать, что:

$$\omega(x + 1) = \frac{\alpha\omega(x) - \beta}{-\gamma\omega(x) + \delta}.$$

Если ω является константой, то легко проверить, что в каждом случае

$$\omega = \frac{\alpha\omega - \beta}{-\gamma\omega + \delta}.$$

Если $\omega = kx + i, -kx + i$, то преобразование также очевидно. В случаях (F, G) необходимо использовать тождества $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ и (3.7). Лемма доказана.

Пусть $\{\theta_k^p(z, \tau)\}_{p=1}^k$ — базис классических тэта-функций степени k (2.5). Определим пространство тэта-функций степени k многообразия M, как линейную оболочку попарных произведений обыкновенных базисных тэта-функций степени k на слое и базе:

$$\theta_k^p(s + \omega t, \omega) \cdot \theta_k^q(x + iy, i), \quad p, q = 1 \dots k$$

Будем обозначать данное пространство как $\mathcal{L}_k$. Заметим, что размерность пространства $\mathcal{L}_k$ равна k^2. Тэта-функция степени один — это θ_M.

3.2.1 θ_M — сечение линейного комплексного расслоения.

Покажем, что функция θ_M является сечением линейного комплексного расслоения над многообразием M. Для этого вспомним, что сечения состоят во взаимно однозначном соответствии с функциями f на универсальной накрывающей такими, что $f(\lambda \cdot u) = e_\lambda(u) f(u)$, где λ — элемент решетки Γ, дискретной группы действующей на $\mathbb{R}^4$, $e_\lambda(u)$ — мультипликаторы, то есть ненулевые функции $e_\lambda : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^*$ удовлетворяющие тождествам

$$e_\lambda(\mu \cdot u)\, e_\mu(u) = e_{\lambda\mu}(u), \quad \lambda, \mu \in \Gamma$$

$$e_0(u) = 1.$$

Мультипликаторы следующим образом задают линейное комплексное расслоение над многообразием M - прямое произведение $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{C}$ факторизуется по действию Γ:

$$(u, w) \sim (\lambda \cdot u, e_\lambda(u) w), \quad u \in \mathbb{R}^4, w \in \mathbb{C}, \lambda \in \Gamma.$$

Рассмотрим поведение функции θ_M под действием образующих группы Γ (3.1)-(3.4) (при $B = I$):

$$\theta_M(x+1, y, \alpha s + \beta t, \gamma s + \delta t) = \zeta(-\gamma\omega + \delta)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{-\gamma(s+\omega t)^2}{-\gamma\omega + \delta}\right) \cdot \theta_M(x, y, s, t), \tag{3.8}$$

$$\theta_M(x, y+1, s, t) = -\exp(-2\pi i(x + iy) + \pi) \cdot \theta_M(x, y, s, t), \tag{3.9}$$

$$\theta_M(x, y, s+1, t) = -\theta_M(x, y, s, t), \tag{3.10}$$

$$\theta_M(x, y, s, t+1) = -\exp(-2\pi i(s + \omega t) - \pi i\omega) \cdot \theta_M(x, y, s, t). \tag{3.11}$$

При $B = -I$ формулу (3.9) следует заменить на следующую:

$$\theta_M(x, y+1, -s, -t) = \exp(-2\pi i(x+iy) + \pi) \cdot \theta_M(x, y, s, t). \tag{3.12}$$

Мы воспользовались свойствами периодичности классической тэта-функции (2.2)-(2.4) и леммой 2. Из этих формул следует, что θ_M является сечением расслоения, заданного мультипликаторами (3.8) - (3.12).

Чтобы убедиться в корректности конструкции расслоения заданного этими мультипликаторами, необходимо только проверить, что нетривиальные соотношения между образующими решетки Γ (3.1)-(3.5):

$$[a, c] = c^{1-\delta} d^{\gamma}, \quad [a, d] = c^{\beta} d^{1-\alpha}, \quad [g, h] = g^{-1} h^{-1} g h,$$

влекут за собой тождества на мультипликаторы. Это очевидно, если учесть, что все мультипликаторы заданы поведением одной и той же функции.

3.2.2 Мультипликативное свойство θ_M

Введем действие $\zeta = (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ на θ_M:

$$(\zeta \cdot \theta_M)(x, y, s, t) = \theta(s + \omega t + \lambda, \omega) \cdot \theta(x + iy + \mu, i). \tag{3.13}$$

Пусть $\zeta_i = (\lambda_i, \mu_i),\ i = 1, \ldots, k$ — набор постоянных векторов из $\mathbb{C}^2$ такой, что его сумма равна нулю. Как и для классической тэта-функции нам хотелось бы, чтобы произведение

$$\prod_{i=1}^{k} (\zeta_i \cdot \theta_M)(x, y, s, t) \tag{3.14}$$

было тэта-функцией степени k. Данное свойство тэта-функции является ключевым при доказательстве теоремы о вложении в комплексное проективное пространство.

Легко убедиться, что этому мешает мультипликатор (3.8) вида

$$\exp(-\gamma(s+\omega t)^2).$$

Если данный мультипликатор нетривиален, то есть $\gamma \neq 0$, потребуем, чтобы выполнялось еще одно соотношение:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 = 0. \tag{3.15}$$

Тогда, как не трудно убедиться, произведение (3.14) является тэта-функцией степени k.

3.3 Вложение в комплексное проективное пространство

Перенумеруем базисные тэта-функции пространства $\mathcal{L}_k$: $\{\sigma_i\}_{i=1}^{k^2}$. Тогда отображение

$$\varphi_k = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k^2})$$

будет отображением многообразия M в $\mathbb{CP}^{k^2-1}$.

Напомним, что мы обозначали элементы матрицы монодромии A как

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

и при $\gamma \neq 0$ требуем выполнения дополнительного условия (3.15).

Теорема 3. *Отображение* φ_k *корректно определено и является вложением при:*

а) $k \geqslant 4$*, если* $\gamma \neq 0$*;*

б) $k \geqslant 3$*, если* $\gamma = 0$*.*

Доказательство. Докажем пункт а) утверждения теоремы при $k = 4$. Из доказательства будет ясно как доказывать в остальных случаях.

Сперва установим инъективность отображения φ_k. Мы будем следовать доказательству классической теоремы Лефшеца о вложении для абелевых многообразий (см. ее изложение, в [17, глава 2, теорема 1.3]).

Прежде всего заметим, что пространство тэта-функций степени k — это глобальные сечения k-й тензорной степени расслоения заданного мультипликаторами (3.8)-(3.12).

В предыдущей главе, в §2.3 мы уже отмечали, что если верно, что для любых точек $u \neq v \in M$ существует сечение $\sigma \in \mathcal{L}_k$ такое, что $\sigma(u) = 0$ и $\sigma(v) \neq 0$, то отображение φ_k является корректно определенным и инъективным.

Будем подбирать тэта-функцию степени четыре в виде произведения двух функций $\sigma = f \cdot g$:

$$f(s + \omega(x)t, x, \alpha, \beta) = \theta(s + \omega t + \alpha, \omega)\theta(s + \omega t + \beta, \omega)\times \\ \times\, \theta(s + \omega t + \gamma, \omega)\theta(s + \omega t + \delta, \omega), \quad (3.16)$$

$$g(x+iy,\alpha',\beta',\gamma') = \theta(x+iy+\alpha',i)\theta(x+iy+\beta',i)\times \\ \times\,\theta(x+iy+\gamma',i)\theta(x+iy+\delta',i). \quad (3.17)$$

Здесь

$$\gamma = \frac{1}{4}\left(-2(\alpha+\beta) + \sqrt{-4(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}\right), \quad (3.18)$$

$$\delta = \frac{1}{4}\left(-2(\alpha+\beta) - \sqrt{-4(\alpha+\beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2}\right), \quad (3.19)$$

$$\delta' = -\alpha' - \beta' - \gamma'. \quad (3.20)$$

В §3.3.2 было показано, что функция $f \cdot g$ действительно является тэта-функцией степени четыре многообразия M.

Обозначим координаты точек u, v как (x, y, s, t) и (x', y', s', t') соответственно. Выберем α' так, чтобы $\theta(x+iy+\alpha') = 0$. Теперь подберем β', γ', δ' так, чтобы остальные сомножители в определении функции g не были равны нулю в точке v:

$$\theta(x'+iy'+\beta')\theta(x'+iy'+\gamma')\theta(x'+iy'+\delta') \neq 0.$$

Мы можем этого добиться так, как нули тэта-функции изолированы. Также малым шевелением $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ можно добиться, чтобы функция f не равнялась нулю в точке v.

Заметим, что в этом месте становится ясным, почему в пункте а) k должно не меньше четырех. При $k = 3$, когда не было бы δ', константы β',γ' были бы функциями α' вследствие условий (3.15), и мы не смогли бы добиться вышеуказанного неравенства нулю.

Построенное сечение решило бы задачу, если бы $\theta(x'+iy'+\alpha') \neq 0$. Допустим, что это так. Так как у классической тэта-функции в фундаментальной области решетки, образованной ее периодами,

единственный нуль, то отсюда следует, что $x = x', y = y'$. Равенство по модулю решетки, но без ограничения общности можно считать, что u, v находятся в фундаментальной области, единичном кубе, $0 \leqslant x, y, s, t < 1$.

Выберем α так, чтобы $\theta(s+\omega(x)t+\alpha, \omega(x)) = 0$. Заметим, что теперь $\theta(s' + \omega(x')t' + \alpha, \omega(x')) \neq 0$. Так как иначе $u = v$. Подберем β, γ, δ так, чтобы функция $f(v) \neq 0$; $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ так, чтобы $g(v) \neq 0$.

Таким образом мы построили необходимое сечение и доказали инъективность отображения φ_k.

Теперь докажем, что ранг φ_k максимален. Здесь мы будем следовать доказательству теоремы Лефшеца, изложенному в [18]. В §2.3 мы показали, что ранг отображения максимален, если максимален ранг (над $\mathbb{C}$) следующей матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{k^2} \\ \partial_x\sigma_1 & \dots & \partial_x\sigma_{k^2} \\ \partial_y\sigma_1 & \dots & \partial_y\sigma_{k^2} \\ \partial_s\sigma_1 & \dots & \partial_s\sigma_{k^2} \\ \partial_t\sigma_1 & \dots & \partial_t\sigma_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Преобразуем матрицу J к удобному для нас виду. Ранг следующей матрицы совпадает с рангом J:

$$\widetilde{J} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_{k^2} \\ (\partial_x - i\partial_y)\sigma_1 & \dots & (\partial_x - i\partial_y)\sigma_{k^2} \\ (\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_1 & \dots & (\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_{k^2} \\ (\partial_x + i\partial_y)\sigma_1 & \dots & (\partial_x + i\partial_y)\sigma_{k^2} \\ (\partial_s - \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_1 & \dots & (\partial_s - \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_{k^2} \end{pmatrix}.$$

Напомним, что для голоморфной функции f комплексного аргумента $w = u + iv$:

$$\frac{\partial f}{\partial w} = \frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)f, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)f = 0.$$

Последняя две строки $\widetilde{J}$ — это условия Коши-Римана. Так как сечения σ_j для любого x разлагаются в ряд по $s + \omega(x)t$, то последняя строчка $\widetilde{J}$ всегда нулевая.

Заметим, что если $\omega = \mathrm{const}$, что выполняется для тэта-функций на расслоениях (B), то сечения голоморфны, и можно использовать доказательство классической теоремы Лефшеца. Мы будем предполагать, что $(\partial_x + i\partial_y)\theta_M \neq 0$.

Предположим, что ранг $\widetilde{J}$ (над $\mathbb{C}$) в некоторой фиксированной точке $u^* = (x^*, y^*, s^*, t^*) \in M$ меньше 4. Это означает, что существует нетривиальный набор констант a, b, c, d такой, что

$$a\sigma_j(u^*) + \frac{b}{2}(\partial_x - i\partial_y)\sigma_j(u^*) + \frac{c}{2}(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega})\sigma_j(u^*) + \frac{d}{2}(\partial_x + i\partial_y)\sigma_j(u^*) = 0,$$
$$j = 1, \dots, k^2.$$

Функция

$$\sigma = f(s + \omega(x)t, x, \alpha, \beta) \cdot g(x + iy, \alpha', \beta', \gamma'),$$

описываемая формулами (3.16)-(3.20), лежит в $\mathcal{L}_k (k = 4)$ при любых α, β, α', β', γ'. Значит она раскладывается по базису σ_j и для нее верно следующее равенство в точке u^*

$$a\sigma + \frac{b}{2}(\partial_x - i\partial_y)\sigma + \frac{c}{2}(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega})\sigma + \ + \frac{d}{2}(\partial_x + i\partial_y)\sigma = 0. \tag{3.21}$$

Введем обозначение $L = \frac{b}{2}(\partial_x - i\partial_y) + \frac{c}{2}(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}) + \frac{d}{2}(\partial_x + i\partial_y)$ и перепишем (3.21) в виде:

$$L\log((\alpha, \alpha')\cdot\theta_M)(u^*) = -a - L\log((\beta, \beta')\cdot\theta_M)(u^*) - \\ - L\log((\gamma, \gamma')\cdot\theta_M)(u^*) - L\log((\delta, \delta')\cdot\theta_M)(u^*). \quad (3.22)$$

Здесь $((\lambda, \mu)\cdot\theta_M)$ — действие, описанное формулой (3.13). Для любых u, α, α' существуют β, β', γ', такие, что

$$((\beta, \beta')\cdot\theta_M)(u) \times ((\gamma, \gamma')\cdot\theta_M)(u) \times ((\delta, \delta')\cdot\theta_M)(u) \neq 0. \quad (3.23)$$

Из (3.22)-(3.23) следует, что функция

$$\xi(\alpha, \alpha') = L\log((\alpha, \alpha')\cdot\theta_M)(u^*) \quad (3.24)$$

является целой функцией от $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{C}^2$. Согласно (3.8)-(3.12) функция $\xi(\alpha, \alpha')$ удовлетворяет следующим условиям периодичности:

$$\begin{aligned} \xi(\alpha + 1, \alpha') &= \xi(\alpha, \alpha'), & (3.25)\\ \xi(\alpha + \omega(x^*), \alpha') &= \xi(\alpha, \alpha') - 2\pi ic - \pi i\frac{(b+d)}{2}\omega(x^*), & (3.26)\\ \xi(\alpha, \alpha' + 1) &= \xi(\alpha, \alpha'), & (3.27)\\ \xi(\alpha, \alpha' + i) &= \xi(\alpha, \alpha') - 2\pi ib. & (3.28) \end{aligned}$$

Следовательно производные $\partial_\alpha\xi$, $\partial_{\alpha'}\xi$ являются целыми двоякопериодическими функциями. Это означает, что они постоянны, и $\xi = A\alpha + B\alpha' + C$. Из (3.25),(3.27) следует, что $A = B = 0$, и функция $\xi \equiv C$, постоянна. Из (3.26),(3.28) следует, что

$$b = 2\pi ic + \pi i\frac{(b+d)}{2}\omega(x^*) = 0.$$

Тогда верно следующее соотношение:

$$\xi = C = c\left[\frac{(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\theta)(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}{\theta(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}\right]_{u=u^*} + \frac{d}{2}\left[\frac{(\partial_x\theta)(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}{\theta(s+\omega(x)t+\alpha,\omega(x))}\right]_{u=u^*}. \quad (3.29)$$

Здесь мы неявно использовали условия Коши-Римана:

$$(\partial_x + i\partial_y)\theta(x+iy, i) = 0.$$

Обозначим через D дифференцирование по $s + \omega t$:

$$D = \frac{1}{2}\left(\partial_s + \frac{\partial_t}{\omega}\right).$$

Из (2.6) следует, что

$$\partial_x\theta(s+\omega t,\omega) = \frac{1}{4\pi i}(D^2\theta)(s+\omega t,\omega) + t(D\theta)(s+\omega t,\omega). \quad (3.30)$$

Подставляя (3.30) в (3.29) и учитывая при этом, что

$$(D\theta)(s+\omega t+\alpha,\omega) = \partial_\alpha\theta(s+\omega t+\alpha,\omega),$$

получим, что функция $\theta(s^* + \omega t^* + \alpha, \omega)$, как функция от α, удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d}{2}\cdot\frac{\partial\omega(x^*)}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi i}\theta'' + t^*\theta'\right) + c\theta' - C\theta = 0.$$

Выписав общее решение данного уравнения, можно легко убедиться, что это приводит к противоречию с условиями периодичности тэта-функции (2.3)-(2.4) и следовательно $c = d = C = 0$. Из (3.21) следует, что $a = 0$.

Мы получаем, что набор постоянных a, b, c, d тривиален и матрица $\widetilde{J}$ имеет максимальный ранг. Так как точка u^* была выбрана произвольной, то ранг φ_k всюду равен 4. Теорема доказана.

3.4 Вложение является симплектическим отображением

Для всех $\{A, B\}$ пространство расслоения M является симплектическим многообразием, где симплектическая форма может быть к примеру задана следующей 2-формой: $\omega_M = dx \wedge dy + ds \wedge dt$. В этом разделе мы докажем следующее утверждение:

Теорема 4. *1. Если отображение φ_k является вложением, то оно индуцирует симплектическую структуру на многообразии M.*

2. Индуцированная симплектическая форма когомологична $k \cdot \omega_M$.

Доказательство. В определении отображения φ_k выберем в качестве базисных тэта-функций из $\mathcal{L}_k$ следующие функции:

$$\theta_k^p(s + \omega t, \omega) \cdot \theta_k^q(x + iy, i); \quad p, q = 1, \ldots, k.$$

Заметим, что отображение φ_k является композицией отображения Сегре $\sigma_k : \mathbb{CP}^{k-1} \times \mathbb{CP}^{k-1} \to \mathbb{CP}^{k^2-1}$, которое задается в однородных координатах формулой

$$\sigma_k \left([z^1 : \ldots : z^k], [w^1 : \ldots : w^k]\right) = [z^1 w^1 : z^1 w^2 : \ldots : z^k w^{k-1} : z^k w^k]$$

и отображения $\psi_k : M \to \mathbb{CP}^{k-1} \times \mathbb{CP}^{k-1}$, $\psi_k = (\psi_k', \psi_k'')$. Где

$$\psi_k'(x, s, t) = [\theta_k^1(s + \omega t, \omega) : \ldots : \theta_k^k(s + \omega t, \omega)],$$

$$\psi_k''(x, y) = [\theta_k^1(x + iy, i) : \ldots : \theta_k^k(x + iy, i)].$$

Итак, $\varphi_k = \sigma_k \circ \psi_k$. Обозначим через Ω' симплектическую форму (ассоциированную с метрикой Фубини–Штуди) на первом сомножителе

$\mathbb{CP}^k \times \mathbb{CP}^k$, через Ω'' на втором. Тогда $\Omega' + \Omega''$ является симплектической формой на произведении. Так как отображение Сегре является голоморфным вложением, то нам достаточно доказать, что индуцированная форма $\psi_k^*(\Omega' + \Omega'')$ является симплектической.

Напомним, что в §3.2 мы вычислили образующие алгебры левоинвариантных форм: dx, dy, ω_1, ω_2:

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = A^{-x} B^{-y} \begin{pmatrix} ds \\ dt \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = ds \wedge dt,$$

так как $A, B \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Отображение ψ_k'' является голоморфным вложением комплексного тора в $\mathbb{CP}^k$ из классической теоремы Лефшеца, и значит

$$(\psi_k'')^*(x, y)(\Omega'') = \mu \cdot dx \wedge dy,$$

где $\mu \neq 0$ всюду на M. Пусть

$$(\psi_k')^*(x, s, t)(\Omega') = f \cdot \omega_1 \wedge dx + g \cdot \omega_2 \wedge dx + h \cdot ds \wedge dt.$$

Здесь f, g, h — некоторые функции на M. Это общий вид 2-формы, индуцированной отображением ψ_k', зависящим от x, s, t.

Заметим, что для любого фиксированного x отображение ψ_k' также является голоморфным вложением и следовательно

$$(\psi_k')^*(\Omega') = \nu \cdot ds \wedge dt,$$

где $\nu \neq 0$ всюду на M. Отсюда следует, что $h \equiv \nu$. Собирая все вместе получим:

$$(\psi_k^*(\Omega' + \Omega''))^2 = \left((\psi_k')^*(\Omega') + (\psi_k'')^*(\Omega'')\right)^2 =$$
$$= (f \cdot \omega_1 \wedge dx + g \cdot \omega_2 \wedge dx + \nu \cdot ds \wedge dt + \mu \cdot dx \wedge dy)^2 .$$

Раскрывая скобки получим:

$$(\psi_k^*(\Omega' + \Omega''))^2 = 2\mu\nu \cdot dx \wedge dy \wedge ds \wedge dt.$$

Последнее равенство эквивалентно условию невырожденности индуцированной формы. Замкнутость следует из того, что дифференциал коммутирует с ψ_k^*. Следовательно, $\psi_k^*(\Omega' + \Omega'')$ является симплектической формой. Мы доказали первый пункт утверждения теоремы.

Докажем второй пункт. Обозначим через L — расслоение, заданное мультипликаторами (3.8)-(3.12). При доказательстве вложения мы отмечали, что тэта-функции степени k являются сечениями $L^{\otimes k}$.

Как и в предыдущей главе, в §2.4 нам нужно доказать, что

$$c_1(L) = [dx \wedge dy + ds \wedge dt].$$

Воспользуемся теорией когомологий Чеха для того, чтобы вычислить $c_1(L)$. Введем покрытие $\mathbb{R}^4$ множествами

$$U_\lambda = \lambda \cdot U_0, \quad \lambda \in \Gamma.$$

Для этого разнесем сдвигами из решетки Γ множество

$$U_0 = \{|u^k| < 3/4\}.$$

Заметим, что данное покрытие является хорошим — все непустые конечные пересечения диффеоморфны $\mathbb{R}^4$. Поэтому когомологии нерва этого покрытия изоморфны когомологиям всего пространства M.

Функции перехода $g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to \mathbb{C}^*$ можно выразить через мультипликаторы

$$g_{\lambda\mu}(u) = e_\lambda(u) \cdot e_{\mu^{-1}}(\mu \cdot u); \quad \lambda, \mu \in \Gamma. \tag{3.31}$$

Нерв $N(\mathcal{U})$ минимального подпокрытия построенного выше покрытия U_λ гомеоморфен M, и его когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ совпадают с $H^*(M;\mathbb{Z})$. Коцикл $z_{\lambda\mu\nu} \in C^2(\mathcal{U};\mathbb{Z})$

$$z_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2\pi i}(\log(g_{\lambda\mu}) + \log(g_{\mu\nu}) - \log(g_{\nu\lambda})) \tag{3.32}$$

по определению реализует первый класс Чжэня расслоения L. Данная формула задает значение z на двумерном симплексе $(\lambda, \mu, \nu) \in N(\mathcal{U})$.

Легко установить, что

1) $H^2(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$, если M является многообразием Кодаиры-Терстона:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = E,$$

и образующие $H^2(M;\mathbb{R})$ могут быть выбраны в виде $[dx \wedge dy]$, $[ds \wedge dt]$, $[dy \wedge dt]$, $[(ds - \lambda x dt) \wedge dx]$;

2) во всех остальных случаях $H^2(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2$, и образующими являются $[dx \wedge dy]$, $[ds \wedge dt]$.

Таким образом, для всех многообразий M, торы T_{ab}, T_{cd}, образованные коммутирующими сдвигами из Γ (3.1)-(3.5), являются

циклами двойственными к $[dx \wedge dy]$, $[ds \wedge dt]$. В случае многообразия Кодаиры-Терстона мы получаем еще два цикла: T_{bd}, T_{ac}.

Определим функции $f_\lambda(u)$ по формуле

$$e_\lambda(u) = e^{2\pi i f_\lambda(u)}. \tag{3.33}$$

Согласно (3.31)—(3.33)

$$c_1([T_{\lambda\mu}]) = f_\mu(u) + f_\lambda(\mu \cdot u) - f_\lambda(u) - f_\mu(\lambda \cdot u).$$

Вычисляя первый класс Чжэня на T_{ab}, T_{cd}, получим:

$$c_1([T_{ab}]) = c_1([T_{cd}]) = 1; \tag{3.34}$$

В случае многообразия Кодаиры–Терстона:

$$c_1([T_{bd}]) = c_1([T_{ac}]) = 0. \tag{3.35}$$

Так как многообразие M является однородным пространством вещественной группы Ли, то любой элемент из $H^2(M;\mathbb{R})$ реализуется левоинвариантными формами двойственными к базисным 2-циклам. Из (3.34)-(3.35) следует, что $c_1(L) = [dx \wedge dy + ds \wedge dt]$. Теорема доказана.

3.5 Связь с другими обобщениями тэта-функций

Аналоги тэта-функции на нильмногообразиях уже определялись ранее [14, 15]. Данные обобщения исходят из теории представлений. Рассмотрим данный подход и покажем, что псевдопериодические

функции, введенные в работе [15], при определенных условиях оказываются тэта-функциями на многообразии Кодаиры–Терстона, введенными в данной главе, Для начала покажем как в рамках данного подхода определяется классическая тэта-функция.

Напомним несколько определений из симплектической геометрии. Действие группы Ли G на симплектическом многообразии (M, ω) называется слабо гамильтоновым, если каждая однопараметрическая подгруппа инфинитезимально порождена симплектическим градиентом некоторого гамильтониана, то есть для любого $\xi \in \mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ алгебра Ли группы G, существует функция $\phi_\xi : M \to \mathbb{R}$ такая, что

$$d\phi_\xi = \omega(X^\xi, \cdot),$$

где X^ξ — это инфинитезимальное действие ξ на M. Действие называется гамильтоновым, если линейное отображение $\xi \to \phi_\xi$ является гомоморфизмом алгебр Ли:

$$\{\phi_\xi, \phi_\eta\} = \phi_{[\xi,\eta]}.$$

Рассмотрим группу $\mathbb{R}^2$ с координатами (x, y), оснащенную симплектической структурой $dx \wedge dy$. $\mathbb{R}^2$ действует на себя сдвигами, инфинитезимально порожденными векторными полями ∂_x, ∂_y. Для того, чтобы данное действие стало гамильтоновым, возьмем центральное расширение $\mathbb{R}^2$, с одной нетривиальной скобкой $[\partial_x, \partial_y] = Z$ и гамильтонианом $\phi_Z \equiv 1$. Это значит, что Z действует тривиальным образом на $\mathbb{R}^2$, но полученная группа действует гамильтоновым образом. Новая группа — это хорошо известная группа Гейзенберга.

Группу Гейзенберга можно определить как множество $\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3\}$ с групповым законом

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^1 + b^1, a^2 + b^2, a^3 + b^3 - a^2 b^1).$$

Пусть Γ — это подгруппа элементов с целочисленными значениями. Тогда $Q = \Gamma \backslash \mathrm{Heis}(3)$ является компактным многообразием. Центр группы Гейзенберга $\{(0,0,z)\} \subset \mathrm{Heis}(3)$ действует справа как S^1 на Q. Это действие дает Q структуру главного S^1-расслоения над T^2, чей первый класс Чжэня порождается симплектической формой. S^1 действует на $\mathbb{C}$ умножениями и порождает эрмитово линейное расслоение $\mathcal{L} \to T^2$, ассоциированное с Q. Данное расслоение обладает единственным (с точностью до нормировки) голоморфным сечением. Расслоение $\mathcal{L}$ можно поднять на $\mathbb{R}^2$, универсальную накрывающую T^2. Классическая тэта-функция является единственным сечением $\mathcal{L}$, представленное в виде сечения получающегося тривиального расслоения.

Заметим, что тэта-функции, введенные в работе [14], являются функциями на Q. Аусландер ставил своей целью построение базиса $L^2(Q)$. Очевидно тэта-функции Аусландера сильно отличаются от определяемых в данной работе.

Группа Гейзенберга действует на Q транзитивно справа, и это действие индуцирует унитарное (по отношению к лебеговой мере) действие на $L^2(Q)$

$$[\rho(g)f](x) = f(x \cdot g),$$

известное как правое (квази-) регулярное представление. Следовательно $L^2(Q)$ можно разложить в сумму неприводимых унитарных

представлений группы Гейзенберга, известных по работе Кириллова [20]. Для наших целей достаточно знать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ существует унитарное неприводимое представление π_λ группы Heis(3) на $V_\lambda \simeq L^2(\mathbb{R}, dx)$ заданное следующим образом

$$[\pi_\lambda((a,b,c))f](x) = e^{2\pi i\lambda(c+bx)}f(x+a)$$

Тогда

$$L^2(Q) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} |k|V_k \oplus V_0,$$

где $V_0 \simeq L^2(T^2)$, и каждое инвариантное подпространство может быть разложено в сумму $|k|$ копий неприводимого пространства V_k.

Функциональные пространства $L^2(\mathbb{R}, dx)$ и $L^2(Q)$ связанные следующим Θ-отображением Вейля–Брезина [21],[22]. Пусть x, y, ϕ — координаты на Q, индуцированные координатами a^1, a^2, a^3 на Heis(3). Для каждого $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ определим отображение $\Theta_k : L^2(\mathbb{R}, dx) \to L^2(Q)$ следующим образом:

$$(\Theta_k f)(\Gamma(x,y,\phi)) = e^{-2\pi ik\phi}\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(y+m)e^{2\pi imx}.$$

Отображения Θ_k унитарны и совместны с действием группы Гейзенберга. Определим функции $\vartheta_k f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ следующим образом:

$$(\vartheta_k f)(x,y) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f(y+m)e^{2\pi ikmx}.$$

Заметим, что сечения $\mathcal{L}^{\otimes k}$ можно отождествить с функциями $f : Q \to \mathbb{C}$ такими, что

$$f((0,0,c)\cdot(x,y,\phi)) = e^{-2\pi ikc}f((x,y,\phi)).$$

Следовательно функции $\Theta_k f$ могут быть отождествлены с сечениями $\mathcal{L}^{\otimes k} \to T^2$. Данные сечения индуцируют сечения тривиального расслоения над универсальным накрытием T^2. После выбора соответствующей тривиализации и отождествления сечений с функциями на $\mathbb{R}^2$, мы получаем функции $\vartheta_k f$.

Классическая тэта-функция $\theta(z)$, с точностью до домножения на экспоненту, является образом гауссова произведения под действием отображения Вейля–Брезина при $k = 1$:

$$[\vartheta_1(e^{-\pi t^2})](x, y) = \theta(x + iy) \times e^{-\pi y^2}.$$

Данный факт связан с устройством ядра лапласиана Ходжа на $\mathcal{L}$, порожденного тэта-функцией, и на $V_1 \simeq L^2(\mathbb{R})$, порожденного гауссовым произведением.

В работе [15] данный подход обобщается для многообразия Кодаиры–Терстона следующим образом. Пусть $G = \mathrm{Heis}(3) \times \mathbb{R}$, $\Gamma_0 = \Gamma \times \mathbb{Z}$. Тогда многообразие Кодаиры–Терстона $M = \Gamma_0 \backslash G$. Так как на многообразии M существует целочисленная симплектическая форма ω, то существует эрмитово линейное расслоение $\mathcal{L} \to M$ такое, что его формой кривизны является ω.

Далее авторами вводится аналог группы Гейзенберга для тора — центральное расширение

$$1 \to \mathbb{R} \to \widetilde{G} \to G \to 1$$

такое, что $\widetilde{G}$ действует на M гамильтоновым образом. Это действие поднимается на расслоение $\mathcal{L}$ и индуцирует правое (квази-) регулярное

представление ρ группы $\widetilde{G}$ на $L^2(M,\mathcal{L})$, заданное следующим образом:

$$(\rho(\tilde{g})s)(m) = \tilde{g}^{-1}s(m\cdot\tilde{g}).$$

Данное представление является унитарным по отношению к мере Лиувилля на M и разлагается в прямую сумму унитарных неприводимых представлений $\pi_k : \widetilde{G} \to End(V_k)$ как

$$L^2(M,\mathcal{L}^{\otimes k}) = 4k^2 V_k.$$

Для любого $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ определяется семейство отображений

$$\left\{\Theta_k^{m,n} : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(M,\mathcal{L}^{\otimes k}),\ m,n = 0,1,\dots,2k-1\right\}$$

так, чтобы

$$L^2(M,\mathcal{L}^{\otimes k}) \simeq \bigoplus_{m,n=0}^{2k-1} \Theta_k^{m,n}(L^2(\mathbb{R}^2))$$

было ортогональным разложением $L^2(M,\mathcal{L}^{\otimes k})$ в сумму неприводимых $\widetilde{G}$-пространств. Отождествляя сечения $\mathcal{L}^{\otimes k}$ с функциями на универсальной накрывающей, получаем для любой функции, интегрируемой с квадратом, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ и для любых $m,n = 0,1,\dots,2k-1$ функции $\vartheta_k^{m,n} f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}$ заданные формулой

$$(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z,t) = \\ e^{-2\pi i[my - n(z+xy)] - 4\pi ikzx} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} e^{2\pi inya - 4\pi ik(by - za - y(x+a)^2/2)} f(x+a, t+b).$$

Данные функции имеют следующие условия псевдопериодичности:

$$\begin{aligned}
(\vartheta_k^{m,n} f)(x+1,y,z,t) &= (\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z,t),\\
(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y+1,z-x,t) &= e^{-2\pi ikx^2}(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z,t),\\
(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z+1,t) &= e^{4\pi ikx}(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z,t),\\
(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z,t+1) &= e^{4\pi iky}(\vartheta_k^{m,n} f)(x,y,z,t).
\end{aligned}$$

На этом мы заканчиваем изложение работы Кирвина и Урибе. Покажем, что при определенном выборе $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ функция $\vartheta_k^{m,n} f$ оказывается с определенной степенью точности тэта-функцией на многообразии Кодаиры–Терстона, определенной в данной главе.

Пусть $k = 1$, $m = 0$, $n = 0$, $f = g(t) \cdot h(x)$:

$$g(t) = e^{-2\pi t^2}, \quad h(x) = e^{-2\pi x^2}.$$

Тогда

$$(\vartheta_k^{m,n} f)(x, y, z, t) = \\ e^{-4\pi izx - 2\pi t^2 - 2\pi x^2} \cdot \theta(2(z + (y + i)x), 2(y + i)) \cdot \theta(2(-y + it), 2i), \quad (3.36)$$

где $\theta(z, \tau)$ — классическая тэта-функция с характеристиками $[0, 0]$.

Напомним, что определенная нами в третьей главе тэта-функция на многообразии Кодаиры–Терстона (3.6) имеет следующий вид

$$\theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](s + \omega t, \omega) \cdot \theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](x + iy, i), \quad \omega = -kx + i, \quad k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\},$$

где $\theta[a, b](z, \tau)$ — это классическая тэта-функция с характеристиками $[a, b]$. Мы выбрали несколько иную тэта-функцию за ее инвариантность относительно модулярных преобразований. Кирвин и Урибе видимо с той же целью домножили аргумент и период на два. Если сделать замену переменных

$$x' = t, \; y' = -x, \; z' = s, \; t' = y, \; k = 1,$$

то функция

$$\theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](s + \omega t, \omega) \cdot \theta[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}](x + iy, i), \quad \omega = -kx + i$$

переходит в

$$\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](z'+(y'+i)x',y'+i)\cdot\theta[\frac{1}{2},\frac{1}{2}](-y'+it',i),$$

которая с точностью до сдвига на характеристики и домножения на экспоненту совпадает с функцией (3.36).

Литература

[1] Thurston, W. P. Some simple examples of symplectic manifolds // Proc. Amer.Math. Soc. 1976. V. 55. P. 467–468.

[2] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.

[3] Kostant, B. Quantization and unitary reprezentations. Berlin. Springer, 1970. P. 87–207.

[4] Kodaira, K. On the structure of compact complex analytic surfaces. I // Amer. J. Math. 1964. V. 86. P. 751—798.

[5] Gromov, M.L. A topological technique for the construction of the solutions of differential equations and inequalities / Actes Còngres Intern. Math. (Nice, 1970). Paris. Gauthier-Villars. V. 2. 1971. P. 221–225.

[6] Tischler, D. Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds // J. Diff. Geom. 1977. V. 12. P. 229–235.

[7] Benson, C., Gordon, C. S. Kähler and symplectic structures on nilmanifolds // Topology. 1988. V. 27. P. 755–782.

[8] Benson, C., Gordon, C. S. Kähler structures on compact solvmanifolds // Proc. Amer. Math. Soc. 1990. V. 108. P. 971–980.

[9] Campana, F. Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents // Ann. Sci. École Norm. Sup. 1995. V. 28. P. 307—316.

[10] Hasegawa, K. Complex and Kähler structures on compact solvmanifolds // J. Symplectic Geom. 2005. V. 3 P. 749–767.

[11] Hasegawa, K. A note on compact solvmanifolds with Kähler structures // Osaka J. Math. 2006. V. 43 P. 131–135.

[12] Geiges, H. Symplectic structures on T^2-bundles over T^2 // Duke Math. J. 1992. V. 67 P. 539–555.

[13] Ue, M. Geometric 4-manifolds in the sense of Thurston and Seifert 4-manifolds I // J. Math. Soc. Japan. 1990. V. 42. P. 511–540.

[14] Auslander, L. Lecture notes on nil-theta functions. Providence. R.I. AMS, 1977.

[15] Kirwin, W.D., Uribe, A. Theta-functions on the Kodaira–Thurston manifold // ARXIV.ORG: сб. электр. препринтов. 2007. 24 дек. URL: http//arxiv.org/abs/0712.4016. (дата обращения: 21.02.2009).

[16] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М. Мир, 1982.

[17] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М. Мир, 1988.

[18] Тайманов И.А. Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения // Успехи математических наук. 1997. Т. 52. № 1. С. 149–224.

[19] Sakamoto, K., Fukuhara,S. Classification of T^2-bundles over T^2 // Tokyo J. Math. 1983. V. 6 P. 311–327.

[20] Кириллов А.А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи математических наук. 1962. Т. 17. №4. С. 57–110.

[21] Weil, A. Sur certains groupes d'opérateurs unitaires // Acta Math. 1964. V. 111. P. 143—211.

[22] Brezin, J. Harmonic analysis on nilmanifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 150. P. 611—618.

Работы автора по теме диссертации

[23] Егоров Д.В. Тэта-функции на многообразии Кодаиры–Терстона // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50. № 2. С. 320–328.

[24] Егоров Д.В. Тэта-функции на косых произведениях двумерных торов с нулевым классом Эйлера // Сибирский математический журнал. 2009. Т. 50. № 4. С. 818–831.