НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Миронов
Андрей Евгеньевич

# Абелевы многообразия и матричные коммутирующие дифференциальные операторы

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

научный руководитель —
доктор физико- математических
наук И. А. Тайманов

Новосибирск — 2001

# Содержание

# 0 Введение

В диссертации изучаются двумерные $2 \times 2$-матричные коммутирующие дифференциальные операторы, указанные Накаяшики [1], а также предложен метод нахождения решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в терминах тэта-функций не главно поляризованных абелевых многообразий.

В работе [1] Накаяшики построил коммутативные кольца $g! \times g!$-матричных дифференциальных операторов по $g$ переменным (см. также [2]). Совместные собственные вектор-функции и собственные числа этих операторов параметризуются точками главно поляризованного абелева многообразия размерности $g$ с несингулярным тэта-дивизором. Каждый оператор отвечает некоторой мероморфной функции (спектральной функции) на абелевом многообразии с полюсом на тэта-дивизоре. В дальнейшем эти операторы будем называть операторами Накаяшики.

В главе 1 нами доказана

**Теорема А.** *При $g = 2$ не существует операторов Накаяшики с гладкими вещественными двояко-периодическими коэффициентами, но существуют операторы Накаяшики с вещественными сингулярными двоякопериодическими коэффициентами.*

Эта теорема является аналогом теоремы Фельдмана, Кноррера и Трубовитца [3], которые показали, что двумерный оператор Шредингера без магнитного поля с гладким двояко-периодическим вещественным потенциалом может быть конечнозонным только на одном уровне энергии, т.е. блоховские функции (собственные для оператора Шредингера и для операторов сдвига на периоды) могут параметризоваться римановой поверхностью конечного рода только при одном значении энергии. Теорема А означает, что не существует гладких вещественных конечнозонных на любом уровне энергии операторов Накаяшики. Тем не менее существуют вещественные конечнозонные на любом уровне энергии операторы Накаяшики с сингулярными коэффициентами.

Возьмем в качестве абелева многообразия многообразие Якоби римановой поверхности рода 2 с вещественными точками ветвления. В этом случае симметричная матрица периодов $\Omega$ базисных абелевых дифференциалов имеет чисто мнимые компоненты [4]. Введем операторы магнитных трансляций $T_1^*$ и $T_2^*$

$$T_1^*\varphi(y) = \varphi(y + e_1)\exp(2\pi y_1),\ T_2^*\varphi(y) = \varphi(y + e_2)\exp(2\pi y_2),$$

где $y = (y_1, y_2)$, $e_j$ — $j$-ая строка мнимой части матрицы периодов $\Omega$. Операторы магнитных трансляций отличаются от операторов сдвига только экспоненциальной подкруткой. Аргументы экспонент в операторах магнитных трансляций выбираются так, чтобы выполнялось равенство $A_i(y+e_j) - A_i(y) = 2\pi\delta_{ij}$, где $(A_1, A_2)$ — вектор-потенциал магнитного поля [5], тогда $T_j^*$ коммутируют с операторами ковариантных производных $\partial_{y_i} - A_i$. Операторы $T_1^*$ и $T_2^*$ коммутируют между собой. Это является следствием того, что в нашем случае магнитный поток через элементарную ячейку, образованную векторами $e_1$ и $e_2$, равен 0. В общем случае справедливо равенство $T_1^*T_2^* = T_2^*T_1^* \exp(ie\Phi)$, где $e$ — заряд, $\Phi$ — магнитный поток [5] и операторы $T_1^*$ и $T_2^*$ коммутируют, если величина $\frac{e\Phi}{2\pi}$ целочисленна.

Собственная вектор-функция для матричного дифференциального оператора называется магнитно-блоховской, если ее компоненты являются собственными функциями для операторов магнитных трансляций. Через $\theta(z)$, где $z = (z_1, z_2)$, будем для краткости обозначать тэта-функцию $\theta[0,0](z|\Omega)$ абелева многообразия $\mathbf{C}^2/\{\mathbf{Z}^2 + \Omega\mathbf{Z}^2\}$.

**Теорема В.** *Существуют операторы Накаяшики с гладкими вещественными коэффициентами. По диагонали оператора $H$, отвечающего функции $\partial_{z_1}^2 \ln\theta(z) + \partial_{z_2}^2 \ln\theta(z)$, стоят операторы Шредингера вида*

$$H_{11} = (\partial_{y_1} - A_1)^2 + (\partial_{y_2} - A_2)^2 + u(y),$$

$$H_{22} = (\partial_{y_1} - \widetilde{A}_1)^2 + (\partial_{y_2} - \widetilde{A}_2)^2 + \widetilde{u}(y)$$

*с двояко-периодическими магнитными полями* $\mathrm{rot}(A_1, A_2, 0)$ *и* $\mathrm{rot}(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2, 0)$ *и с двояко-периодическими потенциалами $u(y)$ и $\widetilde{u}(y)$*

$$u(y+e_j) = u(y), \widetilde{u}(y+e_j) = \widetilde{u}(y).$$

*Компоненты вектор-потенциалов удовлетворяют равенствам*

$$A_i(y+e_j) - A_i(y) = \widetilde{A}_i(y+e_j) - \widetilde{A}_i(y) = 2\pi\delta_{ij}.$$

*Магнитно-блоховские функции оператора $H$ на каждом уровне энергии параметризуются римановыми поверхностями конечного рода. Компоненты оператора $H$ коммутируют с операторами $T_1^*$ и $T_2^*$.*

Мы также укажем операторы Накаяшики, которые принимают наиболее простой вид. Например, операторы $L$ и $L_1$, отвечающие функциям $\partial_{z_1}^2 \ln\theta(z)$ и $\partial_{z_1}\partial_{z_2} \ln\theta(z)$, выглядят следующим образом.

**Лемма 1.** *Справедливы равенства*

$$L = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1}^2 + c_1\partial_{x_2} + U & W \\ \frac{V}{c_2}(-\partial_{x_1}^2 + c_1\partial_{x_2} + U - c_3) & -\partial_{x_1}^2 - c_1\partial_{x_2} + \widetilde{U} + \frac{WV}{c_2} \end{pmatrix},$$

*где*

$$U = \partial_{x_1}^2 \ln V + (\partial_{x_1} \ln V + c_4)^2 - c_1(\partial_{x_2} \ln V + c_5) + c_3,$$

$$\widetilde{U} = \partial_{x_1}^2 \ln W + (\partial_{x_1} \ln W - c_4)^2 + c_1(\partial_{x_2} \ln W - c_5) + c_3$$

*и*

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\partial_{x_1}\partial_{x_2} + U_2\partial_{x_1} + c_6\partial_{x_2} + U_1 & W_1 \\ \frac{V_1}{c_2}(-\partial_{x_1}^2 + c_1\partial_{x_2} + U - c_3) & -\partial_{x_1}\partial_{x_2} + \widetilde{U}_2\partial_{x_1} - c_6\partial_{x_2} + \widetilde{U}_1 + \frac{WV_1}{c_2} \end{pmatrix},$$

*где*

$$U_1 = \partial_{x_1}\partial_{x_2} \ln V + (\partial_{x_1} \ln V + c_4)(\partial_{x_2} \ln V + c_5) - U_2(\partial_{x_1} \ln V + c_4) - c_6\partial_{x_2} \ln V + c_7,$$

$$\widetilde{U}_1 = \partial_{x_1}\partial_{x_2} \ln W + (\partial_{x_1} \ln W - c_4)(\partial_{x_2} \ln W - c_5) - \widetilde{U}_2(\partial_{x_1} \ln W - c_4) + c_6\partial_{x_2} \ln W + c_7,$$

$$W_1 = \frac{c_6}{c_1}W - \frac{1}{2c_1}\partial_{x_1}W,\ V_1 = \frac{c_6}{c_1}V + \frac{1}{2c_1}\partial_{x_1}V,$$

$$U_2 = \frac{1}{2c_1}(U + c_8),\ \widetilde{U}_2 = -\frac{1}{2c_1}(\widetilde{U} + c_8),$$

*$c_j$ — некоторые константы (указаны в формулах (27)-(30)).*

Нужно отметить, что коэффициенты при $\partial_{x_2}$ в 11-компонентах и 22-компонентах этих операторов являются константами, коэффициенты при $\partial_{x_1}$ в операторе $L$ равны 0. При этом все коэффициенты операторов $L$ и $L_1$ рационально выражаются через коэффициенты $V$ и $W$ и их производные.

Нами будут указаны частные решения системы нелинейных уравнений $[L, L_1] = 0$ на $V$ и $W$. Решения задаются формулами (20) и (21).

Справедлива

**Теорема C.** *Коэффициенты операторов Накаяшики рационально выражаются через коэффициенты $V$ и $W$ оператора $L$ и их производные.*

Отметим, что 11-компоненты операторов коммутируют по модулю оператора теплопроводности, т.е., для любых двух 11-компонент $A$ и $B$ существует оператор $C$ (лемма 17) такой, что

$$[A, B] = C(-\partial_{x_1}^2 + c_1\partial_{x_2} + U - c_3).$$

В работе [1] строится методом преобразования Фурье–Мукаи [6] модуль Бейкера–Ахиезера над кольцом дифференциальных операторов по $g$ пространственным переменным. Этому модулю соответствует (с точностью до сопряжения) коммутативное кольцо операторов Накаяшики. Вектор-функция, компонентами которой являются элементы базиса модуля Бейкера–Ахиезера, параметризует общие собственные функции этих операторов. Операторы из леммы 1 и теоремы D имеют достаточно простой вид за счет удачно выбранного базиса (17) и (18) в модуле Бейкека–Ахиезера.

Заметим, что конструкция Накаяшики требует несингулярности тэта-дивизора. Как показали Андреотти и Майер [7] для общего абелева многообразия его тэта-дивизор является неособым подмногообразием, однако для многообразий Якоби римановых поверхностей тэта-дивизор имеет особенности при $g > 3$ и при $g = 3$ для гиперэллиптических поверхностей.

Глава 1 устроена следующим образом.

В параграфе 1.1 мы опишем преобразование Фурье–Мукаи [6] в нужном нам случае, напомним конструкцию Накаяшики модуля Бейкера–Ахиезера [1] и укажем связь конструкции Кричевера [8] с преобразованием Фурье–Мукаи [6].

В параграфе 1.2 изложим, полученное нами, короткое аналитическое доказательство теоремы Накаяшики о свободности модуля Бейкера–Ахиезера в размерности 2. Оно существенно использует двумерность абелева многообразия, в отличие от доказательства общего случая в [1], и требует минимального аппарата алгебраической геометрии. Здесь же мы вводим базис модуля Бейкера–Ахиезера при $g = 2$, в котором удается найти коэффициенты операторов Накаяшики.

В параграфе 1.3 будет указана эффективная процедура построения операторов Накаяшики при $g = 2$. В предложениях 1-3 получены явные формулы для операторов, порождающих, как будет доказано в лемме 10, все кольцо операторов Накаяшики. В предложении 1 мы вводим коммутирующие между собой операторы $Z_1, \ldots, Z_g$, такие, что для произвольного оператора Накаяшики $L$, коммутатор $[L, Z_j]$ также является оператором Накаяшики, причем порядок коммутатора больше порядка оператора $L$ на 1. В предложении 2 мы найдем явные формулы для операторов Накаяшики второго порядка. В предложении 3 найдем явные формулы для операторов $Z_j$.

В параграфе 1.4 доказаны теоремы A и B.

В параграфе 1.5 доказаны лемма 1 и теорема C.

Во второй главе указан метод нахождения решений некоторых нелинейных дифференциальных уравнений в терминах тэта-функций не главно поляризованных абелевых многообразий.

Решения многих известных интегрируемых уравнений выражаются через тэта-функции, связанных с ними римановых поверхностей (геодезические на эллипсоиде, волчок Ковалевской, уравнения Кортевега–де Фриза, Кадомцева–Петвиашвили и др., см. обзор [9]). В ряде задач, в которых риманова поверхность допускает голоморфную инволюцию, аргументы тэта-функции принадлежат многообразию Прима, подмногообразию якобиана римановой поверхности, и поэтому решения выражаются через тэта-функции этого многообразия Прима. Примовские тэта-формулы удобны тем, что тэта-функции зависят от меньшего числа переменных и качественный анализ их проще. К таким уравнениям относятся уравнения Веселова–Новикова и Ландау–Лифшица. При выводе примовских тэта-функциональных формул для их решений существенно используется то, что в этих случаях многообразие Прима главно поляризовано и поэтому, грубо говоря, имеет единственную тэта-функцию.

В то же время известны уравнения, для которых вся динамика сводится к не главно поляризованным подмногообразиям Прима, которые имеют тип поляризации $(1, \dots, 1, 2, \dots, 2)$. Это, например, уравнения CKP (иерархия Кадомцева–Петвиашвили типа C) [10], уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной точки в ньютоновском поле с произвольным (однородным) квадратичным потенциалом, проинтегрированные Богоявленским [11], некоторые обобщенные цепочки Тода [12], и геодезические потоки на квадриках и $SO(4)$ [13,14]. Известны и примеры интегрируемых систем, линеаризующихся на абелевых многообразиях с поляризациями типов $(1,3)$ и $(1,6)$ ($g_2^{(1)}$-цепочка Тода и геодезический поток на $SO(4)$ со специальной метрикой, см. обзор [15])).

Опишем кратко процедуру построения решений уравнений в тэта-функциях не главно поляризованных абелевых многообразий.

Тэта-функция с характеристикой $[a, b]$ главно поляризованного абелева многообразия $\mathbf{C}^n/\{\mathbf{Z}^n + \Omega\mathbf{Z}^n\}$, где $\Omega$ — симметричная комплексная $n \times n$-матрица с $\mathrm{Im}\Omega > 0$, определяется рядом

$$\theta[a,b](z|\Omega) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^n} \exp(\pi i\langle (m+a), \Omega(m+a)\rangle + 2\pi i\langle (m+a), (z+b)\rangle), a, b \in \mathbf{C}^n.$$

В теореме 1 будет доказано, что тэта-функции с характеристиками

$$\theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega), \ \varepsilon \in \mathbf{Z}^n/\Delta\mathbf{Z}^n$$

задают базис в пространстве тэта-функций абелева многообразия

$$\mathbf{C}^n/\{\Delta\mathbf{Z}^n + \Omega\mathbf{Z}^n\},$$

где $\Delta$ — диагональная матрица с диагональю $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, $\delta_j$ — натуральные числа, причем $\delta_j$ делит $\delta_{j+1}$. Набор чисел $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ называется типом поляризации абелева многообразия. Их отношения $(\delta_1 : \ldots : \delta_n)$ являются инвариантами этого многообразия.

Обозначим через $\widetilde{M} = \mathbf{C}^g/\{\widetilde{\Delta}\mathbf{Z}^g + \widetilde{\Omega}\mathbf{Z}^g\}$ абелево многообразие, через $M \subset \widetilde{M}$ — абелево подмногообразие размерности $n$. Пусть пересечение тэта-дивизора $\widetilde{M}$ (нулей некоторой тэта-функции $\theta(\cdot|\widetilde{\Omega})$ многообразия $\widetilde{M}$ ) с $M$ задает тип поляризации $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ на $M$. Тогда существует изоморфизм

$$\varphi : \mathbf{C}^n/\{\Delta\mathbf{Z}^n + \Omega\mathbf{Z}^n\} \to M.$$

Пусть $\varphi(z) = \Phi z$, где $\Phi$ — некоторая $(n \times g)$-матрица, $z^\top = (z_1, \ldots, z_n)$. Можно показать, что $\Phi\Delta \subset \widetilde{\Delta}\mathbf{Z}^g$ и $\Phi\Omega = \widetilde{\Omega}P$, а матрица $\Omega$ имеет вид $P^\top\widetilde{\Omega}P$, где $P$ — некоторая целочисленная $(n \times g)$-матрица.

В главе 2 доказана

**Теорема D.** *Справедлива формула*

$$\theta(\varphi(z) - \gamma|\widetilde{\Omega}) = \sum_{\varepsilon \in \mathbf{Z}^n/\Delta\mathbf{Z}^n} c_\varepsilon \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z - P^\top\gamma|\Omega),$$

где $\gamma^\top = (\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$,

$$c_\varepsilon = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g | \Phi^\top m = \Delta^{-1}\varepsilon} \exp(\pi i\langle m, \widetilde{\Omega}m\rangle - 2\pi i\langle m, \gamma\rangle +$$

$$+2\pi i\langle\varepsilon, \Delta^{-1}P^\top\gamma\rangle - \pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon, \Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle).$$

С помощью теоремы D формулы в тэта-функциях Якоби, ограниченных на абелевы подмногообразия и их сдвиги, переписываются в тэта-функциях самих подмногообразий. Мы демонстрируем это на примерах уравнений СКР, системы Богоявленского и $g_2^{(1)}$-цепочки Тода.

Глава 2 устроена следующим образом.

В параграфе 2.1 мы напомним определение тэта-функции абелева многообразия. В теореме 1 указан базис в пространстве тэта-функций не главно поляризованного абелева многообразия. Базис состоит из поднятий тэта-функций с характеристиками с изогенного главно поляризованного абелева многообразия. Здесь мы также докажем теорему D.

В параграфе 2.2 рассматриваются тэта-функции не главно поляризованных многообразий Прима разветвленных накрытий римановых поверхностей. В теореме 2 мы уточним формулу, полученную в теореме D, для случая многообразий Прима.

В параграфе 2.3 рассматриваются приложения теорем D и 2 в теории нелинейных уравнений. В теоремах 3 и 4 указаны решения иерархии СКР и системы Богоявленского в тэта-функциях Прима. Далее рассматривается $g_2^{(1)}$-цепочка Тода. Мы укажем представление Лакса для этой системы. Решение $g_2^{(1)}$-цепочки Тода, выраженное через тэта-функцию Якоби римановой поверхности рода 6, может быть переписано с помощью теоремы A через тэта-функции абелева многообразия с типом поляризации (1,3).

Автор благодарит научного руководителя И. А. Тайманова за постановку задач и полезные обсуждения.

# 1 Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями

## 1.1 Модуль Бейкера–Ахиезера

Пусть $X^g = \mathbf{C}^g/(\mathbf{Z}^g + \Omega\mathbf{Z}^g)$ — главно поляризованное комплексное абелево многообразие, где $\Omega$ — симметричная $g \times g$-матрица с $\mathrm{Im}\Omega > 0$. Через $\mathrm{Pic}^0(X^g)$ обозначим многообразие Пикара многообразия $X^g$. Если $X^g$ главно поляризовано, то $\mathrm{Pic}^0(X^g)$ изоморфно $X^g$. Изоморфизм задается отображением $z \to x$, где $z \in X^g$, $x \in \mathrm{Pic}^0(X^g)$. Сечения расслоения $x$, при подъеме на универсальное накрытие $\mathbf{C}^g$, представляются функциями $h(z)$, которые удовлетворяют условиям периодичности

$$h(z + \Omega m + n) = \exp(-2\pi i\langle m, x\rangle)h(z),$$

где $m, n \in \mathbf{Z}^g$, $\langle m, x\rangle = m_1x_1 + \ldots + m_gx_g$.

Обозначим через $\mathcal{P}$ расслоение Пуанкаре над $X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g)$. Оно определяется следующими свойствами. Расслоение, отвечающее $x \in \mathrm{Pic}^0(X^g)$, изоморфно $\mathcal{P}|_{X^g\times\{x\}}$, а расслоения $\mathcal{P}|_{X^g\times\{0\}}$ и $\mathcal{P}|_{\{0\}\times\mathrm{Pic}^0(X^g)}$ — тривиальны. Сечения $\mathcal{P}$ при подъеме на универсальное накрытие $\mathbf{C}^g \times \mathbf{C}^g$ задаются функциями $f(z, x)$ такими, что

$$f(z + \Omega m_1 + n_1, x + \Omega m_2 + n_2) = \exp(-2\pi i(\langle m_1, x\rangle + \langle m_2, z\rangle))f(z, x), \quad (1)$$

где $m_j, n_j \in \mathbf{Z}^g$. Через $z = (z_1, \ldots, z_g)^\top \in \mathbf{C}^g$ обозначим координаты точек на универсальном накрытии $X^g$, а через $x = (x_1, \ldots, x_g)^\top \in \mathbf{C}^g$ координаты точек на универсальном накрытии $\mathrm{Pic}^0(X^g)$. Сечения расслоения $\mathcal{P}$ отождествим с функциями на $\mathbf{C}^g \times \mathbf{C}^g$, обладающими свойством (1).

Через $\Theta$ обозначим множество нулей тэта-функции $\theta(z)$ (тэта-дивизор), которое задает одноименное подмногообразие в $X^g$.

Пусть $Y \subset X^g$ подмногообразие коразмерности 1, $A_Y$ — пространство мероморфных функций на $X^g$ с полюсом в $Y$. Обозначим через $F_Y(U)$ пространство мероморфных сечений расслоения $\mathcal{P}$, определенных на подмножествах вида

$$X^g \times U \subset X^g \times \mathrm{Pic}^0(X^g)$$

с полюсом в $Y \times U$, здесь $U$ — открытое подмножество в $\mathrm{Pic}^0(X^g)$.

Множество $F_Y = \bigcup_U F_Y(U)$ называется преобразованием Фурье–Мукаи пространства $A_Y$ [6].

В работе [1] строятся операторы "ковариантного дифференцирования"(связность на $\mathcal{P}$)

$$\nabla_j : F_Y(U) \to F_Y(U),\ \nabla_k\nabla_j = \nabla_j\nabla_k,\ k, j = 1, \dots, g,$$

которые снабжают $F_Y(U)$ структурой модуля над кольцом

$$\mathcal{O}_U[\nabla_1, \dots, \nabla_g],$$

где $U \subset \mathrm{Pic}^0(X^g)$ открытое подмножество, $\mathcal{O}_U$ — кольцо аналитических функций на $U$. Из построения следует, что $F_Y(U)$ является также $A_Y$-модулем.

Накаяшики ввел функции Бейкера–Ахиезера, которые имеют вид

$$f(z, x)\exp(-\sum_{j=1}^{g} x_j\partial_{z_j}\ln\theta(z)),\ f(z, x) \in F_\Theta.$$

Операторы $\nabla_j$ определяются формулой

$$\nabla_j = \partial_{x_j} - \partial_{z_j}\ln\theta(z).$$

Обозначим через $M_c$ пространство функций Бейкера–Ахиезера

$$\{f(z, \ + x)\exp(-\sum_{j=1}^{g} x_j\partial_{z_j}\ln\theta(z))|f(z, c + x) \in \bigcup_U F_\Theta(c + U)\},$$

где $U \subset \mathbf{C}^g$ — некоторая окрестность нуля, $c \in \mathbf{C}^g$, $f(z, c + x)$ принадлежит образу преобразования Фурье–Мукаи $F_\Theta$. Функция $f(z, c+x)$ определена на $\mathbf{C}^g \times U$ и имеет полюс только в $\Theta \times U$. Грубо говоря, $f(z, c+x)$ является по переменной $x$ ростком функции в точке $x = 0$. Из (1) следует, что

$$f(z + \Omega m + n, c + x) = \exp(-2\pi i\langle m, (c + x)\rangle)f(z, c + x).$$

Обозначим через $M_c(k)$ подмножество функций в $M_c$ таких, что $f(z, c+x)$ имеет полюс порядка $\leq k$ в $\Theta \times U$. Из определения следует, что $M_c$ является модулем над кольцом дифференциальных операторов

$$\mathcal{D} = \mathcal{O}[\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_g}]$$

($\mathcal{D}$-модулем), где $\mathcal{O}$ — кольцо аналитических функций по переменным $x_1, \ldots, x_g$, определенных в окрестности $0 \in \mathbf{C}^g$. $\mathcal{D}$-модуль $M_c$ называется модулем Бейкера–Ахиезера. Из определения преобразования Фурье–Мукаи следует, что $M_c$ обладает также структурой $A_\Theta$-модуля.

$\mathcal{D}$-модуль $M_c$ можно описать с помощью тэта-функций [1].

**Лемма 2.**

$$M_c = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{a \in \mathbf{Z}^g/n\mathbf{Z}^g} \mathcal{O} \cdot \frac{\theta[\frac{a}{n}, 0](nz + c + x, n\Omega)}{\theta^n(z)} \exp(-\sum_{k=1}^{g} x_k \partial_{z_k} \ln \theta(z)).$$

В дальнейшем нам понадобится следующее тождество [1].

**Лемма 3.**

$$\partial_{x_j} \left( \frac{\theta[\frac{a}{n}, 0](nz + c + x, n\Omega)}{\theta^n(z)} \exp(-\sum_{k=1}^{g} x_k \partial_{z_k} \ln \theta(z)) \right) =$$

$$= \frac{1}{n} \partial_{z_j} \left( \frac{\theta[\frac{a}{n}, 0](nz + c + x, n\Omega)}{\theta^n(z)} \right) \exp(-\sum_{k=1}^{g} x_k \partial_{z_k} \ln \theta(z)),$$

$j = 1, \ldots, g$.

В [1] доказана

**Теорема Накаяшики.** *Если $\Theta$ — неособое многообразие и $c \neq 0$, то $M_c$ — свободный $\mathcal{D}$-модуль ранга $g!$.*

Зафиксируем базис

$$\Phi_c = (\phi_{1c}(z, x), \ldots, \phi_{g!c}(z, x))^\top$$

в $\mathcal{D}$-модуле $M_c$. Пусть $\lambda(z) \in A_\Theta$. Так как $M_c$ — свободный $\mathcal{D}$-модуль, то существуют единственные операторы $[L_{\Phi_c}(\lambda)]_{kj} \in \mathcal{D}$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{g!} [L_{\Phi_c}(\lambda)]_{kj} \phi_{jc} = \lambda \phi_{kc}, \ k = 1, \ldots, g!$$

Следовательно,

$$L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c = \lambda \Phi_c, \tag{2}$$

где $[L_{\Phi_c}(\lambda)]_{kj}$ — компоненты матричного дифференциального оператора $L_{\Phi_c}(\lambda)$, $\lambda\Phi_c = (\lambda\phi_{1c}, \ldots, \lambda\phi_{g!c})^\top$. Так как $L_{\Phi_c}(\lambda)$ дифференциальные

операторы по переменным $x_j$, а $\lambda$ зависит лишь от $z$, то из (2) следует условие коммутации

$$L_{\Phi_c}(\lambda\mu) = L_{\Phi_c}(\lambda)L_{\Phi_c}(\mu) = L_{\Phi_c}(\mu)L_{\Phi_c}(\lambda),$$

где $\mu(z) \in A_\Theta$. Получили

**Следствие [1].** *Существует вложение колец*

$$L_{\Phi_c} : A_\Theta \to \mathrm{Mat}(g!, \mathcal{D}),$$

*где* $\mathrm{Mat}(g!, \mathcal{D})$ — *кольцо* $g! \times g!$-*матричных дифференциальных операторов. Образ вложения является коммутативным кольцом дифференциальных операторов.*

Как указано в [2], конструкция Накаяшики обобщает конструкцию Кричевера [8], которая тоже может трактоваться через преобразование Фурье–Мукаи следующим образом.

Напомним конструкцию функции Бейкера–Ахиезера [8]. Пусть $\Gamma$ — риманова поверхность рода $g$, $D = p_1 + \ldots + p_g$ — неспециальный положительный дивизор на $\Gamma$, $\infty$ — точка на $\Gamma$, отличная от точек из дивизора. Выберем локальный параметр $k^{-1}$ в $\infty$ так, что $k^{-1}(\infty) = 0$. Одноточечной функцией Бейкера–Ахиезера со спектральными данными

$$\{\Gamma, \infty, p_1, \ldots, p_g, k^{-1}\}$$

называется функция $\psi(z, x), z \in \Gamma$, определяемая с точностью до умножения на функцию, зависящую только от $x$, следующими свойствами:

1) $\psi(z, x)$ мероморфна на $\Gamma \backslash \infty$, ее множество полюсов совпадает с $\{p_1, \ldots, p_g\}$ и не зависит от $x$;

2) в окрестности $\infty$ функция $\psi(z, x) \exp(-kx)$ аналитична.

Эта функция имеет вид:

$$\psi(z, x) = \frac{\theta(\mathcal{A}(z) - \sum_{j=1}^g \mathcal{A}(p_j) - K + Vx)}{\theta(\mathcal{A}(z) - \sum_{j=1}^g \mathcal{A}(p_j) - K)} \exp(2\pi i x \int_{p_0}^z \eta),$$

где $\mathcal{A} : \Gamma \to X^g$ — отображение Абеля с базисной точкой $p_0$, $X^g$ — многообразие Якоби поверхности $\Gamma$ и $V \in \mathbf{C}^g$ — вектор, определенный спектральными данными.

Функция

$$\frac{\theta(\mathcal{A}(z) - \sum_{j=1}^g \mathcal{A}(p_j) - K + Vx)}{\theta(\mathcal{A}(z) - \sum_{j=1}^g \mathcal{A}(p_j) - K)}$$

является ограничением на $\mathcal{A}(\Gamma) \times \{Vx\}$ функции

$$\frac{\theta(\widetilde{z} - \sum\limits_{j=1}^{g} \mathcal{A}(p_j) - K + \widetilde{x})}{\theta(\widetilde{z} - \sum\limits_{j=1}^{g} \mathcal{A}(p_j) - K)},$$

принадлежащей образу преобразования Фурье–Мукаи $F_{\Theta'}$, где $\Theta' \subset X^g$ — подмногообразие, заданное уравнением

$$\theta(\widetilde{z} - \sum_{j=1}^{g} \mathcal{A}(p_j) - K) = 0.$$

Через $\widetilde{\mathcal{D}}(\psi(z,x))$ обозначим $\widetilde{\mathcal{D}}$-модуль $\{d\psi(z,x) |\ d \in \widetilde{\mathcal{D}}\}$, где $\widetilde{\mathcal{D}}$ — кольцо дифференциальных операторов по $x$. Как показано в [8], $\widetilde{\mathcal{D}}(\psi(z,x))$ — свободный $\widetilde{\mathcal{D}}$-модуль и для любой мероморфной функции $f(z)$ на $\Gamma$ с единственным полюсом в $\infty$ существует единственный дифференциальный оператор $L(f)$ такой, что

$$L(f)\psi(z,x) = f(z)\psi(z,x).$$

Отсюда следует сопоставление спектральных данных коммутативных колец скалярных дифференциальных операторов в теории Берчналла-Чаунди-Кричевера и спектральных данных коммутативных колец матричных дифференциальных операторов Накаяшики:

$$\{\Gamma, \infty, D, f\} \longleftrightarrow \{X^g, \Theta, c, \lambda\}.$$

## 1.2 Доказательство теоремы Накаяшики при $g = 2$

Здесь мы изложим, полученное нами, доказательство теоремы Накаяшики при $g = 2$. Введем функции из $M_c$:

$$\psi = \frac{\theta(z + c + x)}{\theta(z)} \exp(-x_1 \partial_{z_1} \ln \theta(z) - x_2 \partial_{z_2} \ln \theta(z)),$$

$$\psi_{c'} = \frac{\theta(z + c + c' + x)\theta(z - c')}{\theta^2(z)} \exp(-x_1 \partial_{z_1} \ln \theta(z) - x_2 \partial_{z_2} \ln \theta(z))$$

и поверхность

$$\Gamma_{c'} = \{z \in \mathbf{C}^2 |\ \theta(z - c') = 0\}.$$

В леммах 5 и 6 мы докажем, что $\mathcal{D}(\psi, \psi_{c'}) = \{d_1\psi + d_2\psi_{c'} |\ d_1, d_2 \in \mathcal{D}\}$ — свободный $\mathcal{D}$-модуль. В лемме 7 мы покажем, что $\mathcal{D}$-модули $\mathcal{D}(\psi, \psi_{c'})$ и $M_c$ совпадают.

В дальнейшем нижние индексы у тэта-функции будут означать дифференцирование по соответствующей переменной:

$$\theta_j(z) = \partial_{z_j}\theta(z),\ \ \theta_{kj}(z) = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\theta(z).$$

**Лемма 4.** *Функции $a\theta_1(z) + b\theta_2(z)$ и $\theta(z+e)$, где $a, b \in \mathbf{C}$, $e \in \mathbf{C}^2$, имеют два нуля на $\Theta$ с учетом кратности и с точностью до элементов решетки $\mathbf{Z}^2 + \Omega\mathbf{Z}^2$.*

*Доказательство.* Пусть $X^2$ является многообразием Якоби некоторой римановой поверхности $\Gamma$ рода 2. Обозначим через $\widehat{\Gamma}$ универсальное накрытие $\Gamma$. На $\widehat{\Gamma}$ действует фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma)$. Обозначим через $S$ фундаментальную область. Пусть $\mathcal{A} : \widehat{\Gamma} \to X^2$ отображение Абеля. Образ $\mathcal{A}(\widehat{\Gamma})$ задается уравнением $\theta(z - K) = 0$. Искомое число нулей, как легко убедиться, равно

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial S} d\ln(a\theta_1(\mathcal{A}(p) - \Delta) + b\theta_2(\mathcal{A}(p) - K)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\partial S} d\ln\theta(\mathcal{A}(p) + e - K) = 2.$$

Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *Для $c' \in \mathbf{C}^2$ и $c' \notin \mathbf{Z}^2 + \Omega\mathbf{Z}^2$ функция $\psi_{c'}$ не принадлежит множеству функций*

$$\{\alpha_1(x)\partial_{x_1}\psi + \alpha_2(x)\partial_{x_2}\psi + \alpha_3(x)\psi |\ \alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x) \in \mathcal{O}.\}$$

*Доказательство.* Предположим, что утверждение леммы не верно, следовательно, существуют $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \alpha_3(x) \in \mathcal{O}$ такие, что

$$\alpha_1(x)\partial_{x_1}\psi + \alpha_2(x)\partial_{x_2}\psi + \alpha_3(x)\psi = \psi_{c'}.$$

Тогда для $z \in \Gamma_{c'}$ справедливо равенство

$$\alpha_1(x)\left(\frac{\theta_1(z+c+x)}{\theta(z)} - \frac{\theta(z+c+x)\theta_1(z)}{\theta^2(z)}\right) +$$

$$+\alpha_2(x)\left(\frac{\theta_2(z+c+x)}{\theta(z)}-\frac{\theta(z+c+x)\theta_2(z)}{\theta^2(z)}\right)+\alpha_3(x)\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}=0.$$

Пусть $p$ — точка пересечения $\Gamma_{c'}$ и $\Theta$ (лемма 4). Из последнего равенства следует

$$\alpha_1(x)\theta_1(p)+\alpha_2(x)\theta_2(p)=0.$$

Так как $\Theta$ — гладкая риманова поверхность, то либо $\theta_1(p)\neq 0$, либо $\theta_2(p)\neq 0$. Пусть для определенности $\theta_1(p)\neq 0$. Тогда $\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=-\frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)}$. Следовательно,

$$-\frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)}\partial_{x_1}\ln\theta(z+c+x)+\partial_{x_2}\ln\theta(z+c+x)=$$

$$=-\frac{\theta_2(p)}{\theta_1(p)}\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)}+\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)}-\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)}.$$

В левой части полюс (по переменной $x$) зависит от $z\in\Theta$, а в правой не зависит. Получили противоречие. Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** *$\mathcal{D}(\psi,\psi_{c'})$ — свободный $\mathcal{D}$-модуль ранга 2.*

*Доказательство.* Предположим, что $\mathcal{D}(\psi,\psi_{c'})$ не является свободным $\mathcal{D}$-модулем. Тогда существуют операторы $d_1,d_2\in\mathcal{D}$ такие, что

$$d_1\psi_{c'}+d_2\psi=0. \tag{3}$$

Рассмотрим случай, когда

$$\mathrm{ord}(d_1)>\mathrm{ord}(d_2)-1,$$

где ord – порядок оператора. Пусть $\mathrm{ord}(d_1)=n$. Оператор $d_1$ имеет вид

$$d_1=f_n(x)\partial_{x_1}^n+f_{n-1}(x)\partial_{x_1}^{n-1}\partial x_2+\ldots+f_0(x)\partial_{x_2}^n+\ldots,$$

где $f_j(x)\in\mathcal{O}$, $j=0,\ldots,n$. Разделим равенство (3) на $\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))$, умножим на $\theta^{n+2}(z)$ и пусть $z\in\Theta$. Получим

$$\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')\times$$

$$\times(f_n(x)\theta_1^n(z)+f_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)\theta_2(z)+\ldots+f_0(x)\theta_2^n(z))=0. \tag{4}$$

По лемме 4 существует точка $p\in\mathbf{C}^2$ такая, что $p\in\Theta$ и $\theta_1(p)=0$. Положим в (4) $z=p$. Получим $f_0=0$. Разделим (4) на $\theta_1(z)$ и опять положим $z=p$. Получим $f_1=0$. Аналогично рассуждая получим: $f_n=$

$f_{n-1} = \ldots = f_0 = 0$. Следовательно, неравенство $\mathrm{ord}(d_1) > \mathrm{ord}(d_2) - 1$ невозможно. Аналогично показывается, что неравенство $\mathrm{ord}(d_1) + 1 < \mathrm{ord}(d_2)$ также невозможно. Рассмотрим случай, когда

$$\mathrm{ord}(d_1) + 1 = \mathrm{ord}(d_2) = n.$$

Пусть операторы $d_1$ и $d_2$ имеют вид:

$$d_1 = f_{n-1}(x)\partial_{x_1}^{n-1} + f_{n-2}(x)\partial_{x_1}^{n-2}\partial_{x_2} + \ldots + f_0(x)\partial_{x_2}^{n-1} + \ldots,$$

$$d_2 = g_n(x)\partial_{x_1}^{n} + g_{n-1}(x)\partial_{x_1}^{n-1}\partial_{x_2} + \ldots + g_0(x)\partial_{x_2}^{n} + \ldots$$

Разделим равенство (3) на $\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))$, умножим на $\theta^{n+1}(z)$ и пусть $z \in \Theta$. Тогда

$$\theta(z + c + c' + x)\theta(z - c')\times$$
$$\times(f_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z) + f_{n-2}(x)\theta_1^{n-2}(z)\theta_2(z) + \ldots + f_0(x)\theta_2^{n-1}(z)) -$$
$$-\theta(z + c + x)(g_n(x)\theta_1^{n}(z) + g_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)\theta_2(z) + \ldots + g_0(x)\theta_2^{n}(z)) = 0.$$

Разложим

$$f_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z) + f_{n-2}(x)\theta_1^{n-2}(z)\theta_2(z) + \ldots + f_0(x)\theta_2^{n-1}(z)$$

и

$$g_n(x)\theta_1^{n}(z) + g_{n-1}(x)\theta_1^{n-1}(z)\theta_2(z) + \ldots + g_0(x)\theta_2^{n}(z)$$

на множители. Получим

$$\theta(z + c + c' + x)\theta(z - c')(a_{n-1}(x)\theta_1(z) + b_{n-1}(x)\theta_2(z)) \times \ldots$$
$$\times(a_1(x)\theta_1(z) + b_1(x)\theta_2(z)) -$$
$$\theta(z + c + x)(a'_n(x)\theta_1(z) + b'_n(x)\theta_2(z)) \ldots (a'_1(x)\theta_1(z) + b'_1(x)\theta_2(z)) = 0, \quad (5)$$

где $a'_j(x), b'_j(x), a_k(x)$ и $b_k(x)$ — некоторые функции, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, n-1$.

Фиксируем точку $x$. Отметим, что если две функции $a'_j\theta_1(z) + b'_j\theta_2(z)$ и $a_k\theta_1(z) + b_k\theta_2(z)$ имеют общий нуль на $\Theta$, то они пропорциональны. Предположим, что это не так. Тогда их отношение имеет единственный простой полюс на $\Theta \subset X^2$ (по лемме 4). Следовательно, отображение

$$(a'_j\theta_1(z) + b'_j\theta_2(z) : a_k\theta_1(z) + b_k\theta_2(z)) : \Theta \to \mathbf{CP}^1,$$

где $\mathbf{CP}^1$ — одномерное проективное пространство, является изоморфизмом. Род римановой поверхности $\Theta \subset X^2$ равен 2. Получили противоречие.

Нули у $a_k\theta_1(z)+b_k\theta_2(z)$ и $\theta(z+c+x)$ на $\Theta$ не могут совпадать, потому что эти функции можно рассматривать как сечения линейного расслоения над $\Theta \subset X^2$ и их отношение

$$\frac{a_k\theta_1(z)+b_k\theta_2(z)}{\theta(z+c+x)} \tag{6}$$

также является сечением линейного расслоения у которого нет ни полюсов, ни нулей. Такими сечениями могут быть только константы, но функция (6) не является константой на $\Theta$.

Следовательно, (5) эквивалентно равенству

$$\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')+\theta(z+c+x)(a(x)\theta_1(z)+b(x)\theta_2(z))=0,$$

где $a(x), b(x)$ некоторые функции, из которого следует, что функции $\theta(z-c')$ и $\theta(z+c+x)$ должны иметь общий нуль на $\Theta$ для любого $x$, что невозможно, как легко следует, например, из теоремы Римана о нулях тэта-функции на римановой поверхности. Лемма 6 доказана.

Для завершения доказательства теоремы Накаяшики достаточно показать, что $\mathcal{D}$-модули $\mathcal{D}(\psi,\psi_{c'})$ и $M_c$ совпадают.

**Лемма 7.** *Справедливо равенство* $\mathcal{D}(\psi,\psi_{c'})=M_c$.

*Доказательство.* Вложение $\mathcal{D}(\psi,\psi_{c'})\subset M_c$ очевидно. Фиксируем точку $x$. Обозначим через $\mathcal{D}^k(\psi,\psi_{c'})\subset\mathcal{D}(\psi,\psi_{c'})$ множество функций

$$\{d_1\psi_{c'}+d_2\psi|\ d_1,d_2\in\mathcal{D}, \mathrm{ord}(d_1)\le k-2, \mathrm{ord}(d_2)\le k-1\}.$$

Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$\dim_{\mathbf{C}} M_c(k)=\dim_{\mathbf{C}}\mathcal{D}^k(\psi,\psi_{c'}).$$

По лемме 2

$$\dim_{\mathbf{C}} M_c(k)=\dim_{\mathbf{C}}\{\sum_{a\in\mathbf{Z}^g/k\mathbf{Z}^g}\beta_a\theta[\frac{a}{k},0](kz+c+x,k\Omega)|\ \beta_a\in\mathbf{C}\}.$$

Следовательно, $\dim_{\mathbf{C}} M_c(k)=k^2$ (см., например, [16,17]). Так как размерность пространства дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами порядка $\le k$ равна

$$1+\ldots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

и $\mathcal{D}$-модуль $\mathcal{D}(\psi, \psi_{c'})$ свободный, то

$$\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{D}^k(\psi, \psi_{c'}) = \frac{(k-1)k}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k^2.$$

Лемма 7 доказана.

## 1.3 Коммутативное кольцо $2 \times 2$-матричных дифференциальных операторов

Обозначим через $D$ кольцо дифференциальных операторов $\mathbf{C}[\partial_{z_1}, \dots, \partial_{z_g}]$ с постоянными коэффициентами. Из определения следует, что $M_c$ является $D$-модулем. Пусть $\Phi_c = (\phi_{1c}, \dots, \phi_{g!c})^\top$ — базис $M_c$. Тогда имеется кольцевое вложение

$$\mathcal{L}_{\Phi_c} : D \to \mathrm{Mat}(g!, \mathcal{D}),$$

определенное формулой

$$\mathcal{L}_{\Phi_c}(d)\Phi_c = d\Phi_c,$$

где $d \in D$, $d\Phi_c = (d\phi_{1c}, \dots, d\phi_{g!c})^\top$. Образом вложения $\mathcal{L}_{\Phi_c}$ является коммутативное кольцо матричных дифференциальных операторов, изоморфное $D$. Через $Z_j$ обозначим оператор $\mathcal{L}_{\Phi_c}\left(\partial_{z_j}\right), j = 1, \dots, g$.

Найдем коммутатор $[L_{\Phi_c}(\lambda), Z_j]$, где $\lambda \in A_\Theta$.

$$Z_j L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c = Z_j(\lambda\Phi_c) = \lambda(Z_j\Phi_c) = \lambda(\partial_{z_j}\Phi_c),$$

$$L_{\Phi_c}(\lambda)Z_j\Phi_c = L_{\Phi_c}\partial_{z_j}\Phi_c = \partial_{z_j}(L_{\Phi_c}(\lambda)\Phi_c) = \partial_{z_j}(\lambda\Phi_c) = (\partial_{z_j}\lambda)\Phi_c + \lambda(\partial_{z_j}\Phi_c).$$

Получили равенство $[L_{\Phi_c}(\lambda), Z_j]\Phi_c = (\partial_{z_j}\lambda)\Phi_c$, следовательно, доказано

**Предложение 1.** $[L_{\Phi_c}(\lambda), Z_j] = L_{\Phi_c}(\partial_{z_j}\lambda)$, где $\lambda \in A_\Theta$, $j = 1, \dots, g$.

Выясним как изменяются матричные операторы при замене базиса $\mathcal{D}$-модуля $M_c$. Пусть $\Phi_c = (\phi_{1c}, \dots, \phi_{g!c})^\top$ и $\Psi_c = (\psi_{1c}, \dots, \psi_{g!c})^\top$ два базиса $\mathcal{D}$-модуля $M_c$. Согласно теореме Накаяшики, существуют единственные операторы $A, B \in \mathrm{Mat}(g!, \mathcal{D})$ такие, что $A\Phi_c = \Psi_c$, $B\Psi_c = \Phi_c$, следовательно, $AB = BA$ — единичный элемент в $\mathrm{Mat}(g!, \mathcal{D})$. Через $A^{-1}$ обозначим оператор $B$. Легко убедиться, что

$$AL_{\Phi_c}(\lambda)A^{-1}\Psi_c = \lambda\Psi_c, \qquad A\mathcal{L}_{\Phi_c}(d)A^{-1}\Psi_c = d\Psi_c,$$

где $\lambda \in A_\Theta, d \in D$. Следовательно, нами доказана

**Лемма 8.** *Справедливы равенства*

$$AL_{\Phi_c}(\lambda)A^{-1} = L_{\Psi_c}(\lambda), \quad A\mathcal{L}_{\Phi_c}(d)A^{-1} = \mathcal{L}_{\Psi_c}(d).$$

В дальнейшем предполагаем $g = 2$. В предложении 2 найдем операторы $L_{\Phi_c}(\lambda)$ второго порядка. Они отвечают следующим спектральным функциям

$$\lambda = \frac{\partial^2 \ln\theta(z)}{\partial z_k \partial z_j}, \; j,k = 1,2.$$

В предложении 3 найдем операторы $Z_1$ и $Z_2$. В лемме 10 докажем, что полученные в предложениях 1-3 операторы порождают кольцо $L_{\Phi_c}(A_\Theta)$.

Следующая лемма доказывается прямыми вычислениями.

**Лемма 9.** *Справедливо равенство*

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j}\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))\right) =$$

$$= \partial_{z_k}\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) +$$

$$+\partial_{z_k}\partial_{z_j}(\ln\theta(z))\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)),$$

где $k, j = 1, 2$.

*Доказательство.*

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j}\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))\right) =$$

$$= \partial_{x_k}\left(\frac{\theta_j(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) -\right.$$

$$\left.-\,\partial_{z_j}\ln\theta(z)\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))\right) =$$

$$= \frac{\theta_{kj}(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) -$$

$$-\partial_{z_k}\ln\theta(z)\frac{\theta_j(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) -$$

$$-\partial_{z_j}\ln\theta(z)\frac{\theta_k(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) +$$

$$+\partial_{z_k}\ln\theta(z)\partial_{z_j}\ln\theta(z)\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))=$$

$$=\partial_{z_k}\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))+$$

$$+\partial_{z_k}\partial_{z_j}(\ln\theta(z))\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)).$$

Лемма доказана.

Пусть $c'$ общего положения. Обозначим через $p_1, p_2 \in \mathbf{C}^2$ точки пересечения $\Gamma_{c'}$ с $\Theta$ ($p_1$ и $p_2$ определены с точностью до элемента решетки $\mathbf{Z}^2+\Omega\mathbf{Z}^2$), через $p_3 \in \mathbf{C}^2$ — некоторую точку такую, что $\theta(p_3)=0$, а через $p_4 \in \mathbf{C}^2$ — некоторую точку такую, что $\theta(p_4)\neq 0$ Через $L_{c,c'}$ обозначим операторы Накаяшики, построенные по базису $\psi, \psi_{c'}$. Для краткости введем обозначения:

$$H^{kj}_{c,c'}=[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{11},\ F^{kj}_{c,c'}=[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{12}.$$

**Предложение 2.**
$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{11}=-\partial_{x_k}\partial_{x_j}+f^{kj}_{c,c'}\partial_{x_1}+g^{kj}_{c,c'}\partial_{x_2}+h^{kj}_{c,c'}$, где

$$f^{kj}_{c,c'}=\frac{\theta_2(p_1)\theta_2(p_2)}{\theta_2(p_2)\theta_1(p_1)-\theta_2(p_1)\theta_1(p_2)}\times$$

$$\times\left(\partial_{x_k}\ln\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_j(p_1)}{\theta_2(p_1)}+\partial_{x_j}\ln\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_k(p_1)}{\theta_2(p_1)}-\frac{\theta_{kj}(p_1)}{\theta_2(p_1)}-\right.$$

$$\left.-\partial_{x_k}\ln\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_j(p_2)}{\theta_2(p_2)}-\partial_{x_j}\ln\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_k(p_2)}{\theta_2(p_2)}+\frac{\theta_{kj}(p_2)}{\theta_2(p_2)}\right),$$

$$g^{kj}_{c,c'}=\frac{\theta_1(p_1)\theta_1(p_2)}{\theta_2(p_1)\theta_1(p_2)-\theta_2(p_2)\theta_1(p_1)}\times$$

$$\times\left(\partial_{x_j}\ln\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_k(p_1)}{\theta_1(p_1)}+\partial_{x_k}\ln\theta(p_1+c+x)\frac{\theta_j(p_1)}{\theta_1(p_1)}-\frac{\theta_{kj}(p_1)}{\theta_1(p_1)}-\right.$$

$$\left.-\partial_{x_j}\ln\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_k(p_2)}{\theta_1(p_2)}-\partial_{x_k}\ln\theta(p_2+c+x)\frac{\theta_j(p_2)}{\theta_1(p_2)}+\frac{\theta_{kj}(p_2)}{\theta_1(p_2)}\right),$$

$$h^{kj}_{c,c'}=\frac{\theta(p_3+c')}{\theta(p_3+c'+c+x)}\times$$

$$\times \left(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} + 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)|_{z=p_3+c'}.$$

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{12} = \frac{\theta^2(p_4)}{\theta(p_4+c+c'+x)\theta(p_4-c')}\times$$

$$\times \left(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} - h^{kj}_{c,c'} + 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)|_{z=p_4},$$

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{21} = F^{kj}_{c+c',-c'}(\alpha_{11}H^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}H^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}H^{22}_{c,c'} + \alpha),$$

$$[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{22} = F^{kj}_{c+c',-c'}(\alpha_{11}F^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}F^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}F^{22}_{c,c'}) + H^{kj}_{c+c',-c'},$$

где $\alpha, \alpha_{kj} \in \mathbf{C}$ такие, что

$$\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)} = \alpha_{11}\partial^2_{z_1}\ln\theta(z) + \alpha_{12}\partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z) + \alpha_{22}\partial^2_{z_2}\ln\theta(z) + \alpha.$$

Доказательство предложения 2. Легко проверить, что функция

$$\frac{\partial_{x_k}\partial_{x_j}\psi + \partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi}{\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))}$$

имеет полюс второго порядка на $\Theta$. То есть

$$\partial_{x_k}\partial_{x_j}\psi + \partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi \in M(2).$$

Следовательно, оператор $H^{kj}_{c,c'}$ имеет вид

$$H^{kj}_{c,c'} = -\partial_{x_k}\partial_{x_j} + f^{kj}_{c,c'}\partial_{x_1} + g^{kj}_{c,c'}\partial_{x_2} + h^{kj}_{c,c'},$$

а $F^{kj}_{c,c'}$ — оператор умножения на функцию

$$H^{kj}_{c,c'}\psi + F^{kj}_{c,c'}\psi_{c'} = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi. \qquad (7)$$

Для $z \in \Gamma_{c'}$ равенство (7) перепишется в виде

$$H^{kj}_{c,c'}\psi = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi.$$

Из лемм 3 и 9 следует, что последнее равенство эквивалентно

$$\Big(\partial_{z_k}\partial_{z_j} - f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} - g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} - h^{kj}_{c,c'} +$$

$$+ 2\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right) = 0. \tag{8}$$

Умножим обе части (8) на $\theta^2(z)$ и положим $z = p_1$ и $z = p_2$. Получим систему линейных уравнений относительно $f^{kj}_{c,c'}$ и $g^{kj}_{c,c'}$:

$$\begin{cases} f^{kj}_{c,c'}\theta_1(p_1) + g^{kj}_{c,c'}\theta_2(p_1) = \frac{\theta_j(p_1+c+x)\theta_k(p_1)+\theta_k(p_1+c+x)\theta_j(p_1)-\theta_{kj}(p_1)}{\theta(p_1+c+x)} \\ f^{kj}_{c,c'}\theta_1(p_2) + g^{kj}_{c,c'}\theta_2(p_2) = \frac{\theta_j(p_2+c+x)\theta_k(p_2)+\theta_k(p_2+c+x)\theta_j(p_2)-\theta_{kj}(p_2)}{\theta(p_2+c+x)}. \end{cases}$$

Решая ее находим $f^{kj}_{c,c'}$, $g^{kj}_{c,c'}$. Полагая в (8) $z = p_3 + c'$ ($p_3 + c' \in \Gamma_{c'}$, так как $\theta(p_3) = 0$), найдем $h^{kj}_{c,c'}$. Из лемм 3 и 9 следует, что (7) эквивалентно равенству

$$\left(-\partial_{z_k}\partial_{z_j} + f^{kj}_{c,c'}\partial_{z_1} + g^{kj}_{c,c'}\partial_{z_2} + h^{kj}_{c,c'}\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right) +$$

$$+F^{kj}_{c,c'}\frac{\theta(z+c+c'+x)\theta(z-c')}{\theta^2(z)} = 2\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}.$$

Полагая в этом равенстве $z = p_4$, получим $F^{kj}_{c,c'}$.

Найдем оставшиеся компоненты оператора $L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))$. Заменим в равенстве (7) $c'$ на $-c'$, $c$ на $c + c'$ и умножим обе части на $\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}$. Получим

$$H^{kj}_{c+c',-c'}\psi_{c'} + F^{kj}_{c+c',-c'}\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')\theta(z+c+x)}{\theta^3(z)} = \partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi_{c'}. \tag{9}$$

Пусть

$$\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)} = \alpha_{11}\partial^2_{z_1}\ln\theta(z) + \alpha_{12}\partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z) + \alpha_{22}\partial^2_{z_2}\ln\theta(z) + \alpha,$$

где $\alpha, \alpha_{kj} \in \mathbf{C}$. Существование констант $\alpha, \alpha_{kj}, k, j = 1, 2$ следует из того, что размерность пространства мероморфных функций с полюсом порядка не выше чем 2 на $\Theta$ равна 4 (см., например, [17]). Функции 1 и $\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z), k, j = 1, 2$ линейно независимы над $\mathbf{C}$. Это можно, например, показать с помощью теоремы Накаяшики. Операторы $L_{c,c'}(1)$ и $L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)), k, j = 1, 2$ линейно независимы, так как старшие части у 11-компонент этих операторов, как мы показали, равны соответственно 1 и $-\partial_{x_k}\partial_{x_j}$. Равенство (9) эквивалентно

$$F^{kj}_{c+c',-c'}(\alpha_{11}H^{11}_{c,c'} + \alpha_{12}H^{12}_{c,c'} + \alpha_{22}H^{22}_{c,c'} + \alpha)\psi +$$

$$+(F^{kj}_{c+c',-c'}(\alpha_{11}F^{11}_{c,c'}+\alpha_{12}F^{12}_{c,c'}+\alpha_{22}F^{22}_{c,c'})+H^{kj}_{c+c',-c'})\psi_{c'}=\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi_{c'}.$$

Из последнего равенства получаем формулы для $[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{21}$ и $[L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{22}$. Предложение 2 доказано.

Найдем операторы $Z_1$ и $Z_2$.

**Предложение 3.** *Операторы $Z_1$ и $Z_2$, построенные по базису $\psi$ и $\psi_{c'}$, имеют вид:*

$$[Z_j]_{11}=-x_1H^{1j}_{c,c'}-x_2H^{j2}_{c,c'}+\partial_{x_j},\quad [Z_j]_{12}=-x_1F^{1j}_{c,c'}-x_2F^{j2}_{c,c'},$$

$$[Z_j]_{21}=-x_1[L_{c,c'}(\partial_{z_1}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{21}-$$

$$-x_2[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_2}\ln\theta(z))]_{21}+k^j_1\partial_{x_1}+k^j_2\partial_{x_2}+h^j_{c,c'},$$

$$[Z_j]_{22}=-x_1[L_{c,c'}(\partial_{z_1}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{22}-x_2[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_2}\ln\theta(z))]_{22}+g^j_{c,c'}+2\partial_{x_j},$$

где

$$k^j_1=\frac{1}{\theta_1(p_2)\theta_2(p_1)-\theta_1(p_1)\theta_2(p_2)}\times$$

$$\times\left(\frac{\theta_j(p_1-c')\theta(p_1+c+c'+x)\theta_2(p_2)}{\theta(p_1+c+x)}-\frac{\theta_j(p_2-c')\theta(p_2+c+c'+x)\theta_2(p_1)}{\theta(p_2+c+x)}\right),$$

$$k^j_2=\frac{1}{\theta_1(p_1)\theta_2(p_2)-\theta_1(p_2)\theta_2(p_1)}\times$$

$$\times\left(\frac{\theta_j(p_1-c')\theta(p_1+c+c'+x)\theta_1(p_2)}{\theta(p_1+c+x)}-\frac{\theta_j(p_2-c')\theta(p_2+c+c'+x)\theta_1(p_1)}{\theta(p_2+c+x)}\right),$$

$$h^j_{c,c'}(x)=\frac{\theta_j(p_3)\theta(p_3+c+2c'+x)}{\theta(p_3+c')\theta(p_3+c+c'+x)}-$$

$$-k^j_1\left(\frac{\theta_1(p_3+c+c'+x)}{\theta(p_3+c+c'+x)}-\frac{\theta_1(p_3+c')}{\theta(p_3+c')}\right)-$$

$$-k^j_2\left(\frac{\theta_2(p_3+c'+c+x)}{\theta(p_3+c'+c+x)}-\frac{\theta_2(p_3+c')}{\theta(p_3+c')}\right),$$

$$g^j_{c,c'}(x)=-\frac{\theta_j(c')}{\theta(c')}+\frac{\theta_j(c+c'+x)}{\theta(c+c'+x)}-$$

$$-\frac{\theta^2(p_4)}{\theta(p_4-c')\theta(c+c'+x)}\left(k^j_1\partial_{z_1}+k^j_2\partial_{z_2}+h^j_{c,c'}\right)\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)|_{z=p_4},$$

$j=1,2.$

Доказательство предложения 3. Нужно найти оператор $Z_j \in \mathrm{Mat}(2, \mathcal{D})$ такой, что

$$[Z_j]_{11}\psi + [Z_j]_{12}\psi_{c'} = \partial_{z_j}\psi, \; [Z_j]_{21}\psi + [Z_j]_{22}\psi_{c'} = \partial_{z_j}\psi_{c'}.$$

Справедливы равенства

$$\partial_{z_j}\psi = \partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\right)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) -$$

$$-(x_1\partial_{z_1}\partial_{z_j}\ln\theta(z) + x_2\partial_{z_j}\partial_{z_2}\ln\theta(z))\frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)}\times$$

$$\times\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) =$$

$$= (-x_1H^{1j}_{c,c'} - x_2H^{j2}_{c,c'} + \partial_{x_j})\psi - (x_1F^{1j}_{c,c'} + x_2F^{j2}_{c,c'})\psi_{c'}.$$

Следовательно,

$$[Z_j]_{11} = -x_1H^{1j}_{c,c'} - x_2H^{j2}_{c,c'} + \partial_{x_j}, \quad [Z_j]_{12} = -x_1F^{1j}_{c,c'} - x_2F^{j2}_{c,c'}.$$

Найдем оставшиеся компоненты $Z_j$. Справедливы равенства

$$\partial_{z_j}\psi_{c'} = \partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\right)\frac{\theta(z+c+c'+x)}{\theta(z)}\times$$

$$\times\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) +$$

$$+\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z+c+c'+x)}{\theta(z)}\right)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) -$$

$$-\left(x_1\partial_{z_1}\partial_{z_j}\ln\theta(z) + x_2\partial_{z_j}\partial_{z_2}\ln\theta(z)\right)\frac{\theta(z-c')\theta(z+c+x+c')}{\theta^2(z)}\times$$

$$\times\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)). \tag{10}$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\right)\frac{\theta(z+c+x+c')}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) -$$

$$-\partial_{x_j}\psi_{c'} = \frac{\theta_j(z-c')\theta(z+c+x+c') - \theta(z-c')\theta_j(z+c+x+c')}{\theta^2(z)}\times$$

$$\times\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) \in M_c(2),$$

следовательно, существуют функции $k_1^j, k_2^j, h_{c,c'}^j, g_{c,c'}^j \in \mathcal{O}$, такие, что

$$\partial_{z_j}\left(\frac{\theta(z-c')}{\theta(z)}\right)\frac{\theta(z+c+x+c')}{\theta(z)}\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))=$$

$$=(k_1^j\partial_{x_1}+k_2^j\partial_{x_2}+h_{c,c'}^j)\psi+(g_{c,c'}^j+\partial_{x_j})\psi_{c'}. \tag{11}$$

Чтобы не загромождать запись мы не ставим индексов $c, c'$ у $k_1^j$ и $k_2^j$. Умножим обе части равенства (11) на $\theta^2(z)$ и положим $z = p_1$ и $z = p_2$. Получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} k_1^j\theta_1(p_1)+k_2^j\theta_2(p_1) = -\frac{\theta_j(p_1-c')\theta(p_1+c+x+c')}{\theta(p_1+c+x)} \\ k_1^j\theta_1(p_2)+k_2^j\theta_2(p_2) = -\frac{\theta_j(p_2-c')\theta(p_2+c+x+c')}{\theta(p_2+c+x)} \end{cases}$$

относительно $k_1^j$ и $k_2^j$, решая ее находим $k_1^j$ и $k_2^j$. Положим в (11) $z = p_3+c'$ ($p_3 + c' \in \Gamma_{c'}$), найдем $h_{c,c'}^j(x)$. Полагая в (11) $z = p_4$, находим $g_{c,c'}^j(x)$. Из (10) и (11) получаем $[Z_j]_{21}$ и $[Z_j]_{22}$. Предложение 3 доказано.

Покажем, что полученные операторы порождают кольцо $L_{c,c'}(A_\Theta)$.

**Лемма 10.** *Операторы* $L_{\Phi_c}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\ln\theta(z))$, $L_{\Phi_c}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\partial_{z_s}\ln\theta(z))$, *где* $s, j, k = 1, 2$ *порождают кольцо операторов* $L_{c,c'}(A_\Theta)$.

*Доказательство.* Размерность пространства мероморфных функций на $X^2$, имеющих полюс только на $\Theta$, кратности не выше чем 3, равна 9 (см., например, [17]). Выберем базис в этом пространстве, состоящий из функций вида $1, \frac{f_1}{\theta^3}, \dots, \frac{f_8}{\theta^3}$, где $f_i$ не делится на $\theta$, $i = 1, \dots, 8$. В качестве такого базиса, как будет показано ниже, можно взять функции

$$1, \partial_{z_k}\partial_{z_j}\partial_{z_s}\ln\theta(z), \partial_{z_1}^3\ln\theta(z)+\partial_{z_j}\partial_{z_s}\ln\theta(z),$$

$$(\partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z))^2-\partial_{z_1}^2\ln\theta(z)\partial_{z_2}^2\ln\theta(z), \tag{12}$$

где $k, j, s = 1, 2$. По теореме Лефшеца отображение

$$(\theta^3 : f_1 : \dots : f_8)$$

задает вложение $F : X^2 \to \mathbf{CP}^8$ в проективное пространство. Пусть $(y_0 : \dots : y_8)$ однородные координаты в $\mathbf{CP}^8$. Тогда ограничение функций $\frac{y_1}{y_0}, \dots, \frac{y_8}{y_0}$ на $F(X^2)$ порождают координатное кольцо аффинного алгебраического многообразия $F(X^2\backslash\Theta)$. Следовательно, функции $\frac{f_1}{\theta^3}, \dots, \frac{f_8}{\theta^3}$ порождают $A_\Theta$. Осталось показать, что функции (12) линейно независимы над $\mathbf{C}$. Это следует из того, что операторы

$$L_{c,c'}(1),\ L_{c,c'}(\partial_{z_k}\partial_{z_j}\partial_{z_s}\ln\theta(z)),\ L_{c,c'}(\partial_{z_1}^3\ln\theta(z)+\partial_{z_j}\partial_{z_s}\ln\theta(z)),$$

$$(L_{c,c'}(\partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z))^2 - \partial_{z_1}^2\ln\theta(z)\partial_{z_2}^2\ln\theta(z)),$$

где $k, j, s = 1, 2$, линейно независимы, так как старшие символы 11-компонент этих операторов равны соответственно

$$1, -2\partial_{x_k}\partial_{x_j}\partial_{x_s}, -2\partial_{x_1}^3 - \partial_{x_j}\partial_{x_s},$$

$$f_{c,c'}^{22}\partial_{x_1}^3 + (g_{c,c'}^{22} - 2f_{c,c'}^{12})\partial_{x_1}^2\partial_{x_2} + (f_{c,c'}^{11} - 2g_{c,c'}^{12})\partial_{x_1}\partial_{x_2}^2 + g_{c,c'}^{11}\partial_{x_2}^3.$$

Лемма 10 доказана.

## 1.4 Гладкие вещественные операторы

В начале параграфа будет доказана теорема А. После этого мы введем гиперэллиптическую поверхность Г рода 2 с вещественными точками ветвления и выберем на ней канонический базис циклов по схеме [4]. Далее мы введем четыре вещественных двумерных тора $T_j$, $1 \le j \le 4$ в $X$ (в многообразии Якоби Г ). На этих торах тэта-функция принимает вещественные значения. В лемме 12 будет доказано, что тэта-функция не имеет нулей на торе $T_1$. В лемме 13 мы найдем точки пересечения тэта-дивизора и тэта-дивизора со сдвигом. Доказательство теоремы С заключается в проверке того, что коэффициенты операторов Накаяшики второго и третьего порядка, найденные в предложениях 1–3, являются вещественными и гладкими.

Далее мы предполагаем, что $\Theta$ — неособая риманова поверхность.

Доказательство теоремы А. Докажем сначала вторую часть теоремы.

Коэффициенты операторов $L_{c,c'}(\lambda)$ являются двояко-периодическими, причем коэффициенты всех компонент этого оператора имеют особенности в точке $x = -c$. Пусть $X^2$ является многообразием Якоби римановой поверхности с вещественными точками ветвления. В этом случае справедливо равенство $\overline{\theta}(z) = \theta(\overline{z})$ [4]. Пусть также $c, c' \in \mathbf{R}^2$, $\lambda(z)$ — вещественная функция при $z \in \mathbf{R}^2$ (например, $\lambda = \partial_{z_j}\partial_{z_i}\ln\theta(z)$). Вещественность операторов $L_{c,c'}(\lambda)$ немедленно вытекает из того, что собственная вектор-функция $(\psi, \psi_{c'})^\top$ оператора $L_{c,c'}(\lambda)$ является вещественной при вещественном параметре $z$.

Перейдем к доказательству первой части теоремы. Прежде всего отметим, что $\mathcal{D}$-модуль $M_0$ не является свободным ранга 2. Это, например, следует из того, что $\partial_{x_j}\psi(z,x)|_{x=0} = 0$, следовательно, функцию вида

$f(z,x)\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)) \in M_0$, где $f(z,x)$ имеет полюс второго порядка на тэта-дивизоре, вообще говоря нельзя представить в виде $d_1\psi + d_2\psi_{c'}$ при $x=0$, где $d_1 \in \mathcal{D}$ — оператор первого порядка, $d_2$ — оператор умножения на функцию, но это возможно сделать при $x \neq 0$.

Пусть $X^2$ является многообразием Якоби римановой поверхности $\Gamma$, $L(\lambda)$ — оператор Накаяшики с двояко-периодическими коэффициентами с периодами равными $\tau_1,\tau_2 \in \mathbf{R}$, $\Psi = (\psi_1,\psi_2)^\top$ — собственная блоховская вектор-функция компонентами, которой являются элементы базиса $\mathcal{D}$-модуля $M_c$

$$L(\lambda)\Psi = \lambda\Psi,\ \ \Psi(z,x_1+\tau_1,x_2) = -\partial_{z_1}\ln\theta(z)\tau_1\mu_1\Psi(z,x_1,x_2),$$

$$\Psi(z,x_1,x_2+\tau_2) = -\partial_{z_2}\ln\theta(z)\tau_2\mu_2\Psi(z,x_1,x_2),$$

где $\mu_1,\mu_2 \in \mathbf{C}$. Предположим, что у $L(\lambda)$ вещественные коэффициенты при $x \in \mathbf{R}^2$. Тогда $X^2$ допускает антиголоморфную инволюцию $\tau$ такую, что

$$\overline{\Psi}(z,x) = \Psi(\tau(z),x),\ \ \overline{\lambda}(z) = \lambda(\tau(z)).$$

При этом антиголоморфная инволюция $\tau$ оставляет тэта-дивизор на месте $\tau(\Theta)=\Theta$, т.к. мультипликативные функции $\partial_{z_1}\ln\theta(z)$ и $\partial_{z_2}\ln\theta(z)$ имеют полюс на тэта-дивизоре. Следовательно, $\tau$ индуцирована антиголоморфной инволюцией на римановой поверхности $\Gamma$ и совпадает с комплексным сопряжением. Тэта-дивизор неподвижен при $\tau$ только когда $\Gamma$ имеет вещественные точки ветвления [4].

Покажем, что $c \in \mathbf{R}^2$. Обозначим через $A$ оператор перехода от базиса $\psi,\psi_{c'}$ к базису $\psi_1,\psi_2$. Из равенств $\Psi = A(\psi,\psi_{c'})^\top$, $\overline{\theta(z)} = \theta(\overline{z})$, и $\Psi(z+\Omega m,x) = \exp(-2\pi i\langle m,c\rangle)\Psi(z,x)$ вытекает, что $\overline{\Psi}(z+\Omega m,x) = \exp(-2\pi i\langle m,\overline{c}\rangle)\overline{\Psi}(\overline{z},x)$, а значит, из $\Psi(z,x) = \overline{\Psi}(\overline{z},x)$ следует, что $c \in \mathbf{R}^2$.

Причина негладкости операторов в следующем. Заменим $x+c$ на $x$ и разделим $\psi_1$ и $\psi_2$ на $\exp(-c_1\partial_{z_1}\ln\theta(z) - c_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))$. Получим функции $\widetilde{\psi}_1,\widetilde{\psi}_2 \in M_0$. Так как $\mathcal{D}$-модуль $M_0$ не является свободным ранга 2, то равенство $\widetilde{L}(\lambda)\widetilde{\Psi} = \lambda\widetilde{\Psi}, \widetilde{\Psi} = (\widetilde{\psi}_1,\widetilde{\psi}_2)^\top$ не выполняется в окрестности $x=0$, следовательно, у коэффициентов оператора $\widetilde{L}(\lambda)$ имеются особенности в точке $x=0$, а значит, и у коэффициентов оператора $L(\lambda)$ в точке $x=-c$ есть особенности. Более подробно. Если коэффициенты операторов $A$ и $A^{-1}$ гладкие в точке $x=-c$, то из равенства $A^{-1}L(\lambda)A = L_{c,c'}(\lambda)$ (см. предл. 1) вытекает, что оператор $L(\lambda)$ негладкий в точке $x=-c$, если оператор $A$ или оператор $A^{-1}$ негладкий в точке $x=-c$, то негладкость

оператора $L(\lambda)$ вытекает из равенства $L(\lambda) = AL_{c,c'}(\lambda)A^{-1}$ и из того, что все компоненты оператора $L_{c,c'}(\lambda)$ негладкие при $x = -c$. Теорема А доказана.

Обозначим через $\Gamma$ гладкое пополнение римановой поверхности, заданной в $(y, w)$-плоскости уравнением

$$w^2 = P(y) = (y - y_1) \dots (y - y_5)$$

с вещественными $y_1 < \dots < y_5$. Через $X$ обозначим многообразие Якоби гиперэллиптической поверхности $\Gamma$. На $\Gamma$ действует голоморфная инволюция

$$\sigma : (y, w) \to (y, -w)$$

с неподвижными точками $Q_i = (y_i, 0), i = 1, \dots, 5$ и $\infty$ и антиголоморфная инволюция

$$\tau : (y, w) \to (\bar{y}, \bar{w}).$$

Инволюция $\tau$ имеет три неподвижных цикла:

$$C_1 : \{y_1 \le y \le y_2, w = \pm\sqrt{P(y)}\},$$
$$C_2 : \{y_3 \le y \le y_4, w = \pm\sqrt{P(y)}\},$$
$$C_3 : \{y_5 \le y \le \infty, w = \pm\sqrt{P(y)}\}.$$

Выберем канонический базис циклов $a_1, a_2, b_1, b_2$ с индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}$$

как показано на рисунке 1 (многоточием обозначены части циклов, расположенные на "нижнем листе"римановой поверхности). Объединение циклов $C_1, C_2$ и $C_3$ разбивает поверхность $\Gamma$ на две непересекающиеся части.

Отметим, что $a_1 = C_1, a_2 = C_2$. Антиголоморфная и голоморфная инволюции действуют на эти циклы следующим образом:

$$\tau a_1 = a_1, \ \tau a_2 = a_2, \ \tau b_1 = -b_1, \ \tau b_2 = -b_2,$$

$$\sigma a_1 = -a_1, \ \sigma a_2 = -a_2, \ \sigma b_1 = -b_1, \ \sigma b_2 = -b_2,$$

под равенством мы понимаем равенство в группе гомологий. На соответствующий канонический базис абелевых дифференциалов $\omega_1$ и $\omega_2$ такой, что

$$\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}, \int_{b_j} \omega_i = \int_{b_i} \omega_j = \Omega_{ij}, i, j = 1, 2$$

инволюции $\tau$ и $\sigma$ действуют следующим образом:

$$\tau^*\omega_i = \overline{\omega}_i, \ \sigma^*\omega_i = -\omega_i. \tag{13}$$

Введем четыре вещественных тора в $X$:

$$T_1 : z \equiv i(t_1, t_2),$$

$$T_2 : z \equiv i(t_1, t_2) + (\frac{1}{2}, 0),$$

$$T_3 : z \equiv i(t_1, t_2) + (0, \frac{1}{2}),$$

$$T_4 : z \equiv i(t_1, t_2) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

где $(t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2$, знак $\equiv$ означает равенство с точностью до элемента решетки $\mathbf{Z}^2 + \Omega\mathbf{Z}^2$, матрица $\Omega$ составлена из компонент $\Omega_{ij}$. Тэта-функция на этих торах вещественна.

Нам понадобится

**Лемма 11.** Справедливы равенства

$$\int_\infty^{Q_1} \omega \equiv (\frac{\Omega_{11}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2}), \ \int_\infty^{Q_2} \omega \equiv (\frac{1}{2} + \frac{\Omega_{11}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2}),$$

$$\int_\infty^{Q_3} \omega \equiv (\frac{1}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, -\frac{\Omega_{22}}{2}), \ \int_\infty^{Q_4} \omega \equiv (\frac{1}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\Omega_{22}}{2}), \ \int_\infty^{Q_5} \omega \equiv (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

*Доказательство.* Соединим $\infty$ и $Q_1$ ориентированным путем $l$ таким, что $l \cup -\sigma l = b_1$ ( $-\sigma l$ означает, что у $\sigma l$ нужно сменить ориентацию), тогда $\int_l \omega - \int_{\sigma l} \omega = \int_{b_1} \omega$ и $\int_l \omega = \int_{\sigma l} \sigma^* \omega = -\int_{\sigma l} \omega$, следовательно,

$$\int_\infty^{Q_1} \omega = \frac{1}{2} \int_{b_1} \omega \equiv (\frac{\Omega_{11}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2}).$$

Аналогично показывается, что

$$\int_{Q_1}^{Q_2} \omega \equiv (\frac{1}{2}, 0), \int_{Q_2}^{Q_3} \omega = \frac{1}{2} \int_{b_1 - b_2} \omega \equiv (\frac{\Omega_{11}}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2} - \frac{\Omega_{22}}{2}),$$

$$\int_{Q_3}^{Q_4} \omega = \frac{1}{2} \int_{a_2} \omega \equiv (0, \frac{1}{2}), \int_{Q_4}^{Q_5} \omega = \frac{1}{2} \int_{b_2} \omega \equiv (\frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{\Omega_{22}}{2}).$$

Лемма доказана.

Как показано в [18], вектор римановых констант при таком выборе канонического базиса циклов и $\infty$ в качестве начальной точки отображения Абеля равен

$$K \equiv (\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{\Omega_{12}}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{\Omega_{22}}{2}) + (1, \frac{1}{2}).$$

Справедлива

**Лемма 12.** *На торе $T_1$ тэта-функция $\theta(z)$ не имеет нулей.*

*Доказательство.* Предположим, что $z$ принадлежит тору $T_1$ и тэта-дивизору, тогда $\overline{z} \equiv -z$ и по теореме Римана о нулях тэта-функции (см. [16]) $z \equiv A(P) + K$, где $A(P)$ — отображение Абеля с начальной точкой $\infty$. Из (13) и из того, что $\Omega$ является чисто мнимой матрицей, вытекают равенства

$$\overline{z} \equiv A(\tau(P)) - (\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{\Omega_{12}}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{\Omega_{22}}{2}) + (1, \frac{1}{2}) \equiv$$

$$\equiv -z \equiv -A(P) - (\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{\Omega_{12}}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{\Omega_{22}}{2}) - (1, \frac{1}{2}),$$

следовательно,

$$A(\tau(P)) + A(P) \equiv 0.$$

Это вместе с (13) дает равенство $\tau(P) = \sigma(P)$. Отсюда следует, что $P$ является точкой ветвления, либо у $P$ $y$-координата вещественная, а $w$-координата чисто мнимая. Эти точки образуют три цикла

$$B_1 : \{\infty \le y \le y_1, w = \pm\sqrt{P(y)}\},$$

$$B_2 : \{y_2 \le y \le y_3, w = \pm\sqrt{P(y)}\},$$

$$B_3 : \{y_4 \le y \le y_5, w = \pm\sqrt{P(y)}\}.$$

Для точек этих циклов справедливы равенства

$$\overline{A(P)} \equiv A(\tau(P)) \equiv A(\sigma(P)) \equiv -A(P).$$

Откуда вытекает, что

$$A(P) \equiv i(t_1, t_2) + \frac{(m, n)}{2}, \ (t_1, t_2) \in \mathbf{R}^2, m, n \in \mathbf{Z}.$$

Следовательно, у $A(P)$ не меняется вещественная часть при обходе по циклам $B_j$, $j = 1, 2, 3$. Так как $Q_1 \in B_1, Q_2 \in B_2, Q_5 \in B_3$, то из леммы 11 вытекают включения

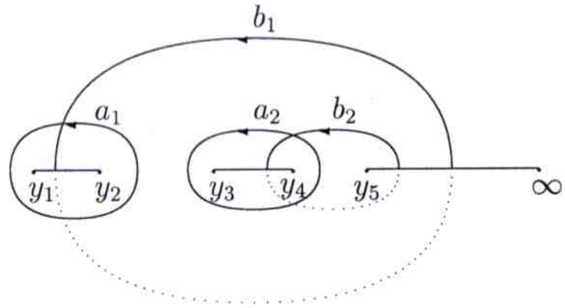


Рис. 1.

$$A(B_1) \subset T_1,\ A(B_2) \subset T_2,\ A(B_3) \subset T_4,$$

а значит, $z \equiv A(P) + K$ не может принадлежать $T_1$. Лемма доказана.

Пусть $c' \equiv (\frac{\Omega_{11}}{2} - \frac{\Omega_{21}}{2}, \frac{\Omega_{12}}{2} - \frac{\Omega_{22}}{2})$.

**Лемма 13.** *Тэта-дивизор пересекается с римановой поверхностью, заданной в $X$ уравнением $\theta(z - c') = 0$, по двум точкам*

$$p_1 \equiv (\frac{\Omega_{12}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\Omega_{22}}{2} + \frac{1}{2}),\ p_2 \equiv (\frac{\Omega_{11}}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\Omega_{21}}{2} + \frac{1}{2}).$$

*Доказательство.* Точка $z$ принадлежит тэта-дивизору, когда она имеет вид $z \equiv \int_\infty^P \omega + K$, где $P \in \Gamma$. Следовательно, точки пересечения имеют вид $p_1 \equiv \int_\infty^{P_1} \omega + K$, $p_2 \equiv \int_\infty^{P_2} \omega + K$, где $P_1$ и $P_2$ — нули функции $\theta(\int_\infty^P \omega + K - c')$ на $\Gamma$. Функция $\theta(\int_\infty^P \omega + K - c')$ не равна тождественно нулю на $\Gamma$ (т.к. $K - c' \equiv (1, \frac{1}{2}) \not\equiv K$) ), тогда по теореме Римана

$$\int_\infty^{P_1} \omega + \int_\infty^{P_2} \omega \equiv c'$$

и по $c'$ точки $P_1$ и $P_2$ восстанавливаются однозначно (см., например, [18]). По лемме 11 $\int_\infty^{Q_2} \omega + \int_\infty^{Q_3} \omega \equiv c'$, следовательно,

$$p_1 \equiv \int_\infty^{Q_2} \omega + K,\ p_2 \equiv \int_\infty^{Q_3} \omega + K.$$

Лемма доказана.

Далее мы предполагаем, что $c \in T_1$.

Доказательство теоремы B. Положим в предложениях 2 и 3 $p_3 = \int_\infty^{P_3} \omega + K$, где $P_3$ — произвольная точка цикла $B_2$, отличная от $Q_2$ и $Q_3$, $\theta(p_3) = 0$, $p_3 \in T_4$. Возьмем в качестве $p_4$ произвольную точку из $T_4$ такую, что $\theta(p_4) \neq 0$.

Константы $\theta_k(p_j)$ — мнимые, функции $\partial_{x_k} \ln\theta(p_j + c + x)$ — также чисто мнимые при $x \in i\mathbf{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, следовательно, функции $f^{kj}_{c,c'}$ и $g^{kj}_{c,c'}$ из предложения 2 являются чисто мнимыми, а $h^{kj}_{c,c'}$ — вещественными, значит, операторы $[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{11}$ и $[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{12}$ — вещественные. Числа $\alpha_{kj}$ и $\alpha$ из предложения 2 являются вещественными, так как функции $\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z)$, $\frac{\theta(z-c')\theta(z+c')}{\theta^2(z)}$ — вещественные на торе $T_1$ и функции $\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z)$ линейно независимы (это следует, например, из теоремы Накаяшики, так как 11-коэффициенты операторов $L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))$ равны $\partial_{x_j}\partial_{x_k}$). Отсюда следует, что операторы $[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{21}$ и $[L_{c,c'}(\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))]_{22}$ — вещественные.

Так как коэффициенты операторов Накаяшики выражаются через тэта-функцию и ее производные, и так как тэта-функция вещественна на торах $T_1$ и $T_4$, то из вещественности коэффициентов операторов при $x \in i\mathbf{R}^2$ будет следовать вещественность коэффициентов при $x \in i\mathbf{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Из предложения 3 следует, что коэффициенты операторов $Z_1$ и $Z_2$ чисто мнимые при $x \in i\mathbf{R}^2$, тогда из предложения 1 вытекает, что операторы $L_{c,c'}(i\partial_{z_s}\partial_{z_j}\partial_{z_k} \ln\theta(z))$ вещественные при $x \in i\mathbf{R}^2$.

Для доказательства гладкости, согласно предложений 1,2 и 3 нужно показать, что функции $\theta(p_1 + c + x)$, $\theta(p_2 + c + x)$, $\theta(p_3 + c + c' + x)$, и $\theta(p_4 + c' + c + x)$ не обращаются в нуль при $x \in i\mathbf{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Это следует из леммы 12.

Введем операторы магнитных трансляций $\widetilde{T}_1$ и $\widetilde{T}_2$

$$\widetilde{T}_1\varphi(x) = \varphi(x + \Omega_1)\exp(2\pi i x_1),\ \widetilde{T}_2\varphi(x) = \varphi(x + \Omega_2)\exp(2\pi i x_2),$$

где $\Omega_j$ — $j$-ая строка матрицы $\Omega$. Функции $\psi$ и $\psi_{c'}$ являются магнитно-блоховскими:

$$\widetilde{T}_1\psi = \mu_1\psi,\ \mu_1 = \exp(-\pi i\Omega_{11} - 2\pi i(z_1 + c_1) - \Omega_{11}\partial_{z_1}\ln\theta(z) - \Omega_{12}\partial_{z_2}\ln\theta(z)),$$

$$\widetilde{T}_2\psi = \mu_2\psi,\ \mu_2 = \exp(-\pi i\Omega_{22} - 2\pi i(z_2 + c_2) - \Omega_{12}\partial_{z_1}\ln\theta(z) - \Omega_{22}\partial_{z_2}\ln\theta(z)),$$

$$\widetilde{T}_1\psi_{c'} = \mu_1\exp(-2\pi i c'_1)\psi_{c'},\ \widetilde{T}_2\psi_{c'} = \mu_2\exp(-2\pi i c'_2)\psi_{c'}.$$

Вместо функции $\psi_{c'}$ будем использовать функцию

$$\widetilde{\psi}_{c'} = \psi_{c'}\exp(2\pi i\langle x - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \Omega^{-1}c'\rangle),$$

тогда в силу симметричности $\Omega$

$$\widetilde{T}_1\widetilde{\psi}_{c'} = \mu_1\widetilde{\psi}_{c'},\ \widetilde{T}_2\widetilde{\psi}_{c'} = \mu_2\widetilde{\psi}_{c'}.$$

Операторы Накаяшики в базисе $\psi, \widetilde{\psi}_{c'}$ имеют вид $dL_{c,c'}(\lambda)d^{-1}$, $d$ — диагональная матрица с диагональю

$$(1, \exp(2\pi i\langle x - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \Omega^{-1}c'\rangle))$$

(предложение 1) и являются гладкими вещественными при тех же условиях, что и операторы $L_{c,c'}(\lambda)$. Обозначим через $H$ гладкий вещественный при $x \in i\mathbf{R}^2 + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ оператор

$$dL_{c,c'}(\partial^2_{z_1} \ln\theta(z) + \partial^2_{z_2} \ln\theta(z))d^{-1}.$$

Его 11-компонента имеет вид

$$H_{11} = (i\partial_{x_1} - A_1)^2 + (i\partial_{x_2} - A_2)^2 + u(x),$$

где $A_1 = \frac{i}{2}(f^{11}_{c,c'} + f^{22}_{c,c'}), A_2 = \frac{i}{2}(g^{11}_{c,c'} + g^{22}_{c,c'})$. Это оператор Шредингера в периодическом магнитном поле $\mathrm{rot}(A_1, A_2, 0)$. Для компонент вектор-потенциала $(A_1, A_2)$ справедливы равенства

$$A_k(x + \Omega_j) - A_k(x) = 2\pi\delta_{kj}.$$

Операторы магнитных трансляций коммутируют с операторами ковариантных производных

$$\widetilde{T}_j(i\partial_{x_k} - A_k) = (i\partial_{x_k} - A_k)\widetilde{T}_j.$$

Магнитно-блоховская функция $\psi$ при $z \in \Gamma_{c'}$ удовлетворяет уравнению Шредингера с гамильтонианом $H_{11}$ и с энергией $\partial^2_{z_1} \ln\theta(z) + \partial^2_{z_2} \ln\theta(z)$. Отсюда следует, что потенциал — двояко-периодичен

$$u(x + \Omega_1) = u(x + \Omega_2) = u(x)$$

и оператор Шредингера коммутирует с операторами магнитных трансляций $\widetilde{T}_j H_{11} = H_{11}\widetilde{T}_j$. Компонента 12 оператора $H$ является оператором умножения на двояко-периодическую функцию. Оператор $H_{21}$ имеет вид $F(x)\widetilde{H}_{21}$, где $F$ — двояко-периодическая функция, $\widetilde{H}_{21}$ — оператор второго порядка с постоянными коэффициентами при старших производных. Компонента 22 имеет вид

$$H_{22} = (i\partial_{x_1} - \widetilde{A}_1)^2 + (i\partial_{x_2} - \widetilde{A}_2)^2 + \widetilde{u}(x).$$

У оператора $H_{22}$ такие же свойства как и у $H_{11}$. В частности $H_{22}$ коммутирует с операторами магнитных трансляций.

Магнитно-блоховские функции оператора $H$ на уровне энергии $\lambda$ параметризуются римановой поверхностью, заданной в $X^2$ уравнением

$$\partial_{z_1}^2 \ln \theta(z) + \partial_{z_2}^2 \ln \theta(z) = \lambda.$$

Для завершения доказательства нужно сделать замену координат и учесть, что $\partial_{x_k}$ — операторы комплексного дифференцирования, т.е. $\partial_{x_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_k} - i\frac{\partial}{\partial y_k})$.

Теорема В доказана.

## 1.5 Операторы Накаяшики

В начале параграфа мы введем две римановых поверхности $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ рода 2, вложенные в двумерное абелево многообразие $X^2$. В лемме 14 с помощью формулы Фэя (14) будет доказано, что $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ касаются тэта-дивизора. В формулах (17) и (18) мы укажем базис $\psi_1, \psi_2$ модуля Бейкера–Ахиезера. Из леммы 14 вытекает, что функции $\psi_1$ и $\psi_2$, ограниченные соответственно на $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, являются одноточечными функциями Бейкера–Ахиезера [8]. В лемме 16 будут найдены некоторые коэффициенты 11-компонент и 12-компонент операторов второго порядка. В лемме 17 указана связь между 11-компонентами и 12-компонентами и между 21-компонентами и 22-компонентами операторов. В лемме 18 мы найдем некоторые коэффициенты оператора $L_1$. Лемма 1 вытекает из лемм 16,17 и 18. В лемме 19 мы докажем, что коэффициенты 11-компонент операторов Накаяшики рационально выражаются через функцию $V$ и ее производные. Теорема С вытекает из лемм 20 и 21, где доказано, что коэффициенты операторов второго и третьего порядка рационально выражаются через функции $V$ и $W$ и их производные.

Абелево многообразие $X^2$ является многообразием Якоби некоторой римановой поверхности $\Gamma$ рода 2. На $\Gamma$ существует канонический базис циклов $a_1, a_2, b_1$ и $b_2$ с индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}$$

и базис абелевых дифференциалов $\omega_1$ и $\omega_2$ такой, что компоненты матрицы $\Omega$ равны $\Omega_{ij} = \int_{b_j} \omega_i$ и $\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}, i, j = 1, 2$. Для точек $\widetilde{R}, \widetilde{Q} \in \Gamma$

справедливо тождество, найденное Фэем [19]

$$\sum_{i,j=1}^{2} F_i G_j \partial_{z_i}\partial_{z_j} \ln\theta(z) = \widetilde{c_3} + \widetilde{c_2}\frac{\theta(z+\int_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}\omega)\theta(z+\int_{\widetilde{R}}^{\widetilde{Q}}\omega)}{\theta^2(z)},$$

где $F_i = \frac{\omega_i(\widetilde{R})}{dr}, G_i = \frac{\omega_i(\widetilde{Q})}{dq}$ и $r, q$ — локальные параметры в окрестностях точек $\widetilde{R}$ и $\widetilde{Q}$, $\int_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}\omega = (\int_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}\omega_1, \int_{\widetilde{Q}}^{\widetilde{R}}\omega_2)$, $\widetilde{c_2}, \widetilde{c_3}$ — некоторые константы. Обозначим через $R$ и $Q \in \Gamma$ нули $\omega_2$. Так как $\int_Q^R \omega = -2K$, где $K$ — вектор римановых констант относительно точки $Q$ (см., например, [17]), то

$$\partial_{z_1}^2 \ln\theta(z) = c_3 + c_2\frac{\theta(z-2K)\theta(z+2K)}{\theta^2(z)}, \tag{14}$$

$c_2$ и $c_3$ — некоторые константы (в явном виде мы их выпишем в формуле (27)). Через $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ обозначим римановы поверхности, заданные в $X$ уравнениями $\theta(z+2K) = 0$ и $\theta(z-2K) = 0$.

Справедлива

**Лемма 14.** *Римановы поверхности $\Theta$ и $\Gamma_1$, $\Theta$ и $\Gamma_2$ пересекаются по точкам $-K, K$ с кратностями 2 (касаются) и $\theta_{11}(-K) = \theta_{11}(K) \neq 0$.*

*Доказательство.* Индекс пересечения $\Theta$ и $\Gamma_1$ равен 2 (см. [16]). Предположим, что $\Theta$ и $\Gamma_1$ пересекаются по двум различным точкам. Пусть $\mathcal{A} : \Gamma \to X$ — отображение Абеля с базисной точкой $Q$. По теореме Римана о нулях тэта-функции

$$\theta(z) = 0 \Leftrightarrow z = A(P) + K.$$

Следовательно, точка $z = A(R) + K = -K$ является точкой пересечения $\Theta$ и $\Gamma_1$. Выберем локальный параметр $s$ в точке $R$. Из (14) вытекает, что $\theta_1(K) = 0$. Имеет место равенство

$$\frac{d}{ds}\theta(\int_{s(Q)}^{s(P)} s^*\omega + 3K) = \theta_1(\int_{s(Q)}^{s(P)} s^*\omega + 3K)\frac{\omega_1}{ds} + \theta_2(\int_{s(Q)}^{s(P)} s^*\omega + 3K)\frac{\omega_2}{ds}.$$

Так как $\omega_2(R) = 0$ и $\theta_1(K) = 0$, то $\frac{d}{ds}\theta(\int_{s(Q)}^{s(P)} s^*\omega + 3K) = 0$, при $P = R$, следовательно, функция $\theta(A(P) + K + 2K)$ имеет нуль кратности 2 в точке $R$, или, эквивалентно, функция $\theta(z+2K)$ имеет нуль кратности 2 на $\Theta$ в точке $-K$. Значит, точка $-K$ является точкой касания $\Theta$ и $\Gamma_1$. Аналогично доказывается, что $\Theta$ и $\Gamma_2$ касаются в точке $K$.

Докажем, что $\theta_{11}(-K) \neq 0$. Из (14) следует тождество

$$\theta_{112}(z)\theta(z) - \theta_{11}(z)\theta_2(z) - 2\theta_{12}(z)\theta_1(z) - 2c_3\theta_2(z)\theta(z) =$$

$$= c_2\theta_2(z+2K)\theta(z-2K) + c_2\theta(z+2K)\theta_2(z-2K),$$

из которого вытекает, что $\theta_{11}(-K) \neq 0$, так как иначе получили бы, что $\theta_2(K) = 0$, но $\Theta$ — гладкая риманова поверхность. Лемма доказана.

Из (14) следует, что на $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ справедливо равенство

$$\theta_{11}(z)\theta(z) - \theta_1^2(z) - c_3\theta^2(z) = 0,$$

из леммы 14 вытекает, что функция $\theta_1(z)$ на $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ имеет нуль первого порядка в точках $-K$ и $K$ соответственно, следовательно, на $\Gamma_1$ справедливы разложения в ряд (в окрестности точки $-K \in \Gamma_1$)

$$\theta_2(z) = \theta_2(-K) + b_1\theta_1(z) + o(\theta_1(z)), \tag{15}$$

$$\theta_{11}(z) = \theta_{11}(-K) + d_1\theta_1(z) + o(\theta_1(z)), \tag{16}$$

на $\Gamma_2$ справедливы разложения в ряд (в окрестности точки $K \in \Gamma_2$)

$$\theta_2(z) = \theta_2(K) + b_2\theta_1(z) + o(\theta_1(z)),\ \theta_{11}(z) = \theta_{11}(K) + d_2\theta_1(z) + o(\theta_1(z)),$$

где $b_i, d_i \in \mathbf{C}, i = 1, 2$. Справедлива

**Лемма 15.** *Имеют место равенства* $b_1 = b_2,\ d_1 = -d_2$.

*Доказательство.* Обозначим через $A_1$ отображение $\Gamma \to X$, заданное формулой $A_1(P) = \int_Q^P \omega - K$, $P \in \Gamma$ и пусть $A_2(P) = -A_1(P)$. Образом отображения $A_1$ является риманова поверхность $\Gamma_1$, а образом $A_2$ является $\Gamma_2$. Так как $\theta(z)$ — четная функция, то $\theta_1(z)$ и $\theta_2(z)$ — нечетные, следовательно, из (15) получаем

$$\theta_2(A_2(P)) = \theta_2(K) + b_1\theta_1(A_2(P)) + \ldots,$$

отсюда вытекает равенство $b_1 = b_2$. Аналогично доказывается, что $d_1 = -d_2$. Лемма доказана.

Пусть $b = b_1 = b_2, d = d_1 = -d_2$.

Введем функции из $M_c$

$$\psi_1 = \frac{\theta(z+c+x)}{\theta(z)\theta(c-K+x)}\times$$

$$\times \exp\left(-x_1\left(\partial_{z_1}\ln\theta(z)-\frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}-\frac{d}{2}\right)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)\right), \tag{17}$$

$$\psi_2=\frac{\theta(z+c-2K+x)\theta(z+2K)}{\theta^2(z)\theta(c-K+x)}\times$$

$$\times \exp\left(-x_1\left(\partial_{z_1}\ln\theta(z)+\frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{d}{2}\right)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z)\right). \tag{18}$$

Функции $\psi_1,\psi_2$ задают базис $\mathcal{D}$-модуля $M_c$.

Через $L^{ij}_{c,K}$ и $L^{ijk}_{c,K}$ обозначим операторы Накаяшики $L_{c,K}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z))$ и $L_{c,K}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\partial_{z_k}\ln\theta(z))$ в базисе $\psi_1,\psi_2$ (смысл индекса K будет ясен из дальнейшего). Оператор $[L^{ij}_{c,K}]_{11}$ имеет вид

$$-\partial_{x_i}\partial_{x_j}+f^{ij}_{c,K}\partial_{x_1}+g^{ij}_{c,K}\partial_{x_2}+h^{ij}_{c,K},$$

а оператор $[L_{c,K}(\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z))]_{12}$ является оператором умножения на некоторую функцию $H^{ij}_{c,K}(x)$, $i,j=1,2$. Справедлива

**Лемма 16.** *Имеют место равенства*

$$g^{11}_{c,K}=\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)},\ g^{12}_{c,K}=\frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)}+\frac{d}{2},\ g^{22}_{c,K}=\frac{\theta_{22}(K)}{\theta_2(K)},\ f^{11}_{c,K}=0,$$

$$h^{11}_{c,K}=\partial^2_{x_1}\ln\frac{\theta(c-3K+x)}{\theta(c-K+x)}+\left(\partial_{x_1}\ln\frac{\theta(c-3K+x)}{\theta(c-K+x)}+\partial_{z_1}\ln\theta(3K)+\right.$$

$$\left.+\frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}+\frac{d}{2}\right)^2-\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\left(\partial_{x_2}\ln\frac{\theta(c-3K+x)}{\theta(c-K+x)}+\partial_{z_2}\ln\theta(3K)\right)+c_3,$$

$$H^{11}_{c,K}=\frac{2\theta_{11}(K)\theta(K+c+x)}{\theta(3K)\theta(c-K+x)}\exp\left(x_1\left(\frac{b\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}+d\right)\right),$$

$$H^{12}_{c,K}=\left(\frac{\theta_{12}(K)}{\theta_{11}(K)}+\frac{b}{2}+\frac{d\theta_2(K)}{2\theta_{11}(K)}\right)H^{11}_{c,K}-\frac{\theta_2(K)}{2\theta_{11}(K)}\partial_{x_1}H^{11}_{c,K},$$

$$H^{22}_{c,K}=\left(\frac{\theta_{22}(K)}{\theta_{11}(K)}+b+\frac{d\theta_2(K)}{\theta_{11}(K)}\right)H^{11}_{c,K}-\frac{\theta_2(K)}{\theta_{11}(K)}\partial_{x_2}H^{11}_{c,K}.$$

*Доказательство.* Разделим равенство

$$-\partial_{x_i}\partial_{x_j}\psi_1+f^{ij}_{c,K}\partial_{x_1}\psi_1+g^{ij}_{c,K}\partial_{x_2}\psi_1+h^{ij}_{c,K}\psi_1+H^{ij}_{c,K}\psi_2=\partial_{z_i}\partial_{z_j}\ln\theta(z)\psi_1$$

на $\exp(-x_1\partial_{z_1}\ln\theta(z)-x_2\partial_{z_2}\ln\theta(z))$ и умножим на $\theta^2(z)$. Положим сначала $z=-K$, а затем $z=K$ получим $g^{ij}_{c,K}$ и $H^{ij}_{c,K}$. Далее пусть $z\in\Gamma_1$,

используя разложения (15) и (16), получим $f^{11}_{c,K} = 0$. Для $z \in \Gamma_1$ справедливо равенство

$$\partial^2_{x_1}\psi_1 - \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\partial_{x_2}\psi_1 - h^{11}_{c,K}\psi_1 + c_3\psi_1 = 0, \tag{19}$$

следовательно,

$$h^{11}_{c,K} = \partial^2_{x_1}\ln\psi_1 + (\partial_{x_1}\ln\psi_1)^2 - \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\partial_{x_2}\ln\psi_1 + c_3,$$

полагая $z = -3K \in \Gamma_1$, получим $h^{11}_{c,K}$. Лемма доказана.

Докажем следующую лемму.

**Лемма 17.** *Для оператора* $L_{c,K} = L_{c,K}(\lambda), \lambda \in \mathcal{A}_\Theta$ *имеют место равенства*

$$[L_{c,K}]_{21} = [L_{c-2K,-K}]_{12}\left(\frac{1}{c_2}[L^{11}_{c,K}]_{11} - \frac{c_3}{c_2}\right),$$

$$[L_{c,K}]_{22} = [L_{c-2K,-K}]_{11} + \frac{1}{c_2}[L_{c-2K,-K}]_{12}H^{11}_{c,K}.$$

*Доказательство.* В равенстве

$$[L_{c,K}]_{11}\psi_1 + [L_{c,K}]_{12}\psi_2 = \lambda(z)\psi_1$$

заменим $K$ на $-K$, $c$ на $c-2K$ и умножим обе части на $\frac{\theta(z+2K)}{\theta(z)}$. Отметим, что при такой замене $d$ заменяется на $-d$, а $b$ остается тем же самым. Получим

$$[L_{c-2K,-K}]_{11}\psi_2 + [L_{c-2K,-K}]_{12}\frac{\theta(z+2K)\theta(z-2K)}{\theta^2(z)}\psi_1 = \lambda(z)\psi_2.$$

Следовательно,

$$[L_{c-2K,-K}]_{12}\left(\frac{1}{c_2}[L^{11}_{c,K}]_{11} - \frac{c_3}{c_2}\right)\psi_1 + ([L_{c-2K,-K}]_{11} + \frac{1}{c_2}[L_{c-2K,-K}]_{12}H^{11}_{c,K})\psi_2$$
$$= \lambda(z)\psi_2.$$

Лемма доказана.

В частности, из леммы 17 следует, что

$$[L^{ij}_{c,K}]_{21} = H^{ij}_{c-2K,-K}\left(\frac{1}{c_2}[L^{11}_{c,K}]_{11} - \frac{c_3}{c_2}\right),$$

$$[L^{ij}_{c,K}]_{22} = [L^{ij}_{c-2K,-K}]_{11} + \frac{1}{c_2} H^{11}_{c,K} H^{ij}_{c-2K,-K}.$$

Обозначим через $V$ функцию $H^{11}_{c-2K,-K}$, через $W$ функцию $H^{11}_{c,K}$

$$V = \frac{2\theta_{11}(K)\theta(c-3K+x)}{\theta(3K)\theta(c-K+x)} \exp\left(-x_1\left(\frac{b\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)} + d\right)\right), \tag{20}$$

$$W = \frac{2\theta_{11}(K)\theta(K+c+x)}{\theta(3K)\theta(c-K+x)} \exp\left(x_1\left(\frac{b\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)} + d\right)\right), \tag{21}$$

тогда из леммы 16 получаем

$$h^{11}_{c,K} = \partial^2_{x_1} \ln V + \left(\partial_{x_1} \ln V + \frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} + \frac{3d}{2} + \partial_{z_1} \ln\theta(3K)\right)^2 -$$

$$-\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}(\partial_{x_2} \ln V + \partial_{z_2} \ln\theta(3K)) + c_3, \tag{22}$$

$$h^{11}_{c-2K,-K} = \partial^2_{x_1} \ln W + \left(\partial_{x_1} \ln W - \frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} - \frac{3d}{2} - \partial_{z_1} \ln\theta(3K)\right)^2 +$$

$$+\frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}(\partial_{x_2} \ln W - \partial_{z_2} \ln\theta(3K)) + c_3. \tag{23}$$

В окрестности точки $z = -K$ на $\Gamma_1$ имеет место разложение в ряд

$$\frac{\theta_{12}(z)}{\theta(z)} = \frac{a_2}{\theta_1^2(z)} + \frac{a_1}{\theta_1(z)} + \ldots, \ a_1, a_2 \in \mathbf{C}. \tag{24}$$

В окрестности точки $z = K$ на $\Gamma_2$ имеет место разложение в ряд

$$\frac{\theta_{12}(z)}{\theta(z)} = \frac{\widetilde{a_2}}{\theta_1^2(z)} + \frac{\widetilde{a_1}}{\theta_1(z)} + \ldots, \ \widetilde{a_1}, \widetilde{a_2} \in \mathbf{C}.$$

Как и в лемме 15, легко показать, что $a_1 = -\widetilde{a_1}$. Пусть $a = a_1 = -\widetilde{a_1}$. Справедлива

**Лемма 18.** *Имеют место равенства*

$$h^{12}_{c,K} = \partial_{x_1}\partial_{x_2} \ln V + \left(\partial_{x_1} \ln V + \frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} + \frac{3d}{2} + \partial_{z_1} \ln\theta(3K)\right) \times$$

$$\times(\partial_{x_2} \ln V + \partial_{z_2} \ln\theta(3K)) - f^{12}_{c,K}\left(\partial_{x_1} \ln V + \frac{3b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} + \frac{3d}{2} + \right.$$

$$+ \partial_{z_1} \ln\theta(3K)) - g^{12}_{c,K}(\partial_{x_2}\ln V + \partial_{z_2}\ln\theta(3K)) + \partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(3K),$$

$$f^{12}_{c,K} = \frac{\theta_2(K)}{2\theta_{11}(K)}\left(h^{11}_{c,K} - c_3 + 2\frac{d\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)} - \frac{2b\theta_{11}(K)\theta_{12}(K)}{\theta_2^2(K)} - \frac{2a}{\theta_2(K)} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{d}{2} - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}\right)^2 - 2\theta_{11}(K)e - \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\alpha\right).$$

*Доказательство.* В доказательстве этой леммы мы предполагаем, что $z \in \Gamma_1$. Тогда

$$h^{12}_{c,K} = \partial_{x_1}\partial_{x_2}\ln\psi_1 + \partial_{x_1}\ln\psi_1\partial_{x_2}\ln\psi_1 -$$

$$-f^{12}_{c,K}\partial_{x_1}\ln\psi_1 - g^{12}_{c,K}\partial_{x_2}\ln\psi_1 + \partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z).$$

Откуда, полагая $z = -3K$, получим $h^{12}_{c,K}$.

Для удобства обозначим через $k^{-1}$ локальный параметр $\theta_1(z)$ на поверхности $\Gamma_1$ в точке $z = -K$. Из (14)–(16) получаем разложение в ряд

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = \frac{\theta_{11}(z)}{\theta_1(z)} - c_3\frac{\theta(z)}{\theta_1(z)} = \theta_{11}(K)k + d + \frac{e}{k} + o(k^{-1}), e \in \mathbf{C}. \qquad (25)$$

Пусть

$$\frac{\theta_2(z)}{\theta(z)} = \gamma k^2 + \beta k + \alpha + o(1), \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}, \qquad (26)$$

тогда функция $\psi_1$ имеет следующий вид

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta(z)}(1 + \frac{\xi_1(x)}{k} + \frac{\xi_2(x)}{k^2} + o(\frac{1}{k^2}))\exp,$$

$$\exp = \exp(-x_1\left((\theta_{11}(K)k + d + \frac{e}{k} + \ldots) - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)} - \frac{d}{2}\right) -$$

$$-x_2(\gamma k^2 + \beta k + \alpha + \ldots)).$$

Приравнивая в (19) к нулю коэффициенты при $k^2\exp$, $k\exp$ и $\exp$, получим

$$\gamma = -\theta_{11}(K)\theta_2(K), \ \beta = b\theta_{11}(K) - d\theta_2(K)$$

и

$$h^{11}_{c,K} - c_3 = -2\theta_{11}(K)\partial_{x_1}\xi_1 + \left(\frac{d}{2} - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}\right)^2 + 2\theta_{11}(K)e + \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\alpha.$$

Пользуясь разложениями (24),(25) и (26), приравняем в равенстве

$$-\partial_{x_1}\partial_{x_2}\psi_1 + f^{12}_{c,K}\partial_{x_1}\psi_1 + g^{12}_{c,K}\partial_{x_2}\psi_1 + h^{12}_{c,K}\psi_1 = \partial_{z_1}\partial_{z_2}\ln\theta(z)\psi_1$$

коэффициенты при $k^2\exp$ и $k\exp$. Получим $a_2 = \theta_{11}(K)\theta_2(K)$ и

$$f^{12}_{c,K} = -\theta_2(K)\partial_{x_1}\xi_1 + \frac{d\theta_{12}(K)}{\theta_{11}(K)} - \frac{b\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)} - \frac{a}{\theta_{11}(K)}.$$

Лемма доказана.

Справедлива

**Лемма 19.** *Коэффициенты 11-компонент операторов $L_{c,K}(\mathcal{A}_\Theta)$ рационально выражаются через функцию $V$ и ее производные.*

*Доказательство.* Пусть $z \in \Gamma_1$, тогда имеем равенство

$$[L^{12}_{c,K}]_{11}\psi_1 = \partial_{z_1}\partial_{z_2}\psi_1.$$

Заменим в левой части этого равенства дифференцирование по переменной $x_2$ функции $\psi_1$ на дифференцирование по $x_1$ (по формуле (19)). Получим некоторый оператор третьего порядка (по $x_1$) $\widetilde{L}$. Коэффициенты его, как следует из лемм 16 и 18, рационально выражаются через функцию $V$ и ее производные.

Пусть дан произвольный оператор $[L_{c,K}(\lambda)]_{11}$, $\lambda \in \mathcal{A}_\Theta$. Имеем равенство $[L_{c,K}(\lambda)]_{11}\psi_1 = \lambda\psi_1$. Точно также заменим в нем дифференцирование по переменной $x_2$ на дифференцирование по $x_1$. Получим некоторый оператор $\widetilde{L}_1$ порядка $> 3$. Операторы $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L}_1$ коммутируют (т.к. они имеют семейство совместных собственных функций, запараметризованное точками $\Gamma_1$). Следовательно, как показано в [8], коэффициенты оператора $\widetilde{L}_1$ полиномиально выражаются через коэффициенты оператора $\widetilde{L}$ и их производные. Отсюда вытекает, что коэффициенты оператора $[L_{c,K}(\lambda)]_{11}$ рационально выражаются через функцию $V$ и ее производные. Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что коэффициенты операторов $[L_{c-2K,-K}]_{11}$ рационально выражаются через функцию $W$ и ее производные.

Из лемм 16, 17 и 19 вытекает следующий результат.

**Лемма 20.** *Коэффициенты операторов Накаяшики второго порядка рационально выражаются через функции $W, V$ и их производные.*

Оператор $[L^{ijk}_{c,K}]_{11}$ имеет третий порядок со старшей частью $\partial_{x_i}\partial_{x_j}\partial_{x_k}$, а оператор $[L^{ijk}_{c,K}]_{12}$ имеет первый порядок.

**Лемма 21.** *Коэффициенты операторов Накаяшики третьего порядка рационально выражаются через функции $W, V$ и их производные.*

*Доказательство.* Пусть

$$[L_{c,K}]_{12} = u^1_{c,K}\partial_{x_1} + u^2_{c,K}\partial_{x_2} + u^3_{c,K},$$

где $L_{c,K}$ — оператор третьего порядка, тогда по лемме 17 имеем равенства

$$[L_{c,K}]_{21} = (u^1_{c-2K,-K}\partial_{x_1} + u^2_{c-2K,-K}\partial_{x_2} + u^3_{c-2K,-K})\times$$
$$\times\left(\frac{1}{c_2}\left(-\partial^2_{x_1} + \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\partial_{x_2} + h^{11} - c_3\right)\right),$$

$$[L_{c,K}]_{22} = [L_{c-2K,-K}]_{11} + \frac{1}{c_2}(u^1_{c-2K,-K}\partial_{x_1} + u^2_{c-2K,-K}\partial_{x_2} + u^3_{c-2K,-K})W.$$

По лемме 19 коэффициенты операторов $[L_{c,K}]_{11}$ и $[L_{c-2K,-K}]_{11}$ рационально выражаются через функции $W, V$ и их производные, значит, коэффициент при $\partial^3_{x_2}$ в 21-компоненте коммутатора $[L^{11}_{c,K}, L_{c,K}] = 0$ имеет вид

$$-\frac{2\theta^2_{11}(K)}{c_2\theta^2_2(K)}u^2_{c-2K,-K} + F^2 = 0,$$

где функция $F^2$ рационально выражается через функции $W, V$ и их производные. Коэффициенты при $\partial_{x_1}\partial^2_{x_2}$ и $\partial^2_{x_2}$ в этой компоненте имеют вид

$$-\frac{2\theta^2_{11}(K)}{c_2\theta^2_2(K)}u^i_{c-2K,-K} + F^i = 0, i = 1, 3,$$

где функция $F^i$ рационально выражаются через функции $V, W, u^2_{c-2K,-K}$ и их производные. Следовательно, $u^i_{c-2K,-K}$ и $u^i_{c,K}$ рационально выражаются через $V, W$ и их производные. Лемма доказана.

Операторы второго и третьего порядка порождают все кольцо $L_{c,K}(\mathcal{A}_\Theta)$ (лемма 10), следовательно, из лемм 20, 21 вытекает теорема C.

Выпишем формулы для констант $c_j$ (из введения).

Умножим обе части (14) на $\theta^2(z)$ и продифференцируем по $z_2$, а затем подставим $z = K$, получим $c_2$. Подставим в (14) $z = 3K$, найдем $c_3$. Из лемм 16, 18 и формул (22),(23) получаем формулы для остальных констант $c_j$.

$$c_1 = \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)},\ c_2 = -\frac{\theta_{11}(K)}{\theta(3K)},\ c_3 = \frac{\theta_{11}(3K)}{\theta(3K)} - \frac{\theta^2_1(3K)}{\theta^2(3K)}, \tag{27}$$

$$c_4 = \frac{3}{2}bc_1 + \frac{3d}{2} + \partial_{z_1} \ln \theta(3K), \ \ c_5 = \partial_{z_2} \ln \theta(3K), \tag{28}$$

$$c_6 = \frac{1}{2}bc_1 + \frac{d}{2} + \frac{\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)}, \ \ c_7 = -c_5 c_6 + \partial_{z_1}\partial_{z_2} \ln \theta(3K), \tag{29}$$

$$c_8 = 2\frac{d\theta_{12}(K)}{\theta_2(K)} - \frac{2b\theta_{11}(K)\theta_{12}(K)}{\theta_2^2(K)} - \frac{2a}{\theta_2(K)} - \tag{30}$$

$$-\left(\frac{d}{2} - \frac{b\theta_{11}(K)}{2\theta_2(K)}\right)^2 - 2\theta_{11}(K)e - \frac{\theta_{11}(K)}{\theta_2(K)}\alpha - c_3.$$

Константы $a, b, d, e$ и $\alpha$ определяются из разложений (24), (15), (16), (25) и (26).

# 2 Нелинейные уравнения, интегрируемые в тэта-функциях не главно поляризованных абелевых многообразий

## 2.1 Тэта-функции не главно поляризованных абелевых многообразий

Обозначим через $M = \mathbf{C}^g/\Lambda$ абелево многообразие с формой Ходжа $\widetilde{\omega}$, где $\Lambda$ — решетка в $\mathbf{C}^g$. Существуют вещественные координаты $x_1, \dots, x_{2g}$ в $\mathbf{C}^g$ и форма $\omega$, когомологичная $\widetilde{\omega}$, которая имеет вид

$$\sum_{j=1}^{g} \delta_j dx_j \wedge dx_{g+j},$$

где $\delta_j$ — натуральные числа и $\delta_j$ делит $\delta_{j+1}$. Решетка $\Lambda$ в комплексном базисе, отвечающем координатам $\delta_1 x_1, \dots, \delta_g x_g$, имеет вид $\Delta\mathbf{Z}^g + \Omega\mathbf{Z}^g$, где $\Delta$ — диагональная целочисленная матрица с диагональю $(\delta_1, \dots, \delta_g)$, $\Omega$ — симметричная $(g \times g)$-матрица с $\mathrm{Im}\Omega > 0$. Набор чисел $(\delta_1, \dots, \delta_g)$ является инвариантом класса когомологий формы $\omega$. Обозначим через

$$\mathcal{L}_M = \{\theta(z|\Lambda)\}$$

пространство тэта-функций $M$, которые обладают свойствами периодичности:

$$\theta(z + \lambda|\Lambda) = \theta(z|\Lambda), \quad \lambda \in \Delta\mathbf{Z}^g, \tag{31}$$

$$\theta(z + \Omega e_j|\Lambda) = \exp(-\pi i \Omega_{jj} - 2\pi i z_j)\theta(z|\Lambda), \tag{32}$$

где $e_j^\top = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ (единица на $j$-ом месте). Размерность пространства $\mathcal{L}_M$ равна $\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_g$ (см., например, [16,17]).

Справедлива

**Теорема 1.** *Тэта-функции $\theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega)$, где $\varepsilon \in \mathbf{Z}^g/\Delta\mathbf{Z}^g$, задают базис пространства $\mathcal{L}_M$.*

Доказательство. Из (31) следует, что тэта-функция $\theta(z|\Lambda) \in \mathcal{L}_M$ раскладывается в ряд Фурье

$$\theta(z|\Lambda) = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} a_m \exp(2\pi i \langle m, \Delta^{-1} z \rangle).$$

Свойство (32) влечет рекурентные соотношения на коэффициенты ряда

$$a_{m+\Delta e_j} = \exp(\pi i \Omega_{jj} + 2\pi i \langle m, \Delta^{-1}\Omega e_j\rangle) a_m. \qquad (33)$$

Из (33) получаем, что тэта-функция определяется коэффициентами $\{a_m\}$, где $0 \le m_s < \delta_s$, $1 \le s \le g$. Обозначим через $\theta_\varepsilon(z|\Lambda)$ функцию, заданную абсолютно сходящимся рядом

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}^g} a_{\varepsilon+\Delta m} \exp(2\pi i \langle \varepsilon + \Delta m, \Delta^{-1} z\rangle), \qquad (34)$$

где $a_\varepsilon = \exp(\pi i \langle \Delta^{-1}\varepsilon, \Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle)$ и $a_{\varepsilon+\Delta m}$ находятся по рекурентным формулам (33). Функции $\theta_\varepsilon$ задают базис пространства $\mathcal{L}_M$. Рекурентная система (33) разрешима в явном виде

$$a_{\varepsilon+\Delta m} = \exp(\pi i \langle m, \Omega m\rangle + 2\pi i \langle \Delta^{-1}\varepsilon, \Omega m\rangle + \pi i \langle \Delta^{-1}\varepsilon, \Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle).$$

Тогда

$$\theta_\varepsilon(z|\Lambda) = \sum_{m\in\mathbf{Z}^g} \exp(\pi i \langle (m+\Delta^{-1}\varepsilon), \Omega(m+\Delta^{-1}\varepsilon)\rangle + 2\pi i \langle (m+\Delta^{-1}\varepsilon), z\rangle) =$$

$$= \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega).$$

Теорема 1 доказана.

Тэта-функции $\theta_\varepsilon = \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Omega)$ являются поднятиями тэта-функций с характеристиками с главно поляризованного абелева многообразия $\widetilde{M}$ при изогении

$$\xi : M \to \widetilde{M}, \ \xi(z) = z$$

степени $\delta_1 \cdot \ldots \cdot \delta_g$. Отметим, что наша конструкция зависит от выбора главно поляризованного абелева многообразия $\widetilde{M}$, изогенного $M$. При выборе другой изогении, поднятия соответствующих тэта-функций с характеристиками также задают базис пространства $\mathcal{L}_M$.

Найдем разложение ограничения тэта-функции абелева многообразия на абелево подмногообразие по тэта-функциям этого подмногообразия. Форма кривизны расслоения ассоциированного с положительным дивизором является формой Ходжа, следовательно, любой положительный дивизор на абелевом многообразии задает поляризацию на нем.

Обозначим через $\widetilde{M} = \mathbf{C}^g/\{\widetilde{\Delta}\mathbf{Z}^g + \widetilde{\Omega}\mathbf{Z}^g\}$ абелево многообразие, через $M \subset \widetilde{M}$ — абелево подмногообразие. Пусть пересечение тэта-дивизора

$\widetilde{M}$ (нулей тэта-функции $\theta(\cdot|\widetilde{\Omega})$) с $M$ задает тип поляризации $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ на $M$. Тогда ограничение $\theta(\cdot|\widetilde{\Omega})$ на $M$ является тэта-функцией $M$, следовательно, существует изоморфизм

$$\varphi : \mathbf{C}^n/\{\Delta\mathbf{Z}^n + \Omega\mathbf{Z}^n\} \to M,$$

где $\Delta$ — диагональная матрица с диагональю $(\delta_1, \ldots, \delta_n), \Omega$ — некоторая симметричная матрица с $\mathrm{Im}\Omega > 0$, такой, что $\theta(\varphi(z)|\widetilde{\Omega})$ является тэта-функцией $\mathbf{C}^n/\{\Delta\mathbf{Z}^n + \Omega\mathbf{Z}^n\}$. Пусть $\varphi(z) = \Phi z$, где $\Phi$ — некоторая $(n \times g)$-матрица, $z^\top = (z_1, \ldots, z_n)$. Из того, что $\theta(\varphi(z)|\widetilde{\Omega})$ является тэта-функцией $\mathbf{C}^n/\{\Delta\mathbf{Z}^n + \Omega\mathbf{Z}^n\}$ вытекает включение $\Phi\Delta \subset \widetilde{\Delta}\mathbf{Z}^g$ и равенство $\Phi\Omega = \widetilde{\Omega}P$, где $P$ — некоторая целочисленная $(n \times g)$-матрица. Так как

$$\theta(\varphi(z + \Omega e_j)|\widetilde{\Omega}) = \theta(\varphi(z) + \widetilde{\Omega}Pe_j|\Omega) =$$

$$= \exp(-\pi i\langle e_j, P^\top\widetilde{\Omega}Pe_j\rangle - 2\pi i\langle e_j, P^\top\Phi z\rangle)\theta(\varphi(z)|\widetilde{\Omega}),$$

то $P^\top\Phi$ — единичная $(n \times n)$-матрица, следовательно, $\Omega = P^\top\widetilde{\Omega}P$.

Доказательство теоремы D. Так как

$$\theta(\varphi(z + \lambda) - \gamma|\widetilde{\Omega}) = \theta(\varphi(z) - \gamma|\widetilde{\Omega}),\ \lambda \in \Delta\mathbf{Z}^n,$$

$$\theta(\varphi(z + \Omega e_j) - \gamma|\widetilde{\Omega}) = \theta(\varphi(z) + \widetilde{\Omega}Pe_j - \gamma|\widetilde{\Omega}) =$$

$$= \exp(-\pi i\langle Pe_j, \widetilde{\Omega}Pe_j\rangle - 2\pi i\langle Pe_j, \Phi z - \gamma\rangle)\theta(\varphi(z) - \gamma|\widetilde{\Omega}) =$$

$$= \exp(-\pi i\langle e_j, \Omega e_j\rangle - 2\pi i\langle e_j, z - P^\top\gamma\rangle)\theta(\varphi(z) - \gamma|\widetilde{\Omega}),$$

то функция $\theta(\varphi(z) - \gamma|\widetilde{\Omega})$ является тэта-функцией абелева многообразия $M$ аргумента $z - P^\top\gamma$ и, следовательно, раскладывается по базисным тэта-функциям (34). Разложение в ряд Фурье функции $\theta(\varphi(z) - \gamma|\widetilde{\Omega})$ имеет вид

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}^g} \exp(\pi i\langle m, \widetilde{\Omega}m\rangle + 2\pi i\langle m, \Phi z - \gamma\rangle).$$

Из (34) следует, что коэффициент при $\exp(2\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon, z - P^\top\gamma\rangle)$ в этом разложении равен $c_\varepsilon \exp(\pi i\langle\Delta^{-1}\varepsilon, \Omega\Delta^{-1}\varepsilon\rangle)$. Отсюда получаем формулу для $c_\varepsilon$. Теорема D доказана.

## 2.2 Теорема о разложении тэта-функции Прима

Мы ограничимся здесь случаем, когда не главно поляризованное абелево многообразие $M$ является многообразием Прима.

Пусть $\Gamma$ — риманова поверхность с инволюцией $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ с $2(n+1)$ неподвижными точками $Q_0, \dots, Q_{2n+1}, n > 0$ и $\pi : \Gamma \to \Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ — проекция. Род $\Gamma$ равен $2g + n$, где $g$ — род $\Gamma_0$. Поверхность $\Gamma$ обладает каноническим базисом циклов

$$a_1, \dots, a_{g+n}, \widetilde{a}_1, \dots, \widetilde{a}_g, b_1, \dots, b_{g+n}, \widetilde{b}_1, \dots, \widetilde{b}_g$$

таким, что

$$\sigma(a_\alpha) + \widetilde{a}_\alpha = \sigma(b_\alpha) + \widetilde{b}_\alpha = 0, \ 1 \leq \alpha \leq g,$$
$$\sigma(a_j) + a_j = \sigma(b_j) + b_j = 0, \quad g+1 \leq j \leq g+n.$$

Базису циклов отвечает канонический базис абелевых дифференциалов

$$u_1, \dots, u_{g+n}, \widetilde{u}_1, \dots, \widetilde{u}_g,$$

для которого выполнены соотношения:

$$\sigma^* u_\alpha + \widetilde{u}_\alpha = 0, \ \sigma^* u_j + u_j = 0, \ 1 \leq \alpha \leq g, \ g+1 \leq j \leq g+n.$$

Циклы

$$a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$$

проектируются в канонический базис циклов на $\Gamma_0$. Поверхность $\Gamma_0$ обладает каноническим базисом абелевых дифференциалов $\widetilde{\omega}_1, \dots, \widetilde{\omega}_g$ таким, что $\pi^*(\widetilde{\omega}_k) = u_k - \widetilde{u}_k, 1 \leq k \leq g$. Через $T$ обозначим матрицу периодов $\widetilde{\omega}_k$, $T_{jk} = \int_{\pi(b_j)} \widetilde{\omega}_k$, $1 \leq j, k \leq g$. Напомним, что по выбору базисных циклов и базисных абелевых дифференциалов $\int_{\pi(a_j)} \widetilde{\omega}_k = \delta_{jk}$. Обозначим через $J = \mathbf{C}^{2g+n}/\{\mathbf{Z}^{2g+n} + \Omega \mathbf{Z}^{2g+n}\}$ многообразие Якоби поверхности $\Gamma$, где $\Omega$ — матрица периодов базисных дифференциалов поверхности $\Gamma$, через $\mathcal{A} : \Gamma \to J$ — вложение Абеля с базисной точкой $Q_0$,

$$\mathcal{A}(P) = (\int_{Q_0}^P u_1, \dots, \int_{Q_0}^P u_{g+n}, \int_{Q_0}^P \widetilde{u}_1, \dots, \int_{Q_0}^P \widetilde{u}_g), \ P \in \Gamma.$$

Дифференциалы

$$\omega_\alpha = u_\alpha + \widetilde{u}_\alpha, \quad \omega_j = u_j, \quad 1 \leq \alpha \leq g, \quad g+1 \leq j \leq g+n$$

образуют базис абелевых дифференциалов Прима $\sigma^*\omega_k = -\omega_k$, $1 \le k \le g+n$. Инволюция $\sigma$ индуцирует инволюцию $\sigma_* : J \to J$,

$$\sigma_*(z_1, \dots, z_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+n}, \widetilde{z}_1, \dots, \widetilde{z}_g) =$$
$$= -(\widetilde{z}_1, \dots, \widetilde{z}_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+n}, z_1, \dots, z_g).$$

Многообразием Прима называется абелево подмногообразие

$$Pr = \{z \in J | \sigma_*(z) = -z\} \subset J.$$

Через $\varphi : \mathbf{C}^{g+n}/\Lambda \to Pr$ обозначим изоморфизм

$$\varphi(z_1, \dots, z_{g+n}) = (\frac{1}{2}z_1, \dots, \frac{1}{2}z_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+n}, \frac{1}{2}z_1, \dots, \frac{1}{2}z_{g+n}),$$

где $\Lambda = \Delta\mathbf{Z}^{g+n} + \Pi\mathbf{Z}^{g+n}$, $\Delta$ — диагональная матрица с диагональю $(2, \dots, 2, 1, \dots, 1)$ ($n$ единиц), $\Pi$ — симметричная матрица с $\mathrm{Im}\Pi > 0$, компоненты которой равны

$$\Pi_{\alpha k} = 2\int_{b_\alpha} \omega_k, \ 1 \le \alpha \le g, \ 1 \le k \le g+n,$$

$$\Pi_{jk} = \int_{b_j} \omega_k, \quad g+1 \le j \le g+n, \ \ 1 \le k \le g+n.$$

Многообразие $Pr$ не главно поляризовано и размерность пространства тэта-функций Прима равна $2^g$.

Из теоремы 1 и теоремы А выводим следующий результат.

**Теорема 2.** *Тэта-функции $\theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z|\Pi)$ задают базис пространства тэта-функций Прима, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g, 0, \dots, 0)$ ($n$ нулей), $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$. Справедлива формула разложения по тэта-функциям Прима*

$$\theta(\varphi(z) - \gamma|\Omega) = \sum_{\varepsilon} c_\varepsilon \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](z - \widetilde{\gamma}|\Pi), \tag{35}$$

*где* $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{g+n}, \widetilde{\gamma}_1, \dots, \widetilde{\gamma}_g)$, $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1 + \widetilde{\gamma}_1, \dots, \gamma_g + \widetilde{\gamma}_g, \gamma_{g+1} \dots, \gamma_{g+n})$,

$$c_\varepsilon = \sum_{m \in \mathbf{Z}^g} \exp(\pi i\langle m_\varepsilon, \Omega m_\varepsilon\rangle + \pi i\langle \varepsilon, \widetilde{\gamma}\rangle - 2\pi i\langle m_\varepsilon, \gamma\rangle - \pi i\langle \Delta^{-1}\varepsilon, \Pi\Delta^{-1}\varepsilon\rangle), \tag{36}$$

*через $m_\varepsilon$ мы обозначили вектор $(m_1, \dots, m_g, 0, \dots, 0, \varepsilon_1 - m_1, \dots, \varepsilon_g - m_g)$ ($n$ нулей).*

В [19] (предложение 5.5) получена формула, связывающая тэта-функции с характеристиками главно поляризованных абелевых многообразий $J$, $\mathbf{C}^g/\{\mathbf{Z}^g + T\mathbf{Z}^g\}$ и $\mathbf{C}^{g+n}/\{\mathbf{Z}^{g+n} + \Pi\mathbf{Z}^{g+n}\}$. Из нее вытекает другой вывод формулы (5) и следует, что константы $c_\varepsilon$ (из теоремы 2) равны $\theta[\widetilde{\varepsilon}, 0](\widehat{\gamma}|2T)$, где $\widehat{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_1 - \gamma_1, \dots, \widetilde{\gamma}_g - \gamma_g)$, $\widetilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g)$.

## 2.3 Приложения

### 2.3.1 Иерархия СКР

Эта иерархия определяется бесконечной системой уравнений Лакса

$$[\partial_n - B_n, \partial_m - B_m] = 0, \ m, n = 1, 3, 5, \ldots$$

на коэффициенты операторов

$$B_n = \partial^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_{ni}\partial^i,$$

которые зависят от бесконечного числа переменных $x = t_1, t_3, t_5, \ldots$, причем должно выполняться равенство $B_n^* = -B_n$, где $B_n^*$ — формально сопряженный оператор к $B_n$, $\partial = \frac{\partial}{\partial x}, \partial_n = \frac{\partial}{\partial t_n}$. Существует псевдодифференциальный оператор

$$L = \partial + \frac{V}{2}\partial^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} V_k \partial^{-k}$$

такой, что $B_k = (L^k)^+$, где $(L^k)^+$ — дифференциальная часть $L^k$, функции $V_k$ выражаются через $V$ и ее производные. Первые два оператора иерархии имеют вид:

$$B_3 = \partial^3 + \frac{3}{2}V\partial + \frac{3}{4}\partial V, \ B_5 = \partial^5 + \frac{5}{2}V\partial^3 + \frac{15}{4}\partial V\partial^2 + W\partial + \frac{\partial W}{2} + \frac{5}{8}\partial^3 V,$$

где

$$W = \frac{1}{3\partial^2 V}\left(\frac{\partial^6 V}{3} + 5V\partial^4 V + \frac{45}{4}\partial V\partial^3 V + 15(\partial^2 V)^2 + \frac{15}{2}V(\partial V)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{15}{2}V^2\partial^2 V - \frac{5}{3}\partial_3^2 V - \frac{5}{3}\partial_3\partial^3 V - 5\partial_3 V\partial V - \frac{5}{2}V\partial_3\partial V + 3\partial_5\partial V\right).$$

Первое уравнение иерархии имеет вид

$$\partial_3 V = \frac{6}{5}\partial W - \frac{7}{2}\partial^3 V - 3V\partial V.$$

Выразим функцию $V$ (решение иерархии СКР) через тэта-функции многообразия Прима. Пусть $\Gamma$ — риманова поверхность с инволюцией $\sigma$ :

$\Gamma \to \Gamma$ с $2(n+1)$ неподвижными точками $Q_0, \dots, Q_{2n+1}, n > 0$. Фиксируем неспециальный дивизор $D = P_1 + \ldots + P_{2g+n}$ на $\Gamma$ и полином $R$. Выберем в окрестности точки $Q_1$ локальный параметр $k^{-1}$ такой, что $k\sigma = -k$. Одноточечной функцией Бейкера–Ахиезера со спектральными данными

$$\{\Gamma, Q_1, D, k^{-1}, R(k)\}$$

называется функция $\psi(P), P \in \Gamma$, определяемая (с точностью до пропорциональности) следующими свойствами [8]:

1) $\psi(P)$ мероморфна на $\Gamma \backslash Q_1$, множество ее полюсов совпадает с $D$;

2) в окрестности $Q_1$ функция $\psi(P) \exp(-R(k))$ аналитична.

**Теорема [10].** *Если для неспециального положительного дивизора $D$ выполнено соотношение*

$$D + \sigma D \sim C_\Gamma + 2Q_1,$$

*где $C_\Gamma$ — канонический класс на $\Gamma$, то одноточечная функция Бейкера–Ахиезера, построенная по спектральным данным $\{\Gamma, Q_1, D, k^{-1}, xk + t_3k^3 + t_5k^5 + \ldots\}$, является собственной функцией операторов иерархии СКР*

$$B_m\psi = \partial_m\psi.$$

Напомним, что $C_\Gamma$ — класс линейной эквивалентности дивизора нулей и полюсов некоторой мероморфной 1-формы. Условие теоремы означает, что существует мероморфная 1-форма $\omega_1$ с нулями в $D + \sigma D$ и полюсом второго порядка в $Q_1$.

Пусть $\omega_s$ — дифференциал Прима второго рода с единственным полюсом порядка $s+1$ (s — нечетное число) в точке $Q_1$ и с нулевыми $a$ и $\widetilde{a}$-периодами. Через $U_s$ обозначим вектор

$$(U_{s1}, \dots, U_{sg}, U_{s,g+1}, \dots, U_{s,g+n}, U_{s1}, \dots, U_{sg}),$$

где $U_{s_j} = \int_{b_j} \omega_s$. Функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x, t_3, t_5, \ldots; P)$ имеет вид [8]

$$\frac{\theta(A(P) - A(D) - K_\Gamma + xU_1 + t_3U_3 + t_5U_5 + \ldots | \Omega)}{\theta(A(P) - A(D) - K_\Gamma | \Omega)} \times$$

$$\times \exp(2\pi i x \int_{Q_0}^{P} \omega_1 + 2\pi i t_3 \int_{Q_0}^{P} \omega_3 + 2\pi i t_5 \int_{Q_0}^{P} \omega_5 + \ldots),$$

где $K = -\frac{1}{2}\mathcal{A}(C_\Gamma)$ — вектор римановых констант, $\theta(.|\Omega)$ — тэта функция многообразия Якоби поверхности Г. Из разложения в степенной ряд функции $\psi$ в окрестности точки $Q_1$ получается

**Следствие [10].** *Конечнозонные решения СКР имеют вид*

$$V(x, t_3, t_5, \ldots) = 2\partial^2 \ln \theta(xU_1 + t_3U_3 + t_5U_5 + \ldots - \gamma|\Omega),$$

*где* $\gamma = A(D) + K$.

Из теоремы 2 выводим следующее утверждение.

**Теорема 3.** *Конечнозонные решения СКР выражаются через тэта-функции Прима по формуле*

$$V(x, t_3, t_5, \ldots) = 2\partial^2 \ln \sum_{\varepsilon} c_\varepsilon \theta[\Delta^{-1}\varepsilon, 0](x\widetilde{U}_1 + t_3\widetilde{U}_3 + t_5\widetilde{U}_5 + \ldots - \widetilde{\gamma}|\Pi),$$

*где* $\widetilde{U}_s = (2U_{s1}, \ldots, 2U_{sg}, U_{s,g+1}, \ldots, U_{s,g+n}), \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_g, 0, \ldots, 0)$ *($n$ нулей),* $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ *и* $c_\varepsilon$ *находятся по формуле (36).*

Интересно было бы объяснить решения СКР через секущие абелевых многообразий. Для солитонных уравнений, интегрируемых в тэта-функциях многообразий Якоби это сделано в [18], а для интегрируемых в тэта-функциях главно поляризованных многообразий Прима — в [20] (см. также [17]).

### 2.3.2 Задача о вращении твердого тела

Вращение твердого тела $S$ вокруг неподвижной точки $O \in S$ в системе координат $r_1, r_2, r_3$, вращающейся вместе с $S$ в ньютоновском поле с потенциалом $\varphi$ описывается обобщенными уравнениями Эйлера [11]:

$$\dot{M} = M \times \omega + \frac{\partial U}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial U}{\partial \gamma} \times \gamma, \qquad (37)$$

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega, \ \dot{\beta} = \beta \times \omega, \ \dot{\gamma} = \gamma \times \omega,$$

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \int_S \rho(r)\varphi(\langle r, \alpha\rangle, \langle r, \beta\rangle, \langle r, \gamma\rangle) dr_1 dr_2 dr_3,$$

где $\rho(r)$ — плотность тела $S$ в точке $r = (r_1, r_2, r_3)$, $\alpha, \beta, \gamma$ — ортонормированный базис неподвижной системы координат, $M$ и $\omega$ — векторы

кинетического момента и угловой скорости, которые связаны соотношениями

$$M_i = \sum_{k=1}^{3} I_{ik}\omega_k,$$

где $I_{ik}$ — компоненты тензора инерции тела $S$ во вращающейся системе координат

$$I_{ik} = \int_S \rho(r)(\delta_{ik}\sum_{j=1}^{3} r_j^2 - r_i r_k) dr_1 dr_2 dr_3.$$

Используя изоморфизм алгебры Ли $\mathbf{R}^3$ относительно векторного произведения и алгебры кососимметрических $(3 \times 3)$-матриц относительно коммутатора, в [11] показано, что из (37) следуют матричные уравнения:

$$[L, \frac{\partial}{\partial t} + Q] = 0, \ L = BE^2 + ME + u, \ Q = \omega - EI,$$

где $u, B$ — некоторые симметрические матрицы, $E$ — произвольный параметр, кососимметрические матрицы и векторы, которые соответствуют друг другу при этом изоморфизме, мы обозначаем, для простоты, одними и теми же символами. Обозначим через $\Gamma$ гладкое пополнение поверхности, заданной в $\mathbf{C}^2$ уравнением

$$\det(BE^2 + ME + u - w1) = 0.$$

Риманова поверхность $\Gamma$ не является гиперэллиптической и допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \to \Gamma, \ \sigma(w, E) = (w, -E).$$

Род поверхности $\Gamma$ равен 4, поверхность $\Gamma_0 = \Gamma/\sigma$ является эллиптической, инволюция $\sigma$ имеет 6 неподвижных точек. Размерность многообразия Прима равна трем. Компоненты угловой скорости $\omega_i^j(t)$ равны

$$A_i^j \exp(t\xi_i^j)\frac{\theta(tU + z_i^j|\Omega)}{\theta(tU + z_0|\Omega)},$$

где константы $A_i^j, \xi_i^j$ и векторы $z_i^j, z_0 \in J(\Gamma), U \in Pr(\Gamma)$ определены в [11]. Из теоремы 2 выводим следующий результат.

**Теорема 4.** *Компоненты угловой скорости выражаются через тэта-функции Прима по формуле*

$$\omega_i^j(t) = A_i^j \exp(t\xi_i^j) \frac{c_0\theta(t\widetilde{U} + \widetilde{z}_i^j|\Pi) + c_1\theta[\Delta^{-1}\varepsilon_1, 0](t\widetilde{U} + \widetilde{z}_i^j|\Pi)}{c_0'\theta(t\widetilde{U} + \widetilde{z}|\Pi) + c_1'\theta[\Delta^{-1}\varepsilon_1, 0](t\widetilde{U} + \widetilde{z}|\Pi)},$$

*где* $\varepsilon_1 = (1,0,0)$, $\Delta = (2,1,1)$, *константы* $c_*, c_*'$ *находятся по формуле (36).*

### 2.3.3 $g_2^{(1)}$-цепочка Тода

Эта цепочка описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} p_i^2 + \exp(q_2 - q_1) + \exp(q_3 - q_2) + \exp\frac{1}{3}(q_1 + q_2 - 2q_3),$$

которая заменой координат сводится с системе

$$\dot{Y} = CX, \ \dot{X}^\top = (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3), \tag{38}$$

где $X^\top(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $Y^\top(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, $C$ — матрица Картана $g_2^{(1)}$-алгебры Ли Каца–Муди, равная

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Система (38) допускает представление Лакса

$$\dot{A}_\mu = [A_\mu, B_\mu], \tag{39}$$

где

$$A_\mu = \begin{pmatrix} b_1 & a_2 & \mu^{-1}a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a_3 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & -b_3 & 0 & -\mu^{-1}a_3 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 & -b_2 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 & -\mu a_3 & -a_2 & -b_1 \end{pmatrix},$$

$$B_\mu = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & -\mu^{-1}a_3 & 0 & -a_1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 \\ \mu a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}a_1 & 0 \\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1}a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}a_1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & -a_1 & 0 & -\mu a_3 & a_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \frac{i}{2}\sqrt{x_3},\ a_2 = \frac{i}{2}\sqrt{x_2},\ a_3 = \frac{i}{2}\sqrt{x_1},$$

$$b_1 = \frac{y_1 + y_3}{4},\ b_2 = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{4},\ b_3 = \frac{3y_1 + y_3}{4}.$$

Из (39) следует, что операторы $A_\mu$ и $\partial_t + B_\mu$ коммутируют, следовательно, оператор $A_\mu$ отображает семимерное ядро оператора $\partial_t + B_\mu$ в себя. Отсюда вытекает, что собственные числа оператора $A_\mu$ не зависят от времени. Поэтому характеристический полином $Q(\mu, \lambda) = \det(A_\mu - \lambda E)$ матрицы $A_\mu$ не зависит от времени

$$Q(\mu, \lambda) = \lambda \left( H_1(X, Y)(\frac{1}{\mu} + \mu) - \lambda^6 - H_2(X, Y)\lambda^4 - \right.$$

$$\left. - H_3(X, Y)\lambda^2 - H_4(X, Y) \right).$$

Коэффициенты $H_i(X, Y) = c_i$ (функции от компонент $A_\mu$ ) являются интегралами движения. Обозначим через $\Gamma$ гладкое пополнение кривой, заданной в $\mathbf{C}^2$ уравнением

$$c_1(\frac{1}{\mu} + \mu) = \lambda^6 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4. \tag{40}$$

Спектральная кривая $\Gamma$ допускает две инволюции

$$\tau : (\mu, \lambda) \to (\frac{1}{\mu}, \lambda),\ \sigma : (\mu, \lambda) \to (\mu, -\lambda).$$

Инволюция $\tau$ является гиперэллиптической с неподвижными точками $P_i(1, \lambda_i)$, $1 \le i \le 6$, где $\lambda_i$ является корнем уравнения

$$\lambda^6 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4 - 2c_1 = 0$$

и $P_j(-1, \lambda_j)$, $7 \le j \le 12$, где $\lambda_j$ является корнем уравнения

$$\lambda^6 + c_2\lambda^4 + c_3\lambda^2 + c_4 + 2c_1 = 0.$$

Инволюция $\sigma$ имеет 4 неподвижные точки $R_1(\mu_1, 0), R_2(\mu_2, 0), R_3(0, \infty)$ и $R_4(\infty, \infty)$, где $\mu_1$ и $\mu_2$ — корни уравнения $c_1(\frac{1}{\mu} + \mu) = c_4$, $R_3$ и $R_4$ — бесконечно удаленные точки кривой, заданной уравнением (40). Конечнозонные решения уравнения (39) выражаются через тэта-функции многообразия Якоби $J$ кривой $\Gamma$ (см. [21]). Обмотка тора $J$, которая при этом возникает, пробегает двумерное абелево подмногообразие $M$ с типом поляризации (1,3) [12,15], которое содержится в многообразии Прима инволюции $\sigma$. Следовательно, по теореме А решения уравнения (39) могут быть выражены через тэта-функции абелева многообразия $M$.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] A. Nakayashiki. Structure of Baker–Akhiezer Modules of Principally Polarized Abelian varieties, Commuting Partial Differential Operators and Associated Integrable Systems.// Duke Math. J. 1991. V. 62. N.2. 315-358.

[2] A. Nakayashiki. Commuting partial differential operators and vector bundles over Abelian varieties.// Amer. J. Math. 1994. V. 116. 65-100.

[3] J. Feldman, H. Knorrer, E. Trubowitz. There is no two-dimensional analogue of Lame's equation.// Math. Ann. 1991. V. 294. N.2. 295-324.

[4] Дубровин Б. А., Натанзон С. М. Вещественные двухзонные решения уравнения sine–Gordon. // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 1. С. 27–43.

[5] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Основные состояния в периодическом поле. Магнитно-блоховские функции и векторные расслоения. // ДАН СССР, 1980, Т. 253, N. 6, С. 1293-1297.

[6] S. Mukai. Duality between $D(X)$ and $D(\widehat{X})$ with its application to Picard sheaves. // Nagoya Math. J. 1981. V. 81. P. 153-175.

[7] A. Andreotti and A. Mayer. On period relations for abelian integrals on algebraic curves. // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1967. V. 21. P. 189-238.

[8] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. // УМН. 1977. Т.32, вып. 6. С. 183–208.

[9] Дубровин Б. А., Кричевер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I. // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.Т.4. М.:ВИНИТИ, 1985. С. 179–285.

[10] Date E., Jimbo M., Kashiwara M., Miwa T. Transformation groups for soliton equations. // J. Phys. Soc. Japan. 1981. V.50. P. 3813–3818.

[11] Богоявленский О. И. Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики. // Известия АН СССР, сер. матем. 1984. Т. 48, N.5 С. 883–938.

[12] Adler M., van Moerbeke P. Linearization of Hamiltonian systems, Jacobi varieties, and representation theory. // Adv. Math. 1980. V. 38, P. 318–379.

[13] Audin M. Courbes algebriques et systemes integrables: geodesiques des quadriques. // Expositiones Math. 1994. V. 12. P. 193–226.

[14] Haine L. Geodesic flow on $SO(4)$ and abelian surfaces. // Math. Ann. 1983. V. 263. P. 435–472.

[15] van Moerbeke P. Introduction to algebraic integrable systems and their Painleve analysis. // Proceedings of symposia in pure mathematics. 1989. V. 49, part 1. P. 107–131.

[16] Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. // Москва: Мир, 1982.

[17] Тайманов И. А. Секущие абелевых многообразий, тэта-функции и солитонные уравнения. // УМН. 1997. Т. 52, вып. 1. С. 149–224.

[18] Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. // Москва: Мир, 1988.

[19] Fay J. D. Theta function on Riemann surfaces. // Lecture Notes in Math., vol. 352. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer, 1973.

[20] Тайманов И. А. Тэта-функции Прима и иерархии нелинейных уравнений. // Матем. заметки. 1991. Т. 50, вып. 1. С. 98–107.

[21] Кричевер И. М. Нелинейные уравнения и эллиптические кривые. // Современные проблемы математики. Т.23. М.:ВИНИТИ, 1983. С. 79–136.

## Работы автора по теме диссертации

[22] А. Е. Миронов. О нелинейных уравнениях, интегрируемых в тэта-функциях не главно поляризованных абелевых многообразий. // Сиб. мат. журнал. 2001. Т. 42, N.1. С. 113-122.

[23] А. Е. Миронов. Коммутативные кольца дифференциальных операторов, связанные с двумерными абелевыми многообразиями. // Сиб. мат. журнал. 2000. Т. 41, N. 6. С. 1389-1403.