ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ПАВЛОВ Александр Викторович

Рационально эллиптические пространства и двойные частные групп Ли

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель — чл.-корр. РАН,
доктор физико-математических наук
И. А. Тайманов

Якутск — 2004

Содержание

Введение

В диссертации рассматриваются верхние оценки на числа Бетти рационально эллиптических пространств и при их помощи дается классификация пятимерных двойных частных групп Ли.

Рациональная гомотопическая теория возникла в 1960-х гг., когда Сулливан [7] построил для алгебраической операции локализации модулей в применении к гомотопическим и гомологическим группам топологическую реализацию. Оказалось, что для каждого односвязного (более общо, нильпотентного) пространства X существует определенное однозначно с точностью до гомотопической эквивалентности пространство $X_{\mathbb{Q}}$, называемое его локализацией, такое, что $\pi_*(X_{\mathbb{Q}}) = \pi(X) \otimes \mathbb{Q}$, $H^*(X_{\mathbb{Q}}) = H^*(X; \mathbb{Q})$. Пространства X и Y называются рационально-гомотопически эквивалентными, если их локализации $X_{\mathbb{Q}}$ и $Y_{\mathbb{Q}}$ гомотопически эквивалентны. Аналогичным образом всякому непрерывному отображению f топологических пространств соответствует отображение $f_{\mathbb{Q}}$ локализаций этих пространств, и два отображения f и g называются рационально гомотопными, если гомотопны $f_{\mathbb{Q}}$ и $g_{\mathbb{Q}}$. Рациональная гомотопическая теория есть, таким образом, изучение тех свойств топологических пространств и их отображений, которые зависят только от класса рационально-гомотопической эквивалентности пространства и рационально-гомотопического класса отображения.

Рациональная теория гомотопий жертвует информацией о круче-

нии в пользу вычислимости. Так, например, гомотопические группы сфер $\pi_k(S^n)$ полностью не известны, но известно, что они нетривиальны для бесконечно многих k, в то время как рациональные гомотопические группы $\pi_k(S^n) \otimes \mathbb{Q}$ известны и тривиальны во всех размерностях, кроме размерности n и, в случае четного n, размерности $2n-1$.

Квиллен [28] показал, что теория рационального гомотопического типа может быть полностью алгебраизована. Он предложил вариант такой алгебраизации, построив функтор из категории рационально-гомотопических типов пространств в категорию дифференциальных градуированных алгебр Ли, и доказав, что этот функтор устанавливает эквивалентность категорий.

Другим, более известным, вариантом алгебраизации является теория минимальной модели Сулливана ([17], [30], [3], [24], [22]). Пространство X называется нильпотентным, если фундаментальная группа $\pi_1(X)$ нильпотентна, и ее естественное действие на старших гомотопических группах $\pi_n(X)$ нильпотентно. Каждому нильпотентному CW-комплексу X с гомологиями конечного типа в теории Сулливана соответствует свободно порожденная дифференциальная градуированная алгебра $\mathcal{M}_X$ над $\mathbb{Q}$ специального вида, которая называется минимальной моделью X. Минимальная модель определяется по пространству однозначно с точностью до изоморфизма. Когомологии алгебры $\mathcal{M}_X$ совпадают с сингулярными когомологиями пространства X с рациональными коэффициентами, а образующие в односвязном случае двойственны образующим в пространстве $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$. Условие минимальности эквивалентно существованию последовательности так называемых элементарных расширений алгебр

$$\mathbb{Q} = \mathcal{M}_{(0)} \subset \mathcal{M}_{(1)} \subset \dots, \quad \bigcup_{i \geqslant 0} \mathcal{M}_{(i)} = \mathcal{M}_X.$$

Эта последовательность в точности двойственна рациональной башне Постникова пространства. Таким образом, минимальная модель $\mathcal{M}_X$

содержит в себе всю рационально-гомотопическую информацию о пространстве X, в частности, два пространства имеют изоморфные минимальные модели тогда и только тогда, когда они рационально-гомотопически эквивалентны. Имеется обратный функтор реализации, который ставит в соответствие каждой минимальной алгебре с гомологиями конечного типа CW-комплекс, имеющий ее своей минимальной моделью. Поэтому функтор минимальной модели Сулливана определяет эквивалентность категории рациональных гомотопических типов нильпотентных CW-комплексов конечного типа и категории минимальных алгебр над $\mathbb{Q}$ с когомологиями конечного типа. При этом гомотопическим классам непрерывных отображений соответствуют д.г.-гомотопические классы гомоморфизмов минимальных алгебр.

Важным специальным классом пространств в рациональной гомотопической теории является класс рационально эллиптических пространств. Понятие рационально эллиптического пространства появилось в конце 1970-х гг. в работах Сулливана [30] и Гальперина [21]. Пространство X называется рационально эллиптическим, если полные размерности его рациональных гомотопий и когомологий конечны: $\dim \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} < \infty$, $\dim H^*(X; \mathbb{Q}) < \infty$. Это условие влечет полиномиальный по n рост величин

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} \dim H_k(\Omega X; \mathbb{Q}).$$

Если имеет место экспоненциальный рост величин

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \dim \pi_k(X) \otimes \mathbb{Q},$$

то пространство X называется рационально гиперболическим. Гальперин, Фелис и Тома доказали [16], что всякий конечный односвязный CW-комплекс является либо рационально эллиптическим, либо рационально гиперболическим.

Условие рациональной эллиптичности накладывает сильные ограничения на топологию пространства. Случай рациональной гиперболичности «более общий»: к примеру, связная сумма достаточно большого числа экземпляров любого замкнутого односвязного многообразия, не являющегося рационально-гомологической сферой, рационально гиперболична. Тем не менее класс рационально эллиптических пространств достаточно богат. Так, всякое односвязное однородное пространство G/H компактной группы Ли G рационально эллиптично. Патернайн доказал ([26]), что односвязное риманово многообразие со вполне интергрируемым геодезическим потоком, имеющим периодические интегралы, рационально эллиптично. Широко известна приписываемая Ботту гипотеза о том, что все компактные односвязные многообразия неотрицательной секционной кривизны рационально эллиптичны.

Гальперин и Фридландер установили [19], что рациональная эллиптичность пространства эквивалентна некоторому чисто арифметическому условию на степени образующих его минимальной модели. При этом ими была получена следующая оценка на суммарную размерность когомологий рационально эллиптического пространства X когомологической размерности n:

$$\sum_{i=0}^{n} \dim H^i(X;\mathbb{Q}) \leqslant 2^n.$$

Одним из основных результатов предлагаемой диссертации является получение новых оценок на каждое из чисел Бетти рационально эллиптических пространств. А именно, в первой главе работы доказана следующая

Теорема 1. *Пусть X — рационально эллиптическое пространство когомологической размерности n и $(2b_1-1,\dots,2b_q-1)$ и $(2a_1,\dots,2a_r)$ — последовательности соответственно четных и нечет-*

ных степеней образующих базиса, порождающего его минимальную модель. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant \binom{n}{m}, \tag{1}$$

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant \sum_{k+2l=m} \binom{q-r}{k}\binom{p}{l}, \tag{2}$$

где $p = \sum b_j - \sum a_i - (q-r)$.

Следствие. *Если в условиях теоремы 1 пространство* X *односвязно, то*

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant \frac{1}{2}\binom{n}{m}$$

при $m \neq 0, n$.

Оценки (1) и (2) точны.

Гипотеза о том, что для многообразий с интегрируемым геодезическим потоком верна оценка (1) вне связи с рациональной эллиптичностью, была выдвинута Таймановым в [8] (см. также [2]).

Как применение полученных оценок, в предложении 2 дается список всех возможных наборов чисел Бетти односвязных рационально эллиптических многообразий в размерностях 4, 5 и 6. В размерностях 4 и 5 дается полная классификация рационально-гомотопических типов.

Структура Главы 1 следующая. В п. 1.1 дается краткий обзор результатов теории минимальной модели. В п. 1.2 сформулированы основные результаты о рационально эллиптических пространствах. В п. 1.3 доказывается теорема 1 об оценках чисел Бетти рационально эллиптических пространств. В п. 1.4 доказывается предложение 2, где перечисляются все возможные наборы чисел Бетти замкнутых односвязных рационально эллиптических многообразий размерностей 4, 5 и 6, причем в размерностях 4 и 5 результат доводится до полной классификации рациональных гомотопических типов.

В Главе 2 полученные оценки применяются для классификации с точностью до диффеоморфизма односвязных пятимерных двойных частных групп Ли.

Пусть G — компактная группа Ли, H — замкнутая подгруппа группы $G \times G$. Определим двустороннее действие группы H на G:

$$H \ni (h_1, h_2) : g \mapsto h_1 g h_2^{-1}.$$

Это действие имеет неподвижные точки тогда и только тогда, когда найдется элемент $(h_1, h_2) \neq (1, 1) \in H$, такой, что $h_1 = g h_2 g^{-1}$ для некоторого $g \in G$.

Если двустороннее действие свободно, то пространство орбит, которое обозначается $G//H$, является гладким многообразием и называется двойным частным. Двойные частные являются естественным обобщением однородных пространств (которые отвечают случаю $H \subset 1 \times G$).

Двусторонне инвариантная метрика на G каноническим образом определяет риманову метрику на $G//H$. Относительно этой метрики отображение проекции $\pi : G \to M = G//H$ является римановой субмерсией, то есть в каждой точке $x \in G$ дифференциал $d\pi_x$ является сюръекцией, а его ограничение на горизонтальное касательное подпространство $H_x = (\ker d\pi_x)^\perp$ — изометрией на касательное пространство $T_{\pi(x)}M$ в образе точки x. Известно [25], что при римановой субмерсии верно соотношение

$$K(\sigma) \geqslant K(\sigma^*),$$

где $\sigma^* \subset H_x$ — горизонтальная двумерная площадка, $\sigma = d\pi_x(\sigma^*)$. Поэтому на всяком двойном частном существует метрика неотрицательной кривизны.

Все однородные многообразия положительной кривизны перечислены Уоллахом ([33], четномерный случай) и Берар-Бержери([11], нечет-

номерный случай). Все известные к настоящему времени односвязные неоднородные примеры многообразий положительной секционной кривизны являются двойными частными ([1], [14], [15]).

Впервые двойные частные появились в работе Громола и Мейера [20], где построена метрика неотрицательной секционной кривизны на одной экзотической 7-мерной сфере Милнора. Недавно было показано ([31], [23]), что это единственная экзотическая сфера, получающаяся в виде двойного частного.

Если $M = G//H$ — двойное частное группы Ли G, то естественная проекция $G \to M$ является локально тривиальным расслоением со слоем H, поэтому односвязные двойные частные являются рационально эллиптическими пространствами.

В размерности 4 всякое односвязное рационально эллиптичное многообразие гомеоморфно одному из пяти многообразий S^4, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ ([27]). Первые три из них являются однородными пространствами. Чигер [13] доказал, что связные суммы двух симметрических пространств ранга 1 несут метрики неотрицательной кривизны. В частности, он фактически представил $\mathbb{C}P^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ в виде двойного частного. Тотаро показал в работе [31], что и $\mathbb{C}P^n \# \mathbb{C}P^n$ может быть представлено как двойное чатсное. В размерности 6 им же было построено бесконечное семейство попарно гомотопически не эквивалентных двойных частных ([32]).

Основным результатом Главы 2 является

Теорема 2. *Существует четыре типа диффеоморфизма односвязных пятимерных двойных частных групп Ли:*

1) сфера S^5*;*

2) произведение сфер $S^2 \times S^3$*;*

3) многообразие Ву $X_{-1} = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$*;*

4) многообразие X_∞*.*

Многообразия X_{-1} *и* X_∞ *получаются при различных склейках двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения над* S^2 *по общей границе* $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$. *Многообразие Ву характеризуется условием* $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$, *а* X_∞ *— условиями* $H^*(X_\infty) = H^*(S^2 \times S^3)$ *и* $w_2(X_\infty) \neq 0$. *В этом списке только* X_∞ *не является однородным пространством.*

Опишем структуру Главы 2. В п. 2.1 даются основные определения. В п. 2.1 приводятся необходимые результаты о двойных частных. В п. 2.2 разбирается случай односвязных пятимерных двойных частных, рационально-гомотопически эквивалентных S^5, а в п. 2.3 — $S^2 \times S^3$.

Автор благодарит научного руководителя И. А. Тайманова за постановку задачи и полезные советы и Я. В. Базайкина за полезные обсуждения.

Глава 1

Оценки чисел Бетти рационально эллиптических пространств

1.1 Минимальные модели

Функтор минимальной модели Сулливана устанавливает эквивалентность между категорией нильпотентных CW-комплексов с гомологиями конечного типа и категорией минимальных дифференциальных градуированных алгебр над $\mathbb{Q}$ с когомологиями конечного типа. В этом пункте мы даем краткое изложение основных результатов теории минимальной модели.

Дифференциальной градуированной алгеброй (д.г. алгеброй) над полем $\mathbb{K}$ называется пара (A, d), состоящая из ассоциативной алгебры A над $\mathbb{K}$ и $\mathbb{K}$-линейного отображения $d : A \to A$, называемого *дифференциалом*, для которых выполнены следующие условия:
1) $A = \bigoplus_{p \geqslant 0} A^p$ как $\mathbb{K}$-модуль, причем $A^p \cdot A^q \subset A^{p+q}$ для всех p, q;
2) $d(A^p) \subset A^{p+1}$ и $d \circ d = 0$;
3) $d(ab) = da \cdot b + (-1)^p a \cdot db$ для любых $a \in A^p$, $b \in A^q$.
Элементы из A^p называются *однородными элементами* степени p. Степень однородного элемента x обозначается через $|x|$ или $\deg x$. Обо-

значим через $d^p : A^p \to A^{p+1}$ сужение $d|_{A^p}$. Группа $C^p(A) = \ker d^p$ называется группой p-мерных *коциклов*, а группа $B^p(A) = \operatorname{im} d^{p-1}$ называется группой p-мерных *кограниц* алгебры A. Так как $d^2 = 0$, то $B^p(A) \subset C^p(A)$. Группа $H^p(A) = C^p(A)/B^p(A)$ называется *p-й группой когомологий* д.г. алгебры (A, d). Всегда предполагается, что $H^p(A)$ конечномерно при каждом p.

Легко проверить, что умножение в алгебре A определяет корректно определенное умножение в ее когомологиях. Д. г. алгебра A называется *коммутативной*, если

$$ab = (-1)^{pq} ba \quad \text{для любых } a \in A^p,\ b \in A^q.$$

Когомологии всякой коммутативной д.г. алгебры (A, d) образуют коммутативную градуированную алгебру $H^*(A) = \bigoplus_{p \geqslant 0} H^p(A)$. Заметим, что сингулярный коцепной комплекс с коэффициентами в $\mathbb{R}$ топологического пространства X является дифференциальной градуированной алгеброй, которая, однако, становится коммутативной, вообще говоря, только на уровне когомологий.

Дифференциал d в минимальной алгебре (A, d) называется *разложимым*, если $dx \in A^+ \cdot A^+$ для любого $x \in A$, то есть dx есть сумма произведений элементов положительной степени. Д. г. алгебра A называется *связной*, если $A^0 = \mathbb{K}$, *c-связной*, если $H^0(A) = \mathbb{K}$, и *односвязной*, если $H^1(A) = 0$.

Для данного градуированного векторного пространства $V = \bigoplus\limits_{p \geqslant 1} V^p$ обозначим через ΛV тензорное произведение $\mathbb{Q}[V^{\text{even}}] \otimes \wedge(V^{\text{odd}})$ полиномиальной алгебры $\mathbb{Q}[V^{\text{even}}]$ над четномерными образующими и внешней алгебры $\wedge(V^{\text{odd}})$ над нечетномерными образующими. Такая алгебра ΛV называется *свободной градуированной алгеброй*, порожденной пространством V. Она коммутативна.

Говорят, что д.г. алгебра (B, d_B) получена из д.г. алгебры (A, d_A)

при помощи *элементарного расширения* в размерности $n > 0$, если

$$B = A \otimes \Lambda V_n,$$

где V_n — конечномерное векторное пространство, сосредоточенное в размерности n, причем $d_B|_A = d_A$ и $d_B(V_n) \subset A$. Заметим, что если алгебра A была свободно порождена, то и B будет свободно порождена. Если d_A разложим, то d_B разложим тогда и только тогда, когда разложим дифференциал $d_B(v)$ для каждого элемента $v \in V$.

Д.г. алгебра $\mathcal{M}$ называется *минимальной*, если существует последовательность подалгебр:

$$\mathbb{K} = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{k \geqslant 0} \mathcal{M}_k = \mathcal{M},$$

где каждое включение $\mathcal{M}_k \subset \mathcal{M}_{k+1}$ есть элементарное расширение с разложимым дифференциалом. Это эквивалентно следующему условию: $\mathcal{M} = (\Lambda V, d)$, причем пространство V градуировано положительными степенями, а его базис можно выбрать вполне упорядоченным согласованно со степенью так, что для любого базисного элемента v дифференциал dv разложим по предыдущим элементам: $dv \in \Lambda V_{<v}$, где $V_{<v}$ — подпространство, натянутое на базисные элементы $w < v$.

Отображение д.г. алгебр $\varphi : (A, d_A) \to (B, d_B)$ называется *гомоморфизмом*, если оно является гомоморфизмом алгебр, сохраняет градуировку и перестановочно с дифференциалами: $d_B \varphi = \varphi d_A$. Гомоморфизм д.г. алгебр $A \to B$ индуцирует гомоморфизм $\varphi^* : H^*(A) \to H^*(B)$ в когомологиях. Минимальная алгебра $(\Lambda V, d)$ называется *минимальной моделью* д.г. алгебры (A, d_A), если существует гомоморфизм $\mu : \Lambda V \to A$, индуцирующий изоморфизм $\mu^* : H^*(\Lambda V) \xrightarrow{\cong} H^*(A)$ в когомологиях.

Теорема (Сулливан, [30], [17])**.** *Всякая c-связная дифференциальная градуированная алгебра имеет минимальную модель, которая определена однозначно с точностью до изоморфизма.*

Приведем доказательство существования, ограничившись для простоты односвязным случаем.

Пусть (A,d) — c-связная алгебра, такая, что $A^1=0$. Будем обозначать через $\alpha_p\colon H^p(A)\to C^p(A)$ сечение проекции $\pi_p\colon C^p(A)\to H^p(A)$ коциклов на когомологии:

$$C^p(A) \underset{\alpha_p}{\overset{\pi_p}{\rightleftarrows}} H^p(A),$$

то есть α_p — гомоморфизм такой, что $\pi^p\circ\alpha_p=\mathrm{id}$.

Положим $\mathcal{M}_1=\mathbb{Q}=H^0(A)$, $d_1=0$ и определим отображение $\rho_1:\mathcal{M}_1\to A$ как $\alpha_0:\mathbb{Q}\to A$. Очевидно, $\mathcal{M}_1$ — односвязная минимальная алгебра, ρ_1 — гомоморфизм, который индуцирует изоморфизм в H^0 и H^1. Заметим, что коцепей размерности два в $\mathcal{M}_1$ нет, в частности, ρ_1^* является мономорфизмом в H^2.

Предположим по индукции, что при помощи последовательных элементарных расширений построена минимальная алгебра $\mathcal{M}_n$ с дифференциалом d_n и отображение $\rho_n:\mathcal{M}_n\to A$, индуцирующее а в размерностях до n включительно изоморфизм, а в размерности $n+1$ — мономорфизм.

Обозначим через $U=\operatorname{im}[\rho_n^*:H^{n+1}(\mathcal{M}_n)\to H^{n+1}(A)]$. Положим

$$\begin{aligned} W &= H^{n+1}(A)/U,\\ N &= \ker[\rho_n^*:H^{n+2}(\mathcal{M}_n)\to H^{n+2}(A)]. \end{aligned}$$

Первое пространство будет состоять из замкнутых элементов и отвечать за добавление недостающих до изоморфизма когомологий в размерности $n+1$, второе — состоять из незамкнутых элементов, кограницы которых будут отвечать за уничтожение возможного ядра отображения когомологий в размерности $n+2$.

Обозначим через σ,β,γ, сечения соответствующих эпиморфизмов

векторных пространств:

$$C^{n+2}(\mathcal{M}_n) \underset{\sigma}{\overset{\pi_{n+2}}{\rightleftarrows}} H^{n+2}(\mathcal{M}_n),$$

$$H^{n+1}(A) \underset{\beta}{\rightleftarrows} W = H^{n+1}(A)/U,$$

$$A^{n+1} \underset{\gamma}{\overset{d}{\rightleftarrows}} B^{n+2}(A).$$

Обозначим $V_{n+1} = W \oplus N$ и построим алгебру $\mathcal{M}_{n+1}$:

$$\mathcal{M}_{n+1} = \mathcal{M}_n \otimes \Lambda V_{n+1},$$

с дифференциалом $d_{n+1}\colon \mathcal{M}_{n+1} \to \mathcal{M}_{n+1}$, определенным условиями

$$\begin{aligned} d_{n+1}|_{\mathcal{M}_n} &= d_n, \\ d_{n+1}|_W &= 0, \\ d_{n+1}|_N &= \sigma|_N, \end{aligned}$$

Отображение $\rho_{n+1}\colon \mathcal{M}_{n+1} \to A$ определим условиями

$$\begin{aligned} \rho_{n+1}|_{\mathcal{M}_n} &= \rho_n, \\ \rho_{n+1}|_W &= \alpha_{n+1} \circ \beta, \\ \rho_{n+1}|_N &= \gamma \circ \rho_n \circ \sigma. \end{aligned}$$

Последнее отображение определено корректно: так как $N = \ker \rho_n^* \cap H^{n+2}(\mathcal{M}_n)$, то $\rho_n \circ \sigma(N) \subset B^{n+2}(A)$. Нетрудно проверить, что отображение ρ_{n+1} является д.г.а.-гомоморфизмом.

Включение $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$ является элементарным расширением с разложимым дифференциалом, так как $d(V) \subset C^{n+2}(\mathcal{M}_n)$, а $\mathcal{M}_n$ может иметь неразложимые элементы только в степенях $\leqslant n$.

Всякий элемент $x \in (\mathcal{M}_{n+1})^{n+1}$ однозначно представим в виде $x = z + w + y$, где $z \in (\mathcal{M}_n)^{n+1}$, $c \in W$ и $y \in N$. Если $d_{n+1}x = 0$, то $-d_n z = d_{n+1} y = \sigma(y)$. Это означает, что представляющий коцикл для

когомологического класса $y \in H^*(\mathcal{M}_n)$ точен. Но тогда $y = 0$. Следовательно, $d_n z = 0$. Таким образом, $C^{n+1}(\mathcal{M}_{n+1}) = C^{n+1}(\mathcal{M}_n) \oplus W$. Из определения ρ_{n+1} и W следует, что ρ_{n+1}^* является изоморфизмом в размерности $n+1$.

Покажем, что ρ_{n+1}^* является мономорфизмом в размерности $n+2$. Так как алгебра $\mathcal{M}_n$ односвязна, то $(\mathcal{M}_{n+1})^{n+2} = (\mathcal{M}_n)^{n+2}$, в частности, $C^{n+2}(\mathcal{M}_{n+1}) = C^{n+2}(M_n)$. Пусть $z \in C^{n+2}(\mathcal{M}_{n+1})$ представляет когомологический класс $\zeta \in H^{n+2}(M_{n+1})$, такой, что $\rho_{n+1}^*(\zeta) = 0$. Рассматривая ζ как элемент $N \subset \mathcal{M}_{n+1}$, имеем

$$z - d_{n+1}\zeta \in B^{n+2}(\mathcal{M}_{n+1}),$$

то есть $\zeta = [z] = 0$.

Положим $\mathcal{M} = \bigcup_n \mathcal{M}_n$. По построению это будет минимальная модель алгебры A, для которой последовательность $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2 \subset \ldots$ является канонической последовательностью элементарных расширений. $\square$

Единственность минимальной модели следует из следующего утверждения.

Теорема ([30], [17]). *Всякий гомоморфизм минимальных алгебр, индуцирующий изоморфизм в когомологиях, является изоморфизмом.*

Сулливан [30] построил функтор, сопоставляющий произвольному связному симплициальному комплексу конечного типа X коммутативную д.г. алгебру $(A_{\mathrm{PL}}(X), d)$ кусочно-полиномиальных дифференциальных форм ω на нем, и доказал, что отображение интегрирования $\rho : A_{\mathrm{PL}}(X) \to C^*(X; \mathbb{Q})$, $\rho(\omega) : \sigma \mapsto \int_\sigma \omega$ индуцирует изоморфизм в когомологиях. Согласно двум предыдущим теоремам, всякая c-связная дифференциальная градуированная алгебра имеет единственную с точностью до изоморфизма минимальную модель. Таким образом, каждому симплициальному комплексу X конечного типа соответ-

ствует минимальная модель $\mathcal{M}_X$ алгебры $(A_{\mathrm{PL}}(X), d)$, которая называется *минимальной моделью пространства* X. Пространства X и Y рационально гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны их минимальные модели.

Наоборот, всякая минимальная алгебра $(\Lambda V, d)$ такая, что $\dim V^p < \infty$ для любого p, является минимальной моделью некоторого связного пространства.

Если $\dim H^p(X;\mathbb{Q}) < \infty$ для любого p, то $V^p \cong \mathrm{Hom}(\pi_p(X);\mathbb{Q})$, где V^p — пространство p-мерных образующих минимальной модели X. Опишем вкратце изоморфизм. Пусть минимальная модель пространства X есть $\mathcal{M}_X = (\Lambda V, d_X)$. Минимальная модель сферы S^p имеет вид $\mathcal{M}_{S^n} = (\Lambda W, d)$, где пространство W порождено одним замкнутым элементом x, если p нечетно; если p четно, то имеется еще один элемент y степени $2p-1$, такой, что $dy = x^2$. Отображение $f\colon S^p \to X$ индуцирует отображение минимальных моделей $f^{**}\colon \mathcal{M}_X \to \mathcal{M}_{S^p}$. Поставим в соответствие каждому элементу $v \in V^p$ рациональное число q, определенное условием $f^{**}(v) = qx$. Это соответствие задает линейное отображение, которое зависит только от гомотопического класса f. Получается изоморфизм $\pi_p(x) \to \mathrm{Hom}(V^p;\mathbb{Q})$.

1.2 Рационально эллиптические пространства

В этом пункте мы приводим необходимые результаты о рационально эллиптических пространствах. Понятие рационально эллиптического пространства появилось в конце 1970-х гг. в работах Гальперина [21], который дал ответ на вопрос Сулливана [30]: «верно ли, что если минимальная алгебра $\mathcal{M}$ имеет больше четномерных образующих, чем нечетномерных, то когомологии $H^*(\mathcal{M})$ бесконечномерны?» Близкие вопросы теории дифференциальных алгебр изучались ранее Козюлем, родственные результаты о когомологиях однородных пространств бы-

ли получены Картаном.

Пусть X — CW-комплекс, такой что $\dim H^*(X) < \infty$, $(\Lambda V, d)$ — его минимальная модель. Пространство X называется *рационально эллиптическим*, если $\dim V < \infty$. Это условие эквивалентно конечномерности $\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q}$ и влечет полиномиальный рост $\sum_{i=0}^{n} \dim H_i(\Omega X; \mathbb{Q})$ по n ([17, p. 459]). Пространство X называется *рационально гиперболическим*, если найдется последовательность $\{k_n\}$, такая, что $\dim \pi_{k_n}(X) \otimes \mathbb{Q}$ растет экспоненциально по n. В этом случае существуют положительные числа N и d, такие, что $\pi_{N+kd} X \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ для любого $k \geqslant 0$. Всякий конечный односвязный CW-комплекс является либо рационально эллиптическим, либо рационально гиперболическим [16].

Рассматривая длинную точную рационально-гомотопическую последовательность

$$\ldots \to \pi_n F \to \pi_n E \to \pi_n B \to \pi_{n-1} F \to \ldots$$

для локально тривиального расслоения $p : E \to B$ со слоем F можно убедиться, что следующие примеры пространств рационально эллиптичны:

- однородные пространства G/H компактных групп Ли,
- для расслоения $F \to E \to B$ любое из пространств E, B, F, если оно нильпотентно, а другие два пространства рационально элиптичны,
- многообразия с гладким действием компактной группы Ли с односвязными орбитами коразмерности один,
- односвязные компактное риманово многообразие, геодезический поток которых интегрируем и имеет периодические интегралы [26].

Гальперин и Фридландер ([19]) установили эквивалентность рациональной эллиптичности пространства следующему арифметическому условию на степени образующих его минимальной модели.

Пусть X — линейно связное пространство, $(\Lambda V, d)$ — его минимальная модель. Выберем однородный базис пространства V. Пусть $B' = (2b_1 - 1, \dots, 2b_q - 1)$ и $A' = (2a_1, \dots, 2a_r)$ — последовательности соответственно нечетных и четных степеней элементов этого базиса. С точностью до перестановки членов они не зависят от выбора базиса в V. Назовем *b- и a-последовательностями пространства X* соответственно последовательности $B = (b_1, \dots, b_q)$ и $A = (a_1, \dots, a_r)$.

Скажем, что пара (B, A) последовательностей $B = (b_1, \dots, b_q)$ и $A = (a_1, \dots, a_r)$ удовлетворяет *арифметическому условию Гальперина — Фридландера (ГФ)*, если для любого $s, 1 \leqslant s \leqslant r$ и для любой подопоследовательности A^* длины s в A, существует подпоследовательность B^* в B длины не менее чем s, каждый элемент которой имеет вид

$$b_j = \sum_{a_i \in A^*} \gamma_{ij} a_i,$$

где γ_{ij} — неотрицательные целые числа, такие что $\sum\limits_{a_i \in A^*} \gamma_{ij} \geqslant 2$.

Из условия ГФ для случая $s = r$ сразу следует $q \geqslant r$.

Главным результатом работы [19] является следующая

Теорема I ([19]). *Пара (B, A) удовлетворяет условию ГФ тогда и только тогда, когда существует рационально эллиптическое пространство X, b- и a-последовательностями которого являются соответственно B и A. Если $b_j \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant q$, то X может быть выбрано односвязным, если вдобавок $q > r$, то в качестве X можно выбрать замкнутое многообразие.*

Эта теорема сводится к следующему утверждению [19, теорема 3]. Рассмотрим кольцо многочленов $\mathbb{K}[u_1, \dots u_r]$ от переменных u_i степе-

ней a_i, $1 \leqslant i \leqslant r$ над бесконечным кольцом $\mathbb{K}$. Пара (B, A) удовлетворяет условию ГФ тогда и только тогда, когда найдутся q многочленов $f_1, \dots f_q$ в переменных u_i, являющихся суммами нелинейных мономов степеней соответственно $b_1, \dots b_q$, таких, что

$$\dim \mathbb{K}[u_1, \dots, u_r]/(f_1, \dots, f_q) < \infty.$$

Это предложение доказывается методами алгебраической геометрии.

Пусть пара (B, A) удовлетворяет условию ГФ. Припишем переменным $y_1, \dots, y_r$ соответственно степени $a_1, \dots, a_r$. Согласно предложению, найдутся многочлены $f_1, \dots, f_q$ степеней $2b_1, \dots, 2b_q$ соответственно, такие, что $\dim \mathbb{K}[y_1, \dots, y_r]/(f_1, \dots, f_q) < \infty$. Рассмотрим минимальную алгебру $\mathcal{M} = \Lambda(y_1, \dots y_r; b_1 \dots b_q)$, где $|y_i| = 2a_i$, $dy_i = 0$, $|x_j| = 2b_j - 1$, $dx_j = f_j$. Так как мономы, составляющие f_j, нелинейны, то дифференциал разложим, и алгебра $\mathcal{M}$ минимальна, и тривиально доказывается, что $\dim H^*(\mathcal{M}) < \infty$. Поэтому существует CW-комплекс X конченого типа с такой минимальной моделью. Если все $b_j \geqslant 2$, то образующих степени 1 нет, и $H^1(\mathcal{M}) = 0$. Если вдобавок $q > r$, то $H^*(\mathcal{M})$ обладает гиперболическим скалярным произведением Пуанкаре [21, теоремы 3 и 4], и, согласно результатам Сулливана, в качестве X можно выбрать односвязное замкнутое многообразие.

Наоборот, если $\mathcal{M}$ — минимальная модель рационально эллиптического пространства, то можно переопределить дифференциал так, что алгебра останется минимальной, все четномерные образующие $y_1, \dots, y_r$ будут замкнуты, а дифференциалы всех нечетномерных образующих $x_1, \dots, x_q$ будут разложимы по четномерным [21]. Тогда, очевидно $\dim \Lambda(y_1, \dots, y_r)/(x_1, \dots, x_q) < \infty$, откуда, по предложению, следует выполнение условия ГФ для последовательностей $B = (|x_1|, \dots, |x_q|)$ и $A = (|y_1|, \dots, |y_r|)$.

Справедливо следующее предложение, позволяющее оценивать числа Бетти рационально эллиптического пространства.

Теорема II ([19], [21]). *Пусть B, A — соответственно b- и a-последовательности минимальной модели рационально эллиптического пространства X. Выражение*

$$\frac{\prod_{j=1}^{q}(1-t^{2b_j})}{(1-t)^{q-r}\prod_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i})}$$

где $n = n(X)$ — когомологическая размерность X, является многочленом $\Phi(t) = \sum\limits_{m=0}^{n} c_m t^m$ с неотрицательными целыми коэффициентами. Для $0 \leqslant m \leqslant n$ справедливо неравенство

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant c_m,$$

которое в случае $q = r$ превращается в равенство.

1.3 Оценки чисел Бетти

Теорема 1. *Пусть X — рационально эллиптическое пространство когомологической размерности n и $(2b_1-1,\ldots,2b_q-1)$ и $(2a_1,\ldots,2a_r)$ — последовательности соответственно четных и нечетных размерностей образующих группы $\mathrm{Hom}(\pi_*(X);\mathbb{Q})$. Тогда справедливы следующие неравенства:*

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant \binom{n}{m}, \tag{1}$$

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant \sum_{k+2l=m}\binom{q-r}{k}\binom{p}{l}, \tag{2}$$

где $p = \sum b_j - \sum a_i - (q-r)$.

Доказательство. Пусть X — рационально эллиптическое пространство, n — его когомологическая размерность. Рассмотрим выражение

$$\Phi(t) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{q}(1-t^{2b_j})}{(1-t)^{q-r}\prod\limits_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i})}.$$

Согласно теореме II, $\Phi(t)$ есть многочлен степени n, $\Phi(t)=\sum_0^n c_m t^m$. Его корнями, как видно, являются корни из единицы. По теореме Виета, c_m есть, с точностью до знака, значение симметрического многочлена σ_{n-m} от корней многочлена $\Phi(t)$. Многочлен σ_k от n переменных есть сумма всевозможных произведений по k переменных. Всего таких произведений $\binom{n}{k}$, и в нашем случае каждое из них равно по модулю единице. Применяя теорему II, получаем оценку (1):

$$\dim H^m(X;\mathbb{Q}) \leqslant c_m = |\sigma_{n-m}(\xi_1,\ldots,\xi_n)| \leqslant \binom{n}{n-m} = \binom{n}{m}.$$

Докажем теперь справедливость оценки (2). Перепишем многочлен $\Phi(t)$ в другой форме. Раскладывая произведения, стоящие в числителе и знаменателе, на элементарные множители относительно t^2, и собирая отдельно множители вида $(1-t^2)$, можем записать:

$$\prod_{j=1}^{q}(1-t^{2b_j}) = (1-t^2)^q \prod_{j=1}^{\sum b_j - q}(t^2-\xi_j^2),$$

$$\prod_{i=1}^{r}(1-t^{2a_i}) = (1-t^2)^r \prod_{i=1}^{\sum a_i - r}(t^2-\eta_i^2),$$

и, при подходящей нумерации корней ξ_j:

$$\Phi(t) = \frac{\prod_j(1-t^{2b_j})}{(1-t)^{q-r}\prod_i(1-t^{2a_i})} = (1+t)^{q-r}\prod_{j=1}^{p}(t^2-\xi_j^2),$$

где $p=\sum b_j - \sum a_i - (q-r)$.

Представим теперь многочлен $\Phi(t)$ как произведение двух многочленов и оценим его коэффициенты через корни этих последних. Введем обозначения

$$Q(t)=(t+1)^{q-r}=\sum_{k=0}^{q-r}\alpha_k t^k, \quad R(t)=\prod_{j=1}^{p}(t^2-\xi_j^2)=\sum_{k=0}^{2p}\beta_k t^k.$$

Тогда $\Phi(t) = Q(t)R(t)$, и коэффициенты многочленов $Q(t)$, $R(t)$ имеют, очевидно, следующий вид:

$$\alpha_k = \binom{q-r}{k}, \quad \beta_{2k+1} = 0, \quad \beta_{2k} = \sum_{j_1 < \ldots < j_{p-k}} \xi_{i_1}^2 \cdot \ldots \cdot \xi_{j_{p-k}}^2.$$

Получаем необходимую оценку на коэффициенты c_m многочлена $\Phi(t)$, а значит, по теореме II, и на числа Бетти пространства X:

$$\dim H^m(X, \mathbb{Q}) \leqslant c_m = \left| \sum_{k+l=m} \alpha_k \beta_l \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k+l=m} |\alpha_k|\, |\beta_l| \leqslant \sum_{k+2l=m} \binom{q-r}{k} \binom{p}{l}.$$

□

Для пространства X, такого что $q = r$, из доказанной оценки получаем известный факт тривиальности нечетномерных когомологий, $\dim H^{2k-1} = 0$, $\dim H^{2k} = \binom{\frac{n}{2}}{k}$.

Оценка (1) достигается для $n-$мерных торов T^n: $\dim H^m(T^n, \mathbb{Q}) = \binom{n}{m}$. Действительно, формула Кюннета дает для $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$: $H^k(T^n; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{\binom{n}{k}}$.

Оценка (2) достигается на произведениях двумерных сфер $M_{2s} = (S^2)^s$: по формуле Кюннета: $H^{2m+1}(M_{2s}; \mathbb{Q}) = 0$, $\dim H^{2m}(M_{2s}; \mathbb{Q}) = \binom{s}{m}$. Для $H^2(M_{2s})$ получаем нашу оценку.

Следствие. *Если в условиях теоремы 1 пространство X односвязно, то*

$$\dim H^m(X; \mathbb{Q}) \leqslant \frac{1}{2}\binom{n}{m}$$

при $m \neq 0, n$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма I ([19]). *Пусть последовательности $B = (b_1, \ldots, b_q)$ и $A = (a_1, \ldots, a_r)$ упорядочены по убыванию: $b_1 \geqslant \ldots \geqslant b_q$, $a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_r$ и*

удовлетворяют условию Гальперина–Фридландера. Тогда $b_i \geqslant 2a_i$ *для* $i = 1, \dots, r$.

Доказательство. Рассмотрим для данного i, $1 \leqslant i \leqslant r$ всевозможные суммы вида $\sum_{j=1}^{i} \gamma_j a_j$, где γ_j — целые числа, такие, что $\sum_j \gamma_j \geqslant 2$. Каждая такая сумма, очевидно, $\geqslant 2a_i$. Среди таких сумм, согласно условию Гальперина–Фридландера, не менее i различных членов последовательности B. Из i различных членов последовательности B по крайней мере один не превосходит b_i. $\square$

Если пространство X односвязно, то все $b_j \geqslant 2$. Поэтому

$$\begin{aligned} p &= \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{r} a_i - (q-r) \geqslant \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{r} 2a_j + \sum_{j=r+1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{r} a_i - (q-r) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} a_i + \sum_{j=r+1}^{q} (b_j - 1) \geqslant q - r. \end{aligned}$$

Следующий факт доказывает следствие из теоремы 1.

Предложение 1. *Если* $0 < c \leqslant d$, *то* $\sum\limits_{k+2l=m} \binom{c}{k}\binom{d}{l} \leqslant \frac{1}{2}\binom{c+2d}{m}$, $m = 1, \dots, c+2d-1$.

Доказательство проведем индукцией по m. Для $m = 1$ утверждение верно: так как $c \leqslant d$, то

$$\sum_{k+2l=1} \binom{c}{k}\binom{d}{l} = \binom{c}{1}\binom{d}{0} = c \leqslant \frac{1}{2}\binom{c+2d}{1}.$$

Предположим, утверждение имеет место для $1, \dots, m-1$. Докажем для m индукцией по c. Пусть $c = 1$. Тогда $\sum_{k+2l=m} \binom{1}{k}\binom{d}{l} = \binom{d}{[\frac{m}{2}]} \leqslant \frac{1}{2}\binom{1+2d}{m}$, это комбинаторно очевидно. Шаг индукции от $c-1$ к c:

$$\sum_{k+2l=m} \binom{c}{k}\binom{d}{l} = \sum_{k+2l=m} \left(\binom{c-1}{k-1} + \binom{c-1}{k}\right)\binom{d}{l} =$$

$$= \sum_{k+2l=m} \binom{c-1}{k-1}\binom{d}{l} + \sum_{k+2l=m} \binom{c-1}{k}\binom{d}{l} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\binom{c-1+2d}{m-1} + \frac{1}{2}\binom{c-1+2d}{m} = \frac{1}{2}\binom{c+2d}{m}.$$

Предложение доказано. □

1.4 Рационально эллиптические многообразия малых размерностей

Согласно теореме I, выполнение условия ГФ для последовательностей $B = (b_1, \ldots, b_q)$, $A = (a_1, \ldots, a_r)$ эквивалентно существованию рационально эллиптического пространства X с минимальной моделью, такой, что $B' = (2b_j - 1)$, $A' = (2a_i)$ — последовательности соответственно четных и нечетных степеней ее базиса.

Односвязное замкнутое ориентируемое рационально эллиптическое многообразие M, очевидно, удовлетворяет условию $b_j \geqslant 2$, $1 \leqslant j \leqslant q$. Кроме того, в когомологиях M имеет место двойственность Пуанкаре. Для замкнутых ориентируемых многообразий размерность $d = \dim M$ совпадает с когомологической размерностью $n = n(M)$, которая для рационально эллиптического пространства следующим образом выражается через a- и b-последовательности ([19, §2])

$$n = 2\left(\sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{r} a_i\right) - (q - r). \tag{3}$$

Предложение 2. *Все возможные наборы чисел Бетти односвязных гладких замкнутых ориентируемых рационально эллиптических многообразий M размерностей $d = 4$, 5, 6 содержатся в таблице 1. В размерностях 4 и 5, а также в четырех случаях в размерности 6 существует единственный рациональный гомотопический тип пространства с такими числами Бетти.*

Таблица 1: Рационально эллиптические многообразия размерностей 4, 5, 6

№	d	Числа Бетти	Минимальная модель	$\mathbb{Q}$-гомот. тип
1.	4	$(1,0,0,0,1)$	$\Lambda(x,y)$, $\lvert x\rvert=4, \lvert y\rvert=7$, $dy=x^2$	S^4
2.	4	$(1,0,1,0,1)$	$\Lambda(x,y)$, $\lvert x\rvert=2, \lvert y\rvert=5$, $dy=x^3$	$\mathbb{C}P^2$
3.	4	$(1,0,2,0,1)$	$\Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2)$, $\lvert x_i\rvert=2, \lvert y_i\rvert=3$. $dx_i=0$, $dy_1=x_1x_2$, $dy_2=x_1^2-x_2^2$	$\mathbb{C}P^2\#\mathbb{C}P^2$
4.	4	$(1,0,2,0,1)$	$\Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2)$, $\lvert x_i\rvert=2, \lvert y_i\rvert=3$. $dx_i=0$, $dy_i=x_i^2$	$S^2\times S^2$
1.	5	$(1,0,0,0,0,1)$	$\Lambda(x)$, $\lvert x\rvert=5$, $dx=0$.	S^5
2.	5	$(1,0,1,1,0,1)$	$\Lambda(x,y_1,y_2)$, $\lvert x\rvert=2, \lvert y_j\rvert=3$, $dx=0, dy_1=0, dy_2=x^2$.	$S^2\times S^3$
1.	6	$(1,0,0,2,0,0,1)$	$\Lambda(y_1,y_2)$, $\lvert y_i\rvert=3$, $dy_i=0$.	$S^3\times S^3$
2.	6	$(1,0,1,0,1,0,1)$	$\Lambda(x,y)$, $\lvert x\rvert=2$, $\lvert y\rvert=7$, $dx=0, dy=x^4$.	$\mathbb{C}P^3$
3.	6	$(1,0,0,0,0,0,1)$	$\Lambda(x,y)$, $\lvert x\rvert=6$, $\lvert y\rvert=11$, $dy=x^2$.	S^6
4.	6	$(1,0,1,0,1,0,1)$	$\Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2)$, $\lvert x_1\rvert=2, \lvert x_2\rvert=4, \lvert y_1\rvert=3, \lvert y_2\rvert=7$. $dx_i=0$, $dy_i=x_i^2$.	$S^2\times S^4$
5.	6	$(1,0,2,0,2,0,1)$	$\Lambda(x_1,x_2,y_1,y_2)$, $\lvert x_i\rvert=2, \lvert y_1\rvert=3, \lvert y_2\rvert=5$. $dx_i=0$, $dy_1=F(x_1,x_2)$, $dy_2=G(x_1,x_2)$, где F — квадратичная, G — кубическая формы. Пример: $S^2\times\mathbb{C}P^2$ (при $dy_1=x_1^2, dy_2=x_2^3$)	
6.	6	$(1,0,3,0,3,0,1)$	$\Lambda(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)$, $\lvert x_i\rvert=2, \lvert y_i\rvert=3$. $dx_i=0$, $dy_i=F_i(x_1,x_2,x_3)$, где F_i — квадратичные формы. Примеры: $S^2\times S^2\times S^2$ (при $dy_i=dx_i^2$) и $\mathbb{C}P^3\#\mathbb{C}P^3$ (при $dy_1=x_1^2-x_2^2$, $dy_3=x_3^2-x_2^2$, $dy_2=x_1x_3$)	

Доказательство. Пусть M — замкнутое ориентируемое односвязное многообразие. Из формулы (3), условий $b_j \geqslant 2$ (односвязность) и $b_i \geqslant 2a_i$ (лемма I) следует:

$$d = 2\sum_{i=1}^{r}(b_i - a_i) + \sum_{j=r+1}^{q}(2b_j - 1) \geqslant 2\sum_{i=1}^{r} a_i + 3(q-r) \geqslant 2r + 3(q-r),$$

откуда, поскольку $q \geqslant r$, получаем

$$r \leqslant \frac{\dim M}{2}, \quad q \leqslant \frac{\dim M + r}{3}.$$

Теперь мы можем прямо перечислить пары целочисленных последовательностей B и A, удовлетворяющих условию ГФ и доставляющих решение равенства (3) для $d = 4$, 5, 6.

$\boldsymbol{n = 4}$

1. $B = (4)$, $A = (2)$;
2. $B = (3)$, $A = (1)$;
3. $B = (2,2)$, $A = (1,1)$.

$\boldsymbol{n = 5}$

4. $B = (3)$, $A = \varnothing$;
5. $B = (2,2)$, $A = (1)$

$\boldsymbol{n = 6}$

6. $B = (5)$, $A = (2)$;
7. $B = (4)$, $A = (1)$;
8. $B = (2,2)$, $A = \varnothing$;
9. $B = (4,2)$, $A = (2,1)$;
10. $B = (3,2)$, $A = (1,1)$;
11. $B = (2,2,2)$, $A = (1,1,1)$.

В случаях 1–2, 4–8 минимальная модель пространства восстанавливается по степеням образующих однозначно с точностью до изоморфизма из требований конечномерности когомологий, разложимости дифференциалов и наличия двойственности Пуанкаре. Это означа-

ет, что существует единственный рациональный гомотопический тип с такими a- и b- последовательностями.

Рассмотрим случай 3. Минимальная модель многообразия M с такими b- и a- последовательностями имеет вид $\Lambda V = \Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $|x_i| = 2, |y_i| = 3$. Имеется форма пересечения $H^2(M;\mathbb{Z}) \otimes H^2(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, которая задается симметричной унимодулярной целочисленной матрицей порядка 2. Согласно классификационным результатам Фридмана ([18]), два гладких замкнутых односвязных четырехмерных многообразия гомотопически эквивалентны тогда и только тогда, когда их формы пересечения эквивалентны, то есть приводятся одна к другой при смене базиса в H^2. Любая симметрическая целочисленная унимодулярная матрица приводится [5] над $\mathbb{Z}$ к одному из видов

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad Q_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Многообразия с формами пересечения Q_1 и Q_2 отличаются лишь ориентацией. Минимальная модель всякого многообразия с такой формой пересечения изоморфна алгебре с $dy_1 = x_1^2 - x_2^2$, $dy_2 = xy$. Это минимальная модель $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$.

Минимальная модель многообразия с формой пересечения Q_3 изоморфна алгебре $M_3 = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d\big)$ с $dy_1 = x_1^2 + x_2^2$, $dy_2 = xy$. Алгебра M_3 есть минимальная модель $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$.

Минимальная модель многообразия с формой Q_4 изоморфна алгебре $M_4 = \big(\Lambda(x_1', x_2', y_1', y_2'), d'\big)$ с $d'y_1' = x_1'^2$, $dy_2' = x_2'^2$. M_4 есть минимальная модель $S^2 \times S^2$. Рассмотрим гомоморфизм $f : M_3 \to M_4$,

определенный формулами

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1' + x_2', & f(x_2) &= x_1' - x_2', \\ f(y_1) &= 2y_1' + 2y_2', & f(x_2) &= y_1' - y_2'. \end{aligned}$$

это действительно гомоморфизм дифференциальных алгебр (то есть $d'f = fd$):

$$\begin{aligned} f(dx_i) &= d'f(x_i) = 0, \\ d'f(y_1) &= d'(2y_1' + 2y_2') = 2x_1'^2 + 2y_1''^2 = f(x_1^2 + x_2^2) = f(dy_1) \\ d'f(y_2) &= d'(y_1' - y_2') = x_1'^2 - x_2'^2 = f(x_1x_2) = f(dy_2) \end{aligned}$$

Таким образом, минимальные модели M_3 и M_4 этих многообразий изоморфны, следовательно, сами многообразия принадлежат одному рационально-гомотопическому типу.

В случае 9 имеем b- и a-последовательности $B = (4, 2)$, $A = (2, 1)$, то есть минимальная модель имеет вид

$$M = \big(\Lambda(x_1, x_2, y_1, y_2), d\big),$$

где $|x_1| = 2$, $|x_2| = 4$, $|y_1| = 3$, $|y_2| = 7$, а d — некоторый дифференциал. В силу минимальности алгебры дифференциал каждого элемента выражается через элементы меньшей степени. Поэтому x_1 замкнут, и $dy_1 = \alpha x_1^2$, $dx_2 = \mu x_1 y_1$, где $\alpha, \mu \in \mathbb{Q}$. Предположим, $\alpha = 0$. Тогда элемент y_1 замкнут, пространство коциклов в размерности 7 двумерно (оно натянуто на $x_1^2 y_1$ и $x_2 y_1$), в то время как пространство кограниц не более чем одномерно. Следовательно, алгебра имеет нетривиальные когомологии в размерности 7, и мы приходим к противоречию. Поэтому можно считать, что $\alpha = 1$. Так как $dd = 0$, то

$$0 = ddx_2 = \mu d(x_1 y_1) = \alpha\mu x_1^3 = \mu x_1^3,$$

поэтому $dx_2 = 0$. Пусть $dy_2 = kx_1^4 + lx_1^2 x_2 + mx_2^2$. Здесь $m \neq 0$, в противном случае x_2^2 представляет нетривиальный восьмимерный когомологический класс. Поэтому можно считать, что $m = 1$. Производя

замену

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= x_1, \\
y'_1 &= y_1, \\
x'_2 &= x_2 + x_1^2, \\
y'_2 &= y_2 + (1-k)x_1^2 y_1 + (2-l)x_2 y_1,
\end{aligned}
$$

приходим к виду $dx'_i = 0$, $dy'_i = x_i'^2$. Это минимальная модель пространства $S^2 \times S^4$.

В случаях 10 и 11 минимальные модели имеют указанный в таблице 1 вид из соображений размерности. Как примеры получаются многообразия $S^2 \times \mathbb{C}P^2$ в случае 10 и $S^2 \times S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^3 \# \mathbb{C}P^3$в случае 11. $\square$

Заметим, что четырехмерные многообразия $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ и $S^2 \times S^2$ имеют один и тот же рационально-гомотопический тип, хотя не являются гомотопически эквивалентными (они различаются, например, вторым классом Штифеля-Уитни).

Кроме того, отметим, что недавно Тотаро ([32]) привел контрпример к гипотезе Грове в размерности 6, согласно которой в каждой размерности при любом ограничении сверху на диаметр существует лишь конечное число рационально-гомотопических типов многообразий с секционной кривизной $K \geqslant 1$. Именно, им было построено бесконечное семейство замкнутых односвязных шестимерных многообразий специального вида — двойных частных $(S^3)^3//(S^1)^3$ — которые попарно рационально-гомотопически не эквивалентны. Любое двойное частное является рационально эллиптическим многообразием. Все многообразия Тотаро принадлежат случаю 6 размерности 6 в Таблице 1.

Глава 2

Пятимерные двойные частные групп Ли

2.1 Основные определения

Пусть G — компактная группа Ли, а $H \subset G \times G$ — замкнутая подгруппа, действующая на G двусторонними сдвигами: $(h_1, h_2)g = h_1 g h_2^{-1}$. Это действие может иметь неподвижные точки. Оно свободно тогда и только тогда, когда множество $H' = \{(h_1, h_2) \in H | h_1 \in \mathrm{Ad}(G) h_2\}$ состоит из одного лишь тривиального элемента. Если действие свободно, то пространство орбит, которое мы будем обозначать через $G//H$, является гладким многообразием и называется *двойным частным.*

Целью этой главы является классификация двойных частных в размерности 5. Если $M = G//H$ — двойное частное, то естественная проекция $G \to M$ является локально тривиальным расслоением со слоем H, поэтому всякое односвязное двойное частное рационально эллиптично. В размерности 4 всякое односвязное рационально эллиптическое многообразие гомеоморфно одному из пяти многообразий S^4, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ ([27]). Первые три из них являются однородными пространствами. Чигер [13] доказал, что связные суммы двух симметрических пространств ранга 1 несут метрики

неотрицательной кривизны. В частности, он фактически представил $\mathbb{C}P^n\#\overline{\mathbb{C}P^n}$ в виде двойного частного. Тотаро показал в работе [31], что и $\mathbb{C}P^n\#\overline{\mathbb{C}P^n}$ может быть представлено как двойное частное. В размерности 6 им же было построено бесконечное семейство попарно гомотопически не эквивалентных двойных частных ([32]).

Мы доказываем следующий результат.

Теорема 2. *Существует четыре типа диффеоморфизма пятимерных односвязных двойных частных групп Ли:*

1) сфера S^5;

2) произведение сфер $S^2 \times S^3$;

3) многообразие Ву $X_{-1} = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$;

4) многообразие X_∞.

Многообразия X_{-1} и X_∞ получаются при различных склейках двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения над S^2 по общей границе $\mathbb{C}P^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$. Многообразие Ву характеризуется условием $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$, а X_∞ – условиями $H^*(X_\infty) = H^*(S^2 \times S^3)$ и $w_2(X_\infty) \neq 0$. В этом списке только X_∞ не является однородным пространством.

Доказательство приводится ниже. Согласно предложению 2, в размерности 5 имеется лишь два рациональных гомотопических типа односвязных двойных частных. Мы формулируем необходимые результаты и рассматриваем оба случая. Заметим, что наш список двойных частных совпадает со списком эллиптических пространств этой размерности ([27]).

2.2 Необходимые классификационные результаты

Всякое односвязное двойное частное является рационально эллиптическим многообразием. Согласно предложению 2 (п.1.4), в размерности 5

имеется лишь два рациональных гомотопических типа рационально эллиптических многообразий: S^5 и $S^2 \times S^3$.

Пусть $M = G//H$ — двойное частное, где G — компактная группа Ли. Можно считать, что H действует при помощи некоторого гомоморфизма $H \to G \times G$. Диагонально вложенный центр группы G

$$\Delta Z(G) = \{(z, z) | z \in Z(G)\},$$

очевидно, действует на G тривиально. Поэтому можно считать, что действие H задано при помощи гомоморфизма $H \to (G \times G)/\Delta Z(G)$.

Всякая компактная алгебра Ли является прямым произведением ее центра и конечного числа простых подалгебр, поэтому всякая компактная группа Ли G представима в виде

$$G = G_0 \times G_1 \times \ldots \times G_n,$$

где $G_0 \cong T^m$ — центр группы, а каждая из групп G_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, накрывается простой группой Ли. Односвязную накрывающую группы G_i будем называть *простым фактором* группы G.

Мы будем рассматривать рационально-гомотопическую точную последовательность расслоения $H \to G \to M = G/H$, пользуясь для сужения круга возможных вариантов G и H классификационными результатами работы Тотаро [31], которые приводятся ниже.

Поскольку одно и то же многообразие можно различными способами представить в виде двойного частного, первой задачей является сокращение числа этих способов. Следующее утверждение дает некоторый «минимальный», хотя и по-прежнему неоднозначный, вид записи многообразия как двойного частного.

Лемма II ([31]). *Всякое односвязное двойное частное M можно представить в виде $M = G//H$, где группа G односвязна, группа H связна, а действие задается при помощи гомоморфизма $H \to (G \times$*

$G)/\Delta Z$, где $\Delta Z \subset G \times G$ — диагонально вложенный центр группы G. Группа $(G \times G)/\Delta Z$ двусторонне действует на G :

$$(g_1 z, g_2 z)g = g_1 g g_2^{-1}.$$

При этом G и H можно выбрать так, что H не будет действовать транзитивно ни на каком простом факторе G_i группы G.

Доказательство. Пусть M — односвязное двойное частное, представленное в виде двойного частного $G//H$ некоторых групп G и H. Можно считать, что H действует двусторонне на G при помощи некоторого гомоморфизма $H \to (G \times G)/\Delta Z(G)$. Поскольку многообразие M связно, то можно считать, что G и H связны. В противном случае G и H можно заменить на связные компоненты единицы G_0, H_0. Точная последовательность расслоения содержит отрезок

$$\pi_1 H \to \pi_1 G \to \pi_1 M = 0,$$

который показывает, что отображение $\pi_1 H \to \pi_1 G$ сюръективно. Обозначим через C его ядро. Это конечнопорожденная абелева группа. Пусть $\widetilde{G}$, $\widetilde{H}$ — универсальные накрывающие групп G и H соответственно. Тогда $\widetilde{G} = K_G \times \mathbb{R}^m$, $\widetilde{H} = K_H \times \mathbb{R}^n$, где K_G, K_H — компактные односвязные группы. При этом $\pi_1 H$ отождествляется с ядром накрытия $\widetilde{H} \to H$, так что можно считать $C \subset \pi_1 H$ центральной подгруппой в $\widetilde{H}$. Гомоморфизм $H \to (G \times G)/\Delta Z(G)$ поднимается до гомоморфизма $\widetilde{H} \to \widetilde{G} \times \widetilde{G}$. Определенное с помощью последнего гомоморфизма действие $\widetilde{H}$ на $\widetilde{G}$ тривиально на подгруппе $C \subset H$, а действие $\widetilde{H}/C$ свободно на G, при этом $M = \widetilde{G}/(\widetilde{H}/C)$.

Поскольку $\widetilde{G}$ является произведением компактной группы K_G и $\mathbb{R}^m$, то действие $\widetilde{H}/C$ на G является произведением действий по отдельности на K_G и на $\mathbb{R}^m$. Действие $\widetilde{H}/C$ на $\mathbb{R}^m$, которое задается сдвигами, должно быть транзитивным, так как M компактно, и группа $\widetilde{H}/C$

связна. Обозначим через L ядро этого действия, то есть подгруппу в $\widetilde{H}/C$, действующую тривиально на $\mathbb{R}^m$. Поскольку действие $\widetilde{H}/C$ на всем $\widetilde{G} = K_G \times \mathbb{R}^m$ свободно, то действие L на K_G должно быть свободно. Тогда $M = K_G/L$. Отрезок длинной точной последовательности

$$\pi_1 M \to \pi_0 L \to \pi_0 K_G$$

показывает, что L связно. Итак, M представлено в виде $G'//H'$, где G' — односвязная группа Ли, H' — связная группа, действующая при помощи гомоморфизма $H' \to (G' \times G')/\Delta Z(G')$.

Пусть компактная группа Ли K действует на многообразиях X_1 и X_2 так, что действие на X_2 транзитивно и свободно на произведении $X_1 \times X_2$. Обозначим $S \subset H$ стабилизатор произвольной точки $x \in X_2$. Тогда $X_1 \times X_2$ диффеоморфно X_1/S. Применяя это замечание поочередно ко всем простым факторам группы G, на которых H действует транзитивно, мы можем отбросить их все, каждый раз заменяя H на подгруппу, и свести ситуацию к случаю, когда H не действует транзитивно ни на одном простом факторе группы G. □

Запись $G//H$ далее будет означать именно такое представление двойного частного.

Простая группа Ли имеет нетривиальные рациональные гомотопические группы только в нечетных размерностях. Поэтому рационально-гомотопическая точная последовательность расслоения $H \to G \to M = G//H$ распадается на отрезки вида

$$0 \to \pi_{2d}^{\mathbb{Q}} M \xrightarrow{\partial_*} \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} H \xrightarrow{i_*} \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G \xrightarrow{p_*} \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} M \to 0.$$

Мы обозначаем символом $\pi_k^{\mathbb{Q}} X$ группу $\pi_k X \otimes \mathbb{Q}$. Односвязная группа G является произведением $G_1 \times \ldots \times G_n$ простых групп Ли. Поэтому

$$\pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G = \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G_1 \oplus \ldots \oplus \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G_n.$$

Это позволяет изучать ситуацию отдельно для каждого простого фактора G_i при помощи проекции действия H на этот фактор. *Показателями* группы Ли G называются целые числа d, такие, что группа $\pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G$ нетривиальна (с кратностями). Показатели простых групп известны и приведены в таблице 2.

Таблица 2: Показатели простых групп Ли

$\mathfrak{g}$	G	Показатели
A_m	$\mathrm{SU}(m+1)$	$2, 3, 4, \ldots, m+1$
B_m	$\mathrm{SO}(2m+1)$	$2, 4, 6, \ldots, 2m$
C_m	$\mathrm{Sp}(n)$	$2, 4, 6, \ldots, 2m$
D_m	$\mathrm{SO}(2n)$	$2, 4, 6, \ldots, 2m-2; m$
g_2	G_2	$2, 6$
f_4	F_4	$2, 6, 8, 12$
e_6	E_6	$2, 5, 6, 8, 9, 12$
e_7	E_7	$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$
e_8	E_8	$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$

Будем говорить, что простой фактор G_i группы G *вносит в* M *показатель* d, если гомоморфизм $p_* : \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G_i \to \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} M$ нетривиален, то есть гомоморфизм $i_* : \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} H \to \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G_i$ не сюрьективен. Особенно интересны старшие показатели.

Справедлива следующая

Лемма III ([6]). *Пусть $\rho : H \to G$ — нетривиальный гомоморфизм односвязных простых групп. Тогда максимальный показатель $d(H)$ группы H не превосходит максимального показателя $d(G)$ группы G. Если достигается равенство, то либо ρ — изоморфизм, либо G/H есть одно из однородных пространств* $\mathrm{Spin}(2n) = \mathrm{Spin}(2n)$ *при* $n \geqslant 4$, $\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(n)$ *при* $n \geqslant 2$, $\mathrm{Spin}(7)/G_2$, $\mathrm{Spin}(8)/G_2$ *или* E_6/F_4.

Используя этот результат и некоторые топологические наблюдения, доказывается

Теорема III ([31]). *Пусть* $M = G//H$ *— односвязное двойное частное, записанное согласно лемме II. Каждый простой фактор* G_1 *группы* G *вносит в* M *по крайней мере один показатель* d*. Верно одно из следующих утверждений:*

1) G_1 *вносит в* M *старший показатель* d*,*

2) G_1 *вносит в* M *второй по величине показатель* d*, причем в этом случае у группы* H *имеется простой фактор* H_1*, который действует только с одной стороны* G*, так что* G_1/H_1 *изоморфно одному из однородных пространств* $\mathrm{SU}(2n)/\mathrm{Sp}(2n)$*,* $n \geqslant 2$*,* $\mathrm{Spin}(7)/G_2 = S^7$*,* $\mathrm{Spin}(8)/G_2 = S^7 \times S^7$*, или* E_6/F_4*. Показатель* d *есть соответственно* $2n-1$*, 4, 4 или 9. (В случае* $G_1 = \mathrm{Spin}(8)$ *утверждается только, что* G_1 *вносит в* M *по крайней мере один показатель 4.)*

3) G_1 *изоморфен* $\mathrm{Spin}(2n)$*,* $n \geqslant 4$ *вносит в* M *показатель* n*, причем у группы* H *имеется простой фактор* $H_1 \geqslant \mathrm{Spin}(2n-1)$*, который действует только с одной стороны* G *при помощи стандартного вложения, так что* G_1/H_1 *изоморфно* S^{2n-1}*.*

4) G_1 *изоморфен* $\mathrm{SU}(2n+1)$ *вносит в* M *степени* $2, 4, 6, \ldots, 2n$ *причем у группы* H *имеется простой фактор* $H_1 \cong SU^(2n+1)$*, который действует следующим образом:* $h(g) = hgh^\top$*.*

Для гомоморфизма $H \to G$ простых групп Ли *индексом Дынкина* называется целое число, задающее гомоморфизм $\pi_3 H \to \pi_3 G$ (обе группы канонически изоморфны $\mathbb{Z}$).

Лемма IV ([31]). *Пусть* $H \to G$ *— нетривиальный гомоморфизм групп Ли, такой, что старший показатель* H *строго меньше старшего показателя* G *и не меньше второго по величине показателя* G*. Тогда* G/H *изоморфно одному из однородных пространств*

$\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) = S^{2n-1}$, $n \geqslant 3$,

$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1) = S^{4n-1}$, $n \geqslant 2$,

$\mathrm{Spin}(2n+1)/\mathrm{Spin}(2n) = S^{2n}$, $n \geqslant 3$,

$\mathrm{Spin}(2n+1)/\mathrm{Spin}(2n-1) = UT(S^{2n})$, $n \geqslant 3$,

$\mathrm{Sp}(2)/\mathrm{SU}(2) = UT(S^4)$, $\mathrm{Sp}(4)/\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(3)/\mathrm{SO}(3)$,

$\mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Spin}(7) = S^{15}$, *где представление* $\mathrm{Spin}(7)$ *спинорно,*

$G_2/\mathrm{SU}(3) = S^6$, $G_2/\mathrm{SU}(2) = UT(S^6)$,

$G_2/\mathrm{SU}(2)$, *где* $SU(3)$ *имеет индекс Дынкина* 3,

$G_2/\mathrm{SO}(3)$, *где* $SO(3)$ *имеет индекс Дынкина* 4,

$G_2/\mathrm{SO}(3)$, *где* $SO(3)$ *имеет индекс Дынкина* 28,

$F_1/\mathrm{Spin}(9) = \mathbf{Ca}P^2$;

далее,

$\mathrm{Spin}(2n)/\mathrm{Spin}(2n-2) = UT(S^{2n-1})$, $n \geqslant 4$,

$\mathrm{Spin}(2n)/\mathrm{Spin}(2n-3)$, $n \geqslant 4$,

$\mathrm{SU}(2n+1)/\mathrm{Sp}(n)$, $n \geqslant 2$,

$\mathrm{SU}(2n+1)/\mathrm{SO}(2n+1)$, $n \geqslant 2$,

$\mathrm{Spin}(10)/\mathrm{Spin}(7)$, *где представление* $\mathrm{Spin}(7)$ *спинорно,*

$\mathrm{SU}(7)/G_2$,

$\mathrm{Spin}(9)/G_2$,

$\mathrm{Spin}(10)/G_2$.

Для однородных пространств G/H *в первой части списка группа* G *имеет единственный показатель, не являющийся показателем группы* H*, для пространств во второй части — более одного такого показателя.*

Лемма IV позволяет перечислить все возможные варианты простых факторов группы G, которые вносят в $M = G//H$ только старший показатель.

Теорема IV ([31]). *Пусть* $M = G//H$ *— односвязное двойное частное, а* G_1 *— простой фактор группы* G*, вносящий в* M *только*

старший показатель d. Тогда верно одно и следующих утверждений:
1) G_1 изоморфен $\mathrm{SU}(2)$, $d = 2$,
2) G_1 изоморфен $\mathrm{SU}(3)$, $\mathrm{Sp}(4)$ или G_2, причем у группы H имеется простой фактор $H_1 \cong \mathrm{SU}(2)$, действующий нетривиально на G_1. Показатель d есть соответственно 3, 4 или 6,
3) у группы H имеется простой фактор H_1, действующий нетривиально в точности с одной стороны G_1, так что G_1/H_1 является одним из однородных пространств в первой половине списка леммы F,
4) у группы H имеются простые факторы H_1 и H_2, действующие с разных сторон на G_1 одним из следующих способов, с точностью до перестановки H_1 и H_2:
$G_1 = \mathrm{Spin}(2n)$, $n \geqslant 4$, H_1 есть $\mathrm{Spin}(2n-2)$ либо $\mathrm{Spin}(2n-3)$, H_2 есть $\mathrm{SU}(n)$, либо $\mathrm{Sp}(a)$ с $2a = n$, либо $\mathrm{Spin}(9)$ при $G_1 = \mathrm{Spin}(16)$, $d = 2n-2$; или
$G_1 = \mathrm{SU}(2n+1)$, $n \geqslant 3$, H_1 есть $\mathrm{Sp}(n)$ либо $\mathrm{SO}(2n+1)$, $H_2 = \mathrm{SU}(2n-1)$, $d = 2n+1$; или
$H_1 \backslash G_1 / H_2$ есть одно из пространств $G_2 \backslash \mathrm{Spin}(10)/\mathrm{SU}(5)$, $G_2 \backslash \mathrm{Spin}(9)/\mathrm{SU}(4)$, $G_2 \backslash \mathrm{Spin}(9)/\mathrm{Sp}(2)$, $G_2 \backslash \mathrm{SU}(7)/\mathrm{SU}(5)$, d есть соответственно 8, 8, 8, 7.

Мы будем пользоваться имеющейся в размерности 5 классификацией замкнутых односвязных многообразий с точностью до диффеоморфизма, которая была построена Смейлом [29] для случая спин-многообразий и завершена Барденом [10] для общего случая. Приведем формулировку теоремы.

Второй класс Штифеля–Уитни $w_2(M)$ односвязного пятимерного многообразия M можно рассматривать как гомоморфизм $H_2(M) \to \mathbb{Z}_2$. Группа $H_2(M)$ такого многообразия конечно порождена и в ней можно выбрать специальный базис так, что w_2 не обращается в нуль только на одном элементе этого базиса. Порядок этого элемента есть

2^i, где число $i = i(M)$ зависит только от класса диффеоморфизма многообразия M.

Существует две серии $X_{-1}, X_0, \dots, X_\infty$ и $M_2, \dots, M_\infty$ односвязных пятимерных многообразий, которые характеризуются следующими условиями:

1) $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$, $X_0 = S^5$, $H_2(X_j) = \mathbb{Z}_{2^j} \oplus \mathbb{Z}_{2^j}$ при $0 < j < \infty$, и $H_2(X_\infty) = \mathbb{Z}$,

2) $H_2(M_k) = \mathbb{Z}_k \oplus \mathbb{Z}_k$ при $1 < k < \infty$. $M_\infty = S^2 \times S^3$,

3) $i(M_k) = 0$ для всех k, $i(X_j) \neq 0$ при любом $j \neq 0$.

Теорема V (Барден, [10]). *Класс диффеоморфизма односвязного пятимерного замкнутого многообразия M вполне определяется $H_2(M)$ и $i(M)$. Кроме того, имеется однозначное представление*

$$M = X_j \# M_{k_1} \# \dots \# M_{k_s},$$

где $-1 \leqslant j \leqslant \infty$, $0 \leqslant s$, $1 < k_1$ и для любого i k_i делит k_{i+1} либо $k_{i+1} = \infty$.

2.3 Случай S^5

Пусть $M = G//H$ имеет рационально-гомотопический тип S^5. Все рациональные гомотопические группы такого многообразия, кроме $\pi_5^{\mathbb{Q}} M = \mathbb{Q}$, тривиальны. Из точной последовательности расслоения следует, что отображение $\pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} H \to \pi_{2d-1}^{\mathbb{Q}} G$ не является изоморфизмом только при $d = 3$, поэтому G вносит в M единственный показатель 3, а значит, G — простая группа. Из теорем III и IV следует, что G есть либо $\mathrm{SU}(3)$, либо $\mathrm{SU}(4)$, причем в первом случае H имеет простой фактор $\mathrm{SU}(2)$, а во втором — простой фактор $\mathrm{Sp}(2)$, действующий в точности с одной стороны. Таким образом, возможные варианты исчерпываются списком: $\mathrm{SU}(3)//\mathrm{SU}(2)$, $\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)$ и

$\mathrm{SU}(3)//(\mathrm{SU}(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathrm{SU}(3)//\mathrm{SO}(3)$ (группа $\mathrm{Sp}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \mathrm{SO}(5)$ не является подгруппой $\mathrm{SU}(4)$).

Если односвязное многообразие имеет вид $M = G//H$, где $G = \mathrm{SU}(3)$, $H = \mathrm{SO}(3)$, то $\pi_2 G = \pi_1 G = 0$, а $\pi_1 H = \mathbb{Z}_2$. Поэтому $\pi_2 M = H_2(M) = \mathbb{Z}_2$. Согласно теореме V, среди односвязных многообразий размерности пять существует единственное с точностью до диффеоморфизма многообразие X_{-1} с $H_2(X_{-1}) = \mathbb{Z}_2$. Оно называется многообразием Ву и получается из двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения F над S^2 при некоторой склейке по общей границе $\partial F_{(i)} = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$. Таким образом, M диффеоморфно X_{-1}.

Многообразия $\mathrm{SU}(3)//\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SU}(4)/\mathrm{Sp}(2)$ диффеоморфны S^5 вне зависимости от вида действия, как следует, например, из теоремы V.

2.4 Случай $S^2 \times S^3$

Пусть M имеет рациональный гомотопический тип $S^2 \times S^3$. Тогда $\pi_2^{\mathbb{Q}} M = \mathbb{Q}$, $\pi_3^{\mathbb{Q}} M = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$. Из длинной точной последовательности расслоения получаем изоморфизм $\pi_1^{\mathbb{Q}} H \cong \mathbb{Q}$ и короткую точную последовательность

$$0 \to \pi_3^{\mathbb{Q}} H \xrightarrow{i_*} \pi_3^{\mathbb{Q}} G \xrightarrow{p_*} \pi_3^{\mathbb{Q}} M \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to 0.$$

Следовательно, H содержит абелев фактор S^1, а G вносит в M два показателя 2, поэтому $G = G_1 \times G_2$, где G_i — простые группы. Каждая из них изоморфна либо $\mathrm{SU}(2)$, либо $\mathrm{SU}(3)$, причем в последнем случае у H имеется простой фактор $H_i \cong \mathrm{SU}(3)$. Из соображений размерности возможны следующие варианты:

1) $M = \big(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)\big)/S^1$;

2) $M = \big(\mathrm{SU}(3) \times \mathrm{SU}(3)\big)/H$, где H имеет простые факторы S^1 и $H' \cong \mathrm{SU}(3)$.

Однако в последнем случае у H должны иметься еще простые факторы суммарной размерности два, что противоречит условию $\pi_1^{\mathbb{Q}} H \cong \mathbb{Q}$.

Итак, всякое пятимерное двойное частное, имеющее рациональный гомотопический тип $S^2 \times S^3$, имеет вид $M = G//U$, где $G = S^3 \times S^3$, а $U = S^1$ действует при помощи некоторого гомоморфизма $S^1 \to G^2/\Delta Z(G)$. Так как $Z(G)$ конечна, то этот гомоморфизм поднимается до гомоморфизма $U \to G^2$, так что можно считать S^1 замкнутой однопараметрической подгруппой $G \times G$, которая действует свободно.

Мы знаем, что $H^*(M;\mathbb{Q}) = H^*(S^2 \times S^3)$. Рассматривая спектральную последовательность расслоения $S^1 \to G \to M$, можно убедиться, что гомологии M не имеют кручения. Согласно теореме V существует лишь два типа диффеоморфизма односвязных пятимерных многообразий с $H_2(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Они различаются вторым классом Штифеля–Уитни $w_2(M)$: при $w_2 = 0$ получаем $S^2 \times S^3$, а при $w_2 \neq 0$ многообразие X_∞, являющееся, как и многообразие Ву, склейкой двух экземпляров нетривиального трехмерного расслоения над S^2 по общей границе $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$.

Предложение 3. *Многообразие X_∞ является двойным частным.*

Доказательство. Рассмотрим свободное действие окружности на $S^3 \times S^3$, составленное из свободного действия на первой S^3 и поворота в последних двух координатах на второй. Это двустороннее действие: поворот задается формулой (мы отождествляем S^3 с $\mathrm{SU}(2)$)

$$e^{i\varphi} \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} Y^{-1} = \begin{pmatrix} z & e^{2i\varphi} w \\ -\overline{e^{2i\varphi} w} & \overline{z} \end{pmatrix},$$

где

$$Y = Y(e^{i\varphi}) = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $M = (S^3 \times S^3)//S^1$ соответствующее двойное частное. Рассмотрим подмногообразие $\widetilde{N}$ в $S^3 \times S^3$, которое задается в

координатах (z, w) условием $\operatorname{Re} z = 0$. $\widetilde{N}$ инвариантно относительно действия окружности, которое свободно на нем. Его фактор N по этому действию является замкнутым подмногообразием в M. Действие окружности на $\widetilde{N} = S^3 \times S^2$ свободно на первом сомножителе S^3. Проекция на второй сомножитель — двумерную сферу S^2 — орбиты произвольной точки $(x, y) \in S^3 \times S^2$, где y не является полюсом S^2, есть дважды пройденная параллель. Значит, орбита такой точки в $S^3 \times S^2$ содержит ровно два представителя вида $(\pm x', y')$, где $y' \in S^2$ принадлежит фиксированному заранее меридиану I. Поэтому $N = \widetilde{N}//S^1$ представляет собой цилиндр $\mathbb{R}P^3 \times I$ с некоторым отождествлением, а именно, на обоих основаниях цилиндра приклеено по одному экземпляру $S^2 = \mathbb{C}P^1$ по отображению Хопфа $\mathbb{R}P^3 \to \mathbb{C}P^1$.

Заметим, что цилиндр $S^3 \times I$ с аналогичным отождествлением по отображению Хопфа $h : S^3 \to \mathbb{C}P^1$ представляет собой связную сумму $Q = \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$, которая является S^2-расслоением над $S^2 = \mathbb{C}P^1$. Проекция в этом расслоении задается формулой $(x, t) \mapsto h(x)$ для $x \in S^3$, $0 < t < 1$. N получается из Q факторизацией по антиподальной инволюции в каждой окружности $S^1_{t,y} = \{(x, t) | p(x) = y\}$, $0 < t < 1$, $y \in S^2$. Поэтому N топологически не отличается от Q.

Известно, что $w_2(Q) \neq 0$ (см., например, [4, лемма 1.3]). Покажем, что если многообразие M содержит ориентируемое подмногообразие Q коразмерности один с $w_2(Q) \neq 0$, то M само имеет нетривиальный второй класс Штифеля–Уитни. Обозначим через $i : Q \to M$ вложение. Сужение $TM|_Q$ является суммой Уитни

$$TM|_Q = TQ \oplus \nu_Q,$$

где через ν_Q обозначено одномерное нормальное расслоение подмногообразия $Q \subset M$. По формуле Уитни,

$$w_2(TM|_Q) = w_2(Q) + w_1(Q) \cup w_1(TQ) + w_2(\nu_Q),$$

где w_k — классы Штифеля–Уитни и $w_k(Q) = w_k(TQ)$. Так как Q ориентируемо, то $w_1(Q) = 0$. Расслоение ν_Q одномерно и поэтому $w_2(\nu_Q) = 0$. Имеем $i^*(w_2(M)) = w_2(TM|_Q) = w_2(Q) \neq 0$, следовательно $w_2(M) \neq 0$. Для $M = (S^3 \times S^3)//S^1$ это значит, согласно теореме V, что M диффеоморфно X_∞. $\square$

Многообразие X_∞ не является однородным пространством, как следует из классификации пятимерных однородных эйнштейновых многообразий размерности пять ([9]).

Приведем непосредственное рассуждение. Предположим, что X_∞ гомотопически эквивалентно некоторому однородному пространству $M = G/H$ компактной группы Ли G. Группы G и H можно считать связными. Известно [12], что для любой компактной группы Ли $\pi_2 = 0$ и $\pi_3 = \mathbb{Z}^k$, где k — число простых факторов в алгебре Ли. Так как $\pi_2 X_\infty = \mathbb{Z}$, то из длинной точной гомотопической последовательности расслоения $H \to G \to M$ получаем короткую точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to \pi_1 H \to \pi_1 G \to 0, \qquad (*)$$

то есть ранг $\pi_1 H$ на единицу больше ранга $\pi_1 G$. Поэтому можно считать, что алгебры Ли групп G и H имеют вид

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathbb{R}^m, \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathbb{R}^{m+1}$$

соответственно, где $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{h}_1$ — полупростые алгебры. Пусть $\widetilde{G}_1$ — односвязная группа с алгеброй $\mathfrak{g}_1$. Обозначим $\widetilde{G} = \widetilde{G}_1 \times T^m$, где T^m — m-мерный тор. Тогда имеется накрытие $p : \widetilde{G} \to G$. Пусть $\widetilde{H} = p^{-1}(H)$. Естественно определенное отображение $\widetilde{G}/\widetilde{H} \to G/H$ является, как нетрудно проверить, диффеоморфизмом. Поэтому можно считать, что

$$M = G/H, \quad G = G_1 \times T^m, \quad H = H_1 \times T^{m+1},$$

где G_1 и H_1 — односвязные группы с алгебрами Ли $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{h}_1$ соответственно. Очевидно, $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{g}_1$, так как алгебра $\mathfrak{h}_1$ полупроста. С другой

стороны, как показывает $(*)$, отображение $\pi_1 H \to \pi_1 G$ является эпиморфизмом, $\pi_1 T^{m+1}$ имеет конечный индекс в $\pi_1 H$, а $\pi_1 G = \pi_1 T^m$. Поэтому проекция тора $T^{m+1} \subset H$ на второй множитель T^m в G является сюръективной. Таким образом, $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \times \mathbb{R}$. Обозначим $H' = \exp(\mathfrak{h}_1 \times \mathbb{R})$. Нетрудно показать, что отображение из $G_1/H' \to G/H$, определенное формулой $gH' \to (g, e)H$, есть диффеоморфизм. Поэтому можно считать, что

$$M = G/H, \quad G = G_1, \quad H = H_1 \times S^1,$$

где группы Ли G_1, H_1 имеют полупростые алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, причем G_1 односвязна.

Точная последовательность расслоения $S^1 \to \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \to X_\infty$ показывает, что

$$\pi_q M = \pi_q X_\infty = \pi_q(S^3 \times S^3) \text{ при } q \geqslant 3.$$

Тогда из точной последовательности расслоения $H \to G \to M$ следует, что $\pi_3 G = \pi_3 H \times \mathbb{Z}^2$, то есть G содержит на два простых фактора больше, чем H.

Компактное однородное многообразие $M = G/H$ гомотопически эквивалентно X_∞, поэтому M пятимерно. Следовательно, его группа изотропии $H = H_1 \times S^1$ является подгруппой $\mathrm{O}(5)$. Поскольку ранг последней есть 2, то ранг H_1 не превышает 1. Таким образом, возможны два случая:

$$\mathfrak{h}_1 = 0, \quad \mathfrak{h}_1 = A_1.$$

Размерность G должна быть соответственно 6 и 9, причем G должна быть односвязной и иметь на два простых фактора больше, чем H. Получаем для двух возможных вариантов алгебры $\mathfrak{h}$ соответственно случаи

$$G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2), \quad G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2).$$

Разберем возможные комбинации.

1. $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $H = \mathrm{U}(1)$. Подгруппа H обязана лежать в некотором максимальном торе группы G. Факторы G по сопряженным подгруппам диффеоморфны. Все максимальные торы сопряжены друг другу, поэтому можно считать, что $H \subset T \times T$, где $T = S^1 \times S^1$ — максимальный тор диагональных матриц. Можно считать, таким образом, что $M = G/H$, где вложение $H \subset \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$ определяется отображением

$$e^{i\varphi} \mapsto \left(\begin{pmatrix} e^{im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-im\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{in\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-in\varphi} \end{pmatrix} \right) \qquad (5)$$

где $n, m \in \mathbb{Z}$ взаимно просты либо один из них равен нулю.

Касательное расслоение TG тривиально: $TG = G \times \mathfrak{g}$. Касательное пространство $\mathfrak{g} = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$ в единице представляется в виде суммы подпространств $\mathfrak{h} \oplus p$, где подпространство $\mathfrak{h} = \mathbb{R}$ касательно к $H \subset G$, а подпространство p является ортогональным дополнением $\mathfrak{h}$ относительно двусторонне инвариантной римановой метрики на G.

Пусть X — касательный вектор. Будем обозначать через gX и Xg соответственно вектора $dL_g(X)$, $dR_g(X)$, где L_g, R_g — отображения левого и правого сдвига на элемент g.

Рассмотрим в касательном расслоении TG к группе G подрасслоение P, состоящее из пар вида (g, V), где $g \in G$, а вектор V ортогонален касательному пространству к орбите точки g. Так как метрика инвариантна, то всякий элемент P имеет вид (g, gX), где e — единица группы G, $X = g^{-1}V \in p$. Отображение $P \to G \times p$, $(g, V) \mapsto (g, g^{-1}V)$ задает тривиализацию $P \cong G \times p$. Группа H свободно действует в P: элемент $h \in H$ переводит при помощи правого сдвига пару (g, V) в пару (gh, Vh). Если $V = gX$, где $X \in p$, то $Vh = gXh = gh(h^{-1}Xh)$. Поэтому в тривализации действие H на $G \times p$ действие задается фор-

мулой $(g,X)h = (gh, h^{-1}Xh)$. Пространство смежных классов P/H есть $T(G/H)$, проекция задается формулой

$$\pi(g,V) = (gH, d\pi_G(V)) \in T(G/H),$$

где π_G — проекция $G \to G/H$. Таким образом, $T(G/H) \to G/H$ есть расслоение со слоем $\mathbb{R}^5$, ассоциированное с главным H-расслоением $G \to G/H$, и структурная группа касательного расслоения многообразия $M = G/H$ есть H.

Подпространство $p \subset \mathfrak{g} = \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2)$ состоит из элементов вида

$$\left(\begin{pmatrix} -itn & z \\ -\bar{z} & itn \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} itm & w \\ -\bar{w} & -itm \end{pmatrix}\right), \quad t \in \mathbb{R},\ z, w \in \mathbb{C}.$$

Введем координаты (t,z,w) в p. Действие $X \to h^{-1}Xh$ элемента

$$h = \left(\begin{pmatrix} e^{im\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-im\varphi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{in\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-in\varphi} \end{pmatrix}\right) \in H,$$

где n, m из вложения (5), задается формулой

$$(t,z,w)h = (t, ze^{-2im\varphi}, we^{-2in\varphi}).$$

Можно показать, что возникающее действие на $\mathbb{C}^2$ задается преобразованием из $\mathrm{Sp}(2) = \mathrm{Spin}(5)$. Следовательно, M спинорно. Так как $H_2(M) = H_2(S^2 \times S^3) = \mathbb{Z}$ то, по теореме V, M диффеоморфно $S^2 \times S^3$.

2. $G = \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$, $\mathfrak{h} = A_1 \times \mathbb{R}$. Тогда $H = H_1 \times \mathrm{U}(1)$, где H_1 имеет алгебру Ли A_1. Возможные вложения $\mathfrak{h}_1 = A_1$ в $\mathfrak{g} = A_1 \times A_1 \times A_1$ с точностью до перестановки слагаемых имеют вид:

$$\text{а) } (\mathrm{id}, 0, 0), \quad \text{б) } (\mathrm{id}, \mathrm{id}, 0), \quad \text{в) } (\mathrm{id}, \mathrm{id}, \mathrm{id}).$$

а) $\mathfrak{h}_1 = A_1$ изоморфно отображается на первый множитель A_1 группы G, так что $\mathrm{U}(1) \subset 1 \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2)$. Однородное пространство

G/H диффеоморфно $(\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\mathrm{U}(1)$, и мы получаем уже разобранный случай 1.

б) $\mathfrak{h}_1 = A_1$ диагонально вложена в первые два множителя группы G, $\mathfrak{h}_1 \subset A_1 \times A_1 \times 1$. Если отождествить A_1 с алгеброй векторов в трехмерном пространстве, становится очевидно, что диагональная подалгебра в $A_1 \times A_1$ не имеет централизатора. Поэтому $\mathbb{R} \subset \mathfrak{h}$ отображается в третий множитель. Таким образом, M есть произведение многообразий $(S^3 \times S^3)/\Delta S^3$ и $\mathrm{SU}(2)/\mathrm{U}(1)$. Первое есть S^3, второе есть S^2. Поэтому $M = S^3 \times S^2$.

в) Аналогично предыдущему случаю, диагональная подалгебра $\Delta_{1,2,3} A_1$ в $A_1 \times A_1 \times A_1$ не имеет централизатора. Следовательно, этот случай невозможен.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Базайкин Я. В. *Об одном семействе 13-мерных замкнутых римановых многообразий положительной кривизны* // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37. № 6. С. 1219-1237.

[2] Болсинов А. В., Тайманов И. А. *Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов* // Труды Математического института РАН. 2000. Т. 231. С. 46–63.

[3] Гриффитс Ф. А., Морган Дж. В. *Рациональная теория гомотопий и дифференциальные формы.* М.: Наука, 1990.

[4] Мандельбаум Р. *Четырехмерная топология.* М.: Мир, 1981.

[5] Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. *Симметрические билинейные формы.* М.: Наука, 1986.

[6] Онищик А. Л. *Отношения включения между транзитивными компактными группами преобразований.* // Труды Моск. Матем. Общ-ва. 1962. Т. 11, С. 199–242.

[7] Сулливан Д. *Геометрическая топология.* М.: Мир, 1975

[8] Тайманов И. А. *Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками* // Труды Математического института РАН. 1994. Т. 205. С. 150–163.

[9] Alekseevsky D., Dotti Miatello I., Ferraris C. *Homogeneous Ricci positive 5-manifolds* // Pacific. J. Math. 1996. Vol. 175. No. 1. P. 1–12.

[10] Barden D. *Simply connected five-manifolds* // Ann. Math. 1965 Vol. 82. P. 365–385.

[11] Berard Bergery L. *Les variétés Riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impair à courbure strictement positive* // J. Pure Math. Appl. 1976. Vol. 55. P. 47–68.

[12] Bott R. *An application of the Morse Theory to the topology of Lie groups* // Bull. Soc. Math. France. 1956. Vol. 84. P. 251–281.

[13] Cheeger J. *Some examples of manifolds of nonnegative curvature* // J. Diff. Geom. 1973. Vol. 8. No. 3. P. 623–628.

[14] Eschenburg J.-H. *New examples of manifolds with strictly positive curvature* // Invent. Math. 1982. Vol. 66. P. 469–480.

[15] Eschenburg J.-H. *Inhomogeneous spaces of positive curvature* // Differential Geom. Appl. 1992. V. 2. No. 2. P. 123–132.

[16] Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C. *The homotopy Lie algebra for finite complexes* // Publ. de l'IHÉS. 1977. Vol. 47. P. 269–331.

[17] Félix Y., Halperin S., Thomas J.-C. *Rational homotopy theory.* New York: Springer, 2001.

[18] Freedman M. H. *The topology of four-dimensional manifolds.* // J. Diff. Geom. 1982. Vol. 17. P. 357-454.

[19] Friedlander J.B., Halperin S. *An arithmetic characterization of the rational homotopy groups of certain spaces* // Invent. Math. 1979. Vol. 53. P. 117–133.

[20] Gromoll D., Meyer W. *An exotic sphere with nonnegative sectional curvature* // Ann. Math. 1974. Vol. 100. P. 401–406.

[21] Halperin S. *Finiteness in the minimal models of Sullivan* // Trans. AMS. 1979. Vol. 230. P. 173–199.

[22] Halperin S. *Lectures on minimal models* // Mémoires S.M.F. (N.S.) 1983. Vol. 9–10.

[23] Kapovitch V., Ziller W. *Biquotients with singly generated rational cohomology* // Geom. Dedicata. 2004. Vol. 104. P. 149–160.

[24] Lehmann D. *Théorie homotopique des formes différentielles (d'après D. Sullivan)* // Astérisque, 1977. Vol. 45

[25] O'Neill B. *The fundamental equations of a submersion* // Michigan Math. J. 1966. Vol. 13. P. 459–469.

[26] Paternain G. P. *On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows* // Ergod. Theory Dynam. Syst. 1992. Vol.12. P. 109–121.

[27] Paternain G. P., Petean J. *Minimal entropy and collapsing with curvature bounded from below* // Invent. Math. 2003. Vol. 151. P. 415–450.

[28] Quillen D. *Rational homotopy theory* // Ann. Math. 1969. Vol. 90. P. 205–295.

[29] Smale S. *On the structure of 5-manifolds* // Ann. Math. 1962. Vol. 75. P. 38–46.

[30] Sullivan D. *Infinitesimal computations in topology* // Publ. Math. de l'IHÉS. 1977. Vol. 47. P. 269–331.

[31] Totaro B. *Cheeger manifolds and the classification of biquotients* // J. Diff. Geom. 2002. Vol. 61. P. 397–451.

[32] Totaro B. *Curvature, diameter, and quotient manifolds* // Math. Res. Lett. 2003. Vol. 10. No. 2–3. P. 191–203.

[33] Wallach N. *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature* // Ann. Math. 1972. Vol. 96. P. 277–295.

Работы автора по теме диссертации

[34] Павлов А. В. *Оценки чисел Бетти рационально эллиптических пространств.* // Сиб. мат. журн. 2002, Т. 43. №6. С. 1332–1338.

[35] Павлов А. В. *О классификации пятимерных двойных частных групп Ли* // IV Международная конференция по математическому моделированию. Тезисы докладов. Якутск, 2004. С. 128–129.

[36] Павлов А. В. *Пятимерные двойные частные групп Ли.* Новосибирск, 2004. 8 с. (Препринт / РАН. Сиб. отделение. Ин-т математики; № 141)[*)]

*) В печати: Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6.