

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Рыбников Иван Павлович

**Минимальные лагранжевы подмногообразия
в проективных комплексных пространствах
в терминах функции Бейкера–Ахиезера**

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доцент

А. Е. Миронов

д. ф.-м. н., профессор, чл. корр. РАН

И. А. Тайманов

Новосибирск–2011

Оглавление

Введение	3
1 Минимальные лагранжевы подмногообразия с диагональной метрикой в \mathbb{CP}^n	16
1.1 Уравнения лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n	17
1.2 Лагранжев угол лагранжева подмногообразия	19
1.3 Критерий минимальности погружений в \mathbb{CP}^n	22
1.4 Функция Бейкера–Ахиезера	25
1.5 Лагранжевы подмногообразия в \mathbb{CP}^n	28
1.6 Минимальные лагранжевы погружения	31
1.7 Формулы для минимальных лагранжевых погружений в случае гиперэллиптической спектральной кривой	34
1.8 Примеры минимальных лагранжевых погружений, соответствующих сингулярным спектральным кривым . . .	38
2 Криволинейные ортогональные системы координат в S^n и H^n	46
2.1 Конструкция Кричевера построения криволинейных ортогональных координат в \mathbb{R}^n	46
2.2 Модификация конструкции Кричевера	48
2.3 Ортогональные координаты на пространствах постоянной кривизны, отвечающие сингулярным кривыми. Примеры. .	52

Введение

Подмногообразие в $\mathbb{C}P^n$ вещественной размерности n называется лагранжевым, если на нем зануляется симплектическая форма Фубини–Штуди. Подмногообразие минимально, если его вектор средней кривизны тождественно равен нулю.

Минимальные лагранжевы подмногообразия интересны как с точки зрения интегрируемых систем, так и с точки зрения их приложений в аналитической механике (см. [1]). Так же такие подмногообразия играют важную роль в теории струн, точнее в их приложениях к зеркальной симметрии. В математическом описании зеркальной симметрии, предложенном в [2], зеркальная симметрия между многообразиями Калаби–Яо L_1 и L_2 объясняется в терминах двойственных трехмерных минимальных лагранжевых торов и некоторых трехмерных сингулярных лагранжевых подмногообразий.

Для $\mathbb{C}P^2$ теория **ML**-торов хорошо изучена. Первые явные примеры таких торов получены Кастро и Урбано в [3]. Торы, построенные в (3), обладают свойством, инвариантности относительно действия некоторой однопараметрической группы изометрий $\mathbb{C}P^2$. Это условие для минимального лагранжева подмногообразия позволяет в окрестности

каждой точки ввести конформный параметр $z = x + iy$ так, что индуцированная метрика g имеет вид $g = e^{u(x)} dz d\bar{z}$. Известно, что функция u должна удовлетворять уравнению Цицейки, но поскольку u зависит от одной переменной, это уравнение переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u_{xx} + e^{2u} - e^{-4u} = 0. \quad (1)$$

Решения уравнения (1) известны, они выражаются в эллиптических функциях. В [3] из этих решений выбираются двоякопериодические, и по этим решениям строятся торы.

В [4] Хаскинс строит примеры минимальных лагранжевых конусов в \mathbb{C}^3 , инвариантных относительно действия $U(1)$. Задача построения таких конусов и минимальных лагранжевых подмногообразий эквивалентны (см. параграф 1.1). Конусы в [4] определяются следующим образом. Для любого компактного связного ориентированного подмногообразия Σ в S^{2n-1} определим конус $C(\Sigma) \subset \mathbb{C}^n$:

$$C(\Sigma) = \{tx : t \in \mathbb{R} \geq 0, x \in \Sigma\}.$$

Причем $C(\Sigma)$ является минимальным лагранжевым конусом тогда и только тогда, когда Σ — минимальной лагранжево подмногообразия в S^{2n-1} . Основным результатом этой статьи является построение двухпараметрического семейства минимальных лежандровых отображений $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^5$, и нахождение условий двоякопериодичности таких отображений. То есть построено семейство таких минимальных лагранжевых торов, что их пересечение с S^5 являются торами. Ключом к такому построению служит тот факт, что конформное

гармоническое отображение является минимальным, а также связь между S^1 –инвариантными гармоническими отображениями $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^5$ и полность интегрируемой системой Неймана, описывающей движение на сфере под действием квадратичного потенциала. Действительно, гармоническое отображение $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^5$ должно удовлетворять следующему уравнению

$$\Delta u = -(u, \Delta u)u. \quad (2)$$

Из инвариантности u относительно действия S^1 следует, что u имеет вид:

$$u(s, t) = e^{As} z(t), \quad (3)$$

где $A \in so(6)$, $z : \mathbb{R} \rightarrow S^5$. Для (3) условие (2) переписывается в следующем виде:

$$z_{tt} + A^2 z = -(|z_t| + |Az|^2)z. \quad (4)$$

Уравнение (4) описывает движение по сфере под действием потенциала $|Az|^2$, то есть являются системой Неймана, решения которой известны. Для построения искомых минимальных лежандровых торov остается выбрать такие решения этой системы, чтобы были выполнены условие конформности и лежандровости отображения u :

$$|u_s| - |u_t| = 0, \quad (u_s, u_t) = 0,$$

$$\omega(u, u_s) = \omega(z, Az) = 0, \quad \omega(u, u_t) = \omega(z, z_t) = 0.$$

Такие решения найдены в [4], в том числе и двоякопериодические.

Отметим, что большинство методов построения минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^2 это наложение дополнительных ограничений на эти подмногообразия, чтобы нелинейные дифференциальные уравнения, их описывающие, сводились к о.д.у.

Как уже отмечалось, конформная метрика $(ds^2 = 2e^w dz d\bar{z})$ минимального лагранжева тора в \mathbb{CP}^2 удовлетворяет уравнению Циццейки:

$$w_{z\bar{z}} = e^{-2w} - e^w.$$

В [5] Шариповым найдены квазипериодические решения этого уравнения и фактически формулы, полученные в этой работе, пригодны для построения всех минимальных лагранжевых торов (см. [6],[7]). Отметим также работу [8]. В этой работе минимальные лагранжевы подмногообразия ищутся как композиция отображений $\mathcal{H}\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$, где \mathcal{H} — проекция Хопфа, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \subset \mathbb{C}^3$, φ удовлетворяет следующим уравнениям

$$\langle \varphi, \varphi_x \rangle = \langle \varphi, \varphi_y \rangle = \langle \varphi_x, \varphi_y \rangle = 0. \quad (5)$$

Решения системы (5) задают лагранжевы погружения в \mathbb{CP}^2 . Решения системы (5) находятся с помощью модифицированной конструкции Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат и выражаются в терминах функции Бейкера–Ахиезера алгебраической спектральной кривой. Чтобы из класса лагранжевых отображений выделить минимальные, в [8] находятся дополнительные ограничения на спектральные данные полученных решений (5).

В больших размерностях теория минимальных лагранжевых

подмногообразий менее развита. Такие подмногообразия описываются сложной системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и большинство методов построения частных решений — это редукция к о.д.у. В [9] Миронов находит семейство конформно плоских минимальных лагранжевых торов в \mathbb{CP}^3 . Искомые многообразия M ищутся как композиция

$$\varphi = \mathcal{H}r : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^7 \rightarrow \mathbb{CP}^3,$$

где \mathcal{H} — проекция расслоения Хопфа, индуцированная метрика на M предполагается конформной: $ds^2 = e^{v(x,y,z)}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Из минимальности, лагранжевости искомого отображения, а также из конформности метрики следует, что матрица

$$R = \begin{pmatrix} r^1 & r^2 & r^3 & r^4 \\ e^{-v}r_x^1 & e^{-v}r_x^2 & e^{-v}r_x^3 & e^{-v}r_x^4 \\ e^{-v}r_y^1 & e^{-v}r_y^2 & e^{-v}r_y^3 & e^{-v}r_y^4 \\ e^{-v}r_z^1 & e^{-v}r_z^2 & e^{-v}r_z^3 & e^{-v}r_z^4 \end{pmatrix}$$

принадлежит группе $U(4)$, $\det R = \text{const}$ (см. параграфы 1.1, 1.2). С точностью до умножения на постоянную матрицу можно считать, что $\det R = 1$, таким образом задача построения минимальных конформно плоских лагранжевых отображений сводится к поиску такого отображения $r : \mathbb{R}^3 \rightarrow S^7$, что $R \in SU(4)$. Рассмотрим матрицы $X, Y, Z \in su(4)$:

$$R_x = XR, \quad R_y = YR, \quad R_z = ZR,$$

причем должны быть выполнены условия нулевой кривизны

$$X_y - Y_x + [X, Y] = 0, \quad X_z - Z_x + [X, Z] = 0, \quad Y_z - Z_y + [Y, Z] = 0$$

В работе [9] рассматривается полностью интегрируемый случай, когда матрицы X, Y, Z зависят только от одной переменной z . В этом случае аналогом уравнения Цицейки служит уравнение

$$v'(z)^2 + e^{2v(z)} + c_3^2 e^{-6v(z)} - 2(c_1^2 + c_2^2) = 0,$$

где c_1, c_2, c_3 — некоторые константы. Это уравнение интегрируется с помощью абелева интеграла на гиперэллиптической кривой рода 2. Искомое минимальное конформно плоское лагранжево отображение имеет вид

$$r = (P(z)e^{i(\alpha_1 x + \beta_1 y)}, P(z)e^{i(\alpha_2 x + \beta_2 y)}, P(z)e^{-i((\alpha_1 + \alpha_2)x + (\beta_1 + \beta_2)y)}, P_1(z)),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ — некоторые константы, $P(z), P_1(z)$ — некоторые функции от $v(z)$ (см.[9]). Далее, чтобы получить минимальные лагранжевы торы, в [9] найдены условия, при которых данное отображение периодически по x, y, z .

В [10] Джойс строит минимальные лагранжевы конусы в \mathbb{C}^m , инвариантные относительно действия группы $G = U(1)^{m-2}$. Основным инструментом построения таких конусов служат отображения моментов (moment maps). Интерес к таким отображениям вызван тем, что лагранжевы подмногообразия в \mathbb{C}^m , инвариантные относительно действия любой подгруппы $U(m) \times \mathbb{C}^m$, где \mathbb{C}^m — группа трансляций, лежат в множествах уровней отображений моментов. В [10] показано,

что минимальный лагранжев конус в \mathbb{C}^m , инвариантный относительно действия группы $U(1)^{m-2}$ может быть задан в виде

$$\{re^{i\alpha_1}\sqrt{a_1u(t)+1}, \dots, re^{i\alpha_m}\sqrt{a_mu(t)+1} : r > 0, t \in (-\epsilon, \epsilon)\}$$

$$\alpha_j \in \mathbb{R}, \alpha_1 + \dots, +\alpha_m = \theta(t), \alpha_1 a_1 + \dots, +\alpha_m a_m = \psi(t)\},$$

где $u(t), \theta(t), \psi(t) : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции, удовлетворяющие о.д.у (см.[10]).

Исключением является работа [11], где по пересечению вещественных квадратик в евклидовом пространстве строятся минимальные и H -минимальные лагранжевые подмногообразия в \mathbb{C}^n и \mathbb{CP}^n . Погружения строятся для подмногообразий следующего вида

$$M_1 = M^k \times T^{n-k}/\mathbb{Z}_2^{n-k},$$

где M^k — k -мерное многообразие, заданное в \mathbb{R}^n системой уравнений :

$$e_{1j}u_1^2 + \dots + e_{nj}u_n^2 = d_j \quad j = 1, \dots, n-k, \quad d_j \in \mathbb{R}, \quad e_{ij} \in \mathbb{Z}.$$

T^{n-k} — $(n-k)$ -мерный тор, группа \mathbb{Z}_2^{n-k} действует свободно на $M^k \times T^{n-k}$. Если M^k является конусом с вершиной в $0 \in \mathbb{C}^n$, то эта эта конструкция дает минимальные и гамильтоново-минимальные подмногообразия в \mathbb{CP}^{n-1} для этого нужно взять пересечение образа M_1 с единичной сферой, а затем применить проекцию расслоения Хопфа. Таким способом можно получить погружения и вложения таких подмного-образий как n -мерная бутылка Клейна K^n , $K^{n-1} \times S^1$, $S^{n-2} \times S^2$, $S^{n-1} \times S^1$ и так далее. Отображение многообразия M_1 имеет следующий вид:

$$F(x, y) = (f_1(x)e^{\pi i(e_1, y)}, \dots, f_n(x)e^{\pi i(e_n, y)}),$$

где $f_i(x)$ — набор вещественных функций, задающих карту на M^k , $y \in T^{n-k}$, $e_j = (e_{j1}, \dots, e_{j(n-k)}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$.

Также в данной работе излагается метод построения криволинейных ортогональных координат в пространствах с постоянной кривизной.

Напомним некоторые результаты из классической задачи об ортогональных криволинейных системах координат в \mathbb{R}^n ($K = 0$). Пусть в ортогональной системе координат u_1, \dots, u_n метрика имеет вид

$$ds^2 = H_1^2(du_1)^2 + \dots + H_n^2(du_n)^2,$$

где $H_i(u_1, \dots, u_n)$ — коэффициенты Ламе. Тогда метрика будет плоской, если и только если выполнено

$$\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik} \beta_{kj}, i \neq j \neq k, \quad (6)$$

$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} = 0, \quad (7)$$

где β_{ij} — коэффициенты вращения $\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i}$, $i \neq j$.

Решение системы (6),(7) с применением методов теории солитонов предложено Захаровым в [12]. Уравнение (6) имеет вид абстрактной задачи n волн. К системе (6) в [12] применена процедура одевания и указана дифференциальная редукция, позволяющая находить решение всей системы (6),(7). Процедура интегрирования методом обратной задачи рассеяния уравнений, описывающих ортогональные системы координат в пространствах диагональной кривизны (пространства постоянной кривизны являются пространствами диагональной кривизны), описана Захаровым в [13].

Метод конечнозонного интегрирования к задаче построения криволинейных ортогональных систем координат в \mathbb{R}^n применен Кричевером в [14]. В конструкции Кричевера координатные функции $x^j(u_1, \dots, u_n)$, $j = 1, \dots, n$ выписываются в явном виде как

$$x^j(u_1, \dots, u_n) = \psi(u_1, \dots, u_n, Q_j),$$

где Q_j — точки римановой поверхности Γ , и $\psi(u_1, \dots, u_n, z)$, где $z \in \Gamma$, является n -точечной функцией Бейкера–Ахиезера.

Связь плоских диагональных метрик с интегрируемыми системами гидродинамического типа [15] была открыта Царевым [16] в 1984 году, что возобновило интерес к классической задаче описания ортогональных криволинейных систем координат в плоском пространстве и ее приложениям в математической физике.

С помощью плоских диагональных метрик егоровского типа возможно строить решения уравнений ассоциативности Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде [17],[14],[18].

Нетрудно проверить, что метрике постоянной кривизны K отвечает решение следующей системы

$$\partial_k \beta_{ij} = \beta_{ik} \beta_{kj}, i \neq j \neq k, \quad (8)$$

$$\partial_i \beta_{ij} + \partial_j \beta_{ji} + \sum_{m \neq i, j} \beta_{mi} \beta_{mj} = -K H_i H_j, \quad (9)$$

где, как и ранее, $\beta_{ij} = \frac{\partial_i H_j}{H_i}$, $i \neq j$. Как видно, уравнения (8) и (6) совпадают.

Укажем, что метрики постоянной кривизны появляются в описании нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа (см.

[19], где условие постоянства кривизны метрики является необходимым, для того чтобы скобка Пуассона была кососимметрической и удовлетворяла тождеству Якоби). Нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, порождаемые метриками постоянной кривизны (скобки Мохова–Ферапонтова) играют важную роль в теории систем гидродинамического типа. Задача описания согласованных скобок Мохова–Ферапонтова эквивалентна задаче описания пучков метрик постоянной кривизны. Для этого достаточно классифицировать пары диагональных метрик постоянной кривизны имеющие специальный вид и эта проблема решена методом обратной задачи [20]. При этом ранее Моховым была доказана интегрируемость уравнений, описывающих плоские пучки метрик (согласованные скобки Дубровина–Новикова), и отвечающие важным редукциям уравнений (6),(7).

Отметим также, что в [21] построены пары Лакса со спектральным параметром и для значительно более общих классов ортогональных криволинейных координат в пространствах постоянной кривизны, описываемых более общими интегрируемыми редукциями уравнений (8),(9) и отвечающих паре согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа, одна из которых — скобка Мохова–Ферапонтова, а вторая — произвольная нелокальная скобка Пуассона гидродинамического типа. При этом в [22] показано, что сами интегрируемые уравнения (8),(9), являются условием совместности для линейной системы, но без спектрального параметра. Спектральный параметр появляется для важных в теории систем гидродинамического типа интегрируемых

редукций системы (8),(9), связанных с согласованными нелокальными скобками Пуассона гидродинамического типа.

В этой работе мы укажем спектральные данные, для которых координатные функции, записанные в терминах функции Бейкера–Ахиезера, будут описывать ортогональные системы координат на пространствах постоянной кривизны $K \neq 0$. Мы также дадим частные решения уравнений (8),(9) в явном виде.

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Каждая глава в свою очередь разбита на несколько параграфов. Нумерация формул состоит из двух чисел—номер главы и порядковый номер формулы в главе. Для предложений и теорем используется сплошная нумерация. Замечания пронумерованы номером главы и порядковым номером в главе.

В первой главе излагается метод построения минимальных лагранжевых подмногообразий в проективных комплексных пространствах произвольной размерности. В первом параграфе этой главы объясняется почему лагранжевы подмногообразия в \mathbb{CP}^n можно задавать как композицию $\mathcal{H}\varphi$, где \mathcal{H} — проекция Хопфа, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{2n+1}$, φ удовлетворяет следующей системе:

$$\langle \varphi, \varphi_{x_1} \rangle = \cdots = \langle \varphi, \varphi_{x_n} \rangle = \langle \varphi_{x_i}, \varphi_{x_j} \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (10)$$

. Во втором параграфе напомним определение лагранжева угла, поскольку с помощью этого угла удобно показывать минимальность лагранжева многообразия: у минимального лагранжева многообразия этот угол равен константе. В третьем параграфе параграфе находятся дополнительные условия на функцию φ из первого параграфа, чтобы

отображение, которое она задает, было минимальным. В четвертом параграфе упоминается определение функции Бейкера–Ахиезера, поскольку в ее терминах будут найдены решения системы (10). В пятом параграфе указываются ограничения на спектральные данные функции Бейкера–Ахиезера, чтобы отображений вида $\alpha_i \psi(x, P)$, где $\psi(x, P)$ — функция Бейкера–Ахиезера, α_i — некоторые константы, удовлетворяли условиям (10). Также в этом параграфе сформулирована теорема, позволяющая строить лагранжевы подмногообразия в \mathbb{CP}^n . В шестом параграфе находятся дополнительные ограничения на отображение φ , чтобы отображение $\mathcal{H}\varphi$ задавало минимальное погружение в \mathbb{CP}^n . В этом параграфе сформулирована основная теорема этой работы, позволяющая строить минимальные лагранжевы подмногообразия в \mathbb{CP}^n . В седьмом параграфе применяется теорема, полученная в предыдущем параграфе, для получения формул для минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n , соответствующих гиперэллиптической спектральной кривой. В восьмом параграфе с помощью теоремы из параграфа шесть строятся примеры минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n , соответствующих сингулярным спектральным кривым.

Во второй главе излагается метод построения криволинейных ортогональных систем координат в пространствах с постоянной кривизной. В первом параграфе этой главы упоминается конструкция Кричевера построения криволинейных ортогональных систем координат в \mathbb{R}^n . Во втором параграфе указывается модификация конструкции Кричевера, позволяющая строить криволинейные ортогональные

системы координат в пространствах с постоянной кривизной и сформулирована основная теорема этой главы. В третьем параграфе с помощью теоремы из предыдущего параграфа строятся ортогональные криволинейные системы координат на S^2, H^2 .

Автор выражает глубокую благодарность А.Е. Миронову за постановку задачи и внимание к работе, И.А. Тайманову за внимание к работе и поддержку, а также всему коллективу кафедры геометрии и топологии Новосибирского государственного университета за доброжелательную атмосферу.

Глава 1

Минимальные лагранжевы

подмногообразия с

диагональной метрикой в \mathbb{CP}^n

Результаты этой главы опубликованы в [28]. В этой главе мы изложим метод построения минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n . Эти многообразия будут построены как композиция некоторой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$ и проекции Хопфа. В первых параграфах будет показано, каким нелинейным уравнениям должно удовлетворять φ , чтобы она задавала минимальные лагранжевы одмногообразия. Затем мы напомним определение функции Бейкера–Ахиезера, и покажем, как в терминах этой функции решить полученные нелинейные уравнения. Также мы построим конкретные примеры минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^3 , в терминах функции Бейкера–Ахиезера, соответствующей как гладкой так и сингулярной спектральной кривой.

1.1 Уравнения лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n

В этом параграфе мы выведем уравнения, которым должны удовлетворять отображения. $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$, чтобы их образ был лагранжевым подмногообразием в \mathbb{CP}^n .

Эрмитова структура задается в \mathbb{CP}^n следующим образом. Выберем в точке $p \in \mathbb{CP}^n$ вектора η_1, η_2 — касательные вектора к \mathbb{CP}^n . Обозначим через ξ_1, ξ_2 горизонтальные поднятия векторов η_1, η_2 , на S^{2n+1} . То есть это такие вектора, которые ортогональны S_p^1 — слою расслоения Хопфа, соответствующего точке p . Тогда эрмитово произведение векторов η_1, η_2 можно определить следующим образом

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{FS} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — эрмитово скалярное произведение в \mathbb{C}^{n+1} . Вещественная и мнимая часть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называются соответственно метрикой Фубини–Штуди и симплектической формой Фубини–Штуди.

Искомое минимальное лагранжево отображение будем искать как композицию следующих отображений

$$\mathcal{H} \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n,$$

где

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1},$$

\mathcal{H} — проекция Хопфа. Причем φ должно удовлетворять следующим уравнениям:

$$\langle \varphi, \varphi_{x_1} \rangle = \cdots = \langle \varphi, \varphi_{x_n} \rangle = \langle \varphi_{x_i}, \varphi_{x_j} \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad (1.1)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — эрмитово скалярное произведение в \mathbb{C}^{n+1} , $\langle \cdot, \cdot \rangle = (\cdot, \cdot) - i\omega(\cdot, \cdot)$, здесь (\cdot, \cdot) — евклидово скалярное произведение в \mathbb{C}^{n+1} , $\omega(\cdot, \cdot)$ — симплектическая форма в \mathbb{C}^{n+1} . Тогда образ $\mathcal{H}\varphi$ будет лагранжевым подмногообразием в \mathbb{CP}^n . Действительно, рассмотрим минимальный лагранжев конус Σ в \mathbb{C}^{n+1} и единичную сферу

$$S^{2n+1} = \{Z \in \mathbb{C}^{n+1} / \langle Z, Z \rangle = 1\}.$$

Обозначим через \mathcal{L} пересечение этого конуса с единичной сферой: $\mathcal{L} = S^{2n+1} \cap \Sigma$. Заметим, что \mathcal{L} полностью определяет Σ . В любой точке $p \in \mathcal{L} \subset \Sigma$ выберем базис $(\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ в $T_p\Sigma$ так, что $\xi_{n+1} = p$. Из лагранжевости Σ и свойств симплектической формы следуют равенства

$$\omega(\varphi, \varphi_{x_i}) = (i\varphi, \varphi_{x_i}) = 0, i = 1, \dots, n,$$

откуда получаем, что касательное пространство к \mathcal{L} ортогонально слою расслоения Хопфа S^1_p . Откуда, учитывая, что проекция Хопфа — это риманова субмерсия, получаем, что $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ локально изометрично \mathcal{L} . Поскольку по построению на \mathcal{L} зануляется симплектическая форма, то, $\mathcal{H}(\mathcal{L})$ будет лагранжевым подмногообразием в \mathbb{CP}^n .

Первые n равенств (1.1) обеспечивают локальную изометричность φ и $\mathcal{H}(\varphi)$. Остальные равенства обеспечивают то, что на φ зануляется симплектическая форма. Поэтому $\mathcal{H}\varphi$ будет задавать лагранжево подмногообразие в \mathbb{CP}^n .

В этом параграфе мы вывели достаточные условия лагранжевости отображения $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$ и показали эквивалентность задач построения минимальных лагранжевых конусов в \mathbb{C}^{n+1} и минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n .

1.2 Лагранжев угол лагранжева подмногообразия

В этом параграфе мы напомним определение лагранжева угла и укажем формулу для его вычисления в случае $\mathbb{C}P^n$.

В [23] Вольфсон определил лагранжев угол следующим образом. Положим L — лагранжево подмногообразие в симплектическом пространстве P . Выберем ориентацию на L и положим K — каноническое линейное расслоение над P со связностью ∇ , индуцированной связностью Леви-Чевиты. Сечения K это голоморфные n -формы над P . Рассмотрим форму σ , норма которой в каждой точке L равна 1 и которая параллельна на L в индуцированной связности: $\nabla_L \sigma = 0$. В каждой точке $p \in L$ выберем ортонормированный касательный репер ξ , согласованный с ориентацией. Тогда лагранжевым углом подмногообразия L в точке x называется функция $\beta(x)$, определяемая из равенства

$$\sigma(\xi) = e^{i\beta(x)}.$$

От выбора ξ $\beta(x)$ не зависит, $\beta(x)$, в общем случае $\beta(x)$ многозначная функция, при обходе по циклу она может менять свои значения на $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Также Вольфсон показал, что $d\beta = \omega(H, \cdot)$, где H — вектор средней кривизны в точке x .

В силу лагранжевости L и свойств $\beta(x)$ имеем

$$(J_P H, V) = \omega(H, V) = d\beta(V) = (\text{grad} \beta, V)_P,$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение на P , V — касательный вектор к L ,

J_P — комплексная структура на P . Из предыдущих равенств получаем

$$H = -J_P \text{grad} \beta. \quad (1.2)$$

Равенство (1.2) дает нам критерий минимальности: у минимального лагранжева многообразия лагранжев угол равен константе.

Покажем как можно вычислять лагранжев угол в случае, когда $P = \mathbb{CP}^n$. Определим n -форму σ на L следующим образом: в точке $\mathcal{H}(p)$, $p \in S^{2n+1}$ выберем касательный L репер η_1, \dots, η_n и возьмем его горизонтальное поднятие ξ_1, \dots, ξ_n на S^{2n+1} : $d\mathcal{H}(\xi_i) = \eta_i$. Зададим форму σ следующим образом:

$$\sigma(\eta_1, \dots, \eta_n) = \sigma(d\mathcal{H}(\xi_1, \dots, \xi_n)) = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n+1}(\xi_1, \dots, \xi_n, p).$$

Покажем, что с помощью σ , определенной таким образом, можно посчитать лагранжев угол L . Для этого нам нужно показать, что $\nabla_L \sigma = 0$, где ∇ — связность в каноническом расслоении к \mathbb{CP}^n , согласованная со связностью Леви-Чевиты. Имеет место следующая лемма

Лемма 1. *Форма σ является параллельной на L для связности ∇_L .*

Доказательство. Рассмотрим на L произвольный путь $s(t)$, также рассмотрим произвольный касательный репер η_1, \dots, η_n к \mathbb{CP}^n , пусть этот репер параллелен вдоль $s(t)$. Если мы покажем, что $\sigma(\eta(t))$ не зависит от t , то это будет означать, что $\nabla_L \sigma = 0$.

Обозначим $\tilde{s}(t)$ горизонтальное поднятие пути $s(t)$ на \tilde{L} , где $\tilde{L} \subset S^{2n+1}$, $\mathcal{H}(\tilde{L}) = L$. Также обозначим репером $\xi(t) = (\xi_1(t), \dots, \xi_n(t))$ горизонтальное поднятие репера $\eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))$ на \tilde{L} . Для

связности Леви-Чевиты D и векторных полей X , Y имеет место следующее разложение

$$D_X Y = H D_X Y + V D_X Y,$$

где $H D_X Y$ и $V D_X Y$ соответственно горизонтальная составляющая проекции Хопфа. Ясно, что $d\mathcal{H}(H D_X Y) = \tilde{D}_{d\mathcal{H}(X)} d\mathcal{H}(X)$, где \tilde{D} — связность Леви-Чевита на \mathbb{CP}^n . Рассмотрим вектор $\frac{d\xi_i}{dt}$. Поскольку $\xi(t)$ — горизонтальное поднятие репера $\eta(t)$, параллельного на L , то ясно, что проекция вектора $\frac{d\xi_i}{dt}$ не должна иметь горизонтальной составляющей, то есть $\frac{d\xi_i}{dt} = f_i(t)\tilde{s}(t)$, где $\tilde{s}(t)$ — некоторая комплекснозначная функция. По введенному выше определению, имеем

$$\sigma(\eta(t)) = \det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n \\ \tilde{s}(t) & \cdots & \tilde{s}(t) \end{pmatrix},$$

где $(\xi_1^i, \dots, \xi_n^i)$ — координаты вектора ξ_i , $\tilde{s}(t)$ — координаты точки пути $\tilde{s}(t)$. Продифференцируем это равенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sigma(\eta(t)) &= \det \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} \xi_1^1 & \cdots & \frac{d}{dt} \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n \\ \tilde{s}(t) & \cdots & \tilde{s}(t) \end{pmatrix} + \dots \\ &+ \det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dt} \xi_1^n & \cdots & \frac{d}{dt} \xi_n^n \\ \tilde{s}(t) & \cdots & \tilde{s}(t) \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \xi_1^1 & \cdots & \xi_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \xi_1^n & \cdots & \xi_n^n \\ \frac{d}{dt} \tilde{s}(t) & \cdots & \frac{d}{dt} \tilde{s}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Первые n определителей равны нулю, так как вектора $\frac{d\xi_i}{dt} = f_i(t)\tilde{s}(t)$ и $\tilde{s}(t)$ линейно зависимы. Последний определитель также равен нулю, поскольку векторы $\eta_1(t), \dots, \eta_n(t), \frac{ds}{dt}$ линейно зависимы, а значит и их горизонтальные поднятия также линейно зависимы. Лемма доказана.

Таким образом в этом параграфе мы показали, что лагранжев угол минимального лагранжева многообразия равен константе и предложили способ вычисления этого угла в случае лагранжевых подмногообразий в \mathbb{CP}^n .

1.3 Критерий минимальности погружений в \mathbb{CP}^n

В этом параграфе мы укажем каким дополнительным условиям должно удовлетворять отображение φ , построенное в параграфе (1.1), чтобы у лагранжева подмногообразия, являющегося образом $\mathcal{H}\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$, где \mathcal{H} — проекция Хопфа, лагранжев угол был константой, то есть, чтобы это подмногообразие было минимально.

Поскольку из условий (1.1) следует, что метрика, индуцированная отображением φ , имеет диагональный вид, введем следующие обозначения:

$$|\varphi_{x_1}|^2 = 2e^{v_1(x)}, \dots, |\varphi_{x_n}|^2 = 2e^{v_n(x)}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

тогда из (1.1) следует, что матрица

$$\tilde{\Phi} = \left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_1}{2}} \varphi_{x_1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_n}{2}} \varphi_{x_n} \right)^\top$$

принадлежит группе $U(n+1)$. Определим лагранжев угол $\beta(x)$:

$$e^{i\beta(x_1, \dots, x_n)} = \det \tilde{\Phi}.$$

Через лагранжев угол выражается вектор средней кривизны H лагранжевого подмногообразия (см. [12]):

$$H = J\nabla\beta,$$

где J — комплексная структура в $\mathbb{C}P^n$. В частности, если $\beta = \text{const}$, то подмногообразие минимально.

Разложим вектор-функции $\varphi_{x_i x_j}$ по базису $\varphi_{x_1}, \dots, \varphi_{x_n}, \varphi$:

$$\varphi_{x_1 x_1} = \Gamma_{11}^1 \varphi_{x_1} + \dots + \Gamma_{11}^n \varphi_{x_n} + b_{11} \varphi,$$

...

$$\varphi_{x_i x_j} = \Gamma_{ij}^1 \varphi_{x_1} + \dots + \Gamma_{ij}^n \varphi_{x_n} + b_{ij} \varphi,$$

...

$$\varphi_{x_n x_n} = \Gamma_{nn}^1 \varphi_{x_1} + \dots + \Gamma_{nn}^n \varphi_{x_n} + b_{nn} \varphi.$$

Справедлива

Лемма 2. *Имеет место равенство:*

$$\Gamma_{1i}^1 + \dots + \Gamma_{ni}^n = \frac{1}{2}(v_{1x_i} + \dots + v_{nx_i}) - i\beta_{x_i}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi^1 & \dots & \dots & \dots & \varphi^{n+1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_1}{2} + i\frac{\beta}{n}} \varphi_{x_1}^1 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_1}{2} + i\frac{\beta}{n}} \varphi_{x_1}^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_n}{2} + i\frac{\beta}{n}} \varphi_{x_n}^1 & \dots & \dots & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_n}{2} + i\frac{\beta}{n}} \varphi_{x_n}^{n+1} \end{pmatrix} \in SU(n+1).$$

Матрица Φ удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Phi_{x_1} = A_1 \Phi, \dots, \Phi_{x_n} = A_n \Phi, \quad (1.3)$$

где матрицы $A_1, \dots, A_n \in su(n+1)$ и имеют следующий вид:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & ia_1^1 & & & \\ & & ia_2^1 & & * \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ * & & & \dots & \\ & & & & ia_n^1 \end{pmatrix},$$

$$\dots$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & ia_1^n & & & \\ & & ia_2^n & & * \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ * & & & \dots & \\ & & & & ia_n^n \end{pmatrix},$$

где $a_j^i(x)$ — некоторые вещественные функции, причем

$$a_n^i = -ia_1^i - \dots - ia_{n-1}^i. \quad (1.4)$$

Здесь мы ограничились выписыванием только диагональных элементов матриц A_i , поскольку только они понадобятся нам в дальнейшем.

Справедливо равенство

$$\Gamma_{1i}^1 = ia_1^i + \frac{1}{2}v_{1x_i} - i\frac{\beta_{x_i}}{n}.$$

Действительно, из (1.3) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_1}{2} + i\frac{\beta}{n}\varphi_{x_1}} \right)_{x_i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{v_{1x_i}}{2} + i\frac{\beta_{x_i}}{n} \right) e^{-\frac{v_1}{2} + i\frac{\beta}{n}\varphi_{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{v_1}{2} + i\frac{\beta}{n}\varphi_{x_1x_i}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} ia_1^i e^{-\frac{v_1}{2} + i\frac{\beta}{n}\varphi_{x_1}}, \end{aligned}$$

что дает требуемое равенство. Аналогично получаем

$$\Gamma_{ji}^j = ia_j^i + \frac{1}{2}v_{jx_i} - i\frac{\beta_{x_i}}{n}.$$

Следовательно,

$$\Gamma_{1i}^1 + \dots + \Gamma_{ni}^n = i(a_1^i + \dots + a_n^i) + \frac{1}{2}(v_{1x_i} + \dots + v_{nx_i}) - i\beta_{x_i}.$$

Из (1.4) следует утверждение леммы 1.

Лемма 1 дает следующий критерий минимальности.

Следствие 1. *Если $\operatorname{Im}(\Gamma_{1i}^1 + \dots + \Gamma_{ni}^n) = 0$, то подмногообразие минимально.*

1.4 Функция Бейкера–Ахиезера

В этом параграфе мы дадим определение n –точечной функции Бейкера–Ахиезера, поскольку в ее терминах будут найдены решения системы (1.1). Отметим, что многоточечная функция Бейкера–Ахиезера (при

$n = 2$) впервые возникла в [24]. Функция Бейкера–Ахиезера строится по набору спектральных данных

$$\{\Gamma, P, \gamma, r, k_1^{-1}, \dots, k_n^{-1}\},$$

где Γ — риманова поверхность рода g , $P = P_1 + \dots + P_n$, $\gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ — два дивизора на Γ , $r \in \Gamma$ — фиксированная точка, k_i^{-1} — локальные параметры в окрестностях P_i . Тогда n -точечная функция Бейкера–Ахиезера $\psi(x, P)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $P \in \Gamma$ обладает следующими свойствами:

1. в окрестностях P_j функция ψ имеет существенные особенности:

$$\psi = e^{ik_j x_j} \left(f_j(x) + \frac{g_j(x)}{ik_1} + \frac{h_j(x)}{k_1^2} + \dots \right);$$

2. ψ мероморфна на $\Gamma \setminus \{\bigcup P_i\}$ с простыми полюсами в точках γ_j , $j = 1, \dots, g$;

3. выполнено условие нормировки $\psi(x, r) = d$, $d \in \mathbb{C}$;

Для спектральных данных общего положения существует единственная функция Бейкера–Ахиезера. Также функцию Бейкера–Ахиезера явным образом можно выразить через тэта-функцию поверхности: Выберем на поверхности Γ базис циклов $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ с индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}, i, j = 1 \dots g.$$

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_g$ — базис голоморфных дифференциалов и нормированный условиями $\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. Матрица b -периодов $B_{ij} = \int_{b_i} \omega_j$ симметрическая и ее мнимая часть положительно определена.

Тэта-функция Римана задается абсолютно сходящимся рядом

$$\theta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i(Bm, m) + 2\pi i(m, z)}, z = (z_1, \dots, z_g) \in \mathbb{C}^g$$

Для тэта-функции справедливы свойства

$$\theta(z + m) = \theta(z), \theta(z + Bm) = \exp(-\pi i(Bm, m) - 2\pi i(m, z)) \theta(z), m \in \mathbb{Z}^g.$$

Пусть X — многообразие Якоби поверхности Γ :

$$X = \mathbb{C}^g / \{\mathbb{Z}^g + B\mathbb{Z}^g\}.$$

Пусть $A : \Gamma \rightarrow X$ — отображение Абеля, заданное как

$$A(S) = \left(\int_{q_0}^S \omega_1, \dots, \int_{q_0}^S \omega_g \right), S \in \Gamma,$$

для некоторой фиксированной точки q_0 . Для точек в общем положении $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ по теореме Римана функция $\theta(z + A(S))$, где $z = K_\Gamma - A(\gamma_1) - \dots - A(\gamma_g)$, K_Γ — вектор римановых констант, имеет на Γ ровно g нулей $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Обозначим через Ω^i , $i = 1 \dots n$ мероморфный дифференциал с полюсом в точке P_i вида $d\Omega_i = d(k_i + O(k_i^{-1}))$ и нормированный условиями $\int_{a_j} \Omega^i = 0, j = 1, \dots, g$. Пусть $U^i = \left(\int_{b_1} \Omega^i, \dots, \int_{b_g} \Omega^i \right), i = 1 \dots n$. Пусть $\tilde{\psi}$ — функция вида

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(u^1, \dots, u^n, S) &= \frac{\theta(A(S) + u^1 U^1 + \dots + u^n U^n + z)}{\theta(A(S) + z)} \\ &\exp \left(2\pi i u_1 \int_{q_0}^S \Omega^1 + \dots + 2\pi i u^n \int_{q_0}^S \Omega^n \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

При $l = 0$, функция Бейкера-Ахиезера имеет вид $\psi(u^1, \dots, u^n, S) = f(u^1, \dots, u^n) \tilde{\psi}(u^1, \dots, u^n, S)$, и функция f определяется из условия

нормировки $\psi(u^1, \dots, u^n, r) = h$. При $l > 0$ функция Бейкера-Ахиезера представляется в виде $\psi = f\tilde{\psi} + f_1\tilde{\psi}_1 + \dots + f_l\tilde{\psi}_l$, где функция $\tilde{\psi}_j$ строится аналогично $\tilde{\psi}$ по дивизору $\gamma_1 + \dots + \gamma_{g-1} + r_j$, и функции f и f_j находятся из условий нормировки.

1.5 Лагранжевы подмногообразия в \mathbb{CP}^n

В этом параграфе мы найдем такие ограничения на спектральные данные функции Бейкера-Ахиезера, определенной в параграфе (1.4), что отображение φ , построенное в терминах этой функции будет минимально. Введем следующие функции:

$$\varphi^i = \alpha_i \psi(x, Q_i),$$

где $Q_1, \dots, Q_{n+1} \in \Gamma$, α_i — некоторые константы. В этом параграфе найдены ограничения на спектральные данные, чтобы вектор-функция $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^{n+1})$ задавала лагранжево погружение \mathbb{R}^n в \mathbb{CP}^n .

Пусть для поверхности Γ существует антиголоморфная инволюция μ , для которой точки P_1, \dots, P_n неподвижны и

$$k_i(\mu(P)) = \overline{k_i(P)}.$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1. Пусть Q_1, \dots, Q_n, r — неподвижные точки μ . Предположим, что на Γ существует мероморфная 1-форма Ω со следующими дивизорами нулей и полюсов

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu\gamma + P_1 + \dots + P_n,$$

$$(\Omega)_\infty = Q_1 + \dots + Q_{n+1} + r,$$

тогда функции φ^i удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\varphi^1 \bar{\varphi}^1 A_1 + \dots + \varphi^n \bar{\varphi}^n A_n + |d|^2 \text{Res}_r \Omega = 0, \quad (1.6)$$

$$\varphi^1 \bar{\varphi}_{x_i}^1 A_1 + \dots + \varphi^n \bar{\varphi}_{x_i}^n A_n = 0, \quad (1.7)$$

$$\varphi_{x_i}^1 \bar{\varphi}_{x_j}^1 A_1 + \dots + \varphi_{x_i}^n \bar{\varphi}_{x_j}^n A_n = 0, \quad i \neq j, \quad (1.8)$$

$$\varphi_{x_i}^1 \bar{\varphi}_{x_i}^1 A_1 + \dots + \varphi_{x_i}^n \bar{\varphi}_{x_i}^n A_n + |f_i|^2 c_i = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.9)$$

где $A_k = \frac{\text{Res}_{Q_k} \Omega}{|\alpha_k|^2}$, $k = 1, \dots, (n+1)$, c_1, \dots, c_n — коэффициенты разложения формы Ω в окрестностях P_1, \dots, P_n :

$$\Omega = (c_1 w_1 + a_1 w_1^2 + \dots) dw_1, \quad w_1 = \frac{1}{k_1},$$

...

$$\Omega = (c_n w_n + a_n w_n^2 + \dots) dw_n, \quad w_n = \frac{1}{k_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим 1-форму

$$\Omega_1 = \psi(P) \overline{\psi(\mu(P))} \Omega.$$

Из определения функции Бейкера–Ахиезера и антиголоморфности инволюции μ следуют следующие разложения в точках P_1, \dots, P_n :

$$\overline{\psi(\mu(P))} = e^{-ik_1 x_1} \left(\bar{f}_1(x) - \frac{\bar{g}_1(x)}{ik_1} + \frac{\bar{h}_1(x)}{k_1^2} + \dots \right),$$

...

$$\overline{\psi(\mu(P))} = e^{-ik_n x_n} \left(\bar{f}_n(x) - \frac{\bar{g}_n(x)}{ik_n} + \frac{\bar{h}_1(x)}{k_n^2} + \dots \right).$$

Видно, что форма Ω_1 не будет иметь существенных особенностей в точках P_1, \dots, P_n , а простые полюса $\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))}$ и нули Ω сократятся. У Ω_1 останутся только простые полюса в точках Q_1, \dots, Q_{n+1} , т. Эти полюса равны соответственно

$$\varphi^1 \bar{\varphi}^1 A_1, \dots, \varphi^n \bar{\varphi}^n A_n, |d|^2 \text{Res}_r \Omega.$$

Из равенства нулю их суммы следует (1.6).

Формы $\psi(P)\overline{\psi(\mu(P))}_{x_i} \Omega$, $\psi(P)_{x_i} \overline{\psi(\mu(P))}_{x_j} \Omega$ также имеют только простые полюса в Q_1, \dots, Q_{n+1} и не имеют существенных особенностей в P_1, \dots, P_n . Эти полюса равны соответственно

$$\varphi^1 \bar{\varphi}_{x_i}^1 A_1, \dots, \varphi^n \bar{\varphi}_{x_i}^n A_n,$$

$$\varphi_{x_i}^1 \bar{\varphi}_{x_j}^1 A_1, \dots, \varphi_{x_i}^n \bar{\varphi}_{x_j}^n A_n, \quad i \neq j.$$

Равенство нулю их суммы доказывает (1.7) и (1.8). Для доказательства (1.9) нужно рассмотреть формы $\psi(P)_{x_i} \overline{\psi(\mu(P))}_{x_i} \Omega$. У этих форм только простые полюса в точках Q_1, \dots, Q_{n+1} , P_i с вычетами

$$\varphi_{x_i}^1 \bar{\varphi}_{x_i}^1 A_1, \dots, \varphi_{x_i}^n \bar{\varphi}_{x_i}^n A_n, |f_i|^2 c_i.$$

Теорема 1 доказана.

Следствие 2. Если $\text{Res}_{Q_i} \Omega > 0$, $\alpha_i = \sqrt{\text{Res}_{Q_i} \Omega}$, $d = \frac{i}{\sqrt{\text{Res}_r \Omega}}$, то равенства (1.1) выполнены и $\langle \varphi, \varphi \rangle = 1$, $\langle \varphi_{x_i}, \varphi_{x_i} \rangle = |f_i^2| |c_i|$. Следовательно, $\mathcal{H} \circ \varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}P^n$ лагранжевое отображение и индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = |f_1|^2 |c_1| dx_1^2 + \dots + |f_n|^2 |c_n| dx_n^2.$$

Далее будем полагать, что $\text{Res}_{Q_i} \Omega > 0$.

1.6 Минимальные лагранжевы погружения

В этом параграфе мы найдем ограничение на спектральные данные, чтобы погружение φ , построенное в предыдущего параграфе, было минимальным.

Пусть поверхность Γ имеет голоморфную инволюцию

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma.$$

Обозначим τ композицию $\mu\sigma$.

Найдем ограничения на спектральные данные, чтобы функции f_i, g_i , участвующие в разложении функции ψ в окрестностях P_i , были вещественны.

Лемма 3. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\tau(\gamma) = \gamma, \quad \tau(r) = r, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$\psi(x, \tau(P)) = \overline{\psi(x, P)}.$$

Доказательство. Заметим, что функция $\overline{\psi(x, \tau(P))}$ является функцией Бейкера–Ахиезера с теми же спектральными данными, что и $\psi(x, P)$ и, следовательно, эти функции совпадают в силу единственности. Лемма 2 доказана.

Из этой леммы следует, что f_i, g_i вещественны.

Далее, рассмотрим следующие функции:

$$F_{ij} = \partial_{x_i x_j}^2 \psi + \Gamma_{ij}^1 \partial_{x_1} \psi + \dots + \Gamma_{ij}^n \partial_{x_n} \psi + b_{ij} \psi,$$

$i, j = 1, \dots, n$. Выберем $\Gamma_{ij}^k(x)$ и b_{ij} так, чтобы

$$F_{ij}(x, Q_k) = 0, \quad k = 1, \dots, n+1.$$

Такие Γ_{ij}^k и b_{ij} существуют в силу равенств (1).

Имеет место следующая лемма

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$\Gamma_{kk}^k = -i \frac{a_k}{c_k} - \frac{f_{kx_k}}{f_k}, \quad \Gamma_{ki}^k = -\frac{f_{kx_i}}{f_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим форму $w_{kk} = F_{kk}(P)\psi(\sigma(P))_{x_k}\Omega$.

Форма w_{kk} не имеет существенных особенностей в точках P_i , при $i \neq k$.

А в точке P_k имеет полюс второго порядка

$$\text{Res}_{P_k} w_{kk} = f_k((ia_k + c_k \Gamma_{kk}^k)f_1 + c_k f_{1x_k}) = 0.$$

Отсюда следует формула для Γ_{kk}^k . Для Γ_{ki}^k доказательство аналогично, только нужно рассматривать формы $F_{ki}(P)\psi(\sigma(P))_{x_k}\Omega$. Лемма 3 доказана.

Из леммы 3 следует равенство

$$\Gamma_{1i}^1 + \dots + \Gamma_{ni}^n = -\frac{ia_i}{c_i} - \frac{f_{1x_i}}{f_1} - \dots - \frac{f_{nx_i}}{f_n}.$$

Таким образом, если в разложении формы Ω в окрестностях P_i коэффициенты при $w_i^2 dw_i$ равны 0, то по следствию 1 (из параграфа 1.3) отображение минимально.

Объединяя полученные результаты, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть спектральная кривая Γ имеет антиголоморфную инволюцию*

$$\mu : \Gamma \rightarrow \Gamma$$

с фиксированными точками $Q_1, \dots, Q_{n+1}, P_1, \dots, P_n$ и мероморфной 1-формой со следующими дивизорами нулей и полюсов:

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu\gamma + P_1 + \dots + P_n,$$

$$(\Omega)_\infty = Q_1 + \dots + Q_{n+1} + r,$$

и пусть $\text{Res}_{Q_i}\Omega > 0$. Тогда $\mathcal{H} \circ \varphi$ задает лагранжеево отображение \mathbb{R}^n в \mathbb{CP}^n .

Если кроме того существует голоморфная инволюция

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma,$$

такая, что

$$\mu(\gamma) = \sigma(\gamma), \quad \tau(r) = r,$$

$d \in \mathbb{R}$ и форма Ω имеет следующие разложения в окрестностях P_i

$$\begin{aligned} \Omega &= (c_1 w_1 + d_1 w_1^3 + \dots) dw_1, \quad w_1 = \frac{1}{k_1}, \\ &\dots \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\Omega = (c_n w_n + d_n w_n^3 + \dots) dw_n, \quad w_n = \frac{1}{k_n},$$

то отображение минимально.

1.7 Формулы для минимальных лагранже- вых погружений в случае гиперэллип- тической спектральной кривой

В этом параграфе мы выведем явные формулы для минимальных лагранжевых погружений в случае, когда спектральная кривая, в определении функции Бейкера–Ахиезера, является гиперэллиптической. В случае эллиптической спектральной кривой получены условия периодичности построенных отображений. Результаты этого параграфа опубликованы в работе [29].

Основным результатом этого параграфа является теорема:

Теорема 3. Пусть спектральная кривая Γ задается уравнением

$$w^2 = P(z) = (z - z_1) \dots (z - z_{2g+2}), \quad z_i \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

тогда отображение $\mathcal{H} \circ (\varphi^1, \dots, \varphi^{2g+2}) : \mathbb{R}^{2g+1} \rightarrow \mathbb{CP}^{2g+1}$

$$\varphi^i = A_i \frac{\theta(\int_{Q_i} \omega + x_1 U^2 + \dots + x_{2g+1} U^{2g+2} + K_\gamma)}{\theta(x_1 U^2 + \dots + x_{2g+1} U^{2g+2} + K_\gamma)} e^{L(x_1, \dots, x_{2g+1})} \quad (1.12)$$

лагранжево и минимально, где A_i — некоторые константы (см. (2.13)), $\theta(z)$ — эта функция Римана поверхности Γ , $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_g)$ — базис голоморфных дифференциалов на Γ (см. ниже), Q_i — некоторые точки на Γ (см. теорему 2), Ω_j — мероморфные дифференциалы на Γ с полюсами второго порядка в $(z_j, 0)$, $j = 2, \dots, 2g + 2$, и нулевыми a -циклами. U^j — b -периоды Ω_j , $L(x_1, \dots, x_{2g+1}) = 2\pi i x_1 \int_r^{Q_i} \Omega_2 + \dots +$

$2\pi i x_{2g+1} \int_r^{Q_i} \Omega_{2g+2}$, $r = (z_1, 0)$, $K_\gamma = K - \int_r^{\gamma_1} \omega - \dots - \int_r^{\gamma_g} \omega$, где K — вектор римановых констант, γ_i — некоторые точки Γ (см. теорему 2).

Доказательство. Для доказательства теоремы 3 нужно подобрать спектральные данные так, чтобы все условия теоремы 2 были выполнены. Зададим на Γ голоморфную и антиголоморфную инволюции

$$\tau : (z, w) \rightarrow (z, -w), \quad \mu : (z, w) \rightarrow (\bar{z}, \bar{w}).$$

$r = (z_1, 0)$, $P_1 = (z_2, 0)$, \dots , $P_{2g+1} = (z_{2g+2}, 0)$ неподвижны относительно μ и τ . Положим $Q_1 = (p_1, \sqrt{P(p_1)})$, $Q_2 = (p_1, -\sqrt{P(p_1)})$, \dots , $Q_{2g+1} = (p_{g+1}, \sqrt{P(p_{g+1})})$, $Q_{2g+2} = (p_{g+1}, -\sqrt{P(p_{g+1})})$. Так как Q_i неподвижны относительно μ , то $p_i \in \mathbb{R}$, $P(p_i) > 0$. Положим $\gamma_i = (\gamma_{0i}, P(\gamma_{0i}))$, $i = 1, \dots, g$. Поскольку $\mu\tau(\gamma) = \gamma$, то $\gamma_{0i} \in \mathbb{R}$, $P(\gamma_{0i}) < 0$.

Мероморфный дифференциал Ω с дивизорами нулей и полюсов

$$(\Omega)_0 = \gamma + \mu\gamma + P_1 + \dots + P_{2g+1}, \quad (\Omega)_\infty = Q_1 + \dots + Q_{2g+2} + r$$

имеет следующий вид

$$\Omega = \frac{(z - \gamma_{01}) \dots (z - \gamma_{0g}) dz}{(z - z_1)(z - p_1) \dots (z - p_{g+1})}.$$

$$\text{Res}_{Q_{2i+1}} \Omega = \text{Res}_{Q_{2i+2}} \Omega = \frac{(p_i - \gamma_{01}) \dots (p_i - \gamma_{0g})}{(p_i - z_1) \prod_{j=1, j \neq i}^{g+1} (p_i - p_j)}.$$

Очевидно, что выполнения условий $\text{Res}_{Q_i} \Omega > 0$ можно добиться соответствующим выбором спектральных параметров.

Выберем в окрестностях P_i локальные параметры $k_i = w$. Тогда в окрестностях P_i имеет место разложения $\Omega = (c_i w + a_i w^2 + \dots) dw$,

т.к. $\tau w = -w$, то $a_i = 0$. Поэтому Ω удовлетворяет условиям (1.10) теоремы 2. Таким образом все условия на спектральные данные теоремы 2 выполнены.

Для доказательства теоремы 3 остается задать функцию Бейкера–Ахиезера в терминах тэта-функции (см. параграф 1.4). Выберем на Γ базис циклов $a_1 \dots a_g, b_1, \dots, b_g$ с индексами пересечений

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, a_i \circ b_j = \delta_{ij}, i, j = 1 \dots g.$$

Пространство голоморфных дифференциалов на Γ состоит из линейных комбинаций дифференциалов

$$\omega'_1 = \frac{dz}{w}, \dots, \omega'_1 = \frac{x^{g-1}dz}{w},$$

Выберем базис $\omega_1, \dots, \omega_g$ в этом пространстве, удовлетворяющий условиям $\int_{a_j} \omega_i = \delta_{ij}$. Дифференциалы $\Omega_j = \frac{dz}{z-z_j} - l_{i1}\omega_1 - \dots - l_{ig}\omega_g$, $l_{ij} = \int_{a_i} \frac{dz}{z-z_j}$, $j = 2, \dots, 2g+2$ удовлетворяют условию $\int_{a_i} \Omega_j = 0$ и имеют только полюса второго порядка в P_j . Теперь можно выписать φ в тэта-функциях

$$\begin{aligned} \varphi^i &= A_i \frac{\theta(\int_r^{Q_i} \omega + x_1 U^2 + \dots + x_{2g+1} U^{2g+2} + K_\gamma)}{\theta(x_1 U^2 + \dots + x_{2g+1} U^{2g+2} + K_\gamma)} e^{L(x_1, \dots, x_{2g+1})}, \\ A_i &= \frac{\sqrt{\text{Res}_{Q_i} \Omega} \cdot \theta(K_\gamma)}{\theta(\int_r^{Q_i} \omega + K_\gamma)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Теорема 3 доказана.

Из свойств тэта-функции (см. параграф 1.4) вытекает, что для периодичности отображения (1.12) относительно сдвигов $x_i \rightarrow \alpha_i$, нужно чтобы $\alpha_i U^i \in Z^g$ и $\alpha_i \int_r^{Q_j} \Omega_{i+1} \in Z$. Эти условия дают $4g^2 + 4g + 1$ уравнений.

Поскольку независимых параметров $5g + 4$ ($r, P_1, \dots, P_{2g+1}, Q_1, \dots, Q_{g+1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{2g+1}$), то в силу непрерывности в случае эллиптической кривой

$$w^2 = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4), \quad (1.14)$$

можно получать периодические отображения. Выпишем (1.12) для спектральной кривой (1.14)

$$\varphi^i = A_i \frac{\theta\left(\int_r^{Q_i} \omega + x \int_{b_1} \Omega_2 + y \int_{b_1} \Omega_3 + z \int_{b_1} \Omega_4 + K_\gamma\right)}{\theta\left(x \int_{b_1} \Omega_2 + y \int_{b_1} \Omega_3 + z \int_{b_1} \Omega_4 + K_\gamma\right)} e^{2\pi i \left(x \int_r^{Q_i} \Omega_2 + y \int_r^{Q_i} \Omega_3 + z \int_r^{Q_i} \Omega_4\right)} \quad (1.15)$$

Для периодичности (1.15) необходимо выполнения условия $\int_{b_1} \Omega_i \in \mathbb{R}$. Пусть $\omega = F(z)dz$, тогда из билинейных соотношений Римана (см.[26]) следует $\int_{b_1} \Omega_i = 2\pi i F(z) |_{P_i}$, следовательно $\lambda \in i\mathbb{R}$, где λ находится из нормировочного условия $\int_{a_1} \frac{\lambda dz}{w} = 1$. Если выбрать $a_1 = \{(z, w), z \in [z_1, z_2]\}$, то $\lambda \in i\mathbb{R}$. Таким образом нами доказано

Следствие 3. Пусть спектральная кривая Γ задается уравнением (1.14) и пусть ML-отображение $\mathcal{H} \circ \varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{CP}^3$ задается формулами (1.15). Тогда это отображение периодически относительно сдвигов $(x, y, z) \rightarrow (x + \alpha, y, z)$, $(x, y, z) \rightarrow (x, y + \beta, z)$, $(x, y, z) \rightarrow (x, y, z + \gamma)$, если $\int_{a_1} \frac{dz}{w} \in i\mathbb{R}$ и выполнены следующие уравнения

$$\alpha \int_{b_1} \Omega_2 = k, \quad \beta \int_{b_1} \Omega_3 = l, \quad \gamma \int_{b_1} \Omega_4 = m, \quad k, l, m \in Z \quad (1.16)$$

$$\alpha \int_r^{Q_i} \Omega_2 = r, \quad \beta \int_r^{Q_i} \Omega_3 = s, \quad \gamma \int_r^{Q_i} \Omega_4 = t, \quad i = 1, 2, \quad r, s, t \in Z. \quad (1.17)$$

1.8 Примеры минимальных лагранжевых погружений, соответствующих сингулярным спектральным кривым

В этом параграфе будет разобран пример с приводимой спектральной кривой рода 2, по которой будет построено минимальное лагранжевое отображение \mathbb{R}^3 в \mathbb{CP}^3 . Теорема 2 легко переносится на случай приводимой спектральной кривой по схеме работы [28]. Пусть Γ — приводимая кривая с неприводимыми компонентами Γ_i , $i = 1, 2, 3$, изоморфными \mathbb{CP}^1 . Под родом в определении функции Бейкера–Ахиезера будет подразумеваться арифметический род кривой (см.[27]). Дифференциал Ω из теоремы 2 задается мероморфными 1-формами Ω_i , определенными на Γ_i . Полюса этих форм находятся в точках пересечения Γ_i . Также должны быть выполнены условия регулярности: если компоненты Γ_i , Γ_j пересекаются в точке P , то

$$\text{Res}_P \Gamma_i + \text{Res}_P \Gamma_j = 0.$$

Арифметический род кривой Γ равен размерности пространства регулярных дифференциалов, а число полюсов γ_i , в определении функции Бейкера–Ахиезера, должно совпадать с арифметическим родом кривой Γ .

Пусть кривая Γ состоит из компонент, пересекающихся как показано на Рис.1. Пусть z_1 — координата на первой компоненте, z_2 — координата на второй компоненте, z_3 — на третьей. Далее, пусть точки пересечения первых двух компонент имеют координаты $a, -a, b, -b$ соответственно

на первой и второй компонентах. А точки пересечения второй и третьей компоненты имеют координаты $c, -c, l, -l$ соответственно. Точки a, b, c, l подразумеваются вещественными.

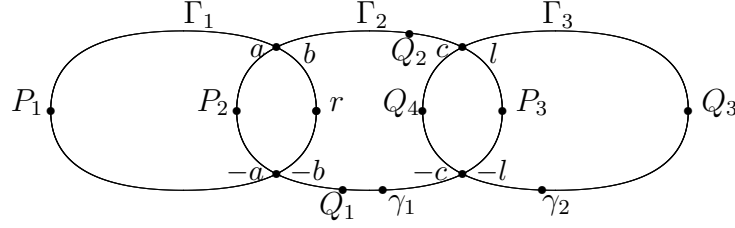


Рис. 1

Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, \quad P_2 = \infty \in \Gamma_2, \quad P_3 = 0 \in \Gamma_2, \quad r = 0 \in \Gamma_1,$$

$$Q_1, Q_2 \in \Gamma_2, \quad Q_3, Q_4 \in \Gamma_3, \quad Q_i \in \mathbb{R}, \quad \gamma_1 \in \Gamma_2, \quad \gamma_2 \in \Gamma_3, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in i\mathbb{R}.$$

На кривой Γ задана голоморфная инволюция:

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \sigma(z_1) = -z_1, \quad \sigma(z_2) = -z_2, \quad \sigma(z_3) = -z_3$$

и антиголоморфная инволюция

$$\mu : \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \mu(z_1) = \bar{z}_1, \quad \mu(z_2) = \bar{z}_2, \quad \mu(z_3) = \bar{z}_3.$$

Мероморфная форма Ω задается формами Ω_i на компонентах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

$$\Omega_1 = \frac{dz_1}{z_1(-a^2 + z_1^2)}, \quad \Omega_2 = \frac{s_2 z_2 (z_2^2 - \gamma_1^2) dz_2}{(z_2 - Q_1)(z_2 - Q_2)(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)},$$

$$\Omega_3 = \frac{s_3 (z_3^2 - \gamma_2^2)}{(z_3 - Q_3)(z_3 - Q_4)(z_3^2 - l^2)}.$$

Выпишем условия регулярности

$$\text{Res}_a \Omega_1 + \text{Res}_b \Omega_2 = 0, \quad \text{Res}_{-a} \Omega_1 + \text{Res}_{-b} \Omega_2 = 0,$$

$$\text{Res}_c \Omega_2 + \text{Res}_l \Omega_3 = 0, \quad \text{Res}_{-c} \Omega_2 + \text{Res}_{-l} \Omega_3 = 0.$$

Из этих уравнений находим:

$$s_2 = -\frac{(b^2 - c^2)(b^2 - Q_1^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)}, \quad Q_1 = -Q_2,$$

$$s_3 = \frac{l^2(c^2 - \gamma_1^2)(b^2 - Q_1^2)(l^2 - Q_4^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(\gamma_2^2 - l^2)(c^2 - Q_1^2)}, \quad Q_3 = -\frac{l^2}{Q_4}.$$

Далее потребуем выполнение условий (8), чтобы отображение было минимально. Из этих условий получаем $Q_3 = 0$, поэтому $Q_4 = \infty$.

Далее,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\text{Res}_{Q_1} \Omega_2} = \frac{(b^2 - c^2)(\gamma_1^2 - Q_1^2)}{2a^2(b^2 - \gamma_1^2)(c^2 - Q_1^2)},$$

$$\alpha_3 = \sqrt{\text{Res}_0 \Omega_3} = \sqrt{-\frac{(-c^2 + \gamma_1^2)\gamma_2^2(b^2 - Q_1^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(\gamma_2^2 - l^2)(c^2 - Q_1^2)}},$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\text{Res}_\infty \Omega_3} = \sqrt{-\frac{(-c^2 + \gamma_1^2)l^2(b^2 - Q_1^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(-\gamma_2^2 + l^2)(c^2 - Q_1^2)}}.$$

Подберем параметры так, чтобы $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ были положительными.

Пусть, например, $a = c = l = 1, b = 2, Q_1 = 3, \gamma_1 = i, \gamma_2 = i$.

Функция Бейкера–Ахиезера ψ определяется функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 на компонентах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

$$\psi_1 = e^{ixz_1} f_1(x, y, z),$$

$$\psi_2 = e^{iyz_2 + i\frac{z}{z_2}} \left(f_2(x, y, z) + \frac{g_2(x, y, z)}{z_2 - \gamma_1} \right),$$

$$\psi_3 = f_3(x, y, z) + \frac{g_3(x, y, z)}{z_3 - \gamma_2}.$$

Функции f_1, f_2, f_3, g_2, g_3 , находятся из условий согласованности

$$\psi_1(x, y, z, a) = \psi_2(x, y, z, b), \quad \psi_1(x, y, z, -a) = \psi_2(x, y, z, -b),$$

$$\psi_2(x, y, z, c) = \psi_3(x, y, z, l), \quad \psi_2(x, y, z, -c) = \psi_3(x, y, z, -l)$$

и условия нормировки:

$$\psi_1(x, y, z, 0) = d,$$

причем

$$d = \sqrt{\frac{1}{|Res_0 \Omega_1|}} = 1.$$

Следовательно

$$f_1(x, y, z) = 1,$$

$$f_2(x, y, z) = \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}i(2x+4y+z)} \left(i(-e^{2ix} + e^{i(4y+z)}) + 2(e^{2ix} + e^{i(4y+z)}) \right),$$

$$f_3(x, y, z) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)} \left((-2+i)e^{2ix} + (6-3i)e^{2i(x+y+z)} - \right. \\ \left. -(2+i)e^{3i(2y+z)} + (6+3i)e^{i(4y+z)} \right),$$

$$g_2(x, y, z) = \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}i(2x+4y+z)} \left(e^{2ix} - e^{i(4y+z)} \right),$$

$$g_3(x, y, z) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)} \left((1-3i)e^{2ix} + (9+3i)e^{2i(x+y+z)} - \right. \\ \left. -(1+3i)e^{3i(2y+z)} - (9-3i)e^{i(4y+z)} \right).$$

Искомое отображение имеет вид

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{16} + \frac{i}{16} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{6}i(6x-6y+z)} \left((3-4i)e^{2ix} + e^{i(4y+z)} \right),$$

$$\varphi_2 = \left(\frac{1}{16} - \frac{i}{16} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{6}i(6x+5(6y+z))} \left(e^{2ix} + (3+4i)e^{i(4y+z)} \right),$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{16\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)} \left((1+2i)e^{2ix} + (3+6i)e^{2i(x+y+z)} + \right.$$

$$+(1-2i)e^{3i(2y+z)}+(3-6i)e^{i(4y+z)},$$

$$\varphi_4=\frac{1}{16\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}i(2x+6y+3z)}\left((-2+i)e^{2ix}+(6-3i)e^{2i(x+y+z)}-\right.\\ \left.-(2+i)e^{3i(2y+z)}+(6+3i)e^{i(4y+z)}\right).$$

Лагранжев угол и индуцированная метрика имеют вид

$$e^{i\beta}=-i,$$

$$ds^2=dx^2+\frac{3}{4}\left(2\cos(x-2y-\frac{z}{2})+\sin(x-2y-\frac{z}{2})\right)^2dy^2+\\ +\frac{1}{12}\left(\cos(x-2y-\frac{z}{2})-2\sin(x-2y-\frac{z}{2})\right)^2dz^2.$$

Секционная кривизна полученного подмногообразия тождественно равна 1, вторая фундаментальная форма равна 0, т.е. погружение вполне геодезическое. Следовательно, построенное подмногообразие — это \mathbb{RP}^3 .

Рассмотрим теперь ту же спектральную кривую, но расположим спектральные данные по-другому (см. рис.2). Пусть кривая Γ состоит из компонент, изоморфных \mathbb{CP}^1 , пересекающихся как показано на Рис.2. Пусть z_1 — координата на первой компоненте, z_2 — координата на второй компоненте, z_3 — на третьей. Далее, пусть точки пересечения первых двух компонент имеют координаты $a, -a, b, -b$ соответственно на первой и второй компонентах. А точки пересечения второй и третьей компоненты имеют координаты $c, -c, l, -l$ соответственно. Точки a, b, c, l подразумеваются вещественными.

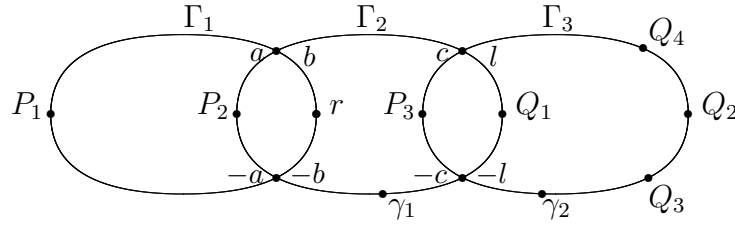


Рис. 2

Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, P_2 = \infty \in \Gamma_2, P_3 = \infty \in \Gamma_3, r = 0 \in \Gamma_1,$$

$$Q_1 \in \Gamma_2, Q_2, Q_3, Q_4 \in \Gamma_3, Q_i \in \mathbb{R}, \gamma_1 \in \Gamma_2, \gamma_2 \in \Gamma_3, \gamma_1, \gamma_2 \in i\mathbb{R}.$$

На кривой Γ задана голоморфная инволюция:

$$\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma, \sigma(z_1) = -z_1, \sigma(z_2) = -z_2, \sigma(z_3) = -z_3$$

и антиголоморфная инволюция

$$\mu : \Gamma \rightarrow \Gamma, \mu(z_1) = \bar{z}_1, \mu(z_2) = \bar{z}_2, \mu(z_3) = \bar{z}_3.$$

Мероморфная форма Ω задается формами Ω_i на компонентах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

$$\Omega_1 = \frac{dz_1}{z_1(-a^2 + z_1^2)}, \Omega_2 = \frac{s_2 z_2 (z_2^2 - \gamma_1^2) dz_2}{(z_2 - Q_1)(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)},$$

$$\Omega_3 = \frac{s_3 (z_3^2 - \gamma_2^2) dz_3}{(z_3 - Q_2)(z_3 - Q_3)(z_3 - Q_4)(z_3^2 - l^2)}.$$

Выпишем условия регулярности формы Ω

$$\text{Res}_a \Omega_1 + \text{Res}_b \Omega_2 = 0, \text{Res}_{-a} \Omega_1 + \text{Res}_{-b} \Omega_2 = 0,$$

$$\text{Res}_c \Omega_2 + \text{Res}_l \Omega_3 = 0, \text{Res}_{-c} \Omega_2 + \text{Res}_{-l} \Omega_3 = 0.$$

Из этих уравнений и учитывая равенства (5) находим:

$$s_2 = -\frac{b^2(b^2 - c^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)}, \quad Q_1 = 0,$$

$$s_3 = \frac{(b^2(c^2 - \gamma_1^2)l^2(l^2 - Q_2^2))}{(a^2c^2(b^2 - \gamma_1^2)(-\gamma_2^2 + l^2))}, \quad Q_3 = -Q_4, \quad Q_2 = 0.$$

Далее,

$$\alpha_1 = \sqrt{\text{Res}_0\Omega_2} = -\frac{(-b^2 + c^2)\gamma_1^2}{a^2c^2(b^2 - \gamma_1^2)},$$

$$\alpha_2 = \alpha_3 = \sqrt{\text{Res}_{Q_2}\Omega_3} = -\frac{b^2(c^2 - \gamma_1^2)l^2(\gamma_2^2 - Q_2^2)}{2a^2c^2(b^2 - \gamma_2^2)(-\gamma_2^2 + l^2)Q_2^2},$$

$$\alpha_4 = \sqrt{\text{Res}_\infty\Omega_3} = \sqrt{-\frac{(-c^2 + \gamma_1^2)l^2(b^2 - Q_1^2)}{a^2(b^2 - \gamma_1^2)(-\gamma_2^2 + l^2)(c^2 - Q_1^2)}}.$$

Подберем параметры так, чтобы $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ были положительными.

Пусть, например, $a = b = l = 1, c = 2, Q_2 = 1, \gamma_1 = i, \gamma_2 = 2i, d = 1$.

Функция Бейкера–Ахиезера ψ определяется функциями ψ_1, ψ_2, ψ_3 на компонентах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$

$$\psi_1 = e^{ixz_1} f_1(x, y, z), \quad \psi_2 = e^{iyz_2} \left(f_2(x, y, z) + \frac{g_2(x, y, z)}{z_2 - \gamma_1} \right),$$

$$\psi_3 = e^{izz_3} \left(f_3(x, y, z) + \frac{g_3(x, y, z)}{z_3 - \gamma_2} \right).$$

Функции f_1, f_2, f_3, g_2, g_3 , находятся из условий согласованности

$$\psi_1(x, y, z, a) = \psi_2(x, y, z, b), \quad \psi_1(x, y, z, -a) = \psi_2(x, y, z, -b),$$

$$\psi_2(x, y, z, c) = \psi_3(x, y, z, l), \quad \psi_2(x, y, z, -c) = \psi_3(x, y, z, -l)$$

и условия нормировки $\psi_1(x, y, z, 0) = d$, причем $d = \sqrt{\frac{1}{|\text{Res}_0\Omega_1|}} = 1$.

Опуская громоздкие выкладки, выпишем искомое отображение

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \left(\frac{1}{4} + \frac{i}{4} \right) \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-i(x+y)} (e^{2ix} - ie^{2iy}), \\
\varphi_2 &= \frac{1}{80\sqrt{2}} e^{-i(x+3y-z)} \left((9+12i)e^{6iy} + (36-27i)e^{2i(x+2y)} + \right. \\
&\quad \left. + (4+3i)e^{2i(x+z)} - (9-12i)e^{2i(y+z)} \right), \\
\varphi_3 &= \frac{1}{80\sqrt{2}} e^{-i(x+3(y+z))} \left((4-3i)e^{6iy} - (9+12i)e^{2i(x+2y)} + \right. \\
&\quad \left. + (9-12i)e^{2i(x+z)} + (36+27i)e^{2i(y+z)} \right), \\
\varphi_4 &= \frac{1}{80} \sqrt{\frac{3}{2}} e^{-i(x+3y+z)} \left((-1+7i)e^{6iy} + (21+3i)e^{2i(x+2y)} - \right. \\
&\quad \left. - (1+7i)e^{2i(x+z)} + (21-3i)e^{2i(y+z)} \right).
\end{aligned}$$

Лагранжев угол и индуцированная метрика имеют вид

$$e^{i\beta} = -i,$$

$$\begin{aligned}
ds^2 &= dx^2 + \frac{3}{2} (\cos(x-y) + \sin(x-y))^2 dy^2 + \frac{3}{800} (3\cos(x+y-z) + \\
&\quad + 7\cos(x-3y+z) + 21\sin(x+y-z) + \sin(x-3y+z))^2 dz^2.
\end{aligned}$$

Глава 2

Криволинейные ортогональные системы координат в S^n и H^n

2.1 Конструкция Кричевера построения криволинейных ортогональных координат в \mathbb{R}^n

В этом параграфе мы напомним конструкцию Кричевера построения криволинейных ортогональных координат в \mathbb{R}^n , поскольку наш метод построения криволинейных систем координат в пространствах постоянной кривизны основан на модификации этой конструкции.

Для начала нам потребуется дать определение функции Бейкера–Ахиезера, несколько отличающееся от данного в параграфе 1.4:

Пусть Γ — риманова поверхность рода g . Предположим, что на Γ

заданы дивизоры P, γ и R :

$$P = P_1 + \dots + P_n, \gamma = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l}, R = r + r_1 + \dots + r_l.$$

Пусть $k_i^{-1}, i = 1 \dots n$ означает локальный параметр в окрестности точки P_i .

Многоточечной функцией Бейкера–Ахиезера $\psi(u_1, \dots, u_n, S)$, где u_1, \dots, u_n вещественные переменные, $S \in \Gamma$, отвечающей спектральным данным

$$\{\Gamma, P_1, \dots, P_n, k_1, \dots, k_n, \gamma, R\},$$

называется функция, обладающая следующими свойствами:

1. в окрестности P_1, \dots, P_n функция ψ имеет существенные особенности вида

$$\psi = e^{k_j u_j} \left(f_j(x, y) + \frac{g_j(x, y)}{k_j} + \dots \right), j = 1 \dots n.$$

2. на $\Gamma \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами на γ .

3. $\psi(u_1, \dots, u_n, r) = h$, $\psi(u_1, \dots, u_n, r_i) = 0$, где h — ненулевая вещественная константа (в общем случае константы нормировки, отвечающие значениям функции ψ в точках r_1, \dots, r_l , можно выбирать ненулевыми, однако как будет ясно из доказательства теоремы в §3, на потребуете считать эти константы нулевыми)

Сформулируем конструкцию Кричевера [14]. Рассматривается гладкая алгебраическая кривая Γ рода g с тремя дивизорами:

$$P = P_1 + \dots + P_n, D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l-1}, R = r_1 + \dots + r_l.$$

Рассмотрим дивизор

$$Q = Q_1 + \cdots + Q_n,$$

где $Q_i \in \Gamma \setminus \{P \cup D \cup R\}$. Оказывается, при наложении соответствующих условий на спектральную кривую Γ и множество $P \cup D \cup R$, следующие функции будут задавать ортогональные координаты в \mathbb{R}^n

$$x^j(u_1, \dots, u_n) = \psi(u_1, \dots, u_n, Q_j).$$

Условия, накладываемые на Γ, P, D, R и Q , состоят в следующем.

1. Предположим, что на Γ существует голоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$, такая что точки $P_i, Q_j, i, j = 1, \dots, n$ неподвижны относительно σ , причем $\sigma(k_i^{-1}) = -k_i^{-1}$ в окрестности точек P_i ;
2. На Γ существует мероморфный дифференциал Ω с дивизорами нулей и полюсов:

$$(\Omega)_0 = D + \sigma D + P, (\Omega)_\infty = R + \sigma R + Q.$$

При этом $\text{res}_{Q_1} \Omega = \cdots = \text{res}_{Q_n} \Omega = \mu_0^2 > 0$;

3. Существует антиголоморфная инволюция $\tau : \Gamma \rightarrow \Gamma$, для которой точки $P_i, Q_j, i, j = 1, \dots, n$ неподвижны, причем $\tau(k_i^{-1}) = \overline{k_i^{-1}}$ в окрестности точки $P_i, i = 1, \dots, n$. Пусть, кроме того, $\tau(R) = R, \tau(D) = D$.

2.2 Модификация конструкции Кричевера

Модифицируем конструкцию Кричевера следующим образом. Рассмотрим риманову поверхность Γ рода g с заданными на ней

дивизорами

$$P = P_1 + \dots + P_n, D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l}, R = r + r_1 + \dots + r_l.$$

Возьмем $n + 1$ точек Q_1, \dots, Q_{n+1} на Γ . Предположим, что существует голоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$, оставляющая точки Q_1, \dots, Q_{n+1} и P_1, \dots, P_n, r неподвижными, причем в окрестности точки P_i инволюция σ локально устроена как $\sigma k_i = -k_i$. Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Предположим, что существует 1-форма Ω , такая что*

$$(\Omega) = D + \sigma D + P - Q_1 - \dots - Q_{n+1} - R - \sigma r_1 - \dots - \sigma r_l.$$

Будем использовать следующие обозначения. Пусть $A_i = \text{Res}_{Q_i} \Omega$, $B = \text{Res}_r \Omega$, и C_i определяется из разложения $(-C_i k_i^{-1} + \dots) dk_i^{-1}$ формы Ω в окрестности точки P_i , $i = 1 \dots n$. Пусть $h = \psi(r)$ — константа нормировки функции Бейкера–Ахизера ψ в точке r , и $f_j(u_1, \dots, u_n)$, $j = 1, \dots, n$ определяется как первый коэффициент разложения в окрестности точки P_j функции $e^{-u_j k_j} \psi = \left(f_j + \frac{g_j}{k_j} + \dots\right)$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi(Q_k)^2 A_k + h^2 B = 0, \quad (2.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi_{u_i}(Q_k) \psi_{u_j}(Q_k) A_k = 0, i, j = 1 \dots n, i \neq j, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \psi_{u_i}^2(Q_k) A_k = C_i f_i^2, i = 1 \dots n. \quad (2.3)$$

Доказательство. Рассмотрим форму $\psi(S)\psi(\sigma S)\Omega$, $S \in \Gamma$. Нетрудно видеть, что эта форма имеет полюса в точках Q_1, \dots, Q_{n+1}, r и из требования равенства нулю суммы вычетов получаем (2.1).

Рассмотрим 1-форму $\psi_{u_i}(S)\psi_{u_j}(\sigma S)\Omega$. При $i \neq j$ эта форма будет иметь полюсы в точках Q_1, \dots, Q_{n+1} и из равенства нулю суммы вычетов вытекает (2.2). При $i = j$ полюсы находятся в точках Q_1, \dots, Q_n, P_i и отсюда следует (2.3). Теорема доказана.

Функции $\psi(u_1, \dots, u_n, Q_i), i = 1, \dots, n + 1$ зависящие от n вещественных переменных u_1, \dots, u_n , вообще говоря, комплексные. Для того чтобы получить вещественность этих функций, будем требовать выполнения условий, сформулированных в следующей лемме.

Лемма 5. Пусть существует антиголоморфная инволюция τ , такая что точки дивизоров P, D, R и точки Q_1, \dots, Q_{n+1} неподвижны относительно τ , причем в окрестности точек P_i инволюция τ действует как $\tau k_i = \overline{k_i}$. Тогда функции $\psi(u_1, \dots, u_n, Q_i), i = 1, \dots, n + 1$ вещественны.

Доказательство. Из единственности функции Бейкера–Ахиезера следует, что $\psi(u_1, \dots, u_n, S) = \overline{\psi(u_1, \dots, u_n, \tau S)}$, откуда получаем вещественность функций $\psi(u_1, \dots, u_n, Q_i)$. Лемма доказана.

Теперь мы легко можем сформулировать следующие следствие.

Следствие 4. Предположим, что A_i вещественные, такие что $A_i > 0$ для всех $i = 1 \dots n + 1$, и $h^2 B = -1$, тогда функции

$$x^i(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{A_i} \psi(u_1, \dots, u_n, Q_i), i = 1, \dots, n$$

задают ортогональные координаты в S^n . При этом коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{f_i^2 C_i}$ удовлетворяют системе (5),(6) при $K = 1$.

Доказательство. Из тождеств (2.1),(2.2) теоремы следует, что функции $x^i(u_1, \dots, u_n)$, где $i = 1, \dots, n+1$ удовлетворяют соотношениям

$$(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1, x_{u_i}^1 x_{u_j}^1 + \dots + x_{u_i}^{n+1} x_{u_j}^{n+1} = 0, i \neq j.$$

Вещественность функций $x^i(u_1, \dots, u_n), i = 1, \dots, n+1$ следует из леммы.

И из (2.3) получаем, что

$$ds^2 = C_1 f_1^2 du_1^2 + \dots + C_n f_n^2 du_n^2$$

является метрикой постоянной кривизны $K = 1$. Значит, коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{C_i f_i^2}$ удовлетворяют системе (8),(9).

При рассмотрении ортогональных систем координат в гиперболическом пространстве мы будем использовать стандартную модель на гиперboloиде, т.е. будем рассматривать H^n как компоненту связности гиперboloида

$$(x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^{n+1})^2 = 1$$

в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,n}$.

Следствие 5. Предположим, что A_i вещественные, такие что $A_i < 0, i = 2, \dots, n+1, A_1 > 0$ и $h^2 B = -1$, тогда функции.

$$x^i(u^1, \dots, u^n) = \sqrt{|A_i|} \psi(u^1, \dots, u^n, Q_i), i = 1, \dots, n+1$$

задают ортогональную системы координат в H^n . При этом коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{-f_i^2 C_i}$ удовлетворяют системе (8),(9) при $K = -1$.

Доказательство. Из тождеств (2.1),(2.2) теоремы следует, что функции $x^i(u_1, \dots, u_n)$, где $i = 1, \dots, n+1$ удовлетворяют соотношениям $(x^1)^2 - (x^2)^2 - \dots - (x^{n+1})^2 = 1, x_{u_i}^1 x_{u_j}^1 - x_{u_i}^2 x_{u_j}^2 - \dots - x_{u_i}^{n+1} x_{u_j}^{n+1} = 0, i \neq j$. Вещественность функций $x^i(u_1, \dots, u_n), i = 1, \dots, n+1$ следует из леммы. И из (2.3) получаем, что

$$ds^2 = (-C_1 f_1^2) du_1^2 + \dots + (-C_n f_n^2) du_n^2$$

является метрикой постоянной кривизны $K = -1$. Значит, коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{-C_i f_i^2}$ удовлетворяют системе (8),(9).

2.3 Ортогональные координаты на пространствах постоянной кривизны, отвечающие сингулярным кривыми. Примеры.

Здесь мы покажем как реализуется модифицированная конструкция Кричевера для сингулярной спектральной кривой Γ . Мы рассмотрим самый простой случай, когда сингулярная кривая приводима и все неприводимые компоненты изоморфны \mathbb{CP}^1 , при этом сингулярные точки возникают как пересечения по парам точек $a_j, b_j, j = 1 \dots s$, где s — количество сингулярных точек, принадлежащих различным экземплярам \mathbb{CP}^1 .

Функция Бейкера–Ахиезера задается отдельно на каждой компоненте \mathbb{CP}^1 , так чтобы значения в точках пересечения a_j, b_j совпадали. От

мероморфного дифференциал Ω из теоремы в §3 будем требовать, чтобы в точках пересечения a_j, b_j форма Ω имела простые полюса и сумма вычетов в этих точках равнялась нулю

$$Res_{a_j}\Omega + Res_{b_j}\Omega = 0, j = 1 \dots s. \quad (2.4)$$

Условие теоремы сохранится без изменений, с той лишь оговоркой, что геометрический род g следует заменить на арифметический род сингулярной поверхности Γ . Результаты теоремы также останутся верными ввиду (9).

Приведем примеры построения ортогональных систем координат на S^2 и H^2 . Рассмотрим сингулярную кривую Γ состоящую из трех компонент \mathbb{CP}^1 , которые пересекаются по четырем точкам. На рис. 1 точки $a, -a$ принадлежат Γ_1 , точки $b, c, -b, -c$ принадлежат Γ_2 и точки $d, -d$ принадлежат Γ_3 . Положим

$$P_1 = \infty \in \Gamma_1, P_2 = \infty \in \Gamma_2, r = 0 \in \Gamma_1,$$

$$Q_1 = 0 \in \Gamma_2, Q_2 = \infty \in \Gamma_3, Q_3 = 0 \in \Gamma_3.$$

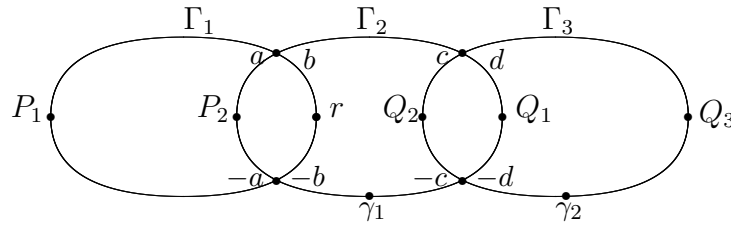


Рис. 1

Пусть на кривой Γ задана голоморфная инволюция $\sigma : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\sigma(z_i) = -z_i, i = 1 \dots 3$ и антиголоморфная инволюция $\tau : \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\tau(z_i) =$

$\bar{z}_i, i = 1 \dots 3$. Точки γ_1, γ_2 выберем вещественными на компонентах Γ_2 и Γ_3 соответственно.

Мероморфная 1-форма Ω задается формами $\omega_i, i = 1 \dots 3$ на соответствующих компонентах Γ_i :

$$\omega_1 = \frac{dz_1}{z_1(z_1^2 - a^2)}, \omega_2 = \frac{(z_2^2 - \gamma_1^2)dz_2}{z_2(z_2^2 - b^2)(z_2^2 - c^2)},$$

$$\omega_3 = \frac{(z_3^2 - \gamma_2^2)dz_3}{z_3(z_3^2 - d^2)}.$$

Условия регулярности для дифференциала Ω записывается как

$$\begin{aligned} Res_a \omega_1 + Res_b \omega_2 &= 0, Res_c \omega_2 + Res_d \omega_3 = 0, \\ Res_{-a} \omega_1 + Res_{-b} \omega_2 &= 0, Res_{-c} \omega_2 + Res_{-d} \omega_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Будем накладывать дополнительное требование на вычеты Ω в точках $Q_i, i = 1 \dots 3$

$$Res_{Q_1} \Omega = Res_{Q_2} \Omega = Res_{Q_3} \Omega \quad (2.6)$$

Рассмотрим частное решение системы (10),(11)

$$a = \frac{i}{\sqrt{3}}, b = \frac{i}{\sqrt{3}}, c = i, d = i, \gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \gamma_2 = 1.$$

Выпишем функцию Бейкера–Ахиезера ψ , для каждой компоненты $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, отвечающую нашим спектральным данным:

$$\psi_1(u, v, z_1) = e^{uz_1} f_1(u, v), \psi_2(u, v, z_2) = e^{vz_2} \left(f_2(u, v) + \frac{g_2(u, v)}{z_2 - \gamma_1} \right),$$

$$\psi_3(u, v, z_3) = \left(f_3(u, v) + \frac{g_3(u, v)}{z_3 - \gamma_2} \right).$$

Выберем $h = \psi(r) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда $-\frac{h^2 Res_r \Omega}{Res_{Q_1} \Omega} = 1$. Таким образом $f_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{3}}$, и остальные функции f_2, g_2, f_3, g_3 находятся из условия согласования

функции ψ на компонентах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$:

$$\psi_1(u, v, a) = \psi_2(u, v, b), \psi_1(u, v, z, -a) = \psi_2(u, v, -b),$$

$$\psi_2(u, v, c) = \psi_3(u, v, d), \psi_2(u, v, -c) = \psi_3(u, v, -d).$$

Рассмотрим функции двух переменных $x_i(u, v) = \psi(u, v, Q_i), i = 1 \dots 3$:

$$x_1(u, v) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\cos \frac{u-v}{\sqrt{3}} + \sin \frac{u-v}{\sqrt{3}} \right],$$

$$x_2(u, v) = \frac{1}{12} \left[(3 + \sqrt{3}) \cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} + v\right) + 3(-1 + \sqrt{3}) \cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} - v\right) - 3(1 + \sqrt{3}) \sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} + v\right) + (-3 + \sqrt{3}) \sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} - v\right) \right],$$

$$x_3(u, v) = \frac{1}{12} \left[3(1 + \sqrt{3}) \cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} + v\right) + (-3 + \sqrt{3}) \cos\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} - v\right) + (3 + \sqrt{3}) \sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} + v\right) - 3(-1 + \sqrt{3}) \sin\left(\frac{u-v}{\sqrt{3}} - v\right) \right]$$

Координатные линии этой системы координат изображены на рис.

2. Отметим, что при фиксированном v , координатные линии являются окружностями радиуса 1, но в отличие от обычной сферической системы координат, эти окружности не имеют общих точек в северном и южном полюсах.

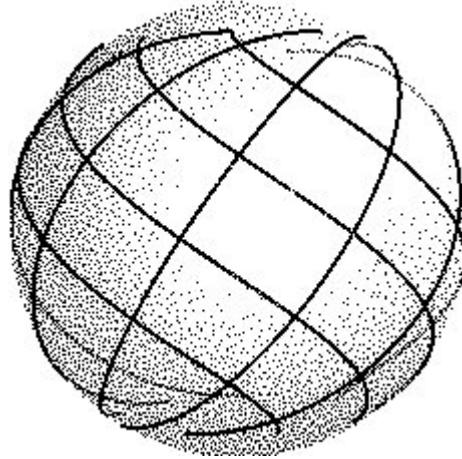


Рис. 2

В силу следствия 1, u и v задают ортогональные координаты на сфере S^2 .

Отметим, что в координатах u и v метрика на S^2 имеет вид:

$$ds^2 = \frac{1}{3}du^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \sin \left(\frac{2(u-v)}{\sqrt{3}} \right) \right) dv^2.$$

Приведем пример построения ортогональной системы координат на H^2 . Для той же спектральной кривой Γ (рис. 1) возьмем теперь следующие значения для $a, b, c, d, \gamma_1, \gamma_2$:

$$a = -1, b = 1, c = d = i, \gamma_1 = \sqrt{3}, \gamma_2 = 1.$$

Легко проверить, что условие (10) выполнено. Вычеты формы Ω в точках Q_1, Q_2, Q_3 и r равны 3, $-1, -1$ и -1 соответственно.

Здесь нам удобно положить $h = \psi(r) = 1$. Таким образом $f_1(u, v) = 1$, и остальные функции f_2, g_2, f_3, g_3 находятся из условия согласования функции ψ на компонентах $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$:

$$\psi_1(u, v, a) = \psi_2(u, v, b), \psi_1(u, v, z, -a) = \psi_2(u, v, -b),$$

$$\psi_2(u, v, c) = \psi_3(u, v, d), \psi_2(u, v, -c) = \psi_3(u, v, -d).$$

Рассмотрим функции $x_1(u, v) = \sqrt{3}\psi(u, v, Q_1)$ и $x_i(u, v) = \psi(u, v, Q_i), i = 2, 3$:

$$x_1(u, v) = \frac{1}{1+\sqrt{3}}(e^{-u-v} + (2 + \sqrt{3})e^{u+v}),$$

$$x_2(u, v) = \frac{1}{4(1+\sqrt{3})}((-2e^{-u-v} + (6 + 4\sqrt{3})e^{u+v}) \cos v - 2(\sqrt{3}e^{-u-v} + (2 + \sqrt{3})e^{u+v}) \sin v),$$

$$x_3(u, v) = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})}(((3 + \sqrt{3})e^{-u-v} + (5 + 3\sqrt{3})e^{u+v}) \cos v + ((-1 - \sqrt{3})e^{-u-v} + (9 + 5\sqrt{3})e^{u+v}) \sin v).$$

В силу следствия 2, u и v задают ортогональные координаты на H^2 .
Координатные линии этой системы координат изображены на рис. 3.

В координатах u и v метрика на H^2 имеет вид:

$$ds^2 = du^2 + \left(\frac{(7 + 4\sqrt{3}) e^{-2(u+v)} + (97 + 56\sqrt{3}) e^{2(u+v)}}{52 + 30\sqrt{3}} - 1 \right) dv^2.$$

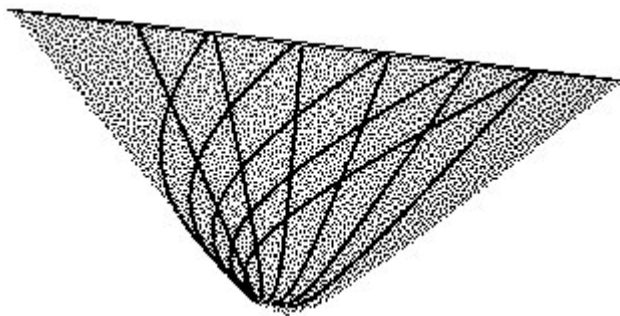


Рис. 3

Литература

- [1] Арнольд В.И., Математические методы классической механики. // Наука (1989).
- [2] Strominger A., Yau S.-T., Zaslow E., Mirror Symmetry is T-duality. // Nucl. Phys B479 (1996), P. 243–259.
- [3] Castro I., Urbano F., New examples of minimal Lagrangian tori in the complex projective plane. // Manuscr. Math. 85:3–4 (1994), P. 265–281.
- [4] Haskins M., Special Lagrangian Cones. // American Journal of Mathematics, Vol. 126:4,(2004), P. 845–871.
- [5] Шарипов Р.А., Минимальные торы в пятимерной сфере. // Теор. и матем. физика, 87:1 (1991), P. 48–56.
- [6] Hui Ma, Yujie Ma, Totally Real Minimal Tori in \mathbb{CP}^2 . // Math. Z., 249:2 (2005), P. 241–267.
- [7] Carberry E., McIntosh I., Minimal Lagrangian 2-tori in \mathbb{CP}^2 come in real families of every dimension// J. London Math. Soc. 2004. V.69. P. 531–544.

- [8] Mironov A.E., Finite-gap Minimal Lagrangian Surfaces in \mathbb{CP}^2 . // OCA-MI (Osaka City University Advanced Mathematical Institute) Studies Series 2010. Vol. 3. P. 185–196.
- [9] Миронов А.Е., Об одном семействе конформно плоских минимальных лагранжевых торов в \mathbb{CP}^3 // Матем. заметки, 81:3 (2007), P. 374–384.
- [10] Joyce D., Special Lagrangian m-folds in \mathbb{C}^m with symmetries. // Duke Math. J. Volume 115:1,(2002), P. 1–51.
- [11] Миронов А.Е., О новых примерах гамильтоново-минимальных и минимальных лагранжевых подмногообразий в \mathbb{C}^n и \mathbb{CP}^n . // Матем. сб., 195:1 (2004), P. 89–102.
- [12] Zakharov V.E. Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type, 1: Integration of the Lamé equation. // Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103–139.
- [13] Zakharov V.E. Application of the inverse scattering transform to classical problems of differential geometry and general relativity. // Contemporary Mathematics 2002. V. 301. P. 15–34.
- [14] Кричевер И.М., Алгебро-геометрические n -ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности. // Функц. Анал. и его прил. 1997. V. 31 N. 1 P. 32–50.
- [15] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная

- геометрия и гамильтонова теория. // Успехи Мат. Наук. 1989. 44, N 6(270). P. 29–98.
- [16] Царев С.П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. V. 54, N 5. P. 1048–1068.
- [17] Dubrovin B. Geometry of 2D topological field theories, Integrable Systems and Quantum Groups. // (Montecatini Terme, 1993), Lect. Notes in Math. Springer, Berlin. 1995. V. 1620. P. 120–348.
- [18] Миронов А.Е., Тайманов И.А. О некоторых алгебраических примерах фробениусовых многообразий. // ТМФ. 2007. V. 151, N 2. P. 195–206.
- [19] Мохов О.И., Ферапонтов Е.В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны. // Успехи Мат. Наук. 1990. V. 45, N 3(273). P. 191–192.
- [20] Мохов О.И. Согласованные метрики постоянной римановой кривизны: локальная геометрия, нелинейные уравнения и интегрируемость. // Функц. Анал. и его прил. 2002. V. 36, N 3. P. 36–47.
- [21] Мохов О.И. Пары Лакса для уравнений, описывающих согласованные нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, и интегрируемые редукции уравнений Ламе. // ТМФ. 2004. V. 138, N 2. P. 283–296.

- [22] Мохов О.И. Пары Лакса для неособых пучков метрик постоянной римановой кривизны. // Успехи Мат. Наук. 2002. V. 57, N 3(345). P. 155–156.
- [23] Wolfson J. Minimal Lagrangian Diffeomorphisms and the Monge-Ampere equation// J Differential Geom. 1997. V. 46. P. 335–373.
- [24] Дубровин Б.А., Кричевер И.М., Новиков С.П. Уравнение Шредингера в магнитном поле и римановы поверхности. // ДАН СССР. 1976. V. 229, N 1. P. 15–18.
- [25] Миронов А.Е. Спектральные данные для гамильтоново минимальных лагранжевых торов в \mathbb{CP}^2 . // Тр. МИАН. 2008. V. 263. P. 120–134.
- [26] Миронов А.Е., Тайманов И.А., Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым. // Тр. МИАН. 2006. V. 255. P. 180–196.
- [27] Спрингер Дж., Введение в теория римановых поверхностей. // Издательство иностранной литературы, 1960.

Работы автора по теме диссертации

- [28] Рыбников И.П., Минимальные лагранжевы помногообразия в \mathbb{CP}^n с диагональной метрикой. // Сиб.мат.журнал, 52:1 (2011), Р. 133-142
- [29] Рыбников И.П., Минимальные лагранжевы подмногообразия в \mathbb{CP}^n в терминах функций Бейкера-Ахиезера спектральных кривых. // Матем. заметки ЯГУ, 17:1 (2011), Р. 93–103
- [30] Бердинский Д.А., Рыбников И.П., Об ортогональных криволинейных системах координат в пространствах постоянной кривизны. // Сиб.мат.журнал, 52:3 (2011), в печати.