ЯКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

ШАМАЕВ Эллэй Иванович

Минимальные торы в $\mathbb{R}^3$ с плоскими концами

01.01.04 — геометрия и топология

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

научный руководитель — чл.-корр. РАН,
доктор физико-математических наук
И. А. Тайманов

Якутск — 2005

Содержание

Введение

В данной работе для каждого $2n \geq 6$ построены первые примеры полных минимальных торов в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с $2n$ плоскими концами.

Изучение минимальных поверхностей с плоскими концами было инициировано Брайантом в связи с изучением *уиллморовских поверхностей* в $\mathbb{R}^3$ — экстремалей функционала Уиллмора

$$\mathcal{W}(M) = \int_M H^2 \, d\mu,$$

где H — средняя кривизна, а $d\mu$ — индуцированная мера.

Этот функционал изучали еще до Уиллмора Герман как "энергию изгибания" поверхности, Бляшке и Томсон как конформную площадь поверхности в сферической геометрии [1, 2].

Брайант [3] показал, что образы полных минимальных поверхностей с плоскими концами под действием инверсии $\mathbb{R}^3$ являются уиллморовскими поверхностями. При этом плоские концы переходят в кратную точку поверхности, а функционал Уиллмора на торе равен $4\pi n$, где n — кратность точки (или число плоских концов). Действительно, Гакштаттер [4] и Оссерман [5] показали, что имеет место равенство $\int_M K \, d\mu = -4\pi(g + n - 1)$, где K — гауссова кривизна, для полной минимальной поверхности рода g с n вложенными концами, а Уайт [6] показал, что форма $(H^2 - K) \, d\mu$ инвариантна относительно конформных преобразований $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Поэтому справедливо равенство

$\int_M H^2\, d\mu = 4\pi n$ для тора.

Брайант также доказал, что все уиллморовские сферы получаются как образы минимальных сфер с плоскими концами при инверсии [3].

В настоящее время имеется полное описание уиллморовских сфер. Минимальная сфера с одним плоским концом ($n = 1$) — это стандартная плоскость. В [7] Брайант, используя методы алгебраической геометрии, показал, что не существует минимальных сфер с плоскими концами для $n = 2, 3, 5, 7$. В [8] Пенг построил примеры минимальных сфер с n плоскими концами для четного $n \geq 4$ и для нечетного $n \geq 9$.

Образы минимальных поверхностей рода один с плоскими концами задают класс уиллморовских торов, называемых *суперминимальными,* а другие уиллморовские торы описываются с помощью решений 4-частичных уравнений Тоды (см., например, [9]).

Суперминимальные торы оказались более сложным объектом для исследования, чем уиллморовские сферы. До сих пор было известно существование минимального тора с четырьмя плоскими концами, построенного Костой [10], Куснером и Шмиттом [11]. Главной сложностью в построении минимальных торов оказалась задача обнуления периодов — *проблема периодов.* Объясним в чем заключается эта задача.

Рассмотрим риманову поверхность Γ рода один с глобально определенным параметром u. Пусть мероморфные функции ψ_1 и ψ_2 на универсальном накрытии $\upsilon : \Upsilon \to \Gamma$ такие, что ψ_1^2, ψ_2^2, $\psi_1\psi_2$ опускаются на Γ и $|\psi_1^2| + |\psi_2^2| \neq 0$ на Γ.

Тогда *спинорное представление Вейерштрасса*

$$\Phi(u) = \operatorname{Re} \int_{u_0}^{u} \left(\psi_1^2 - \psi_2^2, i(\psi_1^2 + \psi_2^2), 2\psi_1\psi_2\right)\, du : \Upsilon \to \mathbb{R}^3, \qquad (1)$$

где $u_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, задает полную минимальную поверхность в $\mathbb{R}^3$ (см., например, [11, 12]). Индуцированная метрика имеет вид $(|\psi_1^2| + |\psi_2^2|)^2\, dz d\bar{z}$.

Всякий полный минимальный тор такой, что $\left|\int K\,d\mu\right| < \infty$, может быть задан с помощью спинорного представления Вейерштрасса.

В односвязных областях $U \subset \Gamma$, где ψ_1^2 и ψ_2^2 голоморфны, интеграл (1) не зависит от пути интегрирования, но периоды

$$\mathrm{Re}\int_\gamma \left(\psi_1^2 - \psi_2^2\right)\,du,\ \mathrm{Im}\int_\gamma \left(\psi_1^2 + \psi_2^2\right)\,du,\ \mathrm{Re}\int_\gamma \psi_1\psi_2\,du, \tag{2}$$

по нетривиальным циклам γ тора могут быть ненулевыми. Задача подбора ψ_1 и ψ_2 таких, что периоды (2) по нетривиальным циклам тора равны нулю (в этом случае (1) является погружением тора Γ) называется проблемой периодов [13].

Полюсы функций ψ_1^2 и ψ_2^2 называются *концами* или *выколотыми точками.* Если Φ является вложением, то ψ_1^2 и ψ_2^2 имеют полюсы только второго порядка. В этом случае, если в выколотой точке полюсы $\psi_1^2\,du$, $\psi_2^2\,du$ и $\psi_1\psi_2\,du$ имеют нулевой вычет, то конец асимптотичен плоскости и конец называется *плоским,* иначе конец асимптотичен поверхности вращения, полученной вращением графика логарифмической функции $\kappa\ln x$, $x \in (1,\infty)$, для некоторой константы логарифмического роста $\kappa \in (0,\infty)$. В последнем случае конец называется *катеноидальным* [13, 11].

Минимальных торов с одним и двумя плоскими концами не существует по очевидным соображениям. Действительно, если $n = 1$, то тор лежит в полупространстве. Из теоремы о полупространстве Хоффмана и Микса [14] следует, что такие полные минимальные поверхности не существуют. Шоен [15] показал, что полная минимальная поверхность с двумя выколотыми точками может быть только катеноидом — поверхностью вращения, заданной уравнением $\mathrm{ch}^2\,\kappa x = \kappa^2(y^2+z^2)$ для некоторого $\kappa \in (0,\infty)$.

Минимальные торы с тремя плоскими концами исследовали Куснер и Шмитт [11]. Они нашли критерий разрешимости проблемы периодов

на торах с тремя выколотыми точками, но опустили доказательство того, что проблема периодов не разрешима.

В Главе 1 нами доказана следующая теорема

Теорема 1. *Существует трехпараметрическое семейство полных регулярных минимальных торов в* $\mathbb{R}^3$ *с шестью плоскими концами, конформно эквивалентных римановым поверхностям рода 1, заданным уравнениями вида*

$$w^2 = 4(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3), \quad p_1 \in \mathbb{R}, \quad p_2 = \overline{p}_3 \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

с выколотыми точками $(0,p_1)$, $(0,p_2)$, $(0,p_3)$, ∞, (w_a,a) *и* $(-w_a,a)$, *где*

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{-(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)/3}, \\ w_a &= 2\sqrt{(a-p_1)(a-p_2)(a-p_3)}. \end{aligned}$$

В доказательстве Теоремы 1 мы рассматриваем римановы поверхности Γ рода один с голоморфной и антиголоморфной инволюциями, заданные в $\mathbb{C}^2$ уравнением (3) и специальный вид функций ψ_1 и ψ_2 :

$$\psi_2 = \frac{1}{w}, \quad \psi_1 = \frac{(z-a)^3 + c(z-a)^2 + d}{b(z-a)w}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}.$$

В этом случае, найден критерий разрешимости проблемы периодов. Приведем этот критерий. Пусть a — один из нулей полинома $P'(z)$, определим периоды по нетривиальным циклам тора γ_1 и γ_2

$$\Sigma_k = \int_{\gamma_1} \frac{(z-a)^k}{w^3} dz, \quad \Pi_k = \int_{\gamma_2} \frac{(z-a)^k}{w^3} dz, \ k = -2, 0, .., 4,$$

и Δ — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 & \Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2 \\ \Sigma_4\Pi_{-2} - 2\Sigma_1\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_4 & \Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть также

$$c = \frac{\Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 - \sqrt{\Delta}}{\Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2},$$

$$d = -\frac{1}{\Sigma_{-2}}(\Sigma_1 + \Sigma_0 c),$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\Sigma_{-2}}\left(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\right)}.$$

Тогда условие

$$\frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\big) > 0, \quad \Delta < 0, \quad b \in \mathbb{R},$$

является критерием разрешимости проблемы периодов на Γ.

Мы приводим пример тора, для которого критерий разрешимости проблемы периодов выполнен. В доказательстве теоремы 1 были использованы методы из анализа комплексных функций, теории эллиптических функций.

Кроме этого, в Главе 1 мы приводим доказательство ключевого технического утверждения из доказательства теоремы Куснера и Шмитта о не существовании полных минимальных торов в $\mathbb{R}^3$ с тремя плоскими концами, опущенное в их оригинальной работе [11].

Объясним, в чем заключается это утверждение. Куснер и Шмитт показали, что если $\Lambda = \{2\omega_1 n + 2\omega_2 m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ — решетка, $\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\zeta(u)$ — ζ-функция Вейерштрасса на торе $\mathbb{C}/\Lambda$, $\sum'$ — суммирование по ненулевым элементам решетки $\omega \in \Lambda$ и $a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2)$, то условие

$$\begin{cases} |a|^2 - |a|^4 = 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 \sum' \frac{1}{\omega^4}; \\ |a| > 1, \end{cases} \tag{4}$$

является критерием разрешимости проблемы периодов на торе $\mathbb{C}/\Lambda$ с тремя плоскими концами. Нами доказано следующее утверждение, сформулированное в [11]:

Теорема 2. *Для любого тора $\mathbb{C}/\Lambda$ условие (4) не выполнено.*

В доказательстве Теоремы 2 мы оцениваем $|a|$ и $\sum' \frac{1}{\omega^4}$, используя так называемые q-разложения — ряды с экспоненциально убывающими членами. Была найдена область конформных классов торов, где

условие $|a| > 1$ не выполнено. Далее показано, что вне этой области равенство из (4) не выполнено. В доказательстве Теоремы 2 использованы различные оценки и факты из теории эллиптических функций.

Глава 1 устроена следующим образом. В п. 1.1 и п. 1.2 приведены основные определения, представление Вейерштрасса и необходимые факты из теории эллиптических функций. В п. 1.3 приводится доказательство Теоремы 1. В п. 1.4 доказана Теорема 2.

Глава 2 состоит из п. 2.1, где доказана следующая теорема

Теорема 3. *Для каждого $2n \geq 6$ существует полный минимальный тор в $\mathbb{R}^3$ с $2n$ плоскими концами, конформно эквивалентный римановой поверхности вида*

$$w^2 = 4(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3), \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

с выколотыми точками $(0, p_1)$, $(0, p_2)$, $(0, p_3)$, ∞ и $2n-4$ выколотыми точками на вещественной оси.

Априори построенные торы могут иметь точки ветвления, в которых индуцированная метрика вырождается. Для малого числа концов ($n = 6, 8, 10$) мы показываем, что существуют торы без таких точек, хотя, по-видимому, это верно для произвольного четного $2n$.

Заметим, что конформные классы торов из Теоремы 1 и Теоремы 3 не пересекаются.

Доказательство Теоремы 3 конструктивное. Мы рассматриваем римановы поверхности Γ вида (2.4) с выколотыми точками в точках ветвления и на вещественной оси.

Тогда существует трехмерное (над $\mathbb{C}$) пространство мероморфных функций V такое, что для $\psi_1, \psi_2 \in V$ представление (1) задает минимальные поверхности (погружение универсального накрытия) с плоскими концами. Это показано в Предложении 1 с использованием методов теории функций комплексного переменного и линейной алгебры.

Далее показано существование базиса ξ_1, ξ_2, ξ_3 пространства V такого, что следующие периоды

$$\int_{\gamma_k} \xi_i \xi_j \, \frac{dz}{w} = 0, \quad i \neq j, \ k = 1, 2,$$

где γ_1, γ_2 — базис $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$, равны нулю. После этого мы можем выписать достаточное (но не необходимое) условие разрешимости проблемы периодов: *для каждого* $\gamma = \gamma_1$, γ_2 *следующие интегралы*

$$\int\limits_{\gamma} \xi_1^2 \frac{dz}{w}, \quad \int\limits_{\gamma} \xi_2^2 \frac{dz}{w}, \quad \int\limits_{\gamma} \xi_3^2 \frac{dz}{w} \tag{6}$$

попарно различны.

Разрешимость проблемы периодов для некоторых торов доказана методами математического анализа и алгебры в Предложении 4.

Автор благодарит научного руководителя И.А. Тайманова за постановку задачи и полезные советы и А.Е. Миронова за полезные обсуждения и советы.

Глава 1

Минимальные торы в $\mathbb{R}^3$ с малым числом плоских концов

1.1 Основные определения

Пусть Γ риманова поверхность рода 1 задана в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = 4(z-p_1)(z-p_2)(z-p_3), \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C},$$

и γ_1, γ_2 — образующие $\pi_1(\Gamma)$.

Рассмотрим универсальную накрывающую $\upsilon : \Upsilon \to \Gamma$. Мероморфная комплексная функция ψ на Υ называется *спинором* на торе Γ, если для $\gamma : [0,1] \to \Upsilon$ таких, что $\upsilon(\gamma)$ гомотопически эквивалентна γ_1 или γ_2, справедливы равенства

$$\psi_1(\gamma(0)) = \varepsilon(\gamma)\psi_1(\gamma(1)), \quad \psi_2(\gamma(0)) = \varepsilon(\gamma)\psi_2(\gamma(1)), \quad \varepsilon(\gamma) = \pm 1.$$

Различные пары чисел $(\varepsilon(\gamma_1), \varepsilon(\gamma_2))$ задают четыре различные так называемые *спинорные структуры* на торе [11]. Произведения спиноров фиксированной спин структуры ψ_1^2, ψ_2^2 и $\psi_1\psi_2$ опускаются на Γ. Далее мы рассматриваем ψ_1^2, ψ_2^2 и $\psi_1\psi_2$ как функции на Γ.

Полной кривизной поверхности в $\mathbb{R}^3$ называется интеграл по поверхности $\int K\, ds$, где K — гауссова кривизна, ds — индуцированная метрика.

В построении примеров мы будем использовать спинорное представление Вейерштрасса:

Теорема (Спинорное представление Вейерштрасса, [11], [12]). *Пусть ψ_1, ψ_2 спиноры любой фиксированной спинорной структуры на Γ, и $|\psi_1^2| + |\psi_2^2|$ нигде не равна нулю на Γ. Выберем точку $T_0 \in \Gamma$.*

Тогда

$$\Phi(T) = \mathrm{Re} \int_{T_0}^{T} \left(\psi_1^2 - \psi_2^2, i(\psi_1^2 + \psi_2^2), 2\psi_1\psi_2\right) \frac{dz}{w}$$

задает минимальное погружение Υ в $\mathbb{R}^3$.

Любой минимальный тор в $\mathbb{R}^3$ конечной полной кривизны допускает такое представление.

Классическое представление Вейерштрасса

$$\Phi(T) = \mathrm{Re} \int_{T_0}^{T} \left(\frac{1}{g} - g, i\left(\frac{1}{g} + g\right), 2\right) dh,$$

является минимальным погружением, если $g : \Gamma \to \mathbb{C}$ — мероморфная функция, а dh — мероморфная 1-форма [13].

Для того чтобы отображение Φ задавало минимальную поверхность с плоскими концами, необходимо, чтобы каждый полюс дифференциалов

$$\psi_1^2 \frac{dz}{w}, \quad \psi_2^2 \frac{dz}{w}, \quad \psi_1\psi_2 \frac{dz}{w}$$

был *второго* порядка с *нулевыми вычетами* [11].

Кроме этого, для корректного определения Φ необходимо, чтобы следующие интегралы (*периоды*) были нулевыми для $i = 1, 2$:

$$\mathrm{Re} \int\limits_{\gamma_i} (\psi_1^2 - \psi_2^2) \frac{dz}{w} = 0, \quad \mathrm{Im} \int\limits_{\gamma_i} (\psi_1^2 + \psi_2^2) \frac{dz}{w} = 0, \quad \mathrm{Re} \int\limits_{\gamma_i} \psi_1\psi_2 \frac{dz}{w} = 0.$$

1.2 Эллиптические функции

Пусть $\Lambda = \{2n\omega_1 + 2m\omega_2 \mid n, m \in \mathbb{Z}\} = 2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}$ — произвольная решетка, где $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}^*$. Без потери общности, считаем, что $\operatorname{Im} \omega_1/\omega_2 > 0$ и $|\omega_2| > |\omega_1|$.

Торы $\mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$ и $\mathbb{C}/(2\mathbb{Z} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z})$ конформно эквивалентны. Поскольку решетки $\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} = \mathbb{Z} + (\omega_2 + n)\mathbb{Z}$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, то считаем $|\operatorname{Re} \omega_2| \le \frac{1}{2}$.

Таким образом, все торы $\mathbb{C}/\Lambda$ конформно эквивалентны некоторому тору $\mathbb{C}/\{2n + 2m\tau \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, где $|\tau| \ge 1, \frac{1}{2} > \operatorname{Re} \tau \ge -\frac{1}{2}$ и $\operatorname{Im} \tau > 0$.

Мероморфные функции на торе $\mathbb{C}/\Lambda$ называются *эллиптическими функциями.* Важным примером таких функций является эллиптическая *функция Вейерштрасса* $\wp(u)$:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(u+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right),$$

где $\sum'$ означает, что суммирование по ненулевым элементам $\omega \in \Lambda$. Дифференциал $\wp(u)\,du$ на $\mathbb{C}/\Lambda$ имеет единственный полюс второго порядка с нулевым вычетом.

Верна следующая теорема.

Теорема. *Любая эллиптическая функция ψ на торе $\mathbb{C}/\Lambda$ может быть представлена в следующем виде:*

$$\psi = R_1(\wp) + R_2(\wp)\wp',$$

где R_1 и R_2 некоторые рациональные функции.

В частности, если f мероморфная функция на $\mathbb{C}/\Lambda$ с полюсами только второго порядка с нулевыми вычетами в точках $u_1, \ldots, u_m$, то f можно представить в виде следующей линейной комбинации:

$$f(u) = \alpha_0 + \alpha_1\wp(u - u_1) + \ldots + \alpha_m\wp(u - u_m), \quad u \in \mathbb{C}, \tag{1.1}$$

для некоторых $\alpha_0, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$. Легко проверить это утверждение: отношение линейной комбинации (1.1) и f является голоморфной функцией, следовательно, отношение является постоянной функцией на $\mathbb{C}/\Lambda$.

Функция ζ на $\mathbb{C}$ такая, что $\zeta'(u) = -\wp(u)$, называется *ζ-функцией Вейерштрасса.* Эта функция не является эллиптической. Пусть $\eta_1 = \zeta(\omega_1), \eta_2 = \zeta(\omega_2)$. Тогда справедливы равенства:

$$\zeta(u + 2\omega_1) = \zeta(u) + 2\eta_1, \quad \zeta(u + 2\omega_2) = \zeta(u) + 2\eta_2, \quad u \in \mathbb{C}.$$

Кроме этого, справедливо соотношение Лежандра:

$$\zeta(\omega_2)\omega_1 - \zeta(\omega_1)\omega_2 = \frac{\pi i}{2}.$$

Теперь можно легко вычислить период $f\,du$ по циклам $2\omega_1 t$ и $2\omega_2 t$, $t \in [0, 1]$ на $\mathbb{C}/\Lambda$:

$$\int_{2\omega_k t} f(u)\,du = 2\alpha_0\omega_k - 2\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \eta_k, \quad k = 1, 2.$$

Определим *константы Вейерштрасса* g_2, g_3 :

$$g_2 = 60{\sum}' \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140{\sum}' \frac{1}{\omega^6}.$$

Имеет место равенство

$$\left(\wp'(u)\right)^2 = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3.$$

Отображение $\rho(u) = (\wp(u), \wp'(u))$ биективно и голоморфно отображает $\mathbb{C}/\Lambda$ на Γ, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением:

$$w^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3.$$

1.3 Минимальные торы с шестью выколотыми точками

В данном параграфе мы строим трехпараметрическое семейство минимальных погружений тора с шестью выколотыми точками.

Пусть риманова поверхность Γ рода 1 задана в $\mathbb{C}^2$ уравнением:

$$w^2 = P(z) = 4(z-p_1)(z-p_2)(z-\overline{p}_2), \tag{1.2}$$

где $p_1 \in \mathbb{R}$, $p_2 \in \mathbb{C}$ такие, что

$$0 < |\overline{p}_2 - p_2| < |p_1 - p_2|.$$

Выберем мероморфные 1-формы на Γ следующим образом:

$$\varphi_1 = \frac{h^2(z)-1}{(z-a)^2w^3}dz, \quad \varphi_2 = i\frac{h^2(z)+1}{(z-a)^2w^3}dz, \quad \varphi_3 = \frac{2h(z)}{(z-a)^2w^3}dz, \tag{1.3}$$

где

$$h(z) = \frac{1}{b}\left((z-a)^3 + c(z-a)^2 + d\right),$$

a — один из корней уравнения $P'(z) = 0$, а b, c и d – вещественные числа, которые определим позже. Дискриминант полинома $P'(z)$ равен $|p_1 - p_2|^2 - |\overline{p}_2 - p_2|^2$, поэтому a — вещественное в силу ограничений на p_1 и p_2.

Теперь для того, чтобы представление Вейерштрасса

$$\Phi(T) = \mathrm{Re}\int_{T_0}^{T}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : \Gamma \to \mathbb{R}^3, \tag{1.4}$$

где $T_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, задавало минимальное погружение с плоскими концами необходимо, чтобы φ_1, φ_2 и φ_3 имели в выколотых точках полюса только второго порядка с нулевыми вычетами (см. п. 1.1). В нашем случае φ_1, φ_2 и φ_3 имеют полюса второго порядка в точках ветвления $P_1 = (0, p_1)$, $P_2 = (0, p_2)$, $P_3 = (0, \overline{p}_2)$, $P_4 = \infty$, а также в $P_5 = (w_a, a)$ и $P_6 = (-w_a, a)$, где $w_a = \sqrt{P(a)}$.

Заметим, что на Γ определены голоморфная и антиголоморфная инволюции:

$$\sigma : (w, z) \mapsto (-w, z), \quad \rho : (w, z) \mapsto (\overline{w}, \overline{z}).$$

Представим Γ как две плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ ("нижний"и "верхний"лист) с разрезами по отрезкам $[p_1, \infty]$ и $[p_2, \overline{p}_2]$. Выберем циклы γ_1 и γ_2 как

показано на рис. 1. Многоточием обозначены части циклов, расположенные на "нижнем" листе римановой поверхности.

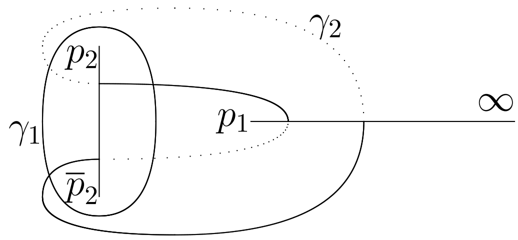

Рис. 1

Они образуют базис в $H_1(\Gamma; \mathbb{Q})$, который не является каноническим (не является базисом над $\mathbb{Z}$) и преобразуется инволюцией ρ по формулам:

$$\rho\gamma_1 = \gamma_1, \quad \rho\gamma_2 = -\gamma_2.$$

Выберем постоянные b, c и d следующим образом:

$$b = \sqrt{\frac{1}{\Sigma_{-2}} \left(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\right)}, \tag{1.5}$$

$$c = \frac{\Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 - \sqrt{\Delta}}{\Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2}, \tag{1.6}$$

$$d = -\frac{1}{\Sigma_{-2}}(\Sigma_1 + \Sigma_0 c), \tag{1.7}$$

где Δ — определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} \Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 & \Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2 \\ \Sigma_4\Pi_{-2} - 2\Sigma_1\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_4 & \Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3 \end{pmatrix},$$

и

$$\Sigma_k = \int_{\gamma_1} \frac{(z-a)^k}{w^3} dz, \quad \Pi_k = \int_{\gamma_2} \frac{(z-a)^k}{w^3} dz, \ k = -2, 0, .., 4.$$

Ниже мы покажем, что Σ_k — вещественные числа, Π_k — чисто мнимые. Справедливо

Предложение 1. *Вычеты мероморфных 1-форм φ_1, φ_2 и φ_3 в полюсах $P_1, .., P_6$ равны нулю. Если a, b, c и d — вещественные числа, то имеют место равенства*

$$Re \int_{\gamma_m} \varphi_k = 0, \quad m = 1, 2;\; k = 1, 2, 3; \tag{1.8}$$

и, следовательно, отображение Φ корректно определено на Γ.

Отметим, что φ_1, φ_2 и φ_3 одновременно не обращаются в нуль, поэтому Φ является погружением.

Согласно лемме 2 числитель и знаменатель в формуле (1.6) суть чисто мнимые. Поэтому число c является вещественным, если $\Delta < 0$. Таким образом, по лемме 2 числа b, c и d — вещественные, если

$$\frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4 + 2c\Sigma_3 + c^2\Sigma_2 + 2d\Sigma_1 + 2cd\Sigma_0 + d^2\Sigma_{-2}\big) > 0, \quad \Delta < 0. \tag{1.9}$$

Для $p_1 = 1$, $p_2 = -\frac{1+i}{2}$ вычисления на компьютере показывают, что

$$\frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4+2c\Sigma_3+c^2\Sigma_2+2d\Sigma_1+2cd\Sigma_0+d^2\Sigma_{-2}\big) \approx 0.3966\ldots, \;\; \Delta \approx -3.805\ldots \tag{1.10}$$

Условие вещественности b, c и d аналитически зависит от p_1 и p_2. Следовательно, отображение Φ для $(p_1, p_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ достаточно близких к $(1, -\frac{1+i}{2}\ )$ задает минимальное погружение

$$\Phi : \Gamma \setminus \{P_1, \ldots, P_6\} \to \mathbb{R}^3$$

с шестью плоскими концами, поэтому верна следующая теорема.

Теорема 1. *Существует трехпараметрическое семейство полных регулярных минимальных торов в $\mathbb{R}^3$ с шестью плоскими концами, конформно эквивалентных римановым поверхностям рода 1, заданным уравнениями вида*

$$w^2 = 4(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3), \quad p_1 \in \mathbb{R}, \quad p_2 = \overline{p}_3 \in \mathbb{C},$$

с выколотыми точками $(0,p_1)$, $(0,p_2)$, $(0,p_3)$, ∞, (w_a,a) *и* $(-w_a,a)$, *где*

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{-(p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3)/3}, \\ w_a &= 2\sqrt{(a-p_1)(a-p_2)(a-p_3)}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 1. Предложение 1 вытекает из лемм 1-3. В лемме 1 мы докажем, что 1-формы φ_1, φ_2 и φ_3 имеют полюсы только второго порядка с нулевыми вычетами. Из леммы 2 следует, что $\mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_1 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_2 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_3 = 0$. В лемме 3 докажем, что $\mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_1 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_2 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_3 = 0$.

Справедлива

Лемма 1. *1-формы* φ_1, φ_2 *и* φ_3 *имеют полюсы второго порядка с нулевыми вычетами в* $P_1,\ldots,P_6$. *Других полюсов нет.*

Доказательство. Равенство нулю вычетов в точках $P_1,\ldots,P_4$ следует из очевидного равенства

$$\sigma^*\varphi_k = -\varphi_k,\ k=1,2,3,$$

и из того, что точки $P_1,\ldots,P_4$ являются неподвижными при инволюции σ.

Пусть $t=z-a$ локальный параметр в окрестности точек p_5 и p_6. Тогда

$$\frac{dz}{(z-a)^2w^3} = P(a)^{-3/2}\frac{dt}{t^2} + \frac{d}{dt}\Big(P(t+a)^{-3/2}\Big)\Big|_{t=0}\frac{dt}{t} + O(1).$$

Поэтому $\mathrm{Res}_{p_5}\frac{dz}{(z-a)^2w^3} = -\mathrm{Res}_{p_6}\frac{dz}{(z-a)^2w^3} = 0$, так как $P'(a)=0$.

Следовательно, $\mathrm{Res}_{p_j}\varphi_k = 0$, $j=5,6$, $k=1,2,3$.

Лемма 1 доказана.

Имеет место

Лемма 2. *Пусть 1-форма φ такая, что*

$$\rho^*\varphi = \overline{\varphi}.$$

Тогда период φ по циклу γ_1 является вещественным, а по циклу γ_2 — чисто мнимым числом.

Доказательство. Утверждение следует из равенств:

$$\int_{\gamma_1}\varphi = \int_{\rho\gamma_1}\varphi = \int_{\rho\rho\gamma_1}\rho^*\varphi = \overline{\int_{\gamma_1}\varphi};$$

$$\int_{\gamma_2}\varphi = \int_{-\rho\gamma_2}\varphi = \int_{-\rho\rho\gamma_2}\rho^*\varphi = -\overline{\int_{\gamma_2}\varphi}.$$

Лемма 2 доказана.

Для 1-форм φ_1, $i\varphi_2$ и φ_3 с вещественными a, b, c и d выполнено условие леммы 2, поэтому

$$\mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_1 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_3 = \mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_2 = 0.$$

Справедлива

Лемма 3. *Имеют место равенства*

$$Re\int_{\gamma_1}\varphi_1 = Re\int_{\gamma_2}\varphi_2 = Re\int_{\gamma_1}\varphi_3 = 0.$$

Доказательство. Из $d = -\frac{1}{b}(\Sigma_1 + \Sigma_0 c)/\Sigma_{-2}$ следует, что

$$\mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_3 = \Sigma_1 + \Sigma_0 c + \Sigma_{-2} d = 0.$$

Выбор $b^2 = \frac{1}{\Sigma_{-2}}\big(\Sigma_4 + 2\Sigma_3 c + \Sigma_2 c^2 + 2\Sigma_1 d + 2\Sigma_0 cd + \Sigma_{-2} d^2\big)$ обнуляет

$$\mathrm{Re}\int_{\gamma_1}\varphi_1 = \frac{1}{b^2}\left(\Sigma_4 + 2\Sigma_3 c + \Sigma_2 c^2 + 2\Sigma_1 d + 2\Sigma_0 cd + \Sigma_{-2} d^2\right) - \Sigma_{-2}.$$

Подставив значения d, b^2 в

$$\mathrm{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_2 = \frac{1}{b^2}\left(\Pi_4 + 2\Pi_3 c + \Pi_2 c^2 + 2\Pi_1 d + 2\Pi_0 cd + \Pi_{-2} d^2\right) + \Pi_{-2},$$

получим следующий квадратичный трехчлен:

$$\operatorname{Re}\int_{\gamma_2}\varphi_2 = \big(\Sigma_2\Pi_{-2} - 2\Sigma_0\Pi_0 + \Sigma_{-2}\Pi_2\big)c^2 + \\ \big(\Sigma_3\Pi_{-2} - \Sigma_1\Pi_0 - \Sigma_0\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_3\big)c + \Sigma_4\Pi_{-2} - 2\Sigma_1\Pi_1 + \Sigma_{-2}\Pi_4 = 0. \tag{1.11}$$

Значение c является корнем (1.11).

Лемма 3 доказана.

1.4 Минимальные торы с тремя выколотыми точками

Пусть $\Lambda = \{2\omega_1 n + 2\omega_2 m \mid n, m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ — решетека, $\operatorname{Im}\frac{\omega_2}{\omega_1} > 0$, $\zeta(u)$ — ζ-функция Вейерштрасса на торе $\mathbb{C}/\Lambda$, $\sum'$ — суммирование по ненулевым элементам решетки $\omega \in \Lambda$ и

$$a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2). \tag{1.12}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Для любого тора $\mathbb{C}/\Lambda$ условие*

$$\begin{cases} |a|^2 - |a|^4 = 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 \sum' \frac{1}{\omega^4}; \\ |a| > 1, \end{cases} \tag{1.13}$$

не выполнено.

Для доказательства теоремы 2 докажем леммы. Справедлива

Лемма 4. *Справедливость условия (1.13) зависит только от конформного класса тора.*

Для краткости мы доказываем лемму 4 иначе чем в [11].

Поскольку каждый тор конформно эквивалентен [11] тору с полупериодами $\omega_1 = 1$ и

$$\omega_2 \in \Omega = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| \geq 1, \frac{1}{2} > \operatorname{Re}\tau \geq -\frac{1}{2}, \operatorname{Im}\tau > 0\},$$

то достаточно доказать утверждение 1 для торов с $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 \in \Omega$.

Пусть $\sigma_1(n)$ и $\sigma_3(n)$ обозначают суммы всех натуральных делителей n в степени один и три соответственно. Для $q = e^{2\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}}$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} &60{\sum_{m,n}}'(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^{-4} = g_2 = \tfrac{\pi^4}{12}\big(1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\big), \\ &\zeta(\omega_1) = \eta_1 = \tfrac{\pi^2}{12}\big(1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\big). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Теперь мы представим оба выражения (1.13) в виде степенных рядов. Константу $\zeta(\omega_2)$ выразим через $\zeta(\omega_1)$ с помощью уравнения Лежандра [11]:

$$\zeta(\omega_2)\omega_1 - \zeta(\omega_1)\omega_2 = \frac{\pi i}{2}.$$

Область Ω рассматриваем как объединение двух областей:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{\tau \in \Omega : \quad \tfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \ \operatorname{Im}\tau \ < \tfrac{6}{\pi}(1 - 10^{-3})\}; \\ \Omega_2 &= \{\tau \in \Omega : \ \tfrac{6}{\pi}(1 - 10^{-3}) \leq \ \operatorname{Im}\tau \quad \}; \end{aligned}$$

Справедлива

Лемма 5. *Пусть* $\omega_1 = 1$.

Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} &1)\ \ |a| - 1 < 0, \quad \omega_2 \in \Omega_1; \\ &2)\ \ \big||a|^2 - 1\big| < 10^{-2}, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \in \Big[\frac{6}{\pi}(1 - 10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1 + 10^{-3})\Big]; \\ &3)\ \ |a| - 1 > 0, \quad \operatorname{Im}\omega_2 \in \Big(\frac{6}{\pi}(1 + 10^{-3}), \infty\Big). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Также имеет место

Лемма 6. *При* $\omega_1 = 1$ *для всех* $\omega_2 \in \Omega_2$ *справедливо*

$$|a|^2 - |a|^4 \neq 20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2{\sum}'\frac{1}{\omega^4}.$$

Из лемм 5 и 6 следует, что теорема 2 справедлива для $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 \in \Omega$. Поэтому из леммы 4 следует теорема 2 для множества всех торов.

Доказательство леммы 4. Для $\lambda \in \mathbb{C}^*$ справедливо соотношение [22]:

$$\zeta(\lambda\omega_1; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{1}{\lambda}\zeta(\omega_1; \omega_1, \omega_2), \tag{1.16}$$

где $\zeta(u; \omega_1, \omega_2)$ — ζ-функция Вейерштрасса на $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$.

Из (1.12) и (1.16) следует, что

$$a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \frac{\lambda}{\overline{\lambda}} a(\omega_1, \omega_2),$$

где $a(\omega_1, \omega_2)$ — постоянная (1.12) на $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_2\mathbb{Z}\}$. Следовательно,

$$|a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)| = |a(\omega_1, \omega_2)|.$$

Рассмотрим правую часть (1.13). Простые выкладки показывают, что

$$a^2(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)(\overline{\lambda\omega}_1\lambda\omega_2 - \overline{\lambda\omega}_2\lambda\omega_1)^2 {\sum}' \frac{1}{(\lambda\omega)^4} = \tag{1.17}$$
$$a^2(\omega_1, \omega_2)(\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1)^2 {\sum}' \frac{1}{\omega^4}.$$

Из (1.17) и $|a(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)| = |a(\omega_1, \omega_2)|$ следует, что на торе $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z}+2\omega_2\mathbb{Z}\}$ условие (1.13) верно если и только если (1.13) верно на торе $\mathbb{C}/\{2\mathbb{Z}+2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\}$. Поэтому далее считаем $\omega_1 = 1$, а ω_2/ω_1 обозначим как τ.

Таким образом, мы установили, что (1.13) не зависит от преобразования тора $\mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\} \mapsto \mathbb{C}/\{2\mathbb{Z} + 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\mathbb{Z}\}$, а зависит только от так называемого конформного параметра тора $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Рассмотрим группу преобразований тора

$$\tau \mapsto \frac{\alpha\tau + \beta}{\gamma\tau + \delta}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z}), \tag{1.18}$$

порожденную двумя своими элементами

$$T_1 : \tau \mapsto \tau + 1,\ T_2 : \tau \mapsto -\frac{1}{\tau}.$$

Покажем, что уравнение (1.13) не зависит от преобразований вида (1.18). Для этого достаточно доказать инвариантность (1.13) относительно T_1 и T_2.

Функции η_1 и g_2 инвариантны относительно $\tau \mapsto T_1\tau$ согласно [22]. Очевидно, выражения

$$\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1 = i2\mathrm{Im}\ \tau \tag{1.19}$$

и

$$a = \frac{2i}{\pi}(\overline{\zeta(\omega_2)}\omega_1 - \overline{\zeta(\omega_1)}\omega_2) = \frac{4\mathrm{Im}\ \tau}{\pi}\overline{\eta}_1 - 1 \tag{1.20}$$

также инвариантны относительно T_1. Здесь мы воспользовались соотношением Лежандра $\zeta(\omega_2) = \eta_1\tau + \frac{\pi i}{2}$.

Согласно [22], для любого $\mathrm{Im}\ \tau > 0$ справедливы соотношения

$$g_2(\tau) = \frac{1}{\tau^4}g_2\Big(-\frac{1}{\tau}\Big); \tag{1.21}$$

$$\eta_1(\tau) = \frac{1}{\tau^2}\eta_1\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) - \frac{\pi}{2i}\frac{1}{\tau}, \tag{1.22}$$

где $g_2(\tau)$ и $\eta_1(\tau)$ — постоянные Вейерштрасса (1.14) на $\mathbb{C}/\{2\mathbb{Z}+2\tau\mathbb{Z}\}$.

Кроме этого, прямыми выкладками получаем равенства:

$$\overline{\omega}_1\omega_2 - \overline{\omega}_2\omega_1 = 2i\mathrm{Im}\ \tau = 2i\tau\overline{\tau}\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{\overline{\tau}}\Big) = 2i\tau\overline{\tau}\mathrm{Im}\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)$$

и

$$a(\tau) = 2\tau\overline{\tau}\mathrm{Im}\ \Big(-\frac{1}{\tau}\Big)\Big(\frac{1}{\overline{\tau}^2}\overline{\eta_1(-1/\tau)} + \frac{\pi}{2i}\frac{1}{\overline{\tau}}\Big) - 1$$

$$= 2\frac{\tau}{\overline{\tau}}\mathrm{Im}\ \Big(-\frac{1}{\tau}\Big)\Big(\overline{\eta}_1\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) - 1\Big) = \frac{\tau}{\overline{\tau}}a\Big(-\frac{1}{\tau}\Big).$$

Подставив полученные выражения для a и g_2 в уравнение (1.13), убеждаемся в том, что (1.13) инвариантно относительно T_2.

Таким образом, (1.13) инвариантно относительно $PSL(2,\mathbb{Z})$.

Теперь лемма следует из хорошо известного факта: для любой пары конформно эквивалентных торов с конформными параметрами τ и τ'

существует преобразование

$$\tau' = \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, \quad \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in PSL(2,\mathbb{Z}).$$

Лемма 4 доказана.

Доказательство леммы 5. Из (1.20) следует, что

$$|a|^2 = \frac{16(\mathrm{Im}\ \tau)^2}{\pi^2}|\eta_1|^2 - \frac{8\mathrm{Im}\ \tau}{\pi}\mathrm{Re}\ \eta_1 + 1.$$

Подставим (1.14) в полученное выражение. Получим, что

$$|a|^2-1 = \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big|1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big|^2-\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)\Big(1-24\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big). \tag{1.23}$$

Докажем вспомогательные леммы

Лемма 7. *Для* $q\in[0,\varepsilon)$, *где* $\varepsilon<1$, *справедливы равенства:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}, \tag{1.24}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 q^n = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}, \tag{1.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 q^n = \frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4}, \tag{1.26}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^5 q^n = \frac{32q^2+51q^3+46q^4-14q^5+6q^6-q^7}{(1-q)^6}. \tag{1.27}$$

Доказательство. Ряд (1.24) является геометрической прогрессией. Каждый ряд (1.24)—(1.27) является степенным с радиусом сходимости 1. Значит, справедливы следующие рекуррентные равенства для $q\in[0,\varepsilon)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k q^n = q\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}q^n\Big)', \quad k=1,\ldots,5.$$

Откуда при помощи простых выкладок получаются формулы (1.24)-(1.27).

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Справедливо неравенство*

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big| < \frac{13}{12}|q|, \quad \tau\in\Omega_1\cup\Omega_2. \tag{1.28}$$

Доказательство. Для каждого натурального n справедливо неравенство

$$\sigma_1(n)=\sum_{d|n}d\le\sum_{1\le d\le n}d=\frac{n(n+1)}{2}\le n^2. \tag{1.29}$$

Отсюда вытекает следующее неравенство

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^2|q|^n.$$

По лемме 7 мажорирующий ряд равен $\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}|q|$.

При $\mathrm{Im}\ \tau\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ производная функции

$$\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3} \tag{1.30}$$

по переменной $\mathrm{Im}\ \tau$ отрицательна, и значение (1.30) меньше $13/12$ при $\mathrm{Im}\ \tau=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно,

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big|\le\frac{1+|q|}{(1-|q|)^3}|q|<\frac{13}{12}|q|. \tag{1.31}$$

Лемма 8 доказана.

Имеет место неравенство

$$|q|<10^{-5}, \quad \tau\in\Omega_2. \tag{1.32}$$

Теперь начнем излагать доказательство леммы 5.

1) Исследуем знак $|a|^2-1$. Пусть

$$\delta=24\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big|.$$

Из леммы 8 и (1.32) следует

$$\delta < 26 \cdot 10^{-5}, \quad \tau \in \Omega_2.$$

Из (1.23) получим неравенство

$$|a|^2 - 1 \leq \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\big(1+\delta\big)^2 + 2\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)\big(-1+\delta\big). \tag{1.33}$$

Отсюда вытекает неравенство

$$|a|^2 - 1 \leq \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)(1+\delta^2)\Bigg(\mathrm{Im}\ \tau + \frac{6}{\pi}\bigg(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\bigg)\Bigg). \tag{1.34}$$

Поскольку производная функции

$$\mathrm{Im}\ \tau + \frac{6}{\pi}\bigg(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\bigg)$$

по $\mathrm{Im}\ \tau$ положительна на Ω_1 и

$$\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}) + \frac{6}{\pi}\bigg(\frac{-1+\delta}{(1+\delta)^2}\bigg) < 0,$$

то правая часть (1.34) отрицательна на Ω_1.

Следовательно, справедливо неравенство $|a|^2 - 1 < 0$.

2) Из (1.23) следует неравенство:

$$\big||a|^2 - 1\big| \leq \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)(1+\delta^2)\bigg|\mathrm{Im}\ \tau - \frac{6}{\pi}\bigg(\frac{1-\delta}{(1+\delta)^2}\bigg)\bigg|. \tag{1.35}$$

Для $\mathrm{Im}\ \tau \in \big[\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})\big]$ выражение (1.35) меньше, чем следующее:

$$\frac{\pi^2}{9}\frac{6}{\pi}(1+10^{-3})(1+\delta^2)\frac{6}{\pi}\bigg|1+10^{-3} - \frac{1-\delta}{(1+\delta)^2}\bigg|. \tag{1.36}$$

Поскольку $\delta < 26 \cdot 10^{-5}$, то (1.36) оценивается числом

$$8 \cdot (10^{-3} + 3 \cdot 10^{-5}) < 0{,}9 \cdot 10^{-2}.$$

Таким образом, справедливо неравенство $||a| - 1| < 10^{-2}$.

3) Из (1.23) получим неравенство

$$|a|^2-1 \geq \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\big(1-\delta\big)^2 - 2\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)\big(1+\delta\big). \qquad (1.37)$$

Знак $|a|^2-1$ положителен для τ таких, что $\mathrm{Im}\ \tau - \frac{6}{\pi}\frac{(1+\delta)}{(1-\delta)^2} > 0$.

Так как производная функции

$$\mathrm{Im}\ \tau - \frac{6}{\pi}\bigg(\frac{1+\delta}{(1-\delta)^2}\bigg)$$

по $\mathrm{Im}\ \tau$ положительна на Ω_2 и

$$\frac{6}{\pi}(1+10^{-3}) + \frac{6}{\pi}\bigg(\frac{1+\delta}{(1-\delta)^2}\bigg) > 0,$$

то правая часть (1.37) положительна на Ω_2.

Следовательно, справедливо неравенство $|a|^2-1>0$, $\tau \in \Omega_2$.

Лемма 5 доказана.

Доказательство леммы 6. Из (1.14) и (1.20) выводим, что

$$\overline{a}^2 = \frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)^2 - \frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}(\tau)\Big(1-24\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)+1. \qquad (1.38)$$

Имеет место

Лемма 9. *Если $a \neq 0$, то следующие три условия равносильны*

$$20a^2(\overline{\omega}_1\omega_2-\overline{\omega}_2\omega_1)^2{\sum}'\frac{1}{\omega^4} = |a|^2-|a|^4, \qquad (1.39)$$

$$20|a|^2(\overline{\omega}_1\omega_2-\overline{\omega}_2\omega_1)^2{\sum}'\frac{1}{\omega^4} = \overline{a}^2(1-|a|^2), \qquad (1.40)$$

$$\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2 + (|a|^2-1)\bigg(\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)-1\bigg)$$

$$= (|a|^2-1)\Bigg(64\pi^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2\sum_{n=2}^{\infty}\bigg(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)\bigg)q^n \qquad (1.41)$$

$$-16\pi\Big(\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)-1\Big)(\mathrm{Im}\ \tau)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Bigg) - \frac{\pi^2}{9}|a|^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big).$$

Доказательство. Умножив (1.39) на $\overline{a}/a$, получим (1.40). Следовательно, для $a \neq 0$ условия (1.39) и (1.40) эквивалентны.

Подставим выражения (1.23) и (1.38) в (1.40). Получим равенство:

$$|a|^2\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(1+240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big)=\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2(|a|^2-1)$$

$$+\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(-48\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n+24^2\big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\big)^2\Big)(|a|^2-1) \quad (1.42)$$

$$+\Big(1-\frac{2\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau\Big)(|a|^2-1)+\frac{2\pi}{3}24(\mathrm{Im}\ \tau)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)(|a|^2-1).$$

Перегруппировав слагаемые в (1.42), получим

$$\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Big(1+|a|^2 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big)+\Big(\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)-1\Big)(|a|^2-1)$$

$$=(|a|^2-1)\Bigg(\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2 24^2\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Big)^2$$

$$\times\Big(-48\frac{\pi^2}{9}(\mathrm{Im}\ \tau)^2+\frac{2\pi}{3}24(\mathrm{Im}\ \tau)\Big)\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n\Bigg).$$

Лемма 9 доказана.

Производная функции $|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^4$ по $\mathrm{Im}\ \tau$ отрицательна на Ω_2. Кроме этого,

$$|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^4<10^{-4} \text{ при } \tau=i\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}).$$

Поэтому справедлива оценка

$$|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^4<10^{-4}, \quad \tau\in\Omega_2. \quad (1.43)$$

Из (1.43) вытекает неравенство

$$|q|\cdot(\mathrm{Im}\ \tau)^2<10^{-4}, \quad \tau\in\Omega_2. \quad (1.44)$$

Докажем техническую лемму.

Лемма 10. *Пусть $\tau \in \Omega_2$.*

Тогда справедливы неравенства

$$\Big|\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\Big)q^n\Big| \ < \ \frac{21}{10}|q|; \tag{1.45}$$

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big| \ < \ \frac{8}{5}|q|. \tag{1.46}$$

Доказательство. Для внутренней суммы справедлива оценка

$$\Big|\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\Big| \le \Big|\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2k^2\Big| < \frac{1}{16}n^5.$$

Здесь в каждом слагаемом мы применили оценку $\sigma_1(n) \le n^2$ и заметили, что функция $f(k) = (n-k)^2k^2$ достигает максимума на отрезке $\big[1,(n-1)\big]$ в точке $k = n/2$. Следовательно,

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(n-k)\sigma_1(k)\Big)|q|^n < \frac{1}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n^5|q|^n. \tag{1.47}$$

Ряд (1.47) по лемме 7 равен

$$\frac{1}{16}\sum_{n=2}^{\infty}n^5q^n = \frac{32q^2+51q^3+46q^4-14q^5+6q^6-q^7}{16\,(1-q)^6}.$$

Легко проверить справедливость неравенств

$$2 < \frac{32+51q+46q^2-14q^3+6q^4-q^5}{16(1-q)^6} < \frac{21}{10}, \quad \tau \in \Omega_2.$$

Поэтому ряд (1.47) меньше $\frac{21}{10}|q|$ при $\tau \in \Omega_2$.

Суммы $\sigma_3(n)$, $n \in \mathbb{N}$, оценим следующим образом:

$$\sigma_3(n) = \sum_{d|n}d^3 = \sum_{d|n}\Big(\frac{n}{d}\Big)^3 \le n^3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$$

$$\le n^3\bigg(1+\int_1^n\frac{1}{x^3}dx\bigg) = \frac{3}{2}n^3 - \frac{1}{2}n < \frac{3}{2}n^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Воспользовавшись (1.26), получим

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n\Big| < \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n^3|q|^n = \frac{3}{2}\frac{|q|+4|q|^2+|q|^3}{(1-|q|)^4}. \qquad (1.48)$$

Справедливо двойное неравенство

$$0 < \frac{3}{2}\frac{1+4|q|+|q|^2}{(1-|q|)^4} < \frac{8}{5}, \quad \tau \in \Omega_2.$$

Поэтому из (1.48) следует неравенство (1.46).

Лемма 10 доказана.

Докажем следующую лемму.

Лемма 11. *Пусть* $\tau \in \Omega_2$.

Тогда справедливо неравенство

$$\big||a|^2 - 1\big| < 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2.$$

Доказательство. Для $\mathrm{Im}\ \tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$ лемма 11 следует из утверждения 2) леммы 5. Поэтому считаем, что $\mathrm{Im}\ \tau > \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})$.

Правая часть неравенства (1.33) меньше

$$\frac{\pi^2}{9}(1+\delta)^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2,$$

поскольку $\frac{2\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)(-1+\delta) < 0$, $\tau \in \Omega_2$. Следовательно, справедливы неравенства

$$|a|^2 - 1 < \frac{\pi^2}{9}(1+\delta)^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2 < 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2.$$

Из $|a|^2 - 1 > 0$ следует справедливость неравенства $\big||a|^2 - 1\big| < 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2$.

Лемма 11 доказана.

Изложим доказательство леммы 6. Покажем, что при $\tau \in \Omega_2$ абсолютное значение правой части равенства (1.41) меньше 1, а левой части — больше 3.

Выпишем модуль левой части неравенства (1.41):

$$\Big|\frac{\pi^2}{9}(\text{Im }\tau)^2 + (|a|^2-1)\Big(\frac{2\pi}{3}\text{Im }\tau - 1\Big)\Big|. \tag{1.49}$$

Для $\text{Im }\tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$ из $||a|^2-1| < 10^{-2}$ (справедливого по лемме 5) вытекает неравенство

$$\big||a|^2-1\big|\Big|\frac{2\pi}{3}\text{Im }\tau - 1\Big| < 4\cdot 10^{-2}.$$

Таким образом (1.49) больше, чем следующее выражение

$$\Big|\frac{\pi^2}{9}(\text{Im }\tau)^2\Big| - \big||a|^2-1\big|\Big|\frac{2\pi}{3}\text{Im }\tau - 1\Big| > 3$$

для $\text{Im }\tau \in [\frac{6}{\pi}(1-10^{-3}), \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})]$.

Пусть $\text{Im }\tau > \frac{6}{\pi}(1+10^{-3})$. Тогда по лемме 5 справедливо неравенство

$$|a|^2 - 1 > 0.$$

Кроме этого,

$$\frac{2\pi}{3}\text{Im }\tau - 1 > 0.$$

Следовательно, выражение (1.49) больше, чем $\frac{\pi^2}{9}(\text{Im }\tau)^2 > 3$.

Таким образом, мы показали, что правая часть (1.41) больше 3 для $\tau \in \Omega_2$.

Выпишем правую часть (1.41):

$$(|a|^2-1)\Big(64\pi^2(\text{Im }\tau)^2\Sigma_1 - 16\pi\Big(\frac{\pi}{3}\text{Im }\tau - 1\Big)(\text{Im }\tau)\Sigma_2\Big) - \Sigma_3, \tag{1.50}$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sigma_1(k)\sigma_1(n-k)q^n,$$

$$\Sigma_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n$$

и

$$\Sigma_3 = \frac{\pi^2}{9}(\text{Im }\tau)^2|a|^2 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n.$$

По лемме 10 имеет место неравенство

$$|\Sigma_3| < \frac{384}{9}\pi^2|a|^2|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^2.$$

Из леммы 11 следует, что $|a|^2 < 1 + 5(\mathrm{Im}\ \tau)^2$. Отсюда

$$|\Sigma_3| < 400|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^2 + 2000|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^4 < \frac{1}{4}.$$

Поскольку по лемме 10 справедливо

$$|\Sigma_1| < \frac{21}{10}|q|,$$

по лемме 8 имеет место

$$|\Sigma_2| < \frac{13}{12}|q|,$$

и

$$\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau - 1 > 0,$$

то абсолютное значение (1.50) меньше следующего выражения:

$$\big||a|^2-1\big|\left(64\frac{21}{10}\pi^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2|q|+16\frac{13}{12}\pi\left(\frac{\pi}{3}(\mathrm{Im}\ \tau)^2-\mathrm{Im}\ \tau\right)|q|\right)+\frac{1}{4}. \quad (1.51)$$

Теперь из неравенства

$$64\frac{21}{10}\pi^2 + 16\pi\frac{13}{12}\frac{\pi}{3} < 1400$$

и леммы 8 вытекает, что (1.50) меньше чем $7000|q|(\mathrm{Im}\ \tau)^4 + \frac{1}{4}$. Отсюда следует неравенство

$$\left|(|a|^2-1)\left(64\pi^2(\mathrm{Im}\ \tau)^2\Sigma_1-16\pi\left(\frac{\pi}{3}\mathrm{Im}\ \tau-1\right)(\mathrm{Im}\ \tau)\Sigma_2\right)-\Sigma_3\right| < 1. \quad (1.52)$$

Следовательно, правая часть равенства (1.41) не может равняться левой части (1.41).

Лемма 6 доказана.

Глава 2

Минимальные торы в $\mathbb{R}^3$ с четным числом плоских концов

2.1 Минимальные торы с четным числом выколотых точек

В этой главе доказана следующая

Теорема 3. *Для каждого $2n \geq 6$ существует полный минимальный тор в $\mathbb{R}^3$ с $2n$ плоскими концами, конформно эквивалентный римановой поверхности вида*

$$w^2 = 4(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3), \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R},$$

с выколотыми точками.

Вкратце изложим нашу конструкцию. Рассмотрим риманову поверхность Γ рода 1, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = P(z) = 4(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3), \quad p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Пусть γ_1 и γ_2 — базис $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}_2)$.

Минимальные погружения $\Phi : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ мы задаем с помощью представления Вейерштрасса (п. 1.1):

$$\Phi(T) = \mathrm{Re} \int_{T_0}^{T} \big(\psi_1^2 - \psi_2^2, i\big(\psi_1^2 + \psi_2^2\big), 2\psi_1\psi_2\big)\frac{dz}{w}, \tag{2.2}$$

где $T_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка, ψ_1^2, ψ_2^2 и $\psi_1\psi_2$ — мероморфные функции на Γ. Следовательно, на универсальной накрывающей $\upsilon : \Upsilon \to \Gamma$ для $\gamma : [0,1] \to \Upsilon$ таких, что $\upsilon(\gamma)$ гомотопически эквивалентна γ_1 или γ_2, справедливы равенства

$$\psi_1(\gamma(0)) = \varepsilon(\gamma)\psi_1(\gamma(1)), \quad \psi_2(\gamma(0)) = \varepsilon(\gamma)\psi_2(\gamma(1)), \quad \varepsilon(\gamma) = \pm 1.$$

Тогда ψ_1 и ψ_2 являются сечениями так называемой спин-структуры на торе. В нашей конструкции $\varepsilon(\gamma_1)$ и $\varepsilon(\gamma_2)$ равны 1, т. е. ψ_1 и ψ_2 — мероморфные функции, а (2.2) не может быть вложением [11].

В нашей конструкции функции ψ_1 и ψ_2 имеют вид

$$\psi_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i w}{z - p_i}, \quad \psi_2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\beta_j w}{z - p_j}, \tag{2.3}$$

где $m \geq 4$ — целое число, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{C}$ и $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}$ попарно различны. Несложно проверить, что функции ψ_1 и ψ_2 имеют полюсы первого порядка в точках ветвления

$$P_0 = (\infty, \infty), \quad P_1 = (p_1, 0), \quad P_2 = (p_2, 0), \quad P_3 = (p_3, 0)$$

и в точках

$$P_j^- = (p_j, -\sqrt{P(p_j)}), \quad P_j^+ = (p_j, \sqrt{P(p_j)}), \quad j = 4, \ldots, m.$$

Определим пространство $V(p) = V(p_1, \ldots, p_m)$ функций вида (2.3)

$$V(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \ker M \subset \mathbb{C}^m \right\},$$

где матрица

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4-p_1} & \frac{1}{p_4-p_2} & \frac{1}{p_4-p_3} & \frac{P'(p_4)}{4P(p_4)} & \frac{1}{p_4-p_5} & \cdots & \frac{1}{p_4-p_m} \\ \frac{1}{p_5-p_1} & \frac{1}{p_5-p_2} & \frac{1}{p_5-p_3} & \frac{1}{p_5-p_4} & \frac{P'(p_5)}{4P(p_5)} & \cdots & \frac{1}{p_5-p_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_m-p_1} & \frac{1}{p_m-p_2} & \frac{1}{p_m-p_3} & \frac{1}{p_m-p_4} & \frac{1}{p_m-p_5} & \cdots & \frac{P'(p_m)}{4P(p_m)} \end{pmatrix}$$

действует на вектор-столбец умножением слева.

Справедливо

Предложение 1.

1. *Для функций* $\psi_1, \psi_2 \in V(p)$ *имеет место равенство*

$$\operatorname{res}_Q \frac{\psi_1 \psi_2 dz}{w} = 0,$$

где $Q = P_0, \dots, P_3, P_4^{\pm}, \dots, P_m^{\pm}$.

2. *Для почти всех* $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ *таких, что* $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, *справедливо равенство*

$$\dim_{\mathbb{C}} V(p) = 3.$$

Таким образом, представление Вейерштрасса (2.2) для $\psi_1, \psi_2 \in V(p)$ задает минимальную поверхность с плоскими концами.

Теперь необходимо выбрать ψ_1 и ψ_2 из $V(p)$ так, чтобы разрешить задачу обнуления периодов (2.2). При этом мы имеем шесть свободных комплексных параметров (так как ψ_1, $\psi_2 \in V(p)$ и по предложению 1 $\dim_{\mathbb{C}} V(p) = 3$).

Ключевую роль при решении *проблемы периодов* играет

Предложение 2. *Существуют симметрические билинейные формы*

$$A : V(p) \times V(p) \to \mathbb{C}, \quad B(p) : V(p) \times V(p) \to \mathbb{C}$$

такие, что

$$-\eta_k A\big(\psi_1, \psi_2\big) + \omega_k B(p; \psi_1, \psi_2) = \frac{1}{8} \int\limits_{\gamma_k} \psi_1 \psi_2 \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2, \tag{2.4}$$

где

$$\eta_k = -\frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{z dz}{w}, \quad \omega_k = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2.$$

Форма A *не зависит от* $p_1, \dots, p_m$ *и является положительно определенной на* $V(p)$.

Под положительной определенностью формы A мы понимаем следующее:

$$A(\psi, \psi) > 0 \text{ для } \psi = \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \in V(p), \quad \big(\nu_1, \dots, \nu_m\big) \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}.$$

Из положительной определенности A вытекает, что в пространстве $V(p)$ можно выбрать базис ξ_1, ξ_2, ξ_3, в котором A задается единичной матрицей, а $B(p)$ диагональна. Таким образом, имеет место

Лемма 1. *Существует базис ξ_1, ξ_2, ξ_3 в пространстве $V(p)$ такой, что*

$$\int\limits_{\gamma} \xi_i \xi_j \frac{dz}{w} = 0, \quad i, j = 1, \dots, 3,$$

для $i \neq j$ и $\gamma = \gamma_1, \gamma_2$.

Существование такого базиса позволяет разрешить проблему периодов в явном виде.

Для

$$(p_1, \dots, p_m) = \begin{cases} \big(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m-1}{2} + t\big) & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ \big(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m}{2}, 1+t\big) & \text{при } m \text{ четном} \end{cases}$$

при достаточно малых $t \in \mathbb{R}$ справедливо

Предложение 3. *Положим*

$$\psi_1 = v(r,s)\xi_1 + \xi_2, \quad \psi_2 = x(r,s)\xi_1 + y(r,s)\xi_2 + u(r,s)\xi_3,$$

где

$$v(r,s) = \pm\sqrt{-\frac{1}{2c}(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d \pm \sqrt{(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)^2 - 4|c|^2 d})}; \qquad (2.5)$$

$$x(r,s) = \frac{-a_2 r - b_2 s}{v(r,s)}; \quad y(r,s) = a_1 r + b_1 s;$$

$$u(r,s) = \sqrt{\frac{1}{a_3}(a_1 \overline{v(r,s)}^2 - a_1 x^2(r,s) - a_2 y^2(r,s) + a_2)}. \qquad (2.6)$$

$$a_k = \int\limits_{\gamma_1} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad b_k = \int\limits_{\gamma_2} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2, 3;$$

$$c(r,s) = \frac{a_2 b_3 + a_3 b_2 - (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_1 r + b_1 s)^2}{(a_1 b_3 + a_3 b_1)};$$

$$d(r,s) = -\frac{(a_1 b_3 - a_3 b_1)}{(a_1 b_3 + a_3 b_1)}(a_2 r + b_2 s)^2.$$

Тогда существует открытая область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ такая, что для почти всех $(r,s) \in \Omega$ справедливы равенства (2).

Теорема 3 вытекает из предложений 1–3 и 5.

Таким образом, получаем двупараметрическое семейство торов с плоскими концами при фиксированных $p_1, \ldots, p_m$.

У погружения (2.2) нет точек ветвления, если $(|\psi_1^2| + |\psi_2^2|)(T) \neq 0$ для всех $T \in \Gamma$. Это условие зависит от $m+2$ свободных параметров $r, s, p_1, \ldots, p_m$, что делает неравенство очевидным для параметров в общем положении, но строгое доказательство этого утверждения технически сложно. Как упоминалось выше, мы можем показать это лишь для малых $n = 2m - 2$.

Доказательство теоремы 3

Докажем вспомогательные леммы.

Лемма 2. *Для любой функции $\psi \in V(p)$ имеют место равенства*

$$\operatorname{res}_Q \frac{\psi^2 dz}{w} = 0, \quad Q = P_0, \ldots, P_3, P_4^\pm, \ldots, P_m^\pm.$$

Размерность пространства $V(p)$ над $\mathbb{C}$ больше или равна 3.

Доказательство. Рассмотрим произвольную функцию из $V(p)$:

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i}.$$

Определим на торе Γ голоморфную инволюцию $\sigma : (z, w) \mapsto (z, -w)$. Равенство нулю вычетов $\psi^2 dz/w$ в точках ветвления Γ следует из очевидного равенства

$$\sigma^*(\psi^2 dz/w) = -\psi^2 dz/w$$

и инвариантности точек $P_0, \dots, P_3$ относительно инволюции σ.

Выберем локальный параметр $q = z - p_k$ в окрестности точки P_k^+, $k = 4, \dots, m$. Обозначим $\sqrt{P(p_k)}$ через w_k, $\frac{dw}{dq}(p_k, w_k)$ — через w_k' для $k = 4, \dots, m$. Разложение в ряд Лорана дифференциала $\frac{\psi^2}{w}dq$ в окрестности P_k^+ имеет вид

$$\frac{\psi^2}{w}dq = \frac{\nu_k^2 w_k}{q^2}\,dq + \left(\frac{q^2\psi^2}{w}\right)'\big(P_k^+\big)\frac{1}{q}\,dq + O(1)\,dq.$$

Следовательно, вычет в точке P_k^+ равен

$$\operatorname{res}_{P_k^+}\frac{\psi^2}{w}dq = \lim_{q\to 0}\frac{1}{w^2}((q^2\psi^2)'w - q^2\psi^2 w'). \tag{2.7}$$

Очевидно, что

$$\lim_{q\to 0} q^2\psi^2 w' = \nu_k^2 w_k^2 w_k'. \tag{2.8}$$

Используя равенство $(q^2\psi^2)'w = 2(q\psi)'q\psi w$, вычислим $(q\psi)'$:

$$(q\psi)'\big(P_k^+\big) = \left(w\frac{\nu_k}{z-p_k}(z-p_k) + w\sum_{i=1, i\neq k}^{m}\frac{\nu_i}{z-p_i}(z-p_k)\right)\big(P_k^+\big)$$

$$= \nu_k w_k' + w_k\sum_{i=1, i\neq k}^{m}\frac{\nu_i}{p_k-p_i}. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) и (2.9) в (2.7), получим

$$\operatorname{res}_{P_k^+}\frac{\psi^2}{w}\,dq = \frac{1}{w_k^2}\left(2\left(\nu_k w_k' + w_k\sum_{i=1, i\neq k}^{m}\frac{\nu_i}{p_k-p_i}\right)\nu_k w_k^2 - \nu_k^2 w_k^2 w_k'\right)$$

$$= 2\nu_k w_k\left(\frac{P'(p_k)}{4P(p_k)}\nu_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{m}\frac{1}{p_k-p_i}\nu_i\right). \tag{2.10}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку на торе $w^2 = P(z)$ имеет место

$$\frac{w_k'}{2w_k} = \frac{P'(p_k)}{4P(p_k)}, \quad k = 4, \dots, m.$$

Поскольку условие $(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \ker M$ означает справедливость равенства

$$\frac{P'(p_k)}{4P(p_k)}\nu_k + \sum_{i=1, i\neq k}^{m} \frac{1}{p_k - p_i}\nu_i = 0, \quad k = 4, \ldots, m,$$

из (2.10) следует, что $\mathrm{res}_{P_k^\pm} \frac{\psi^2 dz}{w} = 0$ для $\psi \in V(p)$, $k = 4, \ldots, m$.

Таким образом, рассматриваемые 1-формы имеют нулевые вычеты в каждой точке $P_0, \ldots, P_3, P_4^\pm, \ldots, P_m^\pm$.

Ранг M не превосходит $m-3$. Размерность пространства $V(p)$ равна $\dim_{\mathbb{C}} \ker M = m - \mathrm{rank}\, M \geq 3$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для почти всех точек* $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{R}$ *таких, что* $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, *матрица*

$$M_{4,\ldots,m} = \begin{pmatrix} \frac{P'(p_4)}{4P(p_4)} & \frac{1}{p_4-p_5} & \cdots & \frac{1}{p_4-p_m} \\ \frac{1}{p_5-p_4} & \frac{P'(p_5)}{4P(p_5)} & \cdots & \frac{1}{p_5-p_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_m-p_4} & \frac{1}{p_m-p_5} & \cdots & \frac{P'(p_m)}{4P(p_m)} \end{pmatrix}$$

невырождена.

Доказательство. Пусть $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon = O(t)$ и

$$(p_1, \ldots, p_m) = \begin{cases} \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \ldots, \frac{m-1}{2} + t\right) & \text{при нечетном } m, \\ \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \ldots, \frac{m}{2}, 1 + t\right) & \text{при четном } m. \end{cases}$$

Тогда в случае нечетного m справедлива оценка определителя

$$t \det M_{4,\ldots,m} = \left| \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \ldots & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \ldots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \ldots & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \ldots & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} \right| = 1 + O(\varepsilon),$$

в случае четного m имеем другую оценку:

$$t \det M_{4,\dots,m} = \left| \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \frac{11}{24} \end{pmatrix} \right| = \frac{11}{24} + O(\varepsilon)$$

при $t \to 0$. Следовательно, определитель $M_{4,\dots,m}$ является ненулевой рациональной функцией от $p_1, \dots, p_m$. Поскольку множество нулей рациональной функции имеет меру нуль, для почти всех $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ определитель $\det M_{4,\dots,m}$ отличен от нуля. Лемма 3 доказана.

Доказательство предложения 1.

1. Выберем произвольные $\psi_1, \psi_2 \in V(p)$. Тогда $\psi_1 - \psi_2$ и $\psi_1 + \psi_2$ принадлежат $V(p)$. По лемме 1 для вычетов в точках $P_0, \dots, P_3, P_4^\pm, \dots, P_m^\pm$ имеем

$$\operatorname{res}(\psi_1 + \psi_2)^2 \frac{dz}{w} = 0, \quad \operatorname{res}(\psi_1 - \psi_2)^2 \frac{dz}{w} = 0,$$
$$\operatorname{res} \frac{\psi_1 \psi_2 dz}{w} = \frac{1}{4} \operatorname{res} \left((\psi_1 + \psi_2)^2 - (\psi_1 - \psi_2)^2 \right) \frac{dz}{w} = 0.$$

2. По лемме 2 для почти всех точек $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ таких, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, ранг M равен $m - 3$. Следовательно, размерность пространства $V(p)$ равна $\dim_{\mathbb{C}} \ker M = m - \operatorname{rank} M = 3$.

Предложение доказано.

Доказательство предложения 2. Далее считаем, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$.

Представим Γ в виде склейки двух экземпляров плоскостей $\overline{\mathbb{C}}$ («нижний» и «верхний» листы) с разрезами вдоль отрезков $[p_1, p_2]$ и $[p_3, \infty]$. В этом представлении точкам (w, z) и $(-w, z)$ из Γ соответствуют точки z на «нижнем» и «верхнем» листах римановой поверхности. Пусть

$$\gamma_1 = \{(z, w) \in \Gamma \mid z \in [p_1, p_2]\}, \quad \gamma_2 = \{(z, w) \in \Gamma \mid z \in [p_2, p_3]\}.$$

Эти циклы γ_1 и γ_2 гомотопически эквивалентны нетривиальным циклам тора, показанным на рис. 2.

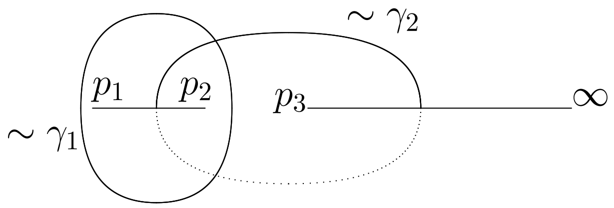

Рис. 2

Точками обозначена часть цикла, расположенная на «нижнем» листе римановой поверхности, а сплошной линией — часть цикла на верхнем листе. Циклы γ_1 и γ_2 образуют базис в $H_1(\Gamma; \mathbb{Z}_2)$.

Определим последовательность

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{для } i = 1, 2, 3, \\ 1/2 & \text{для } i \geq 4. \end{cases}$$

Лемма 4. *Для ψ_1, $\psi_2 \in V(p)$ справедливы равенства*

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{\psi_1 \psi_2}{w}\, dz = -8 \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \beta_j + \sum_{i=1}^{m} \delta_i \alpha_i \beta_i \right) \eta_k$$

$$+8 \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \big(p_i + p_j\big) - \sum_{i=1}^{m} \delta_i \alpha_i \beta_i p_i \right) \omega_k, \quad k = 1, 2,$$

где

$$\eta_k = -\frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{z dz}{w}, \quad \omega_k = \frac{1}{2} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2.$$

Доказательство. Рассмотрим тор $\mathbb{T} = \mathbb{C}/\{2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z}\}$ с локальным параметром u. На $\mathbb{T}$ существует единственная мероморфная функция с полюсом второго порядка в 0 со следующим разложением в окрестности нуля:

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + o(u) + \ldots.$$

Функция $\wp(u)$ называется *пе-функцией Вейерштрасса* (см. п. 1.2).

Для $p_1+p_2+p_3=0$ отображение $\rho(u):\mathbb{T}\to\Gamma$, заданное формулой $\rho(u)=(\wp(u),\wp'(u))$, биголоморфно (см. п. 1.2). Поэтому справедливо равенство

$$(\wp'(u))^2=4(\wp(u)-p_1)(\wp(u)-p_2)(\wp(u)-p_3) \tag{2.11}$$

и ρ отображает точки 0, ω_1, ω_2 и $\omega_3=\omega_1+\omega_2$ на $P_0,\dots,P_3$ в некотором порядке.

Циклы $2\omega_1 t$ и $2\omega_2 t$, $t\in[0,1]$, составляют базис $H_1(\mathbb{T};\mathbb{Z})$. Тем самым образы этих циклов $\rho(2\omega_1 t)$ и $\rho(2\omega_2 t)$ гомотопически эквивалентны γ_1 и γ_2 соответственно (см. п. 1.2).

Выберем $u_1,\dots,u_m$ такие, что

$$\rho(u_i)=(p_i,w_i),\quad i=1,\dots,m.$$

Тогда из (2.11) следует, что $\rho(-u_i)=(p_i,-w_i)$, $i=4,\dots,m$. Считаем, что $w_1=w_2=w_3=0$.

По предложению 1 дифференциал $\psi_1\psi_2dz/w$ имеет полюсы только второго порядка без вычетов, поэтому $\psi_1\psi_2dz/w$ является линейной комбинацией дифференциалов du, $\wp(u)du$, $\wp(u-u_1)du,\dots,\wp(u-u_m)du$, $\wp(u+u_4)du,\dots,$ $\wp(u+u_m)du$.

Найдем эту линейную комбинацию. Заметим, что выполнено равенство $\rho^*(dz/w)=du$. Пусть

$$\alpha_0=\operatorname{res}_Q\frac{\psi_1}{w}\,dz,\quad \beta_0=\operatorname{res}_Q\frac{\psi_2}{w}\,dz$$

в точке $Q\in\left\{P_0,\dots,P_3,P_4^{\pm},\dots,P_m^{\pm}\right\}$. Пусть $u_0\in\mathbb{T}$ такая, что $\rho(u_0)=Q$. Тогда по предложению 1

$$\rho^*\frac{\psi_1\psi_2}{w}\,dz=\frac{\alpha_0\beta_0}{(u-u_0)^2}du+O(1)\,du.$$

Из вида ψ_1 следует, что для вычетов ψ_1dz/w имеем

$$\operatorname{res}_{P_0}\frac{\psi_1}{w}\,dz=-2\sum_{i=1}^m\alpha_i,\ \operatorname{res}_{P_1}\frac{\psi_1}{w}\,dz=2\alpha_1,\dots,\operatorname{res}_{P_3}\frac{\psi_1}{w}dz=2\alpha_3,$$

$$\mathrm{res}_{P_4^\pm} \frac{\psi_1}{w}\, dz = \alpha_4, \dots, \mathrm{res}_{P_m^\pm} \frac{\psi_1}{w}\, dz = \alpha_m.$$

Аналогично вычисляются вычеты $\psi_2 dz/w$.

Таким образом, искомая линейная комбинация $\rho^* \frac{\psi_1\psi_2}{w}\, dz$ равна

$$\left(4 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \wp(u) + 4 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \beta_i \wp(u - u_i) \right.$$
$$\left. + \sum_{i=4}^{m} \alpha_i \beta_i (\wp(u - u_i) + \wp(u + u_i)) + c_0 \right) du.$$

Определим константу c_0 из поведения 1-форм около $\rho(0) = \infty$.

Найденная линейная комбинация для $\rho^* \frac{\psi_1\psi_2}{w}\, dz$ разлагается в окрестности 0 в следующий ряд:

$$4 \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \beta_j \frac{du}{u^2} + \left(4 \sum_{i=1}^{m} \delta_i \alpha_i \beta_i \wp(u_i) + c_0\right) du + O(u)\, du. \qquad (2.12)$$

Выберем локальный параметр $q = \frac{1}{\sqrt{z}}$. Тогда в окрестности ∞ имеем

$$(z, w) = \left(\frac{1}{q^2}, \frac{2}{q^3}\sqrt{(1 - p_1 q^2)(1 - p_2 q^2)(1 - p_3 q^2)}\right)$$

и

$$du = \frac{dz}{w} = -(1 + O(q))\, dq.$$

Чтобы выписать ряд Лорана дифференциала $\psi_1\psi_2 dz/w$ в точке ∞, воспользуемся асимптотикой:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i w}{z - p_i} = q^2 \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (1 + p_i q^2 + O(q^4))$$

и

$$qw\, dq = \frac{1}{q^2}\sqrt{(1 - p_1 q^2)(1 - p_2 q^2)(1 - p_3 q^2)} = \frac{1}{q^2}(1 - (p_1 + p_2 + p_3) q^2 + O(q^4)).$$

Поскольку $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, последнее выражение равно $\frac{1}{q^2} + O(q^2)$.

Выпишем разложение $\psi_1\psi_2 dz/w$:

$$\sum_{i=1}^{m}\tfrac{\alpha_i w}{z-p_i}\sum_{j=1}^{m}\tfrac{\beta_j w}{z-p_j}\tfrac{dz}{w} = -4\sum_{i=1}^{m}\tfrac{\alpha_i}{1-p_iq^2}\sum_{j=1}^{m}\tfrac{\beta_j}{1-p_jq^2}\,qwdq =$$
$$-4\left(\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\tfrac{1}{q^2}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(1+p_iq^2+O(q^4))\sum_{j=1}^{m}\beta_j(1+p_jq^2+O(q^4))\right)dq$$
$$+O(q)\,dq = -4\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\beta_j\tfrac{dq}{q^2}-4\sum_{i,j=1}^{m}\alpha_i\beta_j(p_i+p_j)dq+O(q)dq. \tag{2.13}$$

Приравнивая разложения (2.12) и (2.13) дифференциала $\psi_1\psi_2 dz/w$, находим c_0:

$$c_0 = 4\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j(p_i+p_j)-4\sum_{i=1}^{m}\delta_i\alpha_i\beta_i p_i.$$

Из соотношений

$$\int\limits_{\gamma_k}\wp(u-u_i)\,du=\int\limits_{\gamma_k}\wp(u)\,du=\int\limits_{\gamma_k}\frac{zdz}{w}=-2\eta_k,\quad \int\limits_{\gamma_k}du=2\omega_k,$$

справедливых для $i=1,\ldots,m$ и $k=1,2$, получим утверждение леммы 4.

Продолжим доказательство предложения 2. Из леммы 4 следует, что A не зависит от выбора $p_1,\ldots,p_m$. Квадратичные формы, соответствующие симметрическим билинейным формам A и $B(p)$, будем также обозначать через A и $B(p)$. Выпишем матрицы этих квадратичных форм:

$$A=\begin{pmatrix}1+\delta_1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & 1+\delta_2 & \ldots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \ldots & 1+\delta_m\end{pmatrix},$$

$$B(p)=\begin{pmatrix}(2-\delta_1)p_1 & p_2+p_1 & \ldots & p_m+p_1\\ p_1+p_2 & (2-\delta_2)p_2 & \ldots & p_m+p_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_1+p_m & p_2+p_m & \ldots & (2-\delta_m)p_m\end{pmatrix}.$$

Напомним, что *угловым минором* размера k матрицы называется определитель подматрицы, составленной из k верхних строк и k левых столбцов матрицы.

Пусть $m \geq 3$ — произвольное число. Угловые миноры размера $k = 1, 2, 3$ матрицы A равны 2, 3, 4 соответственно, т. е. положительны. Для каждого $k \geq 4$ угловой минор равен $2^{4-k}(k-1) > 0$. Это можно показать элементарными преобразованиями матрицы. Начиная с нижней строки вычитаем из каждой строки предыдущую. Завершим этот процесс на второй строке:

$$\begin{pmatrix} 1+\delta_1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+\delta_2 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+\delta_k \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1+\delta_1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ -\delta_1 & \delta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\delta_{k-2} & \delta_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\delta_{k-1} & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Далее, начнем с предпоследнего столбца новую серию преобразований: прибавляем к каждому столбцу предыдущий столбец. Завершим преобразования матрицы на четвертом столбце:

$$\begin{pmatrix} 1+\delta_1 & 1 & 1 & k-3 & k-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ -\delta_1 & \delta_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & \delta_3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\delta_3 & \delta_4 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_5 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \delta_{k-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \delta_k \end{pmatrix}.$$

Теперь достаточно прибавить к третьему столбцу удвоенный четвертый столбец, чтобы подматрица распалась. Дополнение к угловому

минору размера 3 диагонально и определитель равен $\frac{1}{2^{k-3}}$, а определитель углового минора размера 3 равен $2(k-1)$. Следовательно, угловой минор размера $k \geq 4$ равен $2^{4-k}(k-1)$.

Из положительности всех угловых миноров A по критерию Сильвестра получаем, что квадратичная форма A положительно определена. Предложение доказано.

Выпишем матрицы Грама — Шмидта относительно базиса ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$(A(\xi_i, \xi_j))_{3\times 3} = (\delta_{ij}), \tag{2.14}$$

$$(B(\xi_i, \xi_j))_{3\times 3} = (\mu_i \delta_{ij}), \tag{2.15}$$

где $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$. Для каждого $p = (p_1, \dots, p_m)$ числа μ_1, μ_2, μ_3 определены с точностью до перестановки.

Предложение 4. *Существует однопараметрическое семейство торов $\Gamma(p_t)$ такое, что периоды*

$$\int\limits_\gamma \xi_1^2 \frac{dz}{w}, \quad \int\limits_\gamma \xi_2^2 \frac{dz}{w}, \quad \int\limits_\gamma \xi_3^2 \frac{dz}{w}$$

попарно различны при $\gamma = \gamma_1$, γ_2.

Доказательство. Пусть

$$(p_1, \dots, p_m) = \begin{cases} \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m-1}{2} + t\right) & \text{при } m \text{ нечетном}, \\ \left(-1, 0, 1, 2, 2+t, 3, \dots, \frac{m}{2}, 1+t\right) & \text{при } m \text{ четном}, \end{cases}$$

где $t \in [0, 1)$.

Пусть

$$\zeta_k(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\delta_{ik}}{z - p_i} + \sum_{j=4}^{m} \frac{\zeta_k^i(t)}{z - p_j(t)}, \quad k = 1, 2, 3,$$

где δ_{ik} — символ Кронекера и

$$\begin{pmatrix} \zeta_k^4(t) \\ \dots \\ \zeta_k^m(t) \end{pmatrix} = -M_{4,\dots,m}^{-1}(t) \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t) - p_k} \\ \dots \\ \frac{1}{p_m(t) - p_k} \end{pmatrix}.$$

Так как

$$
M \begin{pmatrix} \delta_{1k} \\ \delta_{2k} \\ \delta_{3k} \\ \zeta_k^4(t) \\ \dots \\ \zeta_k^m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_k} \\ \dots \\ \frac{1}{p_m(t)-p_k} \end{pmatrix} + M_{4,\dots,m}(t) \begin{pmatrix} \zeta_k^4(t) \\ \dots \\ \zeta_k^m(t) \end{pmatrix},
$$

семейство функций $\zeta_1(t)$, $\zeta_2(t)$, $\zeta_3(t)$ является базисом $V(p_t)$.

Положим

$$
\zeta_k(0) = \begin{cases} \frac{1}{z-p_k}, & \text{при нечетных } m, \\ \frac{1}{z-p_k} + \frac{4\delta_{3k}}{z-p_m}, & \text{при четных } m, \end{cases} \qquad k = 1, 2, 3.
$$

Лемма 5. *Существует достаточно малое $T > 0$ такое, что функции $\zeta_k^i(t) : [0, T) \to \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, $i = 4, \dots, m$, определены и непрерывны.*

Доказательство. Поскольку

$$
\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z-p_1} + \frac{1}{z-p_2} + \frac{1}{z-p_3}
$$

и

$$
p_i - p_j = \begin{cases} O(t) & \text{при } \{i, j\} = \{2k, 2k+1\} \text{ для некоторого } k \geq 2, \\ O(1) & \text{иначе,} \end{cases}
$$

то для m нечетных

$$
tM_{4,\dots,m}(t) = \begin{pmatrix} \frac{P'(p_4)}{4P(p_4)} & \frac{1}{p_4-p_5} & \dots & \frac{1}{p_4-p_m} \\ \frac{1}{p_5-p_4} & \frac{P'(p_5)}{4P(p_5)} & \dots & \frac{1}{p_5-p_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{p_m-p_4} & \frac{1}{p_m-p_5} & \dots & \frac{P'(p_m)}{4P(p_m)} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}
$$

и для m четных

$$tM_{4,\dots,m}(t) \sim \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & & \varepsilon & -1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon & \frac{1}{4}+\varepsilon \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

где $\varepsilon = O(t)$.

Теперь очевидно, что при достаточно малом T для всех $t \in (0,T)$ величина $|\det tM_{4,\dots,m}(t)|$ больше $c_1 = 1/8$, а абсолютные значения элементов матрицы $tM_{4,\dots,m}(t)$ меньше или равны $c_2 = 1$. Поскольку элемент обратной матрицы равен отношению алгебраического дополнения и определителя матрицы, обратные матрицы $(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ существуют и абсолютные значения элементов $(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ меньше $(m-1)!c_2^{m-1}/c_1 = 8(m-1)!$ для $t \in (0,T)$.

Непрерывность $\zeta_1^i(t)$, $\zeta_2^i(t)$, $\zeta_3^i(t)$, $i = 4,\dots,m$, на $(0,T)$ очевидна. Покажем непрерывность справа в точке 0.

Для m нечетного компоненты векторов

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_1} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_1} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_1} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m+1} \\ \frac{2}{m+1+2t} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_2} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_2} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_2} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m-1} \\ \frac{2}{m-1+2t} \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_4(t)-p_3} \\ \frac{1}{p_5(t)-p_3} \\ \dots \\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_3} \\ \frac{1}{p_m(t)-p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{1+t} \\ \dots \\ \frac{2}{m-3} \\ \frac{2}{m-3+2t} \end{pmatrix}$$

ограничены. Следовательно, в этом случае предел $\lim\limits_{t\to+0} t(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ равен нулевой матрице и справедливы равенства

$$\lim_{t\to+0}\zeta_1(t)=\zeta_1(0),\quad \lim_{t\to+0}\zeta_2(t)=\zeta_2(0),\quad \lim_{t\to+0}\zeta_3(t)=\zeta_3(0).$$

Для m четного все координаты векторов (2.17), кроме координаты $\frac{1}{p_m(t)-p_3}$, ограничены. Следовательно,

$$\lim_{t\to+0}\zeta_1(t)=\zeta_1(0),\quad \lim_{t\to+0}\zeta_2(t)=\zeta_2(0).$$

Чтобы найти предел функции $\lim\limits_{t\to+0}\zeta_3(t)$, избавимся от неопределенности $0\cdot\infty$ следующим образом:

$$-\lim_{t\to+0} t(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{p_4(t)-p_3}\\ \frac{1}{p_5(t)-p_3}\\ \dots\\ \frac{1}{p_{m-1}(t)-p_3}\\ \frac{1}{p_m(t)-p_3}\end{pmatrix}=-\lim_{t\to+0} t\big(tM_{4,\dots,m}(t)\big)^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{1+t}\\ \dots\\ \frac{2}{m-4}\\ 1/t\end{pmatrix}$$

$$=-\lim_{t\to+0}(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \dots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\lim\limits_{t\to+0}(tM_{4,\dots,m}(t))^{-1}$ через

$$\frac{1}{\det tM_{4,\dots,m}(t)}\begin{pmatrix}\dots & \dots & \dots & C_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \dots & \dots & \dots & C_{m-4}\\ \dots & \dots & \dots & C_{m-3}\end{pmatrix},$$

где $C_1,\dots,C_{m-3}$ — алгебраические дополнения. Поскольку при $1\leq$

$j \leq m-4$ все элементы последней строки подматрицы

$$C_j = (-1)^{j+m-3} \cdot \det \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

эквивалентны ε, то $\det C_j = \varepsilon$ при $t \to 0$.

Алгебраическое дополнение C_m эквивалентно

$$C_m = (-1)^{m-3+m-3} \cdot \det \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon & \varepsilon \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & \varepsilon & -1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 & \varepsilon \end{pmatrix} = 1 + \varepsilon$$

при $t \to 0$. Из (2.16) следует, что $\det tM_{4,\dots,m}(t) = \frac{1}{4} + \varepsilon$ при $t \to 0$.

Таким образом,

$$\lim_{t \to +0} \big(tM_{4,\dots,m}(t)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 4 \end{pmatrix},$$

и $\zeta_3(0) = \lim\limits_{t \to +0} \zeta_3(t)$. Лемма доказана.

Доопределим $V(p_t)$ при $t = 0$ как линейную оболочку $\zeta_1(0)$, $\zeta_2(0)$, $\zeta_3(0)$.

Теперь очевидно следующее утверждение.

Лемма 6. *Функции $A(\zeta_i(t), \zeta_j(t))$, $B(p_t; \zeta_i(t), \zeta_j(t))$ непрерывны при $t \in [0, 1)$ для $i, j \in \{1, 2, 3\}$.*

Продолжим доказательство предложения 4. При нечетном m положим

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(-\zeta_1(0) + \zeta_2(0) + \zeta_3(0)),$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2}(\zeta_1(0) - \zeta_2(0) + \zeta_3(0)), \quad \xi_3 = \frac{1}{2}(\zeta_1(0) + \zeta_2(0) - \zeta_3(0)).$$

Легко проверить, что справедливы равенства

$$(a_{ij}) = (A(\xi_i, \xi_j)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b_{ij}) = (B(p_0; \xi_i, \xi_j)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, на Γ_0 имеем $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = -1$.

Пусть при m четном

$$\xi_1 = -\frac{\sqrt{39}}{78}(5\zeta_1(0) + 5\zeta_2(0) - 3\zeta_3(0)),$$

$$\xi_2 = -\frac{\sqrt{6}}{6}(\zeta_1(0) - 2\zeta_2(0)), \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\zeta_1(0).$$

Тогда матрица (a_{ij}) является единичной, а (b_{ij}) имеет характеристический полином $13\mu^3 - 12\mu^2 - 21\mu + 4$. Нули этого полинома равны μ_1, μ_2, μ_3. Легко проверить, что μ_1, μ_2, μ_3 попарно различны.

Таким образом, для всех m существует такой тор Γ_0, что числа μ_1, μ_2, μ_3 попарно различны. По лемме 6 элементы матрицы Грама — Шмидта (2.14 – 2.15) непрерывны на $[0, T)$. Поэтому числа μ_1, μ_2, μ_3 непрерывно зависят от t на $[0, T)$ как корни характеристического полинома матрицы Грама — Шмидта. Тем самым существует T' такое, что для $t \in [0, T')$ числа μ_1, μ_2, μ_3 попарно различны. Предложение 4 доказано.

Пусть

$$a_k = \int\limits_{\gamma_1} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad b_k = \int\limits_{\gamma_2} \xi_k^2 \frac{dz}{w}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.18}$$

Равенства

$$a_k = \int\limits_{\gamma_1} \xi_k^2 \frac{dz}{w} = -8\eta_1 A(\xi_k, \xi_k) + 8\omega_1 B(\xi_k, \xi_k) = -8\eta_1 + 8\omega_1 \mu_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$b_k = \int\limits_{\gamma_2} \xi_k^2 \frac{dz}{w} = -8\eta_2 A(\xi_k, \xi_k) + 8\omega_2 B(\xi_k, \xi_k) = -8\eta_2 + 8\omega_2 \mu_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

вытекают из определения (2.4) и равенств (2.14), (2.15). Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} -\eta_1 & \omega_1 \\ -\eta_2 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \end{pmatrix}.$$

Периоды $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ трудно оценить и тем более трудно вычислить. В следующей лемме приводим условия, которым удовлетворяют эти периоды.

Лемма 7. *Пусть тор Γ таков, что μ_1, μ_2, μ_3 различны. Тогда*

1) *периоды a_1, a_2, a_3 вещественные, а периоды b_1, b_2, b_3 мнимые;*

2) *периоды $\xi_k^2 dz/w$ по разным циклам не обращаются в нуль одновременно:*

$$|a_k| + |b_k| \neq 0, \quad k = 1, 2, 3;$$

3) *если и существует, то не более одной пары несовпадающих индексов $k, l \in \{1, 2, 3\}$ таких, что*

$$a_k b_l + a_l b_k = 0;$$

4) *если и существует, то не более одной пары несовпадающих индексов $k, l \in \{1, 2, 3\}$ таких, что*

$$a_k b_l - a_l b_k = 0;$$

5) *если и существует, то не более одного индекса $k \in \{1, 2, 3\}$ такого, что*

$$a_k = 0;$$

это утверждение также верно для $b_k = 0$;

6) *для различных* $k, l \in \{1, 2, 3\}$

$$|a_k b_l - a_l b_k| + |a_k b_l + a_l b_k| \neq 0.$$

Доказательство. 1. Рассмотрим инволюцию $\tau : (z, w) \mapsto (\bar{z}, \overline{w})$. Для 1-форм $\varphi = dz/w$ и zdz/w справедливо равенство

$$\tau^* \varphi = \overline{\varphi}.$$

Тогда выполнены равенства

$$\int\limits_{\gamma_1} \varphi = \int\limits_{\tau\gamma_1} \varphi = \int\limits_{\tau\tau\gamma_1} \tau^* \varphi = \overline{\int\limits_{\gamma_1} \varphi}.$$

Первое равенство следует из $\gamma_1 = \tau\gamma_1$. Второе равенство верно для любых инволюций. Третье получаем из $\tau^* \varphi = \overline{\varphi}$.

Аналогично, но с учетом $\gamma_2 = -\tau\gamma_2$ вытекает следующее равенство:

$$\int\limits_{\gamma_2} \varphi = \int\limits_{-\tau\gamma_2} \varphi = \int\limits_{-\tau\tau\gamma_2} \tau^* \varphi = -\overline{\int\limits_{\gamma_2} \varphi}.$$

Значит, периоды ω_1 и η_1 — вещественные, а ω_2 и η_2 — чисто мнимые числа. Периоды a_k и b_k являются линейными комбинациями с вещественными коэффициентами ω_1, η_1 и ω_2, η_2 соответственно. Итак, первое утверждение леммы справедливо.

2. Поскольку по определению $a_k = -\eta_1 + \mu_k \omega_1$ и $b_k = -\eta_2 + \mu_k \omega_2$, то

$$\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 + \mu_k \omega_1 \\ -\eta_2 + \mu_k \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 & \omega_1 \\ -\eta_2 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_k \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Квадратную матрицу в последнем выражении обозначим через Δ. Из равенства Лежандра $\eta_1 \omega_2 - \eta_2 \omega_1 = \frac{\pi i}{2}$, выполненного на любом торе [22], следует, что $\det \Delta = -\eta_1 \omega_2 + \eta_2 \omega_1 \neq 0$. В силу линейной независимости столбцов Δ вектор $\begin{pmatrix} a_k & b_k \end{pmatrix}$ не может быть нулевым. Следовательно, второе утверждение леммы верно.

3. Из (2.19) вытекает равенство

$$a_l b_k + a_k b_l = \begin{pmatrix} a_l & b_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_k \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_l \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_k \end{pmatrix},$$

где $k, l \in \{1, 2, 3\}$, поэтому

$$\begin{pmatrix} a_k b_l + a_l b_k \\ a_k b_j + a_j b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_l \\ 1 & \mu_j \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_k \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mu_l \neq \mu_j$ и $\det \Delta \neq 0$, столбцы произведения матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu_l \\ 1 & \mu_j \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta$$

линейно независимы и вектор $\begin{pmatrix} a_k b_l + a_l b_k & a_k b_j + a_j b_k \end{pmatrix}$ ненулевой.

Таким образом, мы показали справедливость третьего утверждения.

4. Четвертое утверждение доказывается аналогично третьему и следует из того, что

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & \mu_l \\ 1 & \mu_j \end{pmatrix} \Delta^t \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Delta \right] \neq 0.$$

5. Чтобы доказать пятое утверждение, рассмотрим a_k и a_l с различными индексами $k, l \in \{1, 2, 3\}$. Период ω_1 не равен 0.

Из равенства

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_1 + \mu_k \omega_1 \\ -\eta_1 + \mu_l \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu_k \\ 1 & \mu_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_1 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

и $\mu_k \neq \mu_l$ вытекает пятое утверждение.

Заметим, что пятое утверждение также верно для b_k, $k = 1, 2, 3$.

6. Шестое утверждение следует из второго и пятого утверждений.

Лемма доказана.

Доказательство предложения 3. Далее считаем, что μ_1, μ_2, μ_3 различны. В предложении 4 показано существование таких торов.

Согласно лемме 7 перенумерацией ξ_1, ξ_2, ξ_3 можно добиться того, что $a_3 \neq 0$ и $a_1 b_3 + a_3 b_1 \neq 0$, поэтому далее считаем, что

$$a_3 \neq 0, \quad a_1 b_3 + a_3 b_1 \neq 0.$$

Отсутствие периодов. Условие отсутствия периодов

$$\mathrm{Re} \int\limits_\gamma \psi_1 \psi_2 \frac{dz}{w} = 0, \quad \overline{\int\limits_\gamma \psi_1^2 \frac{dz}{w}} - \int\limits_\gamma \psi_2^2 \frac{dz}{w} = 0, \quad \gamma = \gamma_1, \gamma_2,$$

состоит из двух вещественных и двух комплексных уравнений.

В первую часть условия подставим ψ_1 и ψ_2:

$$\int\limits_\gamma \psi_1 \psi_2 \frac{dz}{w} = \int\limits_\gamma \big(vx\xi_1^2 + y\xi_2^2 + (vy + x)\xi_1\xi_2 + vu\xi_1\xi_3 + u\xi_2\xi_3\big) \frac{dz}{w}$$
$$= \int\limits_\gamma \big(vx\xi_1^2 + y\xi_2^2\big) \frac{dz}{w} = \begin{cases} vxa_1 + ya_2 & \text{при } \gamma = \gamma_1, \\ vxb_1 + yb_2 & \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{cases}$$

Справедливость второго равенства следует из леммы 1. Последнее равенство выполнено ввиду (2.18). По первому утверждению леммы 7 периоды

$$vxa_1 + ya_2 = -(a_1b_2 - a_2b_1)s \in i\mathbb{R}, \quad vxb_1 + yb_2 = (a_1b_2 - a_2b_1)r \in i\mathbb{R}$$

чисто мнимые, поэтому первая часть условия отсутствия периодов выполнена.

Вторая часть условия упрощается аналогично первой:

$$\overline{\int\limits_\gamma \psi_1^2 \frac{dz}{w}} - \int\limits_\gamma \psi_2^2 \frac{dz}{w} = \overline{\int\limits_\gamma \big(v^2\xi_1^2 + \xi_2^2\big) \frac{dz}{w}} - \int\limits_\gamma \big(x^2\xi_1^2 + y^2\xi_2^2 + u^2\xi_3^2\big) \frac{dz}{w}$$
$$= \begin{cases} \overline{v^2a_1 + a_2} - x^2a_1 - y^2a_2 - u^2a_3 & \text{при } \gamma = \gamma_1, \\ \overline{v^2b_1 + b_2} - x^2b_1 - y^2b_2 - u^2b_3 & \text{при } \gamma = \gamma_2. \end{cases}$$

Заметим, что по первому утверждению леммы 7 периоды a_1, a_2, a_3 вещественны. Выбор u в виде (2.6) обеспечивает обращение в нуль периодов по циклу γ_1. Покажем, что выбор v в виде (2.5) приводит к равенству нулю периодов по γ_2.

Из вида $v(r,s)$ заключаем, что v является корнем полинома

$$cv^4 + (|c|^2 + 2i\operatorname{Im} d)v^2 + \bar{c}d = 0.$$

Обозначим $|c|^2 + 2i\operatorname{Im} d$ через α. Дискриминант этого полинома веществен:

$$\alpha^2 - 4|c|^2 d = |c|^4 + 4|c|^2 i\operatorname{Im} d - 4\operatorname{Im}^2 d - 4|c|^2 d = |c|^4 - 4|c|^2\operatorname{Re} d - 4\operatorname{Im}^2 d.$$

Покажем, что он положителен для (r,s) из некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Заметим, что $d(r,s)$, $c(r,s)$ и дискриминант непрерывно зависят от (r,s) на $\mathbb{R}^2$. Следовательно, достаточно указать точки в $\mathbb{R}^2$, где дискриминант положителен.

Если $a_2b_3 + a_3b_2 \neq 0$, то для $(r,s) = (0,0)$ дискриминант положителен:

$$\left|\frac{a_2b_3 + a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}\right|^2 > 0.$$

Если $a_2b_3 + a_3b_2 = 0$, то при $s = 0$ дискриминант равен

$$a_1^4 r^6 \left|\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}\right|^2 \left(a_1^4\left(\frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}\right)^2 r^2 + 4a_2^2\frac{a_1b_3 - a_3b_1}{a_1b_3 + a_3b_1}\right)$$

и неотрицателен для достаточно больших r. Следовательно, есть область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, где дискриминант неотрицателен.

Теперь подставим в выражение периода $\overline{v^2b_1 + b_2} - x^2b_1 - y^2b_2 - u^2b_3$ значения u, x, y, умножим на a_3v^2 и сократим на $-(a_1b_3 + a_3b_1)$. Пусть $a_3v^2 \neq 0$. Очевидные вычисления показывают, что период $\overline{v^2b_1 + b_2} - x^2b_1 - y^2b_2 - u^2b_3$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\bar{v}^2v^2 + cv^2 + d = 0$.

Подставим (2.5) в $\bar{v}^2v^2+cv^2+d$. Для $(r,s)\in\Omega$ имеем

$$\bar{v}^2v^2+cv^2+d=\frac{1}{4|c|^2}(\overline{\alpha}\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d})(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d})\alpha^2$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d})+d=\frac{1}{4|c|^2}(|c|^2\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d}-2i\operatorname{Im}d)$$
$$\times(|c|^2\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d}+2i\operatorname{Im}d)\alpha^2-\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d})+d$$
$$=\frac{1}{4|c|^2}(|c|^4\pm2|c|^2\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d}+\alpha^2-4|c|^2d+4\operatorname{Im}^2d)$$
$$-\frac{1}{2}(\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d})+d=\frac{|c|^2}{4}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d}}{2}$$
$$+\frac{\alpha^2+4\operatorname{Im}^2d}{4|c|^2}-d-\frac{|c|^2}{2}-i\operatorname{Im}d-\frac{\pm\sqrt{\alpha^2-4|c|^2d}}{2}+d=0.$$

Таким образом, для $(r,s)\in\Omega$ периоды (2) по γ_1 и γ_2 равны нулю.

Корректность конструкции.

Лемма 8. *Множество нулей $c(r,s)$ и $v(r,s)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. Из второго утверждения леммы 7 следует, что полином $(a_1r+b_1s)^2$ ненулевой. По шестому утверждению леммы 7 функция $c(r,s)$ не равна тождественно нулю. Отсюда множество нулей $c(r,s)$ имеет меру нуль.

Корни полинома $cv^4+(|c|^2+2i\operatorname{Im}d)v^2+\bar{c}d$ равны нулю, если и только если $|c|^2+2i\operatorname{Im}d=0$ и $\bar{c}d=0$. Следовательно, необходимым условием $v(r,s)=0$ является $c(r,s)=0$. Лемма доказана.

Таким образом, выражения, определяющие ψ_1 и ψ_2, не содержат деления на нуль для почти всех $(r,s)\in\Omega$.

Предложение 5. *Существуют $(r,s)\in\Omega$ такие, что ψ_1 и ψ_2 имеют полюсы в каждой точке $P_0,\dots,P_3,P_4^{\pm},\dots,P_m^{\pm}$.*

Подматрицы, составленные из столбцов $j_1,\dots,j_m$ матрицы M, обозначим через $M_{j_1,\dots,j_m}$.

Лемма 9. *Для почти всех точек $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{R}$ таких, что $p_1 + p_2 + p_3 = 0$, все квадратные подматрицы $M_{j_1,\dots,j_m}$ невырождены.*

Доказательство. При переобозначении переменных p_i и p_j для $3 \le i,j \le m$ ($1 \le i,j \le 3$) меняются местами i-й и j-й столбцы; также меняются местами $(i-3)$-я и $(j-3)$-я строки (только i-й и j-й столбцы) матрицы M. Поэтому достаточно доказать невырожденность подматриц $M_{4,\dots,m}$, $M_{1,4,\dots,m-2}$, $M_{1,2,4,\dots,m-1}$, $M_{1,\dots,m-3}$.

Невырожденность подматрицы $M_{4,\dots,m}$ доказана в лемме 2.

Пусть N — достаточно большое натуральное число. Положим

$$p = (p_1, \dots, p_m) = (-1, 0, 1, N, N+1, 2N, 2N+1, \dots).$$

Подматрицы $M_{1,4,\dots,m-1}$, $M_{1,2,4,\dots,m-2}$, $M_{1,\dots,m-3}$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix},$$

где S это $M_{4,\dots,m-1}$, $M_{4,\dots,m-2}$ или $M_{4,\dots,m-3}$. По лемме 2 в каждом случае подматрица S невырождена. Элементы R имеют асимптотическое поведение $\varepsilon = O(1/N)$ при $N \to \infty$. Элементы U ограничены константой, не зависящей от N.

Подматрица T имеет один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{p_m - p_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{p_{m-1}-p_1} & \frac{1}{p_{m-1}-p_2} \\ \frac{1}{p_m-p_1} & \frac{1}{p_m-p_2} \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \frac{1}{p_{m-2}-p_1} & \frac{1}{p_{m-2}-p_2} & \frac{1}{p_{m-2}-p_3} \\ \frac{1}{p_{m-1}-p_1} & \frac{1}{p_{m-1}-p_2} & \frac{1}{p_{m-1}-p_3} \\ \frac{1}{p_m-p_1} & \frac{1}{p_m-p_2} & \frac{1}{p_m-p_3} \end{pmatrix}.$$

Выберем числа (только те, которые входят в матрицу T) p_{m-2}, p_{m-1}, $p_m \in (0,1)$ таким образом, чтобы определитель T не был равен нулю. Тогда при $N \to \infty$ матрица

$$\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \varepsilon & S \\ T & * \end{pmatrix}$$

распадается на две матрицы с невырожденными определителями.

Оценим подматрицы $M_{1,4,\ldots,m-1}$, $M_{1,2,4,\ldots,m-2}$, $M_{1,\ldots,m-3}$:

$$\det\begin{pmatrix}\varepsilon & S\\ T & *\end{pmatrix} = -\det S\det T + O(1/N).$$

Лемма доказана.

Докажем следствие из леммы 9.

Лемма 10. *Для почти всех $p=(p_1,\ldots,p_m)$ таких, что $p_1+p_2+p_3=0$, для каждой точки $P_0,\ldots,P_3,P_4^{\pm},\ldots,P_m^{\pm}$ найдется функция $\psi\in V(p)$, имеющая полюс в этой точке.*

Доказательство. По лемме 2 пространство

$$V(p)=\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{\nu_i w}{z-p_i}\mid(\nu_1,\ldots,\nu_k,\ldots,\nu_m)\in\ker M\right\}$$

трехмерно для почти всех $p=(p_1,\ldots,p_m)$ таких, что $p_1+p_2+p_3=0$.

Предположим обратное утверждению леммы — пусть функции из $V(p)$ не имеют полюса в одной из точек $(p_k,w_k)\in\left\{P_1,P_2,P_3,P_4^{\pm},\ldots,P_m^{\pm}\right\}$, $k\in\{1,\ldots,m\}$. Тогда

$$\begin{aligned}V(p)&=\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{\nu_i w}{z-p_i}\mid(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1},\nu_k,\nu_{k+1},\ldots,\nu_m)\in\ker M,\ \nu_k=0\right\}\\&=\left\{\sum_{i=1,i\neq k}^{m}\frac{\nu_i w}{z-p_i}\mid(\nu_1,\ldots,\nu_{k-1},\nu_{k+1},\ldots,\nu_m)\in\ker M'\right\},\end{aligned}$$

где M' — матрица M с вычеркнутым k-м столбцом.

Для почти всех точек $p_1,\ldots,p_m$ матрица M' по лемме 9 имеет максимальный ранг. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}}\ker M'=m-1-\operatorname{rank}M'=2$, а $\dim_{\mathbb{C}}V(p)=\dim_{\mathbb{C}}\ker M=\dim_{\mathbb{C}}\ker M'=3$. Пришли к противоречию.

Теперь осталось показать справедливость утверждения для точки P_0.

Предположим обратное утверждению леммы. Пусть функции из

$V(p)$ не имеют полюса в P_0:

$$V(p) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \ker M,\ \nu_1 + \cdots + \nu_m = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \sum_{i=1}^{m} \frac{\nu_i w}{z - p_i} \mid (\nu_1, \ldots, \nu_m) \in \ker M'' \right\},$$

где M'' — матрица M, дополненная строкой, состоящей из единиц.

Аналогично доказательству леммы 9 легко доказать, что матрица M''
имеет максимальный ранг для почти всех точек $p_1, \ldots, p_m$. Следовательно, $\dim_{\mathbb{C}} \ker M'' = m - \operatorname{rank} M'' = 2$, а $\dim_{\mathbb{C}} V(p) = \dim_{\mathbb{C}} \ker M = \dim_{\mathbb{C}} \ker M'' = 3$. Пришли к противоречию. Лемма доказана.

Лемма 11. *Функция $v(r, s)$ не является постоянной на Ω.*

Доказательство. По лемме 8 для почти всех $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ полином $c(r, s)$ не равен нулю. Для $c(r, s) \neq 0$ функция v является корнем полинома

$$v^2 + \frac{(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)}{c} v + \frac{\bar{c} d}{c} = 0. \tag{2.20}$$

Допустим обратное утверждению леммы: пусть нули полинома (2.20) постоянны. Это означает, что $(|c|^2 + 2i \operatorname{Im} d)/c$ и $\bar{c}d/c$ постоянны. Отсюда и из вида функций $c(r, s)$ и $d(r, s)$ вытекает, что $d(r, s)$ равна нулю, а $c(r, s)$ постоянна.

Следовательно, $a_1 b_3 - a_3 b_1$ и $a_2 b_3 - a_3 b_2$ одновременно равны нулю; противоречие с четвертым утверждением леммы 7. Лемма доказана.

Лемма 12. *Множество нулей $u(r, s)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^2$.*

Доказательство. При $s = 0$ и $r \to \infty$ имеем

$$v^2(r, s) = -\frac{a_2 b_3 - a_3 b_2}{a_1 b_3 + a_3 b_1} a_1^2 r^2 + o(r^2), \quad u^2(r, s) = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_1 b_3 + a_3 b_1} a_1^2 r^2 + o(r^2). \tag{2.21}$$

Если $a_1 \neq 0$ и $a_1 b_2 + a_2 b_1 \neq 0$, то из (2.21) следует, что для почти всех $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ верно $u(r, s) \neq 0$. Если $a_1 = 0$, то утверждение леммы очевидно.

Если $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$, то легко показать справедливость равенств

$$v^2(0,0) = -\frac{a_2b_3 + a_3b_2}{a_1b_3 + a_3b_1}, \quad u^2(0,0) = -\frac{a_1}{a_3}\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1b_3 + a_3b_1}.$$

По шестому утверждению леммы 7 из $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$ имеем $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Таким образом, функция $u(r,s)$ является ненулевой алгебраической. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Доказательство предложения 5. Допустим, что ψ_1 не имеет полюса в точке Q для всех $(r,s) \in \Omega$. Тогда ξ_1 и ξ_2 не имеют полюса в Q. Это следует из вида ψ_1 и из того, что $v(r,s)$ варьируется на Ω по лемме 11.

Поэтому по лемме 10 ξ_3 имеет полюс в Q. Тем самым у

$$\psi_2 = x(r,s)\xi_1 + y(r,s)\xi_2 + u(r,s)\xi_3$$

есть полюс в Q при r и s таких, что $u(r,s) \neq 0$, т. е. ψ_2 имеет полюс для почти всех $(r,s) \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, в каждой точке $P_0, \ldots, P_3, P_4^{\pm}, \ldots, P_m^{\pm}$ хотя бы одна из функций ψ_1 и ψ_2 имеет простой полюс. Следовательно, у поверхности (2.2) есть ровно $n = 2m - 2 \geq 6$ вложенных плоских концов. Предложение доказано.

Регулярность. Вычислим ψ_1 и ψ_2 для $s = 0$. В этом случае

$$y(r) = a_1 r, \quad v(r) = \sqrt{-\frac{a_2b_3 + a_3b_2 - (a_2b_3 - a_3b_2)a_1^2r^2}{a_1b_3 + a_3b_1}},$$

$$x(r) = \frac{-a_2}{v(r)}r, \quad u(r) = \sqrt{\frac{1}{a_3}\left(a_1v^2(r) + a_2\right)\left(1 - \frac{a_1a_2}{v^2(r)}r^2\right)}. \qquad (2.22)$$

Объясним последнее равенство — остальные очевидны. По лемме 7 периоды a_1, a_2 и a_3 вещественные, а b_1, b_2 и b_3 мнимые числа, поэтому

$\operatorname{Im} d = 0$ и v^2 является вещественным. Следовательно, из (2.6) вытекает равенство

$$u^2(r) = \frac{1}{a_3}\left(a_1 v^2(r) - a_1\frac{a_2^2 r^2}{v^2(r)} - a_2 a_1^2 r^2 + a_2\right).$$

Теперь последнее равенство в (2.22) получается группированием слагаемых.

Докажем лемму.

Лемма 13. *Пусть*

$$r_0 = \sqrt{\frac{a_3 b_2 + a_2 b_3}{a_1^2(a_2 b_3 - a_3 b_2) - a_1 a_2(a_3 b_1 + a_1 b_3)}}$$

ненулевое вещественное число,

$$a_1^2 a_2 r_0^2 + a_2 \neq 0, \quad v(r_0, 0) \neq 0$$

и функции ξ_1, ξ_2 не имеют общих нулей.

Тогда $\psi_1(r_0,0)$ и $\psi_2(r_0,0)$ не имеют общих нулей.

Доказательство. При $r = r_0$ и $s = 0$ функция $u(r,s)$ равна нулю.

Следовательно,

$$\begin{pmatrix}\psi_1(r_0,0)\\ \psi_2(r_0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v(r_0,0) & 1\\ x(r_0,0) & y(r_0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}.$$

Справедливы равенства

$$\det\begin{pmatrix} v(r_0,0) & 1\\ x(r_0,0) & y(r_0,0)\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} v(r_0,0) & 1\\ -\frac{a_2}{v(r_0,0)} r_0 & a_1 r_0\end{pmatrix} = \frac{r_0}{v(r_0,0)}(a_1 v^2(r_0,0) + a_2).$$

Поскольку $a_1 v^2 + a_2$ равен $a_1^2 a_2 r_0^2 + a_2$, то выписанная матрица невырождена. Поэтому, общие нули ξ_1, ξ_2 и общие нули $\psi_1(r_0,0)$, $\psi_2(r_0,0)$ совпадают.

Следовательно, $\psi_1(r_0,0)$ и $\psi_2(r_0,0)$ не имеют общих нулей на Γ.

Регулярность для $n = 6$. Рассмотрим риманову поверхность Γ, заданную в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = 4(z^3 - z).$$

Точки $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,-1)$, ∞, $(-i\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2})$ и $(-i\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{1}{2})$ считаем выколотыми. Таким образом, $p=(1,0,-1,\frac{1}{2})$.

Функции ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3 :

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= \frac{1}{\sqrt{57}}\left(\frac{482+15\sqrt{57}}{210(z-1)}+\frac{341+30\sqrt{57}}{210z}+\frac{388-45\sqrt{57}}{210(z+1)}+\frac{4}{6z-3}\right);\\
\vartheta_2 &= \frac{1}{\sqrt{57}}\left(\frac{341+30\sqrt{57}}{210(z-1)}+\frac{353+60\sqrt{57}}{210z}+\frac{349-90\sqrt{57}}{210(z+1)}+\frac{44}{3-6z}\right);\\
\vartheta_3 &= \frac{1}{\sqrt{57}}\left(\frac{388-45\sqrt{57}}{210(z-1)}+\frac{349-90\sqrt{57}}{210z}+\frac{362+135\sqrt{57}}{210(z+1)}+\frac{28}{3-6z}\right),
\end{aligned}$$

составляют базис V. Это можно проверить прямыми вычислениями.

Также прямыми выкладками проверяется то, что

$$(A(\vartheta_i,\vartheta_j))_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad (B(\vartheta_i,\vartheta_j))_{3\times 3}=\frac{1}{209475}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}38254+9395\sqrt{57} & -75203+5175\sqrt{57} & -77284-15340\sqrt{57}\\ -75203+5175\sqrt{57} & 49696-16880\sqrt{57} & -71737+10165\sqrt{57}\\ -77284-15340\sqrt{57} & -71737+10165\sqrt{57} & 46114+7485\sqrt{57}\end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $(B(\vartheta_i,\vartheta_j))_{3\times 3}$ равен полиному

$$75x^3-48x^2-75x-16.$$

Нули этого полинома вычисляются со сколь угодной большой точностью и лежат вблизи чисел

$$\mu_1\sim -0.504,\quad \mu_2\sim -0.294,\quad \mu_3\sim 1.438.$$

Также со сколь угодно большой точностью можно вычислить a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 и b_3 :

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}-\eta_1&\omega_1\\-\eta_2&\omega_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\\mu_1&\mu_2&\mu_3\end{pmatrix}.$$

Эти константы приблизительно равны

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0.6742 & -8.6852 & 0.3457 \\ 10.2593i & 0.89992i & 9.9309i \end{pmatrix}.$$

Далее найдем приближения ξ_1, ξ_2 и ξ_3 :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{0.5682}{z-\frac{1}{2}} + \frac{0.3613}{z} - \frac{0.5684}{z+1} + \frac{0.2192}{z-1}; \\ \xi_2 &= -\frac{0.8921}{z-\frac{1}{2}} + \frac{0.4245}{z} + \frac{0.3283}{z+1} + \frac{0.4596}{z-1}; \\ \xi_3 &= -\frac{0.4630}{z-\frac{1}{2}} + \frac{0.3452}{z} - \frac{0.6102}{z+1} + \frac{0.1032}{z-1}. \end{aligned}$$

Численный анализ показывает, что ξ_1 и ξ_2 не имеют общих нулей.

Поскольку

$$r_0 \sim 0.1021, \quad a_1^2 a_2 r_0^2 + a_2 \sim -21.2214, \quad v \sim 3.9991,$$

то условия леммы 13 выполнены, и следовательно ψ_1 и ψ_2 не имеют общих нулей при $r = r_0$, $s = 0$.

Регулярность для $n = 8$. Пусть $p = (1, 0, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Выколотыми на Γ считаем точки $(0,1)$, $(0,0)$, $(0,-1)$, ∞, $(-i\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$, $(-i\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$, $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2})$ и $(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2})$.

Функции ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3, приводящие $A|_{M\times M}$ к диагональному виду, также находятся в явном виде. Мы не будем приводить эти функции в явном виде. Характеристический полином $(B(\vartheta_i, \vartheta_j))_{3\times 3}$ равен

$$-x^3 + \frac{2177}{6273}x.$$

Поэтому

$$\mu_1 = -\sqrt{\frac{2177}{6273}}, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{2177}{6273}}.$$

Ниже приводим приблизительные значения констант

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10.9712 & -4.7925 & 1.386 \\ -1.386i & 4.7925i & 10.971i \end{pmatrix},$$

и

$$r_0 \sim 0.2793, \quad a_1^2 a_2 r_0^2 + a_2 \sim -49.7988, \quad v \sim 7.6103,$$

Условия леммы 13 выполнены, и следовательно ψ_1 и ψ_2 не имеют общих нулей при $r = r_0$, $s = 0$.

Регулярность для $n = 10$. Пусть $p = (1, 0, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Функции ϑ_1, ϑ_2 и ϑ_3, приводящие $A|_{M\times M}$ к диагональному виду, также находятся в явном виде. Мы не будем приводить эти функции в явном виде. Характеристический полином $(B(\vartheta_i, \vartheta_j))_{3\times 3}$ равен

$$-x^3 + \frac{2177}{6273}x.$$

Поэтому

$$\mu_1 = -\sqrt{\frac{2177}{6273}}, \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_3 = \sqrt{\frac{2177}{6273}}.$$

Ниже приводим приблизительные значения констант

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -10.9712 & -4.7925 & 1.386 \\ -1.386i & 4.7925i & 10.971i \end{pmatrix},$$

и

$$r_0 \sim 0.2793, \quad a_1^2 a_2 r_0^2 + a_2 \sim -49.7988, \quad v \sim 7.6103,$$

Условия леммы 13 выполнены, и следовательно ψ_1 и ψ_2 не имеют общих нулей при $r = r_0$, $s = 0$.

Список литературы

[1] Blaschke W. *Vorlesungen über Differentialgeometrie III.* Berlin: Springer, 1929.

[2] Thomsen G. *Über konforme Geometrie I: Grundlagen der konformen Flächentheoremrie.* // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1924. Vol. 3. P. 31–56.

[3] Bryant R. L. *A duality theorem for Willmore surfaces.* // J. Differential Geometry. 1984. Vol. 20. P. 23–53.

[4] Gackstatter F. *Über die Dimension einer Minimalfläche und zur Ungleichung von st. Cohn-Vossen.* // Arch. Ration. Mech. Anal. 1976. Vol. 61. No. 2. P. 141–152.

[5] Osserman R. *A survey of minimal surfaces.* N.Y.: Dover Publ., 1986.

[6] White J. H. *A global invariant of conformal mappings in space.* // Proc. Amer. Math. Soc. 1973. Vol. 38. P. 162–164.

[7] Bryant R. L. *Surfaces in conformal geometry.* // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. 1988. Vol. 48. P. 227–240.

[8] Peng C.-K., Xiao L. *Willmore surfaces and minimal surfaces with flat ends.* // Chen. W. H. (ed.) et al., Geometry and topology of submanifolds X. Proceedings of the conference on differential geometry in honor of S.S.Chen. Singapore: World Scientific, 2000. P. 259–265.

[9] Babich M. V. *Willmore surfaces, 4-particle Toda lattice and double coverings of hyperelliptic surfaces.* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1996. Vol. 174. P. 143–168.

[10] Costa C. *Complete minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$ *of genus one and four planar embedded ends.* // Proceedings of American Mathematical Society. 1993. Vol. 119. P. 1279–1287.

[11] Kusner R., Schmitt N. *The Spinor Representation of Minimal Surfaces in Space.* University of Massachusetts in Amherst, GANG preprint III.27, 1993.

[12] Taimanov I. A. *Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces.* // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. Vol. 179. P. 133—151.

[13] *Минимальные поверхности.* Под ред. Оссермана Р. М.: Физматлит, 2003.

[14] Hoffman D., Meeks W. H. *The strong half-space theorem for minimal surface.* // Invent. Math. 1990. Vol. 101. P. 373–377.

[15] Schoen R. *Uniqness, symmetry and emdedness of minimal surfaces.* // J. Differential Geometry. 1983. Vol. 18. P. 791–809.

[16] Willmore T. J. *Note on embedded surfaces,* // An. Sti. Univ. "Al. I. Cuza" Iasi Sect. I a Mat. 1965. Vol. 11. P. 493–496.

[17] Li P., Yau S. T. *A conformal invariant and applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue for compact surfaces.* // Invent. Math. 1982. Vol. 69. P. 269–291.

[18] Simon L. *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional.* // Comm. Anal. Geom. 1993. Vol. 1. P. 281–326.

[19] Hoffman D., Meeks W. H. *The asymptotic behavior of properly embedded minimal surfaces of finite topology.* // J. Amer. Math. Soc. 1989. Vol. 2. No. 4. P. 667–682.

[20] Hsu L., Kusner R., Sullivan J. *Minimizing the squared mean curvature integral for surfaces in space forms.* // Experimental Math. 1992. Vol. 1. No 3. P. 191–207.

[21] Тужилин А. А., Фоменко А. Т. *Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей.* М.: Наука, 1991.

[22] Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций.* М.: Наука, 1968.

[23] Дубровин Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения.* М., Ижевск: НИЦ "РиХД", 2001.

[24] Тайманов И. А. *Лекции по дифференциальной геометрии.* М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.

Работы автора по теме диссертации

[25] Шамаев Э. И. *Минимальные торы с шестью плоскими концами.* // Вестник НГУ. Серия "Математика, механика, информатика". 2004. Т. 4. № 4. С. 68–73.

[26] Шамаев Э. И. *Минимальные торы в* $\mathbb{R}^3$ *с малым числом плоских концов.* // Математические заметки ЯГУ. 2005. Т. 12. № 1. С. 121–133.

[27] Шамаев Э. И. *Об одном семействе минимальных торов в* $\mathbb{R}^3$ *с плоскими концами.* Новосибирск, 2005. 24 С. (Препринт / РАН Сиб. отделение. Ин-т математики; № 160.)[1]

[1] В печати: Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 6. С. 1407–1426.