Задачи по курсу высшей алгебры

Лектор: проф. Васильев А.В.

2012–13 учебный год

Задание 1

Теоретический материал: гл. 1, § 1–3 и гл. 2, § 1 из [ВМ].

1. Выучить греческий алфавит.

2. Упр. 1.1.1 из [ВМ].

3. Упр. 1.1.5 из [ВМ].

4. Верно ли, что композиция (последовательное выполнение) является алгебраической операцией на следующих множествах:
а) множество преобразований (т. е. отображений в себя) непустого множества A;
б) множество биективных преобразований непустого множества A;
в) множество движений плоскости (пространства);
г) множество поворотов плоскости относительно фиксированной точки;
д) множество поворотов плоскости;
е) множество сдвигов пространства;
ж) множество осевых симметрий плоскости;
з) множество вещественных функций, монотонных на всей числовой прямой;
и) множество строго возрастающих на отрезке $[0,1]$ вещественных функций $f(x)$, для которых $f(0)=0$ и $f(1)=1$;
й) множество четных и нечетных вещественных функций.

5. Пп. 1-3 из Упр. 1.3.1 из [ВМ].

6. Пусть $A=\mathbb{Z}_6$ — множество классов вычетов по модулю 6 (см. упр. 2.1.8 из [ВМ]). Для каждого $k=0,1,\ldots,5$ определим на множестве A унарную алгебраическую операцию f_k правилом $\overline{a}f_k=\overline{a}+\overline{k}$. Рассмотрим 6 алгебраических систем $\mathfrak{A}_k=\langle A,f_k\rangle$, где $k=0,1,\ldots,5$. Какие из них изоморфны между собой?

7. Упр. 2.1.1 из [ВМ].

8. Какие множества из задачи № 4 образуют группу относительно операции композиции?

9. Упр. 2.1.8 из [ВМ].

10. Упр. 2.1.9 из [ВМ].

Задание 2

Теоретический материал: гл. 2, § 2–5 из [BM].

1. Дана подстановка

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 7 & 6 & 2 & 9 & 4 & 11 & 1 & 3 & 5 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

а) Разложить π в произведение независимых циклов, найти ее декремент и знак.
б) Найти порядок подстановки π (как элемента группы S_{11}) и подстановку $\sigma = \pi^{27}$.
в) Разложить π в произведение транспозиций.

2. Упр. 2.2.6 из [BM].

3. Упр. 2.3.3 из [BM].

4. Упр. 2.3.6 из [BM].

5. Дана подстановка $\pi \in S_n$. Матрица $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$ задана следующим образом: для всех $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется $a_{ij} = 1$, если $i\pi = j$, и $a_{ij} = 0$ в остальных случаях. Докажите, что $\det(A) = \mathrm{sgn}(\pi)$.

6. Квадратная матрица A называется кососиметрической, если $A = -A'$. Доказать, что определитель кососиметрической матрицы нечетной размерности равен 0.

7. Упр. 2.4.10 из [BM] и задача 18.3 ж) из [КосЗ].

8. Найти матрицу и ее определитель, обратную к матрице

$$\begin{pmatrix} 2+i & 2-3i \\ 1+i & 3-i \end{pmatrix}.$$

9. Вычислить

$$\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}.$$

10. Упр. 2.5.2 из [BM].

Задание 3
Теоретический материал: гл. 3, 4 из [ВМ].

1. Упр. 3.1.1 из [ВМ].
2. Упр. 3.2.3 из [ВМ].
3. Задача 34.10 б) из [КосЗ].
4. Упр. 3.3.1 из [ВМ].
5. Пп. 2,3 из Упр. 3.1.3 и Упр. 3.3.4 из [ВМ].
6. Задача 35.15 г) из [КосЗ].
7. Упр. 4.2.2 из [ВМ].
8. Упр. 4.3.1 из [ВМ].
9. Задача 35.16 а) из [КосЗ].
10. Упр. 4.3.2 из [ВМ].

Задание 4
Теоретический материал: гл. 5 из [ВМ].

1. Задача 25.3 а) из [КосЗ].
2. Упр. 5.2.2 из [ВМ].
3. Задача 30.1 б) из [КосЗ].
4. Упр. 5.3.6 из [ВМ].
5. Задача 26.8 из [КосЗ].
6. Упр. 5.3.8 из [ВМ].
7. Упр. 5.4.3 из [ВМ].
8. Упр. 5.5.1 из [ВМ].
9. Задача 31.4 из [КосЗ].
10. Найти число действительных корней многочлена $x^4 - 2x^3 - x^2 + 7x - 10$, не лежащих в поле рациональных чисел.

Литература

[ВМ] А. В. Васильев, В. Д. Мазуров. Высшая алгебра: конспект лекций, ч. 1 – Новосиб. гос. ун-т: Новосибирск, 2010.

[КосЗ] Сборник задач по алгебре. Под. ред. А. И. Кострикина: Учебник для вузов. – М: Физматлит, 2001.