ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

А. В. Васильев, В. Д. Мазуров

ВЫСШАЯ АЛГЕБРА
Конспект лекций

Часть II

Новосибирск

2016

УДК 512
ББК В14я73-2
В 191

Васильев А. В., Мазуров В. Д. Высшая алгебра: В 2 ч.: Конспект лекций / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2016, ч. 2. 143 с.

ISBN 978-5-94356-912-8

В основе предлагаемой читателю второй части учебного пособия лежит содержание второго семестра курса «Высшая алгебра», который авторы читали на первом курсе механико-математического факультета Новосибирского государственного университета. Большую часть второй части курса занимает изложение основ теории линейных операторов и квадратичных форм. Последний параграф посвящен основам абстрактной теории групп. Пособие предназначено для студентов математических специальностей университетов.

Рецензент
д-р физ.-мат. наук, доцент В. Г. Бардаков

ISBN 978-5-94356-912-8

Содержание

Предисловие

В основе предлагаемой читателю второй части учебного пособия лежит содержание второго семестра курса «Высшая алгебра», который авторы читали на первом курсе механико-математического факультета Новосибирского государственного университета. Нумерация глав продолжает нумерацию глав в первой части учебного пособия. Нумерация определений, теорем, предложений и упражнений, принятая в пособии, соответствует его разбиению на главы и параграфы. Например, теорема 6.3.1 — это первая теорема из третьего параграфа шестой главы. Нумерация вынесенных формул начинается заново внутри каждого параграфа. Упражнения, сопровождающие изложение, призваны помочь усвоению материала. Наиболее трудные из них помечены звёздочкой. Список литературы не претендует на полноту, его основная цель — предоставить читателю дополнительную возможность ознакомиться с затрагиваемыми в курсе понятиями и идеями. В приложении для удобства приводится программа курса «Высшая алгебра» на 2015–16 учебный год (два семестра). Ссылки на соответствующие места из книг, указанных в списке литературы, находятся в этой программе. Пособие снабжено предметным указателем и указателем обозначений.

Глава 6

Линейные преобразования векторных пространств

§ 6.1. Линейное преобразование и его матрица

Эта глава посвящена общей теории линейных преобразований векторных пространств, которая является основным источником приложений линейной алгебры в различных областях математики. Напомним, что преобразование — это отображение множества в себя.

Определение 6.1.1. Пусть V — векторное пространство над полем F. Преобразование φ пространства V, т. е. отображение $\varphi : V \to V$, называется *линейным*, если

1) $(v + w)\varphi = v\varphi + w\varphi$ для любых $v, w \in V$;

2) $(\alpha v)\varphi = \alpha(v\varphi)$ для любых $v \in V$ и $\alpha \in F$.

Линейное преобразование φ также называется *линейным оператором* пространства V. Множество всех линейных преобразований пространства V мы обозначим через $\mathcal{L}(V)$.

Непосредственно из определения вытекают следующие свойства линейных преобразований.

Упражнение 6.1.1. *Пусть $\varphi : V \to V$ — преобразование пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.*

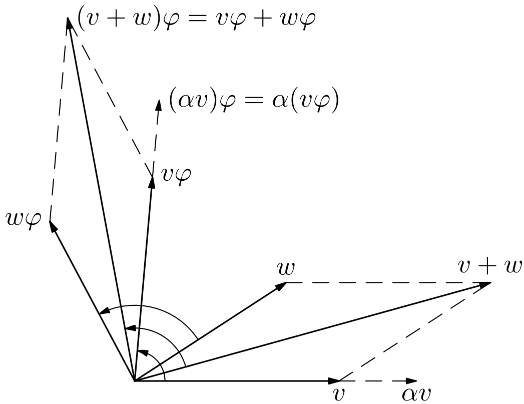
1. *Если φ линейно, то $0\varphi = 0$.*

2. *Если φ линейно, то $(-v)\varphi = -(v\varphi)$ для любого $v \in V$.*

3. *Преобразование φ линейно, тогда и только тогда, когда, для любой линейной комбинации $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s$ векторов из V выполняется равенство*

$$(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s)\varphi = \alpha_1(v_1\varphi) + \ldots + \alpha_s(v_s\varphi). \qquad (1)$$

Примеры. 1. Поворот есть линейное преобразование векторов плоскости (см. рисунок). Линейным преобразованием этого же пространства будет, как несложно проверить, любая осевая или центральная симметрия.



2. Проектирование векторов геометрического пространства V на плоскость U параллельно некоторой прямой W — линейный оператор пространства V. Указанный пример обобщается следующим образом. Пусть V — произвольное векторное пространство, которое раскладывается в прямую сумму своих подпространств $V = U \oplus W$. Тогда, как мы знаем, каждый вектор v из V однозначно представим в виде $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in W$. Оператор $\varphi : V \to V$, действующий по правилу $v\varphi = u$, называется *оператором проектирования* из V на U параллельно W.

Упражнение 6.1.2. *Проверьте, что оператор проектирования линеен.*

3. Если рассматривать множество $F[x]$ всех многочленов от одной переменной над полем F как векторное пространство относительно естественных операций сложения и умножения на скаляр, то оператор дифференцирования $f(x) \mapsto f'(x)$, т. е. взятия производной, является линейным оператором на $F[x]$ в силу известных нам свойств производной.

4. Пусть α — некоторый скаляр из поля F, над которым задано векторное пространство V. Рассмотрим преобразование φ_α пространства V, действующее по правилу $v\varphi_\alpha = \alpha v$. Поскольку для любой линейной комбинации $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s$ выполняется $\alpha(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s) = \alpha_1(\alpha v_1) + \ldots + \alpha_s(\alpha v_s)$, преобразование φ_α линейно. В частности, линейны нулевое преобразование $0 = \varphi_0$, переводящее каждый вектор пространства в ноль-вектор, и тождественное преобразование $\varepsilon = \varphi_1$, оставляющее каждый вектор пространства на месте. В дальнейшем мы будем называть преобразования φ_α *скалярными* и обозначать через $\alpha\varepsilon$.

С другой стороны, перенос на фиксированный ненулевой вектор $a \in$

V, т. е. преобразование вида $v \mapsto v+a$, не является линейным, поскольку $(v+w)+a \neq (v+a)+(w+a)$ при $a \neq 0$.

5. Пусть $V = F^n$ — арифметическое пространство строк над полем F, а $A \in M_n(F)$ — произвольная $(n \times n)$-матрица над полем F. Рассмотрим преобразование $\varphi : V \to V$, действующее по правилу $x\varphi = xA$, где xA — произведение матриц соответствующих размеров. Имеем $(x+y)\varphi = (x+y)A = xA + yA = x\varphi + y\varphi$ и $(\alpha x)\varphi = (\alpha x)A = \alpha(xA) = \alpha(x\varphi)$. Поэтому φ — линейное преобразование пространства V.

Замечание. Последний пример в некотором точном смысле является универсальным. Оказывается, что существует естественная биекция между множеством $\mathcal{L}(V)$ линейных преобразований пространства V размерности n над полем F и множеством $M_n(F)$ всех квадратных матриц размера n над полем F. Собственно, установление такой биекции и является основной целью этого параграфа.

Определение 6.1.2. Пусть V — векторное пространство над полем F, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, $\alpha \in F$. Преобразование $\varphi + \psi$ пространства V, определённое правилом $v(\varphi+\psi) = v\varphi+v\psi$ для любого вектора v из V, называется *суммой* преобразований φ и ψ. Преобразование $\varphi\psi$, определённое правилом $v(\varphi\psi) = (v\varphi)\psi$, называется *произведением* преобразований φ и ψ, а преобразование $\alpha\varphi$, определённое правилом $v(\alpha\varphi) = (\alpha v)\varphi$, — *произведением скаляра α и преобразования φ*.

Предложение 6.1.1. *Пусть V — векторное пространство над полем F, $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$, $\alpha \in F$. Тогда $\varphi + \psi$, $\varphi\psi$, $\alpha\varphi$ — линейные преобразования пространства V.*

Доказательство. Для любых $v, u \in V$ выполняется $(v+u)(\varphi+\psi) = (v+u)\varphi + (v+u)\psi = (v\varphi + u\varphi) + (v\psi + u\psi) = (v\varphi + v\psi) + (u\varphi + u\psi) = v(\varphi+\psi)+u(\varphi+\psi)$, а для любых $v \in V$ и $\alpha \in F$ выполняется $(\alpha v)(\varphi+\psi) = (\alpha v)\varphi + (\alpha v)\psi = \alpha(v\varphi) + \alpha(v\psi) = \alpha(v(\varphi + \psi))$. Поэтому $\varphi + \psi \in \mathcal{L}(V)$. Аналогично доказывается, что $\varphi\psi$, $\alpha\varphi$ лежат в $\mathcal{L}(V)$. $\square$

Таким образом, множество $\mathcal{L}(V)$ замкнуто относительно операций, заданных в определении 6.1.2. Эти операции мы будем называть соответственно сложением, умножением и умножением на скаляр линейных преобразований. Прямая проверка аксиом показывает, что относительно указанных операций множество линейных преобразований образует алгебру над полем F. Однако мы докажем этот факт по-другому, установив изоморфизм между данной алгебраической системой и алгеброй матриц.

Определение 6.1.3. Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F и φ — линейное преобразование этого пространства. Зафиксируем некоторый базис B пространства V, состоящий из векторов $b_1, \ldots, b_n$. *Матрицей линейного преобразования* φ в базисе B называется матрица $[\varphi]_B = A = (\alpha_{ij}) \in M_n(F)$, коэффициенты которой определяются следующими равенствами:

$$\begin{cases} b_1\varphi = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + \alpha_{1n}b_n \\ b_2\varphi = \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{2n}b_n \\ \vdots \\ b_n\varphi = \alpha_{n1}b_1 + \alpha_{n2}b_2 + \ldots + \alpha_{nn}b_n. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Определение корректно, поскольку каждый из векторов $b_1\varphi, b_2\varphi, \ldots, b_n\varphi$, лежащих в V, однозначно выражается через вектора базиса $b_1, \ldots, b_n$.

В матричной форме: если $b = (b_1, \ldots, b_n)'$ и $b\varphi = (b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi)'$ — столбцы векторов базиса и их образов под действием φ соответственно, то

$$b\varphi = [\varphi]_B b = Ab. \tag{3}$$

Напомним, что через $[v]_B$ мы обозначаем строку координат вектора $v \in V$ в базе B. В соответствии с этим обозначением $v = [v]_B b$. Если базис заранее фиксирован, то для краткости мы будем опускать нижний индекс в обозначениях строки координат и матрицы линейного преобразования, т. е. писать просто $[v]$ и $[\varphi]$.

Предложение 6.1.2. *Пусть $[\varphi]$ — матрица линейного преобразования φ векторного пространства V в базе B. Тогда для любого вектора $v \in V$ выполняется равенство*

$$[v\varphi] = [v][\varphi]. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$, т. е. $[v] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. В силу равенства (1) имеем $v\varphi = (\alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n)\varphi = \alpha_1(b_1\varphi) + \ldots + \alpha_n(b_n\varphi)$ или в матричной форме: $[v\varphi]b = [v](b\varphi)$. С другой стороны, в силу равенства (3) и ассоциативности умножения матриц имеем $[v](b\varphi) = [v]([\varphi]b) = ([v][\varphi])b$. Поэтому $[v\varphi]b = ([v][\varphi])b$. Поскольку векторы базиса линейно независимы, используя предложение 3.2.3, получаем требуемое равенство $[v\varphi] = [v][\varphi]$. □

Замечание. Поскольку каждый вектор однозначно определяется своей строкой координат в некотором фиксированном базисе, из только что доказанного предложения вытекает, что линейное преобразование однозначно определяется своей матрицей, т. е. своим действием на векторах базиса.

Примеры. 1. Пусть φ — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости, и орты e_1, e_2 выбраны в качестве базиса. Тогда

$$\begin{cases} e_1\varphi = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \\ e_2\varphi = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 \end{cases}$$

и, следовательно,

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Если x — произвольный вектор с координатами $[x] = (x_1, x_2)$, то в соответствии с предложением 6.1.2 имеем

$$[x\varphi] = [x][\varphi] = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (x_1, -x_2).$$

Упражнение 6.1.3. *Докажите, что в той же системе координат и том же базисе матрица поворота на угол α (против часовой стрелки) имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

2. Пусть $V = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ и φ — оператор проектирования на подпространство $U = \langle b_1, b_2 \rangle$ параллельно подпространству $W = \langle b_3 \rangle$. Тогда в базисе b_1, b_2, b_3 :

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть для некоторого скаляра $\alpha \in F$ преобразование $\varphi_\alpha : V \to V$ определено правилом $v\varphi_\alpha = \alpha v$ для любого $v \in V$ (см. пример 4 после определения 6.1.1). Тогда несложно проверить, что в любом базисе $[\varphi_\alpha] = \alpha E$, где E — единичная матрица. В частности, в любом базисе $[0] = 0$ и $[\varepsilon] = E$.

Упражнение 6.1.4. *Записать матрицу оператора дифференцирования пространства многочленов степени не выше n в базисах*:

1. $x^n, x^{n-1}, \ldots, x, 1$.
2. $\frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \ldots, x, 1$.

Напомним, что множество квадратных матриц $M_n(F)$ над полем F относительно операций сложения, умножения и умножения на скаляр образует алгебру (см. определение 3.1.2 и упражнение 3.1.2).

Теорема 6.1.1. *Пусть V — векторное пространство размерности n над полем F. Тогда алгебраическая система с основным множеством $\mathcal{L}(V)$ и операциями сложения, умножения и умножения на скаляр изоморфна алгебре матриц $M_n(F)$.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую базу B, состоящую из векторов $b_1, \ldots, b_n$, в пространстве V. Мы докажем, что отображение $[\,] : \mathcal{L}(V) \to M_n(F)$, сопоставляющее каждому линейному преобразованию φ его матрицу $[\varphi]$ в базе B, является искомым изоморфизмом.

Предположим, что у двух различных линейных преобразований φ и ψ одна и та же матрица в базе B, т. е. $[\varphi] = [\psi]$. Поскольку $\varphi \neq \psi$, существует вектор $u \in V$ такой, что $u\varphi \neq u\psi$. Тогда строки координат этих векторов в базе B также не равны: $[u\varphi] \neq [u\psi]$. Однако в силу предложения 6.1.2 имеют место равенства $[u\varphi] = [u][\varphi] = [u][\psi] = [u\psi]$; противоречие. Следовательно, рассматриваемое нами отображение взаимно однозначно.

Чтобы показать, что наше отображение сюръективно, рассмотрим произвольную матрицу $A = (\alpha_{ij}) \in M_n(F)$. Зададим преобразование φ_A пространства V правилом $v\varphi_A = ([v]A)b$, где через b обозначен столбец $(b_1, \ldots, b_n)'$ векторов базиса B (сравните с примером 5 к определению линейного преобразования). Тогда, рассуждая как и в указанном примере, получим, что $(v + w)\varphi_A = ([v + w]A)b = ([v]A + [w]A)b = ([v]A)b + ([u]A)b = v\varphi_A + w\varphi_A$ и $(\alpha v)\varphi_A = (\alpha[v]A)b = \alpha([v]A)b = \alpha(v\varphi_A)$, а значит, $\varphi_A \in \mathcal{L}(V)$. Далее, в силу нашего выбора φ_A, для любого $i = 1, \ldots, n$ выполняется

$$b_i\varphi = ([b_i]A)b = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j.$$

Следовательно, $[\varphi_A] = A$ по определению матрицы линейного преобразования. Таким образом, рассматриваемое отображение сюръективно, следовательно, является биекцией.

Осталось доказать, что данное отображение сохраняет операции, заданные на $\mathcal{L}(V)$. Пусть $[\varphi] = (\alpha_{ij})$, $[\psi] = (\beta_{ij})$.

Проверим, что $[\varphi+\psi] = [\varphi]+[\psi]$. Если $[\varphi+\psi] = (\gamma_{ij})$, то для каждого $i = 1, \ldots, n$ имеем $b_i(\varphi+\psi) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} b_j$. С другой стороны, $b_i(\varphi+\psi) = b_i\varphi + b_i\psi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} b_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{ij} + \beta_{ij}) b_j$. Поскольку

B — базис пространства V, для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\gamma_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}$, т. е. $[\varphi + \psi] = [\varphi] + [\psi]$.

Пусть теперь $[\varphi\psi] = (\gamma_{ij})$ и, следовательно, $b_i(\varphi\psi) = \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} b_j$. Поскольку для любого $i = 1, \dots, n$ выполняется $b_i(\varphi\psi) = (b_i\varphi)\psi = (\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} b_k)\psi = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}(b_k\psi) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}(\sum_{j=1}^n \beta_{kj} b_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj} b_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj} b_j = \sum_{j=1}^n (\sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj}) b_j$, для всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется $\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik}\beta_{kj}$. Отсюда $[\varphi\psi] = [\varphi][\psi]$.

Равенство $[\alpha\varphi] = \alpha[\varphi]$ для произвольных $\alpha \in F$ и $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ проверяется аналогично, и мы оставляем эту проверку читателям. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Рассуждение в доказательстве теоремы, устанавливающее равенство $[\varphi\psi] = [\varphi][\psi]$, показывает, что выбор правила для умножения матриц, принятого нами без излишних объяснений в параграфе 2.3, был не случаен. Если воспринимать матрицы как записи линейных преобразований, то их умножение соответствует композиции, т. е. последовательному выполнению соответствующих линейных преобразований.

Теперь мы рассмотрим вопрос о связи между матрицами линейного преобразования в разных базах. Пусть A и B — две базы векторного пространства V над полем F, состоящие из векторов $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ соответственно. Если обозначить через a и b столбцы, состоящие из векторов базисов A и B, а через $T = (t_{ij})$ — матрицу перехода от базы A к базе B, то, как мы знаем, $b = Ta$ и для любого вектора $v \in V$ выполняется $[v]_A = [v]_B T$. Для произвольного $\varphi \in \mathcal{L}(V)$ обозначим через $[\varphi]_A$ и $[\varphi]_B$ матрицы преобразования φ в базах A и B соответственно. Имеем $b\varphi = [\varphi]_B b = [\varphi]_B (Ta) = ([\varphi]_B T)a$. С другой стороны, $b\varphi = (Ta)\varphi = T(a\varphi) = T([\varphi]_A a) = (T[\varphi]_A)a$. Заметим, что равенство $(Ta)\varphi = T(a\varphi)$ имеет место, так как в силу линейности оператора φ для каждого $i = 1, \dots, n$ выполняется равенство $(t_{i1}a_1 + \ldots + t_{in}a_n)\varphi = t_{i1}(a_1\varphi) + \ldots + t_{in}(a_n\varphi)$. Таким образом, $([\varphi]_B T)a = (T[\varphi]_A)a$. Из предложения 3.2.3 следует, что $[\varphi]_B T = T[\varphi]_A$. Используя тот факт, что матрица перехода всегда обратима, можно записать полученное равенство в виде

$$[\varphi]_B = T[\varphi]_A T^{-1}. \tag{5}$$

Мы формализуем приведённое рассуждение с помощью следующего определения.

Определение 6.1.4. Матрицы $A, B \in M_n(F)$ называются *сопряжёнными* (или *подобными*) над F, если существует невырожденная матрица $T \in M_n(F)$, для которой $B = TAT^{-1}$. Матрица T называется сопрягающей (осуществляющей подобие) для матриц A и B.

Выше мы доказали следующее утверждение.

Теорема 6.1.2. *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F, A и B — две базы пространства V. Тогда матрицы $[\varphi]_A$ и $[\varphi]_B$ преобразования φ в базах A и B сопряжены над F, причём в качестве сопрягающей их матрицы можно взять матрицу перехода от базы A к базе B.*

Упражнение 6.1.5. *Пусть на плоскости задана декартова система координат. Запишите матрицу поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ в базисе, состоящем из векторов $b_1 = (0, 2)$ и $b_2 = (1, -1)$, используя результат упражнения* 6.1.3 *и формулу* (5).

В заключение этого параграфа мы кратко остановимся на понятии линейного отображения, обобщающего понятие линейного преобразования.

Определение 6.1.5. Пусть V, U — векторные пространства над полем F. Отображение $\psi : V \to U$, называется *линейным*, если

1) $(v + w)\psi = v\psi + w\psi$ для любых $v, w \in V$;

2) $(\alpha v)\psi = \alpha(v\psi)$ для любых $v \in V$ и $\alpha \in F$.

Множество всех линейных отображений пространства V на пространство U мы обозначим через $\mathcal{L}(V, U)$. Сложение двух линейных отображений φ, ψ из V в U определяется правилом: $v(\varphi+\psi) = v\varphi+v\psi$, а умножение отображения ψ на скаляр $\alpha \in F$ — правилом: $(\alpha v)\psi = \alpha(v\psi)$ для всех векторов $v \in V$.

Примеры. 1. Если $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — пространство всех вещественных функций вещественной переменной, непрерывных на отрезке $[a, b]$, а $U = \mathbb{R}$ — множество действительных чисел, рассматриваемое как одномерное векторное пространство над самим собой, то отображение

$$f \mapsto \int_a^b f(x)dx$$

является линейным отображением из V в U.

2. Пусть $V = F^m$ и $U = F^n$ — арифметические пространства строк над полем F, а $A \in M_{m\times n}(F)$ — произвольная $(m \times n)$-матрица над полем F. Рассмотрим отображение $\varphi : V \to U$, действующее по правилу

$x\varphi = xA$, где xA — произведение матриц соответствующих размеров. Имеем $(x+y)\varphi = (x+y)A = xA + yA = x\varphi + y\varphi$ и $(\alpha x)\varphi = (\alpha x)A = \alpha(xA) = \alpha(x\varphi)$. Поэтому φ — линейное отображение из V в U.

Определение 6.1.6. Если зафиксированы базы A и B пространств V и U соответственно, состоящие из векторов $a_1, \ldots, a_m$ и $b_1, \ldots, b_n$, и выполняются равенства

$$\begin{cases} a_1\psi = \alpha_{11}b_1 + \alpha_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\ a_2\psi = \alpha_{21}b_1 + \alpha_{22}b_2 + \ldots + \alpha_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_m\psi = \alpha_{m1}b_1 + \alpha_{m2}b_2 + \ldots + \alpha_{mn}b_n, \end{cases} \tag{6}$$

то матрица $[\psi] = (\alpha_{ij}) \in M_{m\times n}(F)$ называется *матрицей линейного отображения* ψ, соответствующей базам A и B.

Упражнение 6.1.6. *Докажите, что отображение* $[\,] : \mathcal{L}(V,U) \to M_{m\times n}(F)$, *сопоставляющее каждому отображению* $\psi \in \mathcal{L}(V,U)$ *его матрицу* $[\psi]$, *является изоморфизмом алгебраической системы* $\langle \mathcal{L}(V,U), +, f_\alpha\rangle$ *на векторное пространство* $\langle M_{m\times n}(F), +, f_\alpha\rangle$, *где через* f_α *обозначена операция умножения на скаляр* $\alpha \in F$.

Упражнение 6.1.7. *Пусть* V, U, W *— конечномерные векторные пространства над полем* F *с базами* A, B, C *соответственно. Пусть* $\varphi : V \to U$ *и* $\psi : U \to W$ *— линейные отображения,* $[\varphi]_{AB}$ *и* $[\psi]_{BC}$ *— матрицы этих отображений в соответствующих базах. Тогда отображение* $\varphi\psi : V \to W$, *являющееся композицией отображений* φ *и* ψ, *линейно, а матрица* $[\varphi\psi]_{AC}$ *этого отображения, соответствующая базам* A *и* C, *есть произведение матриц* $[\varphi]_{AB}$ *и* $[\psi]_{BC}$.

Упражнение 6.1.8. *Пусть* V *и* U *— конечномерные векторные пространства над полем* F *и* $\psi \in \mathcal{L}(V,U)$. *Пусть* T *— матрица перехода от базиса* A *к базису* A' *пространства* V, *а* S *— матрица перехода от базиса* B *к базису* B' *пространства* U. *Предположим, что* $[\psi]_{AB}$ *и* $[\psi]_{A'B'}$ *— матрицы отображения* ψ *в соответствующих базисах. Докажите, что* $[\psi]_{A'B'} = T[\psi]_{AB}S^{-1}$.

§ 6.2. Ядро и образ линейного преобразования

Определение 6.2.1. Пусть φ — линейное преобразование векторного пространства V, U — некоторое подмножество множества V. *Образом*

U под действием φ называется множество $U\varphi = \{u\varphi \mid u \in U\}$. В случае, когда $U = V$, множество $\operatorname{Im}\varphi = V\varphi$ называется *образом* линейного преобразования φ.

Определение 6.2.2. Пусть φ — линейное преобразование векторного пространства V. *Ядром* линейного преобразования φ называется множество $\operatorname{Ker}\varphi = \{v \in V \mid v\varphi = 0\}$.

Предложение 6.2.1. *Пусть φ — линейное преобразование векторного пространства V. Тогда $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$ — подпространства пространства V.*

Упражнение 6.2.1. *Доказать предложение* 6.2.1.

Определение 6.2.3. Размерность образа линейного преобразования φ называется *рангом* преобразования и обозначается через $\operatorname{rank}(\varphi)$. Размерность ядра преобразования φ называется *дефектом* преобразования и обозначается через $\operatorname{def}(\varphi)$.

Теорема 6.2.1. *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. $\operatorname{rank}(\varphi) + \operatorname{def}(\varphi) = \dim V$.

2. *Ранг преобразования φ равен рангу матрицы $[\varphi]_B$ этого преобразования в любой базе B пространства V.*

Доказательство. 1. Пусть $w_1, \ldots, w_s$ — базис $\operatorname{Ker}\varphi$ и $u_1, \ldots, u_r$ — базис $V\varphi$. Для каждого $i = 1, \ldots, r$ выберем вектор $v_i \in V$ так, чтобы $v_i\varphi = u_i$. Мы докажем, что набор B, состоящий из векторов $w_1, \ldots, w_s, v_1, \ldots, v_r$ — базис пространства V, откуда будет следовать требуемое утверждение.

Для любого $v \in V$ выполняется $v\varphi \in V\varphi$, поэтому найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in F$, для которых $v\varphi = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r = \alpha_1(v_1\varphi) + \ldots \alpha_r(v_r\varphi) = (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r)\varphi$. Положим $w = v - (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r)$. Тогда $w\varphi = v\varphi - (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r)\varphi = v\varphi - v\varphi = 0$. Следовательно, $w \in \operatorname{Ker}\varphi$, а значит, найдутся $\beta_1, \ldots, \beta_s \in F$ такие, что $w = \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s$. Тогда $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s$. Таким образом, $L(B) = V$.

Предположим, что $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s = 0$. Имеем $0 = 0\varphi = (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r + \beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s)\varphi = (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r)\varphi + (\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s)\varphi = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_r u_r$. Из линейной независимости набора векторов $u_1, \ldots, u_r$, как базиса пространства $V\varphi$, вытекает, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$. Поэтому $\beta_1 w_1 + \ldots + \beta_s w_s = 0$. Поскольку $w_1, \ldots, w_s$ также является базисом, имеем $\beta_1 = \ldots = \beta_s = 0$. Таким образом, набор B линейно независим, а следовательно, является базисом пространства V.

2. Пусть произвольный базис B пространства V состоит из векторов $b_1, \ldots, b_n$. Поскольку отображение, сопоставляющее каждому вектору $v \in V$ его строку координат $[v]$ в базисе B, является изоморфизмом пространства V на арифметическое пространство F^n, ранг набора векторов $b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi$ равен рангу набора строк $[b_1\varphi], \ldots, [b_n\varphi]$.

Любой вектор $v \in V$ есть линейная комбинация векторов базиса B: $v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n$. Поэтому $v\varphi = \alpha_1(b_1\varphi) + \ldots + \alpha_n(b_n\varphi)$. Следовательно, $V\varphi = \langle b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi\rangle$ и $\mathrm{rank}(\varphi)$ равен рангу набора $b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi$.

С другой стороны, из определения матрицы линейного преобразования вытекает, что строки матрицы $[\varphi]$ в базе B — это строки $[b_1\varphi], \ldots, [b_n\varphi]$. Таким образом, ранг матрицы $[\varphi]$ равен рангу набора $[b_1\varphi], \ldots, [b_n\varphi]$, а значит, равен рангу преобразования φ. □

Примеры. 1. Пусть φ — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости, и орты e_1, e_2 выбраны в качестве базиса. Поскольку $e_1\varphi = e_1$, $e_2\varphi = -e_2$ и векторы $e_1, -e_2$ образуют базис пространства, $V\varphi = V$ и $\mathrm{rank}(\varphi) = 2$. В силу теоремы 6.2.1 имеем $\mathrm{def}(\varphi) = \dim V - \mathrm{rank}(\varphi) = 0$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi = 0$. Последний факт несложно установить непосредственно, так как при осевой симметрии, очевидно, лишь ноль-вектор может быть прообразом ноль-вектора.

2. Пусть $V = U \oplus W$ и φ — оператор проектирования на подпространство U параллельно пространству W. Тогда, как несложно проверить, $\mathrm{Im}\,\varphi = U$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi = W$.

Замечание. В обоих приведённых выше примерах имеет место равенство $\mathrm{Im}\,\varphi \cap \mathrm{Ker}\,\varphi = 0$ и, следовательно, $V = \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$. Однако, несмотря на справедливость равенства $\dim V = \mathrm{rank}(\varphi) + \mathrm{def}(\varphi)$, в общем случае такое разложение выполняется далеко не всегда.

Упражнение 6.2.2. *Пусть $V = \mathbb{R}_2[x]$ — пространство многочленов степени не выше 2 над полем действительных чисел. Найдите образ и ядро оператора дифференцирования φ указанного пространства и проверьте, что $V \neq \mathrm{Im}\,\varphi \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$.*

Упражнение 6.2.3. *Пусть φ — линейное преобразование пространства V. Докажите, что $V = V\varphi \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi$ тогда и только тогда, когда $V\varphi = V\varphi^2$.*

В следующем упражнении мы укажем удобный практический способ одновременного отыскания баз образа и ядра линейного преобразования конечномерного векторного пространства. Для краткости мы будем отождествлять векторы пространства с их строками координат в выбранном базисе.

Упражнение 6.2.4. *Пусть $N = [\varphi]_A$ — матрица линейного преобразования n-мерного пространства V над полем F в базе A. Пусть матрица $B \in M_n(F)$ выбрана так, что её строки составляют базис пространства V, и $C = BN$. Если прямоугольную $(n \times 2n)$-матрицу $(B \mid C)$ элементарными преобразованиями строк привести к виду $(B' \mid C')$, где матрица C' — ступенчатая, то*

а) *ненулевые строки матрицы C' образуют базис $\operatorname{Im}\varphi$;*

б) *строки матрицы B', стоящие напротив нулевых строк матрицы C', образуют базис $\operatorname{Ker}\varphi$.*

В заключение этого параграфа мы рассмотрим понятие невырожденности линейного преобразования.

Определение 6.2.4. Линейное преобразование φ векторного пространства V называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, и *вырожденным* в противном случае.

Теорема 6.2.2. *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Преобразование φ невырождено.*
2. $\operatorname{Im}\varphi = V$.
3. *Под действием φ любая база пространства V переходит в базу.*
4. *Матрица $[\varphi]_B$ преобразования φ в любой базе B пространства V невырождена.*
5. *Преобразование φ обратимо, т. е. существует преобразование $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ такое, что $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \varepsilon$.*

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$. Поскольку $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, выполняется $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim V$. Поэтому $\operatorname{Im}\varphi = V$.

$(2 \Rightarrow 3)$. Пусть $b_1, \ldots, b_n$ — база V. Тогда $V = V\varphi = \langle b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi\rangle$. По следствию из теоремы 3.2.2 о базисе набор $b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi$ — база пространства V.

$(3 \Rightarrow 4)$. Поскольку $b_1\varphi, \ldots, b_n\varphi$ — база пространства V, набор строк $[b_1\varphi], \ldots, [b_n\varphi]$ матрицы $[\varphi]$ в этой базе линейно независим. Следовательно, $\det[\varphi] \neq 0$.

$(4 \Rightarrow 5)$. Пусть базис B пространства V состоит из векторов $b_1, \ldots, b_n$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)'$ — столбец векторов базиса. Пусть $[\varphi]$ — матрица преобразования φ в базе B. Поскольку $\det[\varphi] \neq 0$, матрица $[\varphi]$ обратима и существует обратная к ней матрица $[\varphi]^{-1}$. Зададим преобразование $\varphi^{-1} : V \to V$ правилом $v\varphi^{-1} = ([v][\varphi]^{-1})b$. Тогда $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}(B)$ и $[\varphi^{-1}] = [\varphi]^{-1}$. В силу изоморфизма между $\mathcal{L}(V)$ и $M_n(F)$ выполняется $[\varphi\varphi^{-1}] = [\varphi][\varphi^{-1}] = [\varphi][\varphi]^{-1} = [\varepsilon] = [\varphi]^{-1}[\varphi] = [\varphi^{-1}][\varphi] = [\varphi^{-1}\varphi]$. Из равенства матриц $[\varphi\varphi^{-1}] = [\varphi^{-1}\varphi] = [\varepsilon]$ следует равенство соответствующих линейных преобразований.

($5 \Rightarrow 1$). Пусть $v \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда $v = v\varepsilon = v(\varphi\varphi^{-1}) = (v\varphi)\varphi^{-1} = 0\varphi^{-1} = 0$. Поэтому $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. □

Замечание. Пусть A, B — базы пространства V и φ — его линейное преобразование. Поскольку $[\varphi]_B = T[\varphi]_A T^{-1}$, где T — матрица перехода от A к B, выполняется $\det[\varphi]_B = \det[\varphi]_A$. Следовательно, определитель матрицы линейного преобразования не зависит от выбора базы. Таким образом, корректно следующее определение.

Определение 6.2.5. Определитель линейного преобразования φ векторного пространства V — это определитель матрицы этого преобразования.

В частности, из теоремы 6.2.2 следует, что преобразование вырождено тогда и только тогда, когда его определитель равен 0.

Упражнение 6.2.5. *Докажите, что линейное преобразование φ векторного пространства V является изоморфизмом V на себя тогда и только тогда, когда φ невырождено.*

Упражнение 6.2.6. *Пусть V — векторное пространство над полем F. Положим $GL(V) = \{\varphi \in \mathcal{L}(V) \mid \det\varphi \neq 0\}$. Докажите, что $GL(V)$ — группа относительно операции умножения линейных преобразований.*

Определение 6.2.6. Группа $GL(V)$, определенная в упражнении 6.2.6, называется *общей группой линейных преобразований* пространства V, а любая её подгруппа — *группой линейных преобразований* пространства V.

Замечание. Сравните упражнение 6.2.6 и определение 6.2.6 с упражнением 2.4.8 и определением 2.4.8 из второй главы.

§ 6.3. Инвариантные подпространства и собственные векторы

Определение 6.3.1. Пусть φ — линейное преобразование векторного пространства V над полем F. Подпространство U пространства V называется *φ-инвариантным*, если $U\varphi \subseteq U$.

Примеры. 1. Из определения линейного преобразования и упражнения 6.1.1 следует, что само пространство и нулевое подпространство являются φ-инвариантными относительно любого линейного преобразования φ.

2. Пусть φ — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда подпространства $U_1 = \langle e_1 \rangle$ и $U_2 = \langle e_2 \rangle$ φ-инвариантны, а подпространство $U_3 = \langle e_1 + e_2 \rangle$ — нет.

Упражнение 6.3.1. *Пусть φ — поворот декартовой плоскости относительно начала координат на угол, не кратный π. Докажите, что пространство геометрических векторов плоскости над полем $\mathbb{R}$ не имеет φ-инвариантных подпространств, отличных от нулевого подпространства и самого пространства.*

3. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$ — пространство многочленов одной переменной с действительными коэффициентами. Тогда подпространство $U = \mathbb{R}_n[x] = \{f \in V \mid \deg f \leqslant n\}$ инвариантно относительно оператора дифференцирования, действующего на V.

Предложение 6.3.1. *Пусть φ, ψ — линейные преобразования векторного пространства V, причём $\varphi\psi = \psi\varphi$. Тогда $\operatorname{Ker}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$ являются φ-инвариантными подпространствами пространства V. В частности, φ-инвариантны подпространства $\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$.*

Доказательство. Для любого $w \in \operatorname{Ker}\psi$ выполняется $(w\varphi)\psi = w(\varphi\psi) = w(\psi\varphi) = (w\psi)\varphi = 0\varphi = 0$. Поэтому $w\varphi \in \operatorname{Ker}\psi$ и, следовательно, $(\operatorname{Ker}\psi)\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$.

Для любого $v\psi \in V\psi$ выполняется $(v\psi)\varphi = (v\varphi)\psi \in V\psi$. Следовательно, $(V\psi)\varphi \subseteq V\psi$. □

Определение 6.3.2. Пусть φ — линейное преобразование пространства V и U — φ-инвариантное подпространство в V. Преобразование $\psi : U \to U$, действующее по правилу $u\psi = u\varphi$ для любого $u \in U$, называется *сужением* (или *ограничением*) преобразования φ на подпространство U. Обозначение: $\psi = \varphi|_U$.

Замечание. Легко проверить, что сужение ψ есть линейное преобразование пространства U.

Теорема 6.3.1. *Пусть φ — линейное преобразование n-мерного векторного пространства V над полем F. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если U — φ-инвариантное подпространство пространства V, A — база U, состоящая из векторов $u_1, \ldots, u_r$, то в базе B пространства V, состоящей из векторов $u_1, \ldots, u_r, v_{r+1}, \ldots, v_n$, матрица пре-*

образования φ имеет вид

$$[\varphi]_B = \left(\begin{array}{c|c} [\varphi|_U]_A & 0 \\ \hline * & * \end{array}\right),$$

где $[\varphi|_U]_A$ — матрица сужения φ на подпространство U в базе A.

2. *Если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$, где для любого $i = 1, \ldots, s$ подпространства U_i φ-инвариантны, то в базе B пространства V, являющейся объединением баз $B_1, \ldots, B_s$ подпространств $U_1, \ldots, U_s$, матрица преобразования φ клеточно диагональна и имеет вид*

$$[\varphi]_B = \begin{pmatrix} [\varphi|_{U_1}]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\varphi|_{U_s}]_{B_s} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Положим $\psi = \varphi|_U$. Так как U — φ-инвариантное подпространство, то для любого $i = 1, \ldots, r$ выполняется $u_i\varphi \in U$, и, следовательно, $u_i\varphi = \alpha_{i1}u_1 + \ldots + \alpha_{ir}u_r + 0 \cdot v_{r+1} + \ldots + 0 \cdot v_n$. Кроме того, $u_i\psi = u_i\varphi = \alpha_{i1}u_1 + \ldots + \alpha_{ir}u_r$. Отсюда следует утверждение п. 1 теоремы.

Утверждение п. 2 несложно доказать по индукции, используя п. 1. □

Упражнение 6.3.2. *Провести полное доказательство п. 2 теоремы.*

Замечание. Основная задача теории линейных преобразований состоит в выборе для данного линейного преобразования такой базы пространства, в которой матрица преобразования имеет наиболее простой вид. Из формулировки только что доказанной теоремы ясно, что поиск инвариантных относительно преобразования подпространств является важным шагом в решении этой задачи.

Определение 6.3.3. Пусть φ — линейное преобразование векторного пространства V над полем F. Ненулевой вектор u называется *собственным вектором* преобразования φ, если существует $\lambda \in F$, для которого $u\varphi = \lambda u$. Скаляр λ называется *собственным числом* (или *собственным значением*) преобразования φ, соответствующим вектору u.

Примеры. 1. Пусть φ — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Тогда орт e_1 — собственный вектор преобразования φ с собственным числом 1, а орт e_2 — собственный вектор преобразования φ с собственным числом -1, так как

$e_1\varphi = 1 \cdot e_1$ и $e_2\varphi = -1 \cdot e_2$. С другой стороны, так как вектор $e_1 + e_2$ не коллинеарен вектору $(e_1 + e_2)\varphi = e_1 - e_2$, он не является собственным вектором преобразования φ.

2. Любой многочлен нулевой степени является собственным вектором оператора дифференцирования пространства многочленов с числовыми коэффициентами от одной переменной с собственным числом 0. Других собственных векторов и собственных чисел для данного оператора в этом пространстве нет.

Упражнение 6.3.3. *Докажите следующие утверждения.*

1. *Пусть u — собственный вектор преобразования φ. Тогда одномерное подпространство $U = \langle u \rangle$, натянутое на вектор u, φ-инвариантно.*

2. *Пусть $U = \langle u \rangle$ — одномерное φ-инвариантное подпространство, натянутое на вектор u. Тогда u — собственный вектор преобразования φ. Более того, если $u\varphi = \lambda u$, то для любого вектора $v \in U$ выполняется $v\varphi = \lambda v$.*

Определение 6.3.4. Пусть F — поле и $A = (a_{ij}) \in M_n(F)$. Многочлен

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = |A - xE| \in F[x]$$

называется *характеристическим многочленом матрицы* A и обозначается через $f_A(x)$. Корни характеристического многочлена называются *характеристическими корнями* матрицы A, их множество называется *спектром матрицы* A и обозначается через $\mathrm{Sp}(A)$.

Замечание. Поскольку корни многочлена могут не лежать в поле его коэффициентов, в обозначениях определения 6.3.4 $\mathrm{Sp}(A)$ может не лежать в F. Тем не менее, как мы знаем, всегда найдётся расширение K поля F, для которого $\mathrm{Sp}(A) \subseteq K$.

Упражнение 6.3.4. *Докажите, что спектр треугольной матрицы $A \in M_n(F)$ совпадает с множеством элементов матрицы, стоящих на её главной диагонали.*

Предложение 6.3.2. *Пусть A и B — подобные матрицы из $M_n(F)$. Тогда $f_A(x) = f_B(x)$.*

Доказательство. Поскольку $B = TAT^{-1}$, для некоторой невырожденной матрицы $T \in M_n(F)$ имеют место равенства $f_B(x) = |B - xE| =$

$|TAT^{-1} - T(xE)T^{-1}| = |T(A - xE)T^{-1}| = |T||A - xE||T^{-1}| = f_A(x)$. $\square$

Из предложения 6.3.2 вытекает корректность следующего определения.

Определение 6.3.5. *Характеристическим многочленом линейного преобразования* φ конечномерного векторного пространства называется характеристический многочлен матрицы $[\varphi]$ этого преобразования в некоторой базе. *Спектром преобразования* φ называется спектр матрицы $[\varphi]$. Обозначения: $f_\varphi(x) = f_{[\varphi]}(x)$ и $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}([\varphi])$.

Предложение 6.3.3. *Пусть f_φ — характеристический многочлен линейного преобразования φ конечномерного векторного пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если U — φ-инвариантное подпространство, то характеристический многочлен $f_{\varphi|_U}$ сужения φ на U делит многочлен f_φ.*

2. *Если $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_s$ и для любого $i = 1, \ldots, s$ подпространства U_i φ-инвариантны, то $f_\varphi = f_{\varphi|_{U_1}} \cdots f_{\varphi|_{U_s}}$.*

Упражнение 6.3.5. *Докажите предложение* 6.3.3. *Указание. Примените теорему* 6.3.1.

Теорема 6.3.2. *Пусть φ — линейное преобразование n-мерного векторного пространства V над полем F. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Вектор $u \in V$ является собственным вектором преобразования φ с собственным числом λ тогда и только тогда, когда $u \neq 0$ и $u \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)$.*

2. *Скаляр λ — собственное число преобразования φ тогда и только тогда, когда $\lambda \in F$ и λ — корень характеристического многочлена преобразования φ.*

3. *Собственные векторы преобразования φ, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный вектор u из V. Утверждение п. 1 вытекает из следующих соображений:

$$u\varphi = \lambda u \Leftrightarrow 0 = u\varphi - \lambda u = u\varphi - u(\lambda\varepsilon) = u(\varphi - \lambda\varepsilon) \Leftrightarrow u \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon).$$

2. Пусть $\lambda \in F$. Утверждение п. 2 получается из следующих соображений:

$$\exists u \neq 0 : u\varphi = \lambda u \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon) \neq 0 \Leftrightarrow 0 = |[\varphi - \lambda\varepsilon]| = |[\varphi] - \lambda E| = f_\varphi(\lambda).$$

3. Пусть $u_1, \ldots, u_s$ — собственные векторы преобразования φ, соответствующие собственным числам $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, причём $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Докажем утверждение индукцией по s. При $s = 1$ оно очевидно. Пусть $0 = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{s-1} u_{s-1} + \alpha_s u_s$. Тогда

$$0 = 0(\varphi - \lambda_s \varepsilon) = (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{s-1} u_{s-1} + \alpha_s u_s)(\varphi - \lambda_s \varepsilon) =$$

$$= \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_s) u_1 + \ldots + \alpha_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s) u_{s-1}.$$

По предположению индукции векторы $u_1, \ldots, u_{s-1}$ линейно независимы. Поэтому $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{s-1} = 0$. Но тогда и $\alpha_s = 0$. Теорема доказана. □

Из п. 1 теоремы 6.3.2 следует, что множество собственных векторов преобразования φ, соответствующих одному собственному числу λ, вместе с нулевым вектором (для него тоже выполняется $0\varphi = \lambda 0$) образует подпространство пространства V (и даже φ-инвариантное подпространство). Мы будем называть его *подпространством собственных векторов преобразования φ, соответствующих λ*. Поскольку это подпространство есть ядро преобразования $\varphi - \lambda\varepsilon$, используя методы предыдущего параграфа, можно найти его базис. Далее, из п. 2 теоремы вытекает, что задача определения всех собственных чисел преобразования φ сводится к поиску корней характеристического многочлена $f_\varphi(x)$, лежащих в поле F. Если эту задачу удаётся решить, то для данного преобразования φ мы можем определить все его собственные векторы (точнее, базы подпространств его собственных векторов). Из п. 3 теоремы и определения прямой суммы подпространств следует, что сумма подпространств собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, всегда прямая.

Определение 6.3.6. Линейное преобразование φ n-мерного векторного пространства V над полем F называется *диагонализируемым*, если в некотором базисе пространства V его матрица диагональна. Матрица $A \in M_n(F)$ называется *диагонализируемой*, если она подобна над F диагональной матрице.

Предложение 6.3.4. *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Преобразование φ диагонализируемо.*

2. *Пространство V обладает базисом, составленным из собственных векторов преобразования φ.*

3. $\mathrm{Sp}(\varphi) \subseteq F$ *и* $V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)} \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)$.

Упражнение 6.3.6. *Докажите предложение* 6.3.4.

Упражнение 6.3.7. *Докажите, что линейное преобразование все характеристические корни которого попарно различны, диагонализируемо над полем, содержащим спектр этого преобразования.*

Примеры. 1. Пусть φ — осевая симметрия относительно оси абсцисс в декартовой системе координат на плоскости. Орты e_1 и e_2 являются собственным векторами преобразования φ и составляют базис пространства, в котором матрица φ диагональна.

2. Пусть φ — поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ относительно начала координат декартовой плоскости. В базисе из ортов e_1 и e_2 матрица этого оператора имеет вид

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, характеристический многочлен $f_\varphi(x)$ равен $x^2 + 1$. Его корни $i, -i$ не лежат в поле $\mathbb{R}$. Поэтому оператор φ (и его матрица) не диагонализируем над $\mathbb{R}$. Однако, если рассматривать ту же матрицу как матрицу из $M_2(\mathbb{C})$, то она оказывается подобной диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Следовательно, в соответствии с нашим определением она диагонализируема над $\mathbb{C}$.

3. Пусть φ — оператор дифференцирования пространства $\mathbb{R}_1[x]$. В базе $x, 1$ его матрица имеет вид

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен $f_\varphi(x)$ равен x^2, число 0 — его единственный корень кратности 2 — лежит в $\mathbb{R}$. Подпространство $\mathrm{Ker}\,\varphi$ собственных векторов, соответствующих этому числу, очевидно, совпадает с множеством всех многочленов нулевой степени и не равно всему пространству V. Таким образом, оператор φ и его матрица не диагонализируемы.

Упражнение 6.3.8. *Найдите базы подпространств собственных векторов линейного преобразования φ, заданного в некоторой базе матри-*

цей

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и определите, является ли φ *диагонализируемым.*

§ 6.4. Корневые подпространства и корневое разложение

Напомним, что наша основная задача состоит в том, чтобы для данного линейного преобразования векторного пространства найти базис этого пространства, в котором матрица преобразования имеет наиболее простой вид. Как следует из результатов предыдущего параграфа, если линейное преобразование имеет базис из собственных векторов, то задача решена, поскольку существует базис, в котором матрица преобразования диагональна. К сожалению, как показывает последний пример с оператором дифференцирования из того же параграфа, линейное преобразование может не иметь базиса из собственных векторов даже в том случае, когда все корни его характеристического многочлена лежат в поле, над которым определено векторное пространство. В этом параграфе мы введём понятие корневого вектора, в некотором смысле обобщающее понятие собственного вектора, и покажем, что в случае, когда спектр линейного оператора содержится в поле, над которым определено векторное пространство, пространство раскладывается в прямую сумму корневых, т. е. состоящих из корневых векторов, подпространств.

Определение 6.4.1. Пусть λ — собственное число линейного преобразования φ векторного пространства V над полем F. Ненулевой вектор $u \in V$ называется *корневым вектором* преобразования φ с собственным числом λ, если существует натуральное число k такое, что $u(\varphi - \lambda\varepsilon)^k = 0$. Наименьшее натуральное число k с этим условием называется *высотой* корневого вектора.

Замечание. Из определения вытекает, что любой собственный вектор линейного преобразования является корневым вектором высоты 1 с тем же собственным числом. Удобно, хотя и не совсем корректно, считать нулевой вектор корневым вектором высоты 0 (для любого собственного числа λ).

Пример. Поскольку $(n + 1)$-ая производная от любого многочлена степени n равна нулю, каждый многочлен есть корневой вектор с собственным числом 0 оператора дифференцирования пространства многочленов, причём высота многочлена, как корневого вектора, равна $n+1$, где n — его степень.

Поскольку образ и ядро линейного преобразования инвариантны относительно него, для любого линейного оператора ψ и любых чисел $k, m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ таких, что $k < m$, выполняются очевидные включения $V\psi^k \supseteq V\psi^m$ и $\operatorname{Ker}\psi^k \subseteq \operatorname{Ker}\psi^m$. Пусть теперь пространство V конечномерно и $\lambda \in F$ — собственное число оператора $\varphi \in \mathcal{L}(V)$. В этом случае включение $V \supset V(\varphi-\lambda\varepsilon)$ обязательно строгое, так как оператор $\varphi - \lambda\varepsilon$ вырожден на V. Составим ряд из последовательно вложенных образов V под действием $\varphi - \lambda\varepsilon$:

$$V \supset V(\varphi-\lambda\varepsilon) \supset \ldots \supset V(\varphi-\lambda\varepsilon)^k = V(\varphi-\lambda\varepsilon)^{k+1} = \ldots = V(\varphi-\lambda\varepsilon)^m \quad (1)$$

Поскольку пространство V имеет конечную размерность, строгие вложения не могут продолжаться бесконечно. Поэтому на некотором k-ом шаге выполнится равенство $V(\varphi - \lambda\varepsilon)^k = V(\varphi - \lambda\varepsilon)^{k+1}$. Это равенство означает, что сужение оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$ на подпространство $V(\varphi - \lambda\varepsilon)^k$ является невырожденным оператором. Поэтому для любого $m > k$ выполняется $V(\varphi - \lambda\varepsilon)^k = V(\varphi - \lambda\varepsilon)^m$. Мы будем говорить, что ряд (1) *стабилизируется* на k-ом шаге. Рассматривая теперь последовательные вложения ядер операторов вида $(\varphi - \lambda\varepsilon)^i$, получаем ряд

$$0 \subset \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda\varepsilon) \subset \ldots \subset \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda\varepsilon)^k = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda\varepsilon)^{k+1} = \ldots = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda\varepsilon)^m \quad (2)$$

Этот ряд также стабилизируется на k-ом шаге, что следует из теоремы 6.2.1 о сумме ранга и дефекта линейного преобразования. Поскольку каждый корневой вектор высоты i, соответствующий собственному числу λ, по определению лежит в $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)^i$, получается, что все (любой высоты) корневые векторы, соответствующие λ, образуют подпространство $\operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)^k$, на котором стабилизируется ряд (2). Таким образом, корректно следующее определение.

Определение 6.4.2. Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, λ — собственное число линейного преобразования φ пространства V. Пусть $k = k(\lambda)$ — наименьшее натуральное число с условием $V(\varphi-\lambda\varepsilon)^k = V(\varphi-\lambda\varepsilon)^{k+1}$. Подпространство $U_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda\varepsilon)^k$ называется *корневым подпространством* преобразования φ пространства V, соответствующим собственному числу λ. Число k называется *высотой* корневого подпространства.

Замечание. Высота корневого подпространства равна максимальной высоте корневого вектора.

Пример. Пусть φ — оператор дифференцирования на пространстве $V = \mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n. Его характеристический многочлен $f_\varphi(x)$ равен x^{n+1}, поэтому 0 — единственный корень этого многочлена кратности $n+1$. В этом примере $V = U_0 = \operatorname{Ker}\varphi^{n+1}$ и $n+1$ — высота корневого подпространства U_0.

Теорема 6.4.1 (о корневом разложении). *Пусть V — n-мерное векторное пространство над полем F, φ — линейное преобразование пространства V, спектр которого $\operatorname{Sp}(\varphi) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ лежит в поле F, и для каждого $i = 1, \ldots, s$ корневое подпространство $U_i = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ имеет высоту k_i. Тогда $V = \bigoplus_{i=1}^s U_i$ и для каждого $i = 1, \ldots, s$ выполняется $k_i \leqslant \dim U_i = n_i$, где n_i — кратность корня λ_i в характеристическом многочлене преобразования φ.*

Доказательство. Мы будем доказывать теорему индукцией по размерности пространства V. При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно выполняется. В дальнейшем будем предполагать, что для любого пространства, размерность которого меньше n, теорема доказана.

Обозначим для краткости $\lambda = \lambda_1$, $k = k_1$, $U = U_1 = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)^k$ и $W = V(\varphi - \lambda\varepsilon)^k$. По определению корневого подпространства $W = V(\varphi - \lambda\varepsilon)^k = V(\varphi - \lambda\varepsilon)^{k+1} = W(\varphi - \lambda\varepsilon)$. В силу теоремы 6.2.2 оператор $\varphi - \lambda\varepsilon$ невырожден на W. А значит, невырождена на W и любая степень этого оператора. Следовательно, $U \cap W = 0$. Поскольку $\dim U + \dim W = \dim V$, пространство V раскладывается в прямую сумму подпространств U и W. Оба подпространства U и W φ-инвариантны, так как операторы φ и $(\varphi - \lambda\varepsilon)^k$ перестановочны. Пусть $\sigma = \varphi|_U$ и $\tau = \varphi|_W$. По теореме 6.3.1 в базисе пространства V, составленном из базисов подпространств U и W, матрица преобразования φ имеет вид:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} [\sigma] & 0 \\ 0 & [\tau] \end{pmatrix}.$$

Кроме того, из предложения 6.3.3 следует, что для характеристического многочлена преобразования φ имеет место разложение $f_\varphi = f_\sigma \cdot f_\tau$, где f_σ и f_τ — характеристические многочлены сужений σ и τ соответственно.

Теперь докажем, что $f_\sigma(x) = (x - \lambda)^{n_1}$, где n_1 — кратность корня $\lambda = \lambda_1$ в характеристическом многочлене f_φ. Предположим, что линейный многочлен $x - \mu$ делит f_σ. Тогда существует ненулевой вектор $u \in U$ такой, что $u\sigma = u\varphi = \mu u$. Поэтому $u(\varphi - \lambda\varepsilon) = (\mu - \lambda)u$. Поскольку

U — корневое подпространство с собственным числом λ, выполняется $0 = u(\varphi - \lambda\varepsilon)^k = (\mu - \lambda)^k u$. Следовательно, $(\mu - \lambda)^k = 0$. Отсюда $\mu = \lambda$. Следовательно, f_σ делит $(x - \lambda)^{n_1}$. С другой стороны, как мы уже выяснили, оператор $\tau - \lambda\varepsilon = (\varphi - \lambda\varepsilon)|_W$ невырожден на W. Поэтому $x - \lambda$ не делит f_τ. Таким образом, $f_\sigma(x) = (x - \lambda)^{n_1}$. Из этого равенства сразу следует, что кратность n_1 корня λ_1 в характеристическом многочлене f_φ совпадает с размерностью корневого подпространства U_1, соответствующего этому корню. Кроме того, поскольку в ряду (2) после каждого строгого включения размерность подпространства увеличивается по крайней мере на единицу, высота k_1 корневого подпространства U_1 не превосходит размерности этого подпространства, т. е. $k_1 \leqslant \dim U_1$.

Рассмотрим теперь оператор τ на пространстве W. Поскольку $f_\tau = f_\varphi / f_\sigma$ и $f_\sigma(x) = (x - \lambda_1)^{n_1}$, выполняется равенство $f_\tau(x) = \prod_{i=2}^{s}(x - \lambda_i)^{n_i}$. Пространство W, размерность которого меньше размерности V, и оператор τ удовлетворяют всем условиям теоремы. Поэтому по предположению индукции имеем $W = \bigoplus_{i=2}^{s} U_i'$, где $U_i' = \mathrm{Ker}(\tau - \lambda_i\varepsilon)^{k_i'}$ и $k_i' \leqslant \dim U_i' = n_i$. Нам осталось доказать, что для $i = 2, \ldots, s$ подпространства U_i и U_i' совпадают и $k_i = k_i'$. Поскольку на подпространстве W операторы φ и $\tau = \varphi|_W$ действуют одинаково, для каждого $i = 2, \ldots, s$ выполняются равенства $U_i' = U_i \cap W$. Следовательно, для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что $U_i \subseteq W$ для любого $i = 2, \ldots, s$.

Пусть для некоторого $i \in \{2, \ldots, s\}$ вектор v лежит в $U_i = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Поскольку $V = U \oplus W$, существуют векторы $u \in U$ и $w \in W$ такие, что $v = u + w$. Тогда $0 = v(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} = u(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} + w(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Положим $u_1 = u(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ и $w_1 = w(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Поскольку операторы $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ и $(\varphi - \lambda_1\varepsilon)^{k_1}$ перестановочны, подпространства U и W инвариантны относительно оператора $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Поэтому $u_1 \in U$ и $w_1 \in W$. Так как сумма подпространств U и W прямая, из равенства $0 = u_1 + w_1$ следует, что $u_1 = w_1 = 0$. Но тогда $u \in \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Поскольку многочлен $x - \lambda_i$ не делит $f_\sigma(x) = (x - \lambda_1)^{n_1}$, оператор $\varphi - \lambda_i\varepsilon$ невырожден на U, а значит, невырожден на нём и оператор $(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Поэтому из равенства $0 = u_1 = u(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ вытекает, что $u = 0$. Таким образом, $v \in W$, а значит, $U_i = U_i \cap W = U_i'$ и, в частности, $k_i = k_i'$ для любого $i = 2, \ldots, s$. $\square$

Следствие. *В условиях теоремы* 6.4.1 *существует базис пространства V, составленный из базисов корневых подпространств U_i, $i = 1, \ldots, s$, в котором матрица преобразования φ имеет клеточно диаго-*

нальный вид:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} [\varphi|_{U_1}] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\varphi|_{U_s}] \end{pmatrix}, \tag{3}$$

причём количество клеток равно количеству различных корней в спектре φ, а размер каждой клетки равен кратности соответствующего корня в характеристическом многочлене.

Замечание. Из доказательства теоремы вытекает практический метод отыскания баз корневых подпространств (предполагается, что собственные числа оператора уже известны и лежат в поле определения пространства), основанный на последовательном *отщеплении* корневых подпространств.

Упражнение 6.4.1. *Пусть линейное преобразование φ пространства V задано в некотором базисе матрицей $[\varphi] = A$. Обосновать следующий поэтапный метод поиска баз корневых подпространств. Предположим, что перед началом i-ого этапа этого процесса нам известны базы корневых подпространств $U_1, \ldots, U_{i-1}$, а также база подпространства $W = V(\varphi - \lambda_1\varepsilon)^{k_1} \ldots (\varphi - \lambda_{i-1}\varepsilon)^{k_{i-1}}$ (из доказательства теоремы следует, что $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_{i-1} \oplus W$ и $W = U_i \oplus \ldots \oplus U_s$). Обозначим через $N = A - \lambda_i E$ матрицу преобразования $\varphi - \lambda_i\varepsilon$, а через B_0 — матрицу, составленную из строк базиса подпространства W. Проведём цепочку преобразований*:

$$(B_0 \mid B_0 N) \to (B_1 \mid C_1) \to (B_1 \mid C_1 \mid C_1 N) \to (B_2 \mid * \mid C_2) \to \ldots$$

$$\ldots \to (B_k \mid * \mid \ldots \mid * \mid C_k),$$

где на каждом шаге мы пользуемся элементарными преобразованиями строк, матрицы C_j — ступенчатые для всех $j = 1, \ldots, k$ и число нулевых строк матрицы C_k равно кратности корня λ_i в характеристическом многочлене преобразования φ. Тогда строки матрицы B_k, стоящие напротив нулевых строк матрицы C_k, образуют базис корневого подпространства $U_i = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$, число шагов k равно высоте k_i подпространства U_i, а ненулевые строки матрицы C_k образуют базис пространства $W' = W(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} = U_{i+1} \oplus \ldots \oplus U_s$. Переходим к следующему этапу, переобозначая $N = A - \lambda_{i+1}E$ и $B_0 = C_k$ (B_0 — матрица, составленная из строк базиса пространства W').

Замечание. Эффективность этого метода основана на том, что количество строк в исходной матрице B_0 уменьшается от этапа к этапу, что сокращает вычисления. Более того, если число различных характеристических корней преобразования равно s, то последним этапом будет $(s-1)$-ый, поскольку ненулевые строки матрицы C_k, получившейся в результате этого этапа, образуют базис подпространства $V(\varphi-\lambda_1\varepsilon)^{k_1}\dots(\varphi-\lambda_{s-1}\varepsilon)^{k_{s-1}} = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda_s\varepsilon)^{k_s}$, т. е. последнего корневого подпространства U_s.

Упражнение 6.4.2. *Для преобразования φ из упражнения* 6.3.8 *найдите базисы корневых подпространств. Запишите матрицу φ в базисе пространства, составленном из найденных базисов.*

Упражнение 6.4.3. *Пусть линейный оператор φ конечномерного векторного пространства удовлетворяет тождеству $\varphi^2 = \varphi$. Используя теорему о корневом разложении, докажите, что φ — оператор проектирования на подпространство $\operatorname{Ker}(\varphi-\varepsilon)$ параллельно подпространству $\operatorname{Ker}\varphi$.*

§ 6.5. Нильпотентные преобразования

Заметим, что на корневом подпространстве $U_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi-\lambda\varepsilon)^k$ оператор $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$ обладает следующим замечательным свойством: $U_\lambda\psi^k = 0$. Поскольку $\varphi = \psi + \lambda\varepsilon$, действие оператора φ на подпространстве U_λ несложно восстановить, зная, как оператор ψ действует на U_λ. Поэтому в этом параграфе мы подробно изучим линейные преобразования, которые в некоторой степени превращаются в нулевое преобразование.

Определение 6.5.1. Линейное преобразование ψ векторного пространства V называется *нильпотентным*, если найдётся $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\psi^k = 0$.

Примеры. 1. Нулевое преобразование нильпотентно.

2. Оператор дифференцирования пространства многочленов ограниченной степени нильпотентен.

3. Если φ — произвольное линейное преобразование конечномерного векторного пространства и λ — его собственное число, то сужение оператора $\varphi - \lambda\varepsilon$ на корневое подпространство U_λ — нильпотентный оператор.

Предложение 6.5.1. *Линейное преобразование ψ конечномерного векторного пространства нильпотентно тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Sp}(\psi) = \{0\}$.

Доказательство. Следует из теоремы о корневом разложении. □

Определение 6.5.2. Пусть ψ — нильпотентное преобразование пространства V, $v \in V$. Упорядоченный набор векторов $v_0, v_1 \ldots, v_{l-1}$ называется *ниль-слоем длины l с началом в v*, если $v_0 = v$, $v_i = v_{i-1}\psi = v\psi^i$ для $i = 1, \ldots, l-1$, и $v_{l-1}\psi = 0$. Подпространство $U = \langle v_0, v_1 \ldots, \ldots, v_{l-1}\rangle$, натянутое на векторы ниль-слоя, называется *циклическим*.

Замечание. Поскольку ψ нильпотентен, для каждого вектора $v \in V$ можно построить ниль-слой конечной длины с началом в v.

Замечание. В определении не предполагается, что $v_i \neq 0$ при $i < l$.

Пример. Пусть $V = \mathbb{R}_n[x]$, $v = x^2 + 2x + 3$ и ψ — оператор дифференцирования. Тогда $v_0 = x^2 + 2x + 3, v_1 = 2x + 2, v_2 = 2$ — ниль-слой длины 3 с началом в v.

Определение 6.5.3. Пусть ψ — нильпотентное преобразование. Набор векторов называется *жордановым* относительно ψ, если он состоит из (одного или нескольких) ниль-слоёв. Базис пространства, являющийся жордановым набором векторов, называется *жордановым базисом* пространства относительно преобразования ψ.

Определение 6.5.4. Жорданова таблица — способ записи жорданова набора векторов в виде таблицы, строки которой являются ниль-слоями, выровненными по правому краю. Элементарными преобразованиями жордановой таблицы называются:

1) перестановка ниль-слоёв;

2) умножение ниль-слоя на ненулевой скаляр;

3) сдвиг ниль-слоя вправо на одну позицию, если последний вектор ниль-слоя является нулевым;

4) прибавление ко всем векторам ниль-слоя умноженных на один и тот же скаляр векторов другого ниль-слоя, имеющего большую или равную длину, стоящих под или над векторами исходного ниль-слоя.

u	$u\psi$	$\cdots$	$u\psi^k$	$u\psi^{k+1}$	$\cdots$	$u\psi^{l-1}$
			v	$v\psi$	$\cdots$	$u\psi^{m-1}$

$\longrightarrow$ преобразование 4-го типа

$\longrightarrow$

u	$u\psi$	$\cdots$	$u\psi^k$	$u\psi^{k+1}$	$\cdots$	$u\psi^{l-1}$
			$v + \alpha u\psi^k$	$v\psi + \alpha u\psi^{k+1}$	$\cdots$	$v\psi^{m-1} + \alpha u\psi^{l-1}$

Предложение 6.5.2. 1. *Линейная оболочка векторов жордановой таблицы не изменяется при её элементарных преобразованиях.*

2. *Свойство таблицы быть жордановой не меняется при её элементарных преобразованиях.*

Доказательство. 1. Доказательство аналогично рассуждению о сохранении строчного ранга матрицы при элементарных преобразованиях в параграфе 4.1.

2. Стоит проверить лишь сохранение свойства таблицы быть жордановой при преобразовании 4-го типа, поскольку для преобразований остальных типов всё очевидно. При преобразовании 4-го типа (см. рисунок) ниль-слой вида $v, v\psi, \ldots, v\psi^{m-1}$ заменяется на упорядоченный набор векторов $v + \alpha u\psi^k, v\psi + \alpha u\psi^{k+1}, \ldots, v\psi^{m-1} + \alpha u\psi^{l-1}$, который является ниль-слоем, так как $v\psi^i + \alpha u\psi^{k+i} = (v + \alpha u\psi^k)\psi^i$ для любого i. □

Предложение 6.5.3. *Если набор векторов, составляющих правый столбец жордановой таблицы, линейно независим, то и весь жорданов набор, из которого составлена жорданова таблица, линейно независим.*

Доказательство. Начнём с небольшого предварительного рассуждения. Пусть набор векторов $v, v\psi, \ldots, v\psi^{l-1}$ является ниль-слоем длины l. Предположим, что $\alpha_0 v + \ldots + \alpha_k v\psi^k + \ldots + \alpha_{l-1} v\psi^{l-1} = \alpha_k v\psi^k + \ldots + \alpha_{l-1} v\psi^{l-1}$ — линейная комбинация векторов этого набора, в которой все коэффициенты с индексом, меньшим k, равны 0. Тогда, положив $m = l-1-k$, получим, что $(\alpha_0 v + \ldots + \alpha_k v\psi^k + \ldots + \alpha_{l-1} v\psi^{l-1})\psi^m = \alpha_k v\psi^{l-1}$, так как по определению ниль-слоя $(v\psi^i)\psi^m = 0$ при $i > k$.

Предположим теперь, что утверждение предложения неверно. Тогда найдётся нетривиальная линейная комбинация векторов жордановой таблицы, равная 0. Сгруппировав слагаемые в этой линейной комбинации по ниль-слоям, получим равенство:

$$0 = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{l_i-1} \alpha_{ij} v_i \psi^j \right),$$

где $v_1, \ldots, v_s$ — векторы, с которых начинаются ниль-слои жордановой таблицы, а $l_1, \ldots, l_s$ — длины этих слоёв. Теперь для каждого $i \in \{1, \ldots, s\}$ выберем число k_i так, чтобы в линейной комбинации $\sum_{j=0}^{l_i-1} \alpha_{ij} v_i \psi^j$ коэффициент α_{ik_i} не равнялся 0, а коэффициенты α_{ij} при $j < k_i$ равнялись 0. Если такого числа нет, т.е. для данного i все α_{ij} равны 0, положим $k_i = l_i - 1$. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ положим $m_i = l_i - 1 - k_i$. Пусть $m = \max\{m_1, \ldots, m_s\}$ и $r_1, \ldots, r_t$ — те числа из множества $\{1, \ldots, s\}$, для которых $m_{r_1} = \ldots = m_{r_t} = m$. Переставив при необходимости ниль-слои между собой, можно добиться того, чтобы $m_1 = \ldots = m_t = m$. Тогда

$$0 = 0\psi^m = \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{j=0}^{l_i-1} \alpha_{ij} v_i \psi^j \right) \right) \psi^m = \alpha_{1k_1} v_1 \psi^{l_1-1} + \ldots + \alpha_{tk_t} v_t \psi^{l_t-1}.$$

Мы получили равную нулю нетривиальную линейную комбинацию векторов, которые образуют поднабор набора векторов правого столбца жордановой таблицы, что противоречит условию. □

Замечание. Из предложения 6.5.3, в частности, следует, что все векторы ниль-слоя, оканчивающегося ненулевым вектором, образуют линейно независимый набор.

Теорема 6.5.1 (о жордановом базисе для нильпотентного линейного преобразования)**.** *Конечномерное векторное пространство V относительно нильпотентного линейного преобразования ψ имеет жорданов базис. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ число s_k ниль-слоёв длины k не зависит от выбора базиса и равно $s_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, где $r_i = \dim V\psi^i$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис пространства V. Составим жорданову таблицу из ниль-слоёв, начинающихся в векторах этого базиса. Очевидно, что линейная оболочка данной жордановой таблицы совпадает со всем пространством. Используя перестановки слоёв жордановой таблицы, упорядочим их по убыванию длины. Предположим, что векторы $u_1, \ldots, u_n$, составляющие правый столбец жордановой таблицы, линейно зависимы. Тогда в силу критерия линейной зависимости (предложение 3.2.1) в этом столбце найдётся вектор u_k, который выражается через векторы $u_1, \ldots, u_{k-1}$, стоящие в таблице над ним. Поскольку длины первых $k-1$ ниль-слоёв по крайней мере не меньше, чем длина k-го слоя, элементарными преобразованиями типа 4 можно занулить вектор u_k. Сдвинув k-й слой на этот нулевой вектор, получим таблицу, состоящую из меньшего числа векторов. В силу предложения 6.5.2 эта таблица снова будет жордановой, а её линейная оболочка по-прежнему будет совпадать со всем пространством. Продолжая указанный процесс, мы за конечное число шагов получим жорданову таблицу, в которой набор векторов правого столбца линейно независим. Тогда из предложения 6.5.3 вытекает, что и весь жорданов набор линейно независим, а значит, образует искомый базис пространства V.

Если s_k — число ниль-слоёв длины k жорданова базиса B, то размерность пространства V, очевидно, равна $s_1 + 2s_2 + \ldots + ts_t$, где t — наибольшая длина ниль-слоя в жордановом базисе. Рассмотрим набор векторов $B\psi$, состоящий из образов векторов базиса B под действием преобразования ψ. Из определения ниль-слоя вытекает, что набор $B\psi$ является поднабором набора B, состоящим из всех векторов жордановой таблицы, за исключением векторов, с которых начинаются ниль-слои. Поскольку любой поднабор линейно независимого набора снова линейно независим и линейная оболочка набора $B\psi$ есть образ $V\psi$ преобразования ψ, набор $B\psi$ — базис пространства $V\psi$. Поэтому размерность пространства $V\psi$ равна $s_2 + 2s_3 + \ldots + (t-1)s_t$. Рассуждая аналогично при всех $i = 0, \ldots, t$, получим следующую систему равенств для $r_i = \dim V\psi^i$:

$$\begin{array}{l} r_0 = s_1 + 2s_2 + \ldots + ts_t \\ r_1 = s_2 + 2s_3 + \ldots + (t-1)s_t \\ \ldots \\ r_i = s_{i+1} + 2s_{i+2} + \ldots + (t-i)s_t \\ \ldots \\ r_{t-1} = s_t \end{array} \tag{1}$$

Заметим, что $r_i = 0$ при $i \geqslant t$. Вычитая из каждого равенства в системе (1) следующее, получим систему равенств:

$$\begin{array}{l} r_0 - r_1 = s_1 + s_2 + \ldots + s_t \\ r_1 - r_2 = s_2 + s_3 + \ldots + s_t \\ \ldots \\ r_{i-1} - r_i = s_i + s_{i+1} + \ldots + s_t \\ r_i - r_{i+1} = s_{i+1} + s_{i+2} + \ldots + s_t \\ \ldots \\ r_{t-2} - r_{t-1} = s_{t-1} + s_t \\ r_{t-1} = s_t \end{array} \tag{2}$$

Вычитая из каждого равенства в системе (2) следующее и меняя левые и правые части равенств местами, получим, что для каждого $i = 1, \ldots, t$ имеет место равенство $s_i = r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1}$. Поскольку размерности r_i пространств $V\psi^i$ не зависят от выбора базиса, не зависят от него и числа s_i, выражающие количество ниль-слоёв длины i в жордановом базисе. $\square$

Следствие. *Конечномерное векторное пространство V относительно нильпотентного преобразования ψ раскладывается $V =$*

$\bigoplus_{i=1}^{m} W_i$ *в прямую сумму* ψ*-инвариантных циклических подпространств* W_i*,* $i = 1, \ldots, m$*. В базисе пространства* V*, составленном из ниль-слоёв, на которые натянуты подпространства* W_i*, матрица преобразования* ψ *имеет клеточно диагональный вид*:

$$[\psi] = \begin{pmatrix} [\psi\,|_{W_1}] & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\psi\,|_{W_m}] \end{pmatrix}, \text{ где } [\psi\,|_{W_i}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

и размер матрицы $[\psi\,|_{W_i}]$ *равен длине ниль-слоя, соответствующего циклическому подпространству* W_i*.*

Доказательство. Из доказанной нами теоремы вытекает, что пространство V относительно нильпотентного оператора ψ обладает жордановым базисом, состоящим из ниль-слоёв. Циклические подпространства W_i, натянутые на ниль-слои, очевидно, ψ-инвариантны. Поэтому по теореме 6.3.1 в соответствующем базисе матрица оператора ψ клеточно диагональна. Вид клетки, соответствующей сужению оператора ψ на циклическое подпространство, вытекает из определения ниль-слоя. □

Замечание. Матрицу из следствия мы будем называть *жордановой формой* матрицы нильпотентного преобразования, а клетки, из которых она состоит, *жордановыми* клетками.

Упражнение 6.5.1. *Докажите, что если максимальная длина ниль-слоя нильпотентного преобразования* ψ *(максимальный размер жордановой клетки в жордановой форме матрицы* $[\psi]$*) равна* t*, то* $\psi^t = 0$*, а* $\psi^{t-1} \neq 0$*.*

Замечание. Практический способ отыскания жорданова базиса нильпотентного преобразования основан на тех же соображениях, что и доказательство теоремы 6.5.1. Полезное с точки зрения уменьшения выкладок упрощение состоит лишь в том, чтобы строить ниль-слои один за другим, последовательно добиваясь линейной независимости векторов из правого столбца.

Упражнение 6.5.2. *Для линейного преобразования* ψ*, заданного в* *некотором базисе матрицей*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

найдите его жорданов базис и жорданову форму.

Упражнение 6.5.3. *Найдите жорданов базис и жорданову форму оператора дифференцирования в пространстве $V = \mathbb{R}_n[x]$ многочленов степени не выше n.*

§ 6.6. Жорданова форма матрицы линейного преобразования

Определение 6.6.1. Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F, содержащим спектр преобразования φ. *Жордановым базисом* векторного пространства V относительно преобразования φ называется базис, составленный из жордановых базисов корневых подпространств $U_i = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ относительно преобразований $\psi_i = \varphi - \lambda_i\varepsilon\,|_{U_i}$.

Теорема 6.6.1 (Жордан). *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F, содержащим спектр преобразования φ. Тогда существует жорданов базис пространства V относительно преобразования φ. В этом базисе матрица преобразования φ имеет клеточно диагональный вид*:

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix}, \text{ где } J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

для некоторого $\lambda \in \operatorname{Sp}(\varphi)$ и размер клетки равен длине ниль-слоя соответствующего циклического подпространства.

Доказательство. По теореме 6.4.1 о корневом разложении в условиях нашей теоремы существует базис пространства V, состоящий из базисов корневых подпространств. Пусть U — одно из этих корневых подпространств, соответствующее собственному числу λ. Тогда сужение $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon|_U$ является нильпотентным линейным преобразованием пространства U. В силу следствия из теоремы 6.5.1 подпространство U есть прямая сумма циклических подпространств, соответствующих ниль-слоям некоторого жорданова базиса преобразования ψ. Пусть W — одно из этих циклических подпространств, соответствующее ниль-слою $w_0, w_1, \ldots, w_{l-1}$ длины l. Для каждого $i = 0, \ldots, l-2$ выполняется $w_i(\varphi - \lambda\varepsilon) = w_i\psi = w_{i+1}$ и $w_{l-1}(\varphi - \lambda\varepsilon) = w_{l-1}\psi = 0$. Поэтому для каждого $i = 0, \ldots, l-2$ выполняется $w_i\varphi = \lambda w_i + w_{i+1}$ и $w_{l-1}\varphi = \lambda w_{l-1}$. Из приведённых равенств следует, что подпространство W является φ-инвариантным. Поэтому пространство V раскладывается в прямую сумму циклических φ-инвариантных подпространств, матрица преобразования φ в базисе, составленном из базисов этих подпространств, клеточно диагональна и каждому циклическому подпространству соответствует клетка требуемого вида. □

Определение 6.6.2. Матрица, имеющая форму, как в теореме 6.6.1, называется *жордановой*, а клетки, из которых она состоит, — *жордановыми клетками*.

Следствие. *Если в некотором базисе пространства V матрица линейного преобразования φ жорданова, то этот базис жорданов для преобразования φ. Кроме того, в жордановой матрице линейного преобразования φ для каждого $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi)$ количество жордановых клеток фиксированного размера со скаляром λ на главной диагонали не зависит от выбора жорданова базиса.*

Доказательство. Векторы базиса, которым соответствует жорданова клетка размера l со скаляром λ на главной диагонали, очевидно, образуют ниль-слой длины l относительно преобразования $\varphi - \lambda\varepsilon$. Поэтому базис, в котором матрица преобразования φ жорданова, есть объединение базисов φ-инвариантных циклических подпространств, а значит, является жордановым для преобразования φ. Объединение базисов циклических подпространств, соответствующих одному и тому же собственному числу λ, даст нам базис корневого подпространства $U_\lambda = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)^{k_\lambda}$. Оператор $\varphi - \lambda\varepsilon|_{U_\lambda}$ нильпотентен на U_λ. По теореме 6.5.1 число ниль-слоёв фиксированной длины в жордановом базисе этого оператора не зависит от выбора базиса. Поэтому не зависит от выбора базиса и число клеток фиксированного размера со скаляром λ на главной диагонали в жордановой матрице оператора φ. □

Упражнение 6.6.1. *Максимальный размер жордановой клетки с* *собственным числом λ на главной диагонали равен высоте k корневого подпространства $U_\lambda = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda\varepsilon)^k$.*

Теорема 6.6.2 (матричная форма теоремы Жордана)**.** *Пусть F — поле, $A \in M_n(F)$, K — расширение поля F, для которого $\operatorname{Sp}(A) \subseteq K$. Тогда существуют невырожденная матрица $T \in M_n(K)$ и жорданова матрица $J \in M_n(K)$ такие, что $J = TAT^{-1}$. Матрица J определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток, причём если s_{ij} — число жордановых клеток размера j со скаляром λ_i на главной диагонали, то $s_{ij} = r_{i,j-1} - 2r_{ij} + r_{i,j+1}$, где $r_{ij} = \operatorname{rank}(A - \lambda_i E)^j$.*

Доказательство. Рассмотрим арифметическое векторное пространство $V = K^n$ над полем K. Преобразование φ этого пространства, заданное правилом $v\varphi = vA$, линейно, и в стандартном базисе B, состоящем из строк $e_1, \ldots, e_n$ единичной матрицы, матрица этого преобразования $[\varphi]_B$ равна матрице A. Поскольку $\operatorname{Sp}(\varphi) = \operatorname{Sp}(A) \subseteq K$, по теореме Жордана существует жорданов базис C преобразования φ, в котором матрица $J = [\varphi]_C$ преобразования является жордановой. Матрица $T \in M_n(K)$, составленная из строк базиса C, записанных в стандартном базисе B, является матрицей перехода от базиса B к базису C. Поэтому T невырождена и $J = TAT^{-1}$. В силу следствия из теоремы Жордана матрица J определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток. В силу теоремы о жордановой форме нильпотентного оператора число s_{ij} клеток размера j со скаляром λ_i на главной диагонали равно $r_{j-1}(\lambda_i) - 2r_j(\lambda_i) + r_{j+1}(\lambda_i)$, где $r_j(\lambda_i) = \dim U_i(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^j$ и U_i — корневое подпространство высоты k_i, соответствующее собственному числу λ_i. В силу теоремы о корневом разложении $V = U_i \oplus W_i$, где $W_i = V(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ и $W_i(\varphi - \lambda_i\varepsilon) = W_i$. Поэтому $V(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^j = U_i(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^j + W_i$. Обозначим размерность пространства W_i через r_i. Так как размерность образа линейного преобразования равна рангу матрицы этого преобразования, то $r_{ij} = \operatorname{rank}(A - \lambda_i E)^j = r_j(\lambda_i) + r_i$. Поэтому $s_{ij} = r_{j-1}(\lambda_i) - 2r_j(\lambda_i) + r_{j+1}(\lambda_i) = (r_{i,j-1} - r_i) - 2(r_{ij} - r_i) + (r_{i,j+1} - r_i) = r_{i,j-1} - 2r_{ij} + r_{i,j+1}$, что и требовалось доказать. □

Упражнение 6.6.2. *Для матрицы*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & -4 \\ -2 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

у которой $f_A(x) = x(x-2)^3$, постройте в пространстве $V = \mathbb{R}^4$ жорданов *базис, найдите жорданову форму матрицы A в этом базисе и укажите матрицу T перехода к этому базису.*

§ 6.7. Многочлены и функции от линейных преобразований

Определение 6.7.1. Пусть F — поле, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in F[x]$, $A \in M_n(F)$, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, где V — векторное пространство над полем F. *Значением многочлена $f(x)$ от матрицы A* называется матрица $f(A) = a_0E + a_1A + \ldots + a_mA^m$. *Значением многочлена $f(x)$ от линейного преобразования φ* называется линейное преобразование $f(\varphi) = a_0\varepsilon + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m$.

Предложение 6.7.1. *Пусть F — поле и $f(x) \in F[x]$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Если φ — линейное преобразование векторного пространства V над полем F и $[\varphi]$ — матрица этого преобразования в некоторой базе, то $f([\varphi]) = [f(\varphi)]$.*

2. *Если $A, B, T \in M_n(F)$ и $B = TAT^{-1}$, то $f(B) = Tf(A)T^{-1}$.*

Доказательство. 1. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$. Имеем $[f(\varphi)] = [a_0\varepsilon + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m] = a_0[\varepsilon] + a_1[\varphi] + \ldots + a_m[\varphi]^m = f([\varphi])$.

2. Пусть $V = F^n$ — арифметическое векторное пространство строк. Определим линейное преобразование φ этого пространства правилом $v\varphi = vA$. Тогда в стандартном базисе $[\varphi]_1 = A$. Поскольку $|T| \neq 0$, строки матрицы T образуют ещё один базис пространства V. Матрица $[\varphi]_2$ преобразования φ в этом базисе равна B, так как в силу равенства $B = TAT^{-1}$ матрица T есть матрица перехода к этому базису. Поэтому $f(B) = f([\varphi]_2) = [f(\varphi)]_2 = T[f(\varphi)]_1T^{-1} = Tf([\varphi]_1)T^{-1} = Tf(A)T^{-1}$. □

Упражнение 6.7.1. *Докажите п. 2 предложения 6.7.1 непосредственно, воспользовавшись законом дистрибутивности в кольце матриц.*

Предложение 6.7.2. *Пусть F — поле, $f, g \in F[x]$, $u = f+g$, $v = fg$, $A \in M_n(F)$, $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, где V — векторное пространство над F. Тогда $u(A) = f(A) + g(A)$, $u(\varphi) = f(\varphi) + g(\varphi)$, $v(A) = f(A)g(A)$, $v(\varphi) = f(\varphi)g(\varphi)$.*

Упражнение 6.7.2. *Доказать предложение 6.7.2.*

Замечание. Из предложения 6.7.2 следует, что равенства для многочленов, основанные на свойствах операций в кольце многочленов, приводят к соответствующим равенствам для значений многочленов от матриц и линейных преобразований. Например, равенство многочленов $fg = gf$, вытекающее из коммутативности умножения, приводит к равенству линейных преобразований $f(\varphi)g(\varphi) = g(\varphi)f(\varphi)$.

Определение 6.7.2. Пусть φ — линейное преобразование векторного пространства V над полем F, A — матрица из $M_n(F)$. Многочлен $f(x) \in F[x]$ *аннулирует* преобразование φ (матрицу A), если $f(\varphi) = 0$ ($f(A) = 0$). Многочлен наименьшей степени со старшим коэффициентом, равным 1, который аннулирует преобразование φ (матрицу A), называется *минимальным аннулирующим многочленом* для φ (для A).

Теорема 6.7.1 (о минимальном аннулирующем многочлене)**.** *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем F, φ — линейное преобразование пространства V, спектр которого лежит в F, и $f_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{n_i}$ — характеристический многочлен преобразования φ, причём $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Пусть для каждого $i = 1, \ldots, s$ число k_i — высота корневого подпространства $U_i = \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$. Тогда многочлен $g(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{k_i}$ является минимальным аннулирующим многочленом для преобразования φ.*

Доказательство. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ положим

$$g_i(x) = \frac{g(x)}{(x-\lambda_i)^{k_i}}.$$

Докажем сначала, что $g(x)$ аннулирует φ. По теореме 6.4.1 о корневом разложении $V = \bigoplus_{i=1}^{s} U_i$. Поэтому для любого $v \in V$ имеем $v = u_1 + \ldots + u_s$, где $u_i \in U_i$. Тогда

$$vg(\varphi) = \left(\sum_{i=1}^{s} u_i\right) g(\varphi) = \sum_{i=1}^{s}(u_i g(\varphi)) = \sum_{i=1}^{s} u_i((\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i} g_i(\varphi)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s}(u_i(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}) g_i(\varphi) = 0,$$

так как $u_i \in \operatorname{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$ для каждого $i = 1, \ldots, s$.

Пусть теперь $h(x)$ — минимальный аннулирующий многочлен для преобразования φ. Если многочлен h не делит g, то ненулевой остаток от деления g на h имеет степень, меньшую степени h, и аннулирует φ, что противоречит выбору h в качестве минимального аннулирующего многочлена. Следовательно, h делит g, а значит, $h(x) = \prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i}$, где $m_i \leqslant k_i$ для любого $i = 1, \ldots, s$. Допустим, что степень h меньше степени g, т. е. найдётся $i \in \{1, \ldots, s\}$, для которого $m_i < k_i$. Не теряя общности, можно считать, что $m_1 < k_1$. Из определения высоты корневого подпространства следует, что найдётся вектор $u_1 \in U_1$ такой, что $u_1(\varphi - \lambda_1\varepsilon)^{k_1-1} \neq 0$. Поскольку $m_1 < k_1$, имеем $u_1(\varphi - \lambda_1\varepsilon)^{m_1} = w_1 \neq 0$. Поэтому $u_1 h(\varphi) = (u_1(\varphi - \lambda_1\varepsilon)^{m_1}) \prod_{i=2}^{s}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i} = w_1 \prod_{i=2}^{s}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{m_i}$. Подпространство U_1 инвариантно относительно каждого преобразования $\varphi - \lambda_i\varepsilon$, где $i = 1, \ldots, s$. Более того, из теоремы о корневом разложении следует, что каждое из этих преобразований невырождено на U_1 при $i \neq 1$. Поэтому $w_1(\varphi - \lambda_2\varepsilon)^{m_2} = w_2 \neq 0, w_2(\varphi - \lambda_3\varepsilon)^{m_3} = w_3 \neq 0, \ldots, w_{s-1}(\varphi - \lambda_s\varepsilon)^{m_s} = w_s \neq 0$. Таким образом, $u_1 h(\varphi) = w_s \neq 0$; противоречие. Следовательно, $g(x) = h(x)$. □

Следствие. *Если матрица $A = [\varphi]$ есть матрица некоторого линейного преобразования φ и $g(x)$ — минимальный аннулирующий многочлен для φ, то $g(x)$ — минимальный аннулирующий многочлен для матрицы A.*

Теорема 6.7.2 (Гамильтон — Кэли). *Пусть F — поле. Имеют место следующие утверждения.*

1. *Если $A \in M_n(F)$ и $f(x)$ — характеристический многочлен для A, то $f(A) = 0$.*

2. *Если $\varphi \in \mathcal{L}(V)$, где V — конечномерное пространство над полем F, и $f(x)$ — характеристический многочлен для φ, то $f(\varphi) = 0$.*

Доказательство. Если $\mathrm{Sp}(A)$ (или $\mathrm{Sp}(\varphi)$) лежит в поле F, то теорема Гамильтона — Кэли есть следствие теоремы о минимальном аннулирующем многочлене, поскольку по теореме о корневом разложении для каждого корня λ_i характеристического многочлена $f(x)$ имеет место неравенство $k_i \leqslant n_i$, где n_i — кратность λ_i в $f(x)$, а k_i — высота корневого подпространства $U_i = \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda_i\varepsilon)^{k_i}$, т. е. кратность λ_i в минимальном аннулирующем многочлене $g(x)$.

Предположим, что $\mathrm{Sp}(A)$ не лежит в F. Рассмотрим расширение K поля F, над которым многочлен $f(x)$ раскладывается на линейные множители. Рассмотрим отображение $v \mapsto vA$ арифметического пространства $V = K^n$, матрицей которого в стандартном базисе, очевидно, является матрица A. Из теоремы 6.7.1 вытекает, что минимальный аннулирующий многочлен $g(x)$ матрицы A делит её характеристический многочлен, а потому $f(A) = 0$ в поле K. Поскольку все коэффициенты многочлена $f(x)$ лежат в поле F, равенство $f(A) = 0$ имеет место и над полем F. Таким образом п. 1 теоремы доказан. П. 2 вытекает из п. 1 и равенства $[f(\varphi)] = f([\varphi])$. $\square$

Замечание. Теорему Гамильтона — Кэли кратко формулируют так: матрица — корень своего характеристического многочлена.

Теперь мы займёмся обобщением теоремы о корневом разложении, убрав из формулировки требование о том, чтобы поле содержало спектр оператора.

Теорема 6.7.3 (о ядерном распаде). *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V над полем F. Предположим, что многочлен $f \in F[x]$, аннулирующий преобразование φ, разлагается в произведение $f = \prod_{i=1}^{s} f_i$ многочленов $f_1, \ldots, f_s \in F[x]$ таких, что $(f_i, f_j) = 1$ при $i \neq j$. Тогда имеет место разложение $V = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} f_i(\varphi)$.*

Доказательство. Мы начнём с доказательства вспомогательного утверждения.

Лемма. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — попарно перестановочные линейные преобразования пространства V, для которых $\alpha\beta = 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = \varepsilon$. Тогда $V = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Ker}\alpha \oplus V\alpha = \operatorname{Ker}\beta \oplus V\beta = V\alpha \oplus V\beta$.*

Доказательство леммы. Имеем $V = V\varepsilon = V(\alpha\gamma + \beta\delta) = V\alpha\gamma + V\beta\delta = (V\gamma)\alpha + (V\delta)\beta \subseteq V\alpha + V\beta \subseteq V$. Поэтому $V = V\alpha + V\beta$. С другой стороны, $0 = V(\alpha\beta) = (V\alpha)\beta$. Отсюда $V\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\beta$. Следовательно, $V = \operatorname{Ker}\beta + V\beta$. Поскольку $\dim\operatorname{Ker}\beta + \dim V\beta = \dim V$, эта сумма — прямая, т. е. $V = \operatorname{Ker}\beta \oplus V\beta$ и $\operatorname{Ker}\beta \cap V\beta = 0$.

Вспоминая, что $V\alpha \subseteq \operatorname{Ker}\beta$, получаем $V\alpha \cap V\beta = 0$. Следовательно, $V = V\alpha \oplus V\beta$ и $V\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. Аналогично, $V\beta = \operatorname{Ker}\alpha$, поэтому $V = \operatorname{Ker}\alpha \oplus V\alpha$ и $V = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta$. Лемма доказана. $\square$

Докажем теорему индукцией по числу s многочленов в разложении $f = \prod_{i=1}^{s} f_i$. Для $s = 1$ утверждение теоремы очевидно. Докажем его для $s > 1$, предполагая, что для числа, меньшего s, теорема доказана. Положим $f_2' = f_2 \ldots f_s$. Поскольку $(f_1, f_2') = 1$, найдутся многочлены $u, v \in F[x]$ такие, что $f_1 u + f_2' v = 1$. Линейные преобразования $\alpha = f_1(\varphi)$, $\beta = f_2'(\varphi)$, $\gamma = u(\varphi)$, $\delta = v(\varphi)$ удовлетворяют условиям леммы. Поэтому $V = \operatorname{Ker}\alpha \oplus \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Ker} f_1(\varphi) \oplus \operatorname{Ker} f_2'(\varphi)$.

Положим $W = \operatorname{Ker} f_2'(\varphi)$. Поскольку преобразование $f_2'(\varphi)$ перестановочно с φ, подпространство W является φ-инвариантным. Пусть $\psi = \varphi|_W$. Тогда $f_2'(\psi) = 0$ на W. По предположению индукции $W = \bigoplus_{i=2}^{s} \operatorname{Ker} f_i(\psi)$. Осталось доказать, что $\operatorname{Ker} f_i(\psi) = \operatorname{Ker} f_i(\varphi)$ для каждого $i = 2, \ldots, s$. Если для произвольного $v \in V$ и для некоторого $i \in \{2, \ldots, s\}$ выполняется $v f_i(\varphi) = 0$, то $v f_2'(\varphi) = 0$. Поэтому для всех $i = 2, \ldots, s$ имеет место включение $\operatorname{Ker} f_i(\varphi) \subseteq \operatorname{Ker} f_2'(\varphi) = W$. Поскольку для любого вектора $w \in W$ выполняется $w\psi = w\varphi$, то для любого $i = 2, \ldots, s$ имеет место $wf_i(\psi) = wf_i(\varphi)$, а значит, $\operatorname{Ker} f_i(\psi) = \operatorname{Ker} f_i(\varphi)$. $\square$

Упражнение 6.7.3. *Линейное преобразование φ пространства V над полем $\mathbb{R}$ задано в некотором базисе матрицей*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Разложите V в прямую сумму одномерного и двумерного подпространств, инвариантных относительно φ. Найдите базисы этих подпространств и матрицу преобразования φ в базисе, составленном из данных базисов.

Теорема 6.7.4. *Пусть F — поле, $\operatorname{char} F = 0$, $A \in M_n(F)$, K — расширение поля F, для которого $\operatorname{Sp}(A) \subseteq K$,*

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix} = TAT^{-1} \text{ — жорданова форма матрицы } A,$$

T — сопрягающая матрица и $T, J \in M_n(K)$. Пусть $p(x)$ — многочлен из $F[x]$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. *$p(A) = T^{-1}p(J)T$.*
2. $$p(J) = \begin{pmatrix} p(J_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & p(J_m) \end{pmatrix}.$$
3. *Если $P = (p_{ij})_{t\times t} = p(J_k)$, где $k \in \{1, \ldots, m\}$ и*

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix},$$

то $p_{ij} = 0$ *при* $i > j$ *и* $p_{ij} = \frac{p^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}$ *при* $i \leqslant j$, *т. е.*

$$P = \begin{pmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) & \frac{p''(\lambda)}{2!} & \ldots & \frac{p^{(t-1)}(\lambda)}{(t-1)!} \\ 0 & p(\lambda) & p'(\lambda) & \ldots & \frac{p^{(t-2)}(\lambda)}{(t-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & p(\lambda) \end{pmatrix}_{t\times t}.$$

Доказательство. Существование матриц J и T следует из теоремы 6.6.2 (матричная форма теоремы Жордана). П. 1 теоремы следует из п. 2 предложения 6.7.1, поскольку $A = T^{-1}JT$. П. 2 следует из предложения 2.3.2. Докажем п. 3, начав с несложной леммы.

Лемма. *Пусть* H *— квадратная матрица размерности* t, *равная*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \text{ Тогда } H^k = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \overbrace{1}^{k+1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

при $k < t$ *и* $H^k = 0$ *при* $k \geqslant t$.

Доказательство леммы. Рассмотрим матрицу H, как матрицу линейного преобразования арифметического пространства F^t в стандартном базисе из векторов $e_1 \ldots, e_t$. Тогда для каждого $i = 1 \ldots, t$ выполняются равенства: $e_i H^k = e_{i+k}$ при $k + i \leqslant t$ и $e_i H^k = 0$ при $k + i > t$, что и доказывает лемму. $\square$

Вернёмся к доказательству теоремы. Пусть

$$B = J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}_{t\times t} = \lambda E + H,$$

где матрица H определена в лемме. Поскольку $\operatorname{char} F = 0$, по формуле Тейлора (теорема 5.3.4) имеем $p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(\lambda)}{k!}(x-\lambda)^k$, где $p^{(0)}(\lambda) =$

$p(\lambda)$ и $p^{(k)}(\lambda) = 0$ при $k > \deg p$. Подставляя матрицу B в выражение для $p(x)$, получаем

$$P = p(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(\lambda)}{k!}(B - \lambda E)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(\lambda)}{k!} H^k.$$

Отсюда следует, что $p_{ij} = 0$ при $i > j$ и $p_{ij} = \frac{p^{(j-i)}(\lambda)}{(j-i)!}$ при $i \leqslant j$. $\square$

Определение 6.7.3. Пусть поле F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, $X \subseteq F$ и $f : X \to F$ — функция. Предположим, что $A \in M_n(F)$, $\mathrm{Sp}(A) \subseteq F$ и $g(x) = \prod_{i=1}^{s}(x - \lambda_i)^{k_i}$ — минимальный аннулирующий многочлен для матрицы A. Если для каждого $i = 1, \ldots, s$ определены значения $f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots, f^{(k_i-1)}(\lambda_i)$, то говорят, что f *определена на спектре матрицы* A. В этом случае полагают, что *значение функции* f *от матрицы* A есть $f(A) = T^{-1}f(J)T$, где T — матрица перехода к жорданову базису матрицы A,

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_m \end{pmatrix} \text{— жорданова форма матрицы } A,$$

$$f(J) = \begin{pmatrix} f(J_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(J_m) \end{pmatrix} \text{ и } f(J_k) = f\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f(\lambda) & f'(\lambda) & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \ldots & \frac{f^{(t-1)}(\lambda)}{(t-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & f'(\lambda) & \ldots & \frac{f^{(t-2)}(\lambda)}{(t-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f'(\lambda) \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & f(\lambda) \end{pmatrix}_{t\times t}.$$

Теорема 6.7.5. *В обозначениях определения* 6.7.3, *если функция* f *определена на спектре матрицы* A, *то значение* $f(A)$ *не зависит от выбора сопрягающей матрицы* T. *Существует и единствен многочлен* $p(x) \in F[x]$ *такой, что его степень меньше степени минимального аннулирующего многочлена* $g(x)$ *и* $p(A) = f(A)$.

Доказательство. По теореме 5.3.5 об интерполяционном многочлене Лагранжа — Сильвестра существует и единствен многочлен $p(x) \in F[x]$ степени, меньшей $\sum_{i=1}^{s} k_i$, т. е. степени $g(x)$, такой, что $p^{(j)}(\lambda_i) = f^{(j)}(\lambda_i)$ при всех $i = 1, \ldots, s$ и $j = 0, \ldots, k_i - 1$. Тогда из определения $f(J)$ и теоремы 6.7.4 вытекает, что $p(J) = f(J)$ для жордановой формы J матрицы A. Если $A = T^{-1}JT$, то $f(A) = T^{-1}f(J)T = T^{-1}p(J)T = p(A)$. В частности, значение $f(A)$ функции f от матрицы A не зависит от выбора матрицы T, так как значение $p(A)$, очевидно, не зависит от выбора T. □

Определение 6.7.4. Пусть поле F — это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$, V — конечномерное векторное пространство над F, B — базис пространства V, φ — линейное преобразование пространства V, $A = [\varphi]_B$ — матрица преобразования φ в базе B, $X \subseteq F$ и $f : X \to F$ — функция. Если определена матрица $f(A)$, то линейное преобразование ψ, матрица которого в базе B равна $f(A)$, называется *значением функции f от преобразования φ* и обозначается $f(\varphi)$. Если $f(A)$ не определено, то и $f(\varphi)$ не определено.

Следствие. *В обозначениях определения* 6.7.4*, если определено преобразование $f(\varphi)$, то оно определено однозначно, т. е. не зависит от выбора базиса B. Существует и единствен многочлен $p(x) \in F[x]$ такой, что его степень меньше степени минимального аннулирующего многочлена для преобразования φ и $p(\varphi) = f(\varphi)$.*

Доказательство. В силу теоремы 6.7.5 существует и единствен многочлен $p(x) \in F[x]$, степень которого меньше степени минимального аннулирующего многочлена матрицы A (а значит, и преобразования φ) и для которого $p(A) = f(A)$. Тогда $[p(\varphi)]_B = p([\varphi]_B) = f([\varphi]_B) = [f(\varphi)]_B$. Следовательно, $p(\varphi) = f(\varphi)$. Поскольку $p(\varphi)$ не зависит от выбора базиса, то от него не зависит и $f(\varphi)$. □

Упражнение 6.7.4. *Линейное преобразование φ пространства V задано в некоторой базе матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите

а) жорданову базу и жорданову форму преобразования φ;

б) минимальный аннулирующий многочлен;

в) матрицу A^{100};

г) матрицу e^A, *используя жорданову форму матрицы* A;

д) матрицу e^A, *вычисляя соответствующий многочлен Лагранжа — Сильвестра.*

Глава 7

Преобразования евклидовых и унитарных пространств

§ 7.1. Скалярное произведение на векторном пространстве

На протяжении этой главы под полем определения векторного пространства мы будем подразумевать либо поле действительных, либо поле комплексных чисел. В зависимости от выбора поля соответствующее пространство называется *действительным* или *комплексным*. Поскольку в общей теории векторных пространств нет понятий, соответствующих понятиям длины вектора, угла между векторами и т. п., многие естественные и полезные свойства трёхмерного пространства геометрических векторов и их преобразований не нашли отражения в этой теории. Указанный пробел будет восполнен в данной главе.

Как известно из курса аналитической геометрии, введение на пространстве скалярного произведения позволяет ввести упомянутые выше понятия длины и угла. Поэтому мы начнём с определения скалярного произведения на произвольном действительном или комплексном пространстве.

Определение 7.1.1. Пусть F — поле действительных или комплексных чисел, V — векторное пространство над F. Функция $(\,,): V \times V \to F$, сопоставляющая каждой упорядоченной паре векторов $a, b \in V$ число $(a, b) \in F$, называется *скалярным произведением* на пространстве V, если для любых векторов $a, b, c \in V$ и скаляра $\alpha \in F$ выполняются следующие условия:

1) $(a, b) = \overline{(b, a)}$;
2) $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$;
3) $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$;
4) если $a \neq 0$, то $(a, a) > 0$.

Замечания. 1. В условии 1 черта над числом означает взятие комплексно сопряжённого. В случае действительного векторного пространства, естественно, комплексное сопряжение оставляет число на месте, т. е. для этого пространства свойство 1 имеет вид: $(a, b) = (b, a)$.

2. Из условия 1 вытекает, что число $(a, a) = \overline{(a, a)}$ лежит в поле дей-

ствительных чисел для любого вектора a, а потому сравнение числа (a, a) с нулём в условии 4 имеет смысл и в случае комплексного векторного пространства.

Упражнение 7.1.1. *Докажите, что для любых векторов $a, b, c \in V$ и скаляра $\alpha \in F$ имеют место следующие свойства скалярного произведения.*

1) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$;

2) $(a, \alpha b) = \overline{\alpha}(a, b)$;

3) $a = 0 \Leftrightarrow (a, a) = 0$.

Определение 7.1.2. Векторное пространство V над полем F, на котором задано скалярное произведение, называется *евклидовым*, если $F = \mathbb{R}$, и *унитарным* (или *эрмитовым*), если $F = \mathbb{C}$.

Примеры. 1. Пусть $V = E^2$ или E^3 — пространство геометрических векторов (над полем $\mathbb{R}$). Тогда функция $(\ ,\ ) : V \times V \to \mathbb{R}$, определённая правилом $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, является скалярным произведением на V, а пространство V с ним будет евклидовым.

2. Пусть $V = \mathbb{R}[x]$ — пространство многочленов. Функция $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ — скалярное произведение на V. Аналогично, если V — пространство действительных функций, непрерывных на $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, то $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ — скалярное произведение на V.

3. Пусть $V = F^n$ — арифметическое векторное пространство над полем F, где F — это $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для векторов-строк $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ положим

$$(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} = a\overline{b}' \qquad (1)$$

Заданная таким образом функция является скалярным произведением на V. Мы будем называть её *стандартным скалярным произведением.*

Определение 7.1.3. *Длинной* (*нормой*) вектора a в евклидовом (унитарном) пространстве V называется неотрицательное действительное число $|a| = \sqrt{(a, a)}$ (здесь $\sqrt{\ }$ — арифметический корень). Вектор a называется *нормированным*, если его длина равна 1.

Упражнение 7.1.2. *Для любого вектора $a \in V$, $\alpha \in F$ выполняется $|\alpha a| = |\alpha||a|$. В частности, при $a \neq 0$ вектор $\frac{a}{|a|}$ всегда нормирован, и $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.*

Предложение 7.1.1 (неравенство Коши — Буняковского). *Если V — евклидово или унитарное пространство, то для любых векторов $a, b \in V$ выполняется $(a,b)(b,a) \leqslant (a,a)(b,b)$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.*

Упражнение 7.1.3. *Докажите неравенство Коши — Буняковского.*

Замечание. См. также решение задачи 1382 из задачника Проскурякова.

Следствие. *Если V — евклидово пространство, то для любых векторов $a, b \in V$ выполняется $|(a,b)| \leqslant |a||b|$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы a и b линейно зависимы.*

Определение 7.1.4. Пусть V — евклидово пространство. Число $\frac{(a,b)}{|a||b|}$ называется *косинусом угла между векторами* a и b.

Определение 7.1.5. Пусть V — евклидово или унитарное пространство. Векторы a и b из V *ортогональны*, если $(a,b) = 0$.

Замечание. Если $(a,b) = 0$, то $(b,a) = \overline{(a,b)} = \overline{0} = 0$.

Определение 7.1.6. Пусть V — евклидово или унитарное пространство. Набор векторов $a_1, \ldots, a_s$ называется *ортогональным*, если для всех $i \in \{1, \ldots, s\}$ вектор $a_i \neq 0$ и для всех $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ выполняется $(a_i, a_j) = 0$ при $i \neq j$. Ортогональный набор векторов называется *ортонормированным*, если все вектора этого набора нормированы.

Теорема 7.1.1. *Пусть V — евклидово или унитарное пространство. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Любой ортогональный набор векторов из V линейно независим.*

2. *Если $a_1, \ldots, a_t$ — произвольный набор векторов из V, содержащий хотя бы один ненулевой вектор, то найдётся ортогональный набор векторов $b_1, \ldots, b_s$ из V такой, что $\langle a_1, \ldots, a_t \rangle = \langle b_1, \ldots, b_s \rangle$ и $s \leqslant t$.*

3. *Если пространство V конечномерно, то в V существует ортонормированный базис. Более того, каждый ортонормированный набор векторов из V можно дополнить до ортонормированного базиса.*

4. *Если $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V, то для любых векторов $a, b \in V$ выполняется $(a,b) = [a]\overline{[b]}'$, где $[a], [b]$ — строки координат векторов a и b в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а $\overline{[b]}'$ — столбец, все элементы которого комплексно сопряжены соответствующим элементам столбца $[b]'$.*

Доказательство. 1. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — ортогональный набор векторов. Предположим, что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s = 0$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, s$ выполняется $0 = (0, a_i) = (\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_s a_s, a_i) = \alpha_i(a_i, a_i)$. Поскольку $a_i \neq 0$, имеем $(a_i, a_i) \neq 0$. Следовательно, $\alpha_i = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, s$.

2. Как мы уже знаем (см. доказательство теоремы 3.2.2 о базисе), из набора векторов $a_1, \ldots, a_t$, содержащего хотя бы один ненулевой вектор, можно выделить линейно независимый поднабор, линейная оболочка которого совпадает с линейной оболочкой исходного набора. Пользуясь при необходимости перенумерацией, можно считать, что $\langle a_1, \ldots, a_t \rangle = \langle a_1, \ldots, a_s \rangle$, где $s \leqslant t$ и набор векторов $a_1, \ldots, a_s$ линейно независим. Мы получим искомый ортогональный набор векторов $b_1, \ldots, b_s$ индуктивно с помощью специального алгоритма, который называется *методом ортогонализации Грама — Шмидта*.

Положим $b_1 = a_1$. Если $s = 1$, то все доказано, так как вектор a_1 не может быть равен 0. Предположим, что мы уже построили ортогональный набор векторов $b_1, \ldots, b_{k-1}$ такой, что $\langle b_1, \ldots, b_{k-1} \rangle = \langle a_1, \ldots, a_{k-1} \rangle$. Будем искать вектор b_k в форме $b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i b_i$, так как в этом случае наборы $a_1, \ldots, a_k$ и $b_1, \ldots, b_k$, очевидно, эквивалентны. Подберем теперь скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ так, чтобы вектор b_k оказался ортогонален каждому вектору из набора $b_1, \ldots, b_{k-1}$. Для каждого $j = 1, \ldots, k-1$ необходимо выполнение следующей цепочки равенств: $0 = (b_k, b_j) = (a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i b_i, b_j) = (a_k, b_j) - \alpha_j(b_j, b_j)$. Следовательно, требуется положить $\alpha_j = (a_k, b_j)/(b_j, b_j)$. Таким образом, искомый вектор определяется формулой:

$$b_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(a_k, b_i)}{(b_i, b_i)} b_i.$$

Последовательно определяя векторы b_k, где $k = 1, \ldots, s$, получаем требуемый ортогональный набор.

Замечание. Несложно заметить, что в том случае, когда поднабор $a_1, \ldots, a_k$, состоящий из первых векторов набора $a_1, \ldots, a_s$, является ортогональным, в процессе ортогонализации методом Грама — Шмидта набора $a_1, \ldots, a_s$, указанный поднабор не изменится. В обозначениях предыдущего абзаца сказанное означает, что $b_1 = a_1, \ldots, b_k = a_k$.

3. Выберем в конечномерном пространстве произвольный базис. Применив к нему метод ортогонализации Грама — Шмидта, получим ортогональный набор векторов, линейная оболочка которого в силу п. 2 совпадает со всем пространством. Поскольку в силу п. 1 полученный ортогональный набор линейно независим, он является базисом простран-

ства. Нормируя каждый вектор этого набора, получаем ортонормированный базис пространства.

Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — произвольный ортонормированный набор векторов. Поскольку этот набор линейно независим, по теореме 3.2.2 о базисе его можно дополнить до базиса всего пространства $e_1, \ldots, e_s, a_{s+1}, \ldots, a_n$. В силу замечания после доказательства п. 2, применяя к этому базису метод ортогонализации, получим ортогональный базис $e_1, \ldots, e_s, b_{s+1}, \ldots, b_n$. Нормирование последних $n-s$ векторов этого базиса даст искомый ортонормированный базис.

4. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства, а $[a] = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $[b] = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — строки координат векторов a и b в этом базисе. Имеем

$$(a, b) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_j}(e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i}(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta_i} = [a]\overline{[b]}',$$

что и требовалось доказать. □

Упражнение 7.1.4. *Ортогонализируйте, а затем нормируйте набор векторов $1, x, x^2$ в евклидовом пространстве $V = \mathbb{R}[x]$ многочленов относительно скалярного произведения, заданного правилом $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.*

Определение 7.1.7. Евклидовы (унитарные) пространства U и V изоморфны, если существует изоморфизм φ векторных пространств U и V такой, что для любых векторов $a, b \in V$ имеет место равенство $(a\varphi, b\varphi) = (a, b)$.

Следствие. *Каждое n-мерное евклидово (унитарное) пространство изоморфно евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ (унитарному пространству $\mathbb{C}^n$) со стандартным скалярным произведением. В частности, два конечномерных евклидовых (унитарных) пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство. Пусть V — евклидово (унитарное) пространство над полем F, причём $\dim V = n$. Выберем в V ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ (п. 3 теоремы). Из п. 4 теоремы следует, что изоморфизм векторного пространства V на арифметическое пространство F^n, сопоставляющий каждому вектору из V строку его координат в данном базисе, будет являться изоморфизмом евклидовых (унитарных) пространств V и F^n, если в качестве скалярного произведения на F^n рассматривать стандартное скалярное произведение (см. пример 3 к определению 7.1.2). Если U еще одно евклидово (унитарное) пространство той же размерности, то оно, по-доказанному, изоморфно F^n. Поэтому V и U изоморфны между собой. $\square$

Замечание. Предположим, что на одном и том же конечномерном векторном пространстве V заданы две различные функции, каждая из которых является скалярным произведением на V. Из только что доказанного следствия вытекает, что существует изоморфизм пространства V на себя, при котором одно скалярное произведение "заменяется" другим. Иными словами, с точностью до изоморфизма на конечномерном векторном пространстве можно задать только одно скалярное произведение.

Упражнение 7.1.5. *Докажите, что планету Земля можно изометрично, т. е. сохраняя длины векторов, расположить внутри n-мерного евклидова кубика с ребром в 1 см, если $n \geqslant 5 \cdot 10^{18}$.*

Определение 7.1.8. Пусть V — евклидово (унитарное) пространство и $M \subseteq V$. Множество $M^* = \{v \in V \mid \forall m \in M\ (m, v) = 0\}$ называется *ортогональным дополнением* множества M в V (еще одно обозначение этого множества: $M^\perp$).

Упражнение 7.1.6. *Пусть V — евклидово (унитарное) пространство и $M, N \subseteq V$. Если $M \subseteq N$, то $N^* \subseteq M^*$.*

Предложение 7.1.2. *Пусть V — евклидово (унитарное) пространство и $M \subseteq V$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. $M^* = (L(M))^*$.
2. M^* *— подпространство пространства V.*

Доказательство. 1. Поскольку $M \subseteq L(M)$, имеем $(L(M))^* \subseteq M^*$. С другой стороны, если вектор $v \in M^*$, то для произвольной линейной комбинации $\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_s m_s$ векторов из M выполняется $(\alpha_1 m_1 + \ldots + \alpha_s m_s, v) = \alpha_1(m_1, v) + \ldots + \alpha_s(m_s, v) = 0$. Значит, $v \in (L(M))^*$ и $M^* \subseteq (L(M))^*$.

2. Пусть $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s$ — линейная комбинация векторов из M^*. Тогда для любого $m \in M$ имеем $(m, \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s) = \overline{\alpha_1}(m, v_1) + \ldots + \overline{\alpha_s}(m, v_s) = 0$. Следовательно, $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_s v_s \in M^*$. $\square$

Теорема 7.1.2. *Пусть U, W — подпространства конечномерного* *евклидова (унитарного) пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. $V = U \oplus U^*$.
2. $U^{**} = U$.
3. $(U + W)^* = U^* \cap W^*$.
4. $(U \cap W)^* = U^* + W^*$.

Доказательство. 1. В силу п. 3 теоремы 7.1.1 подпространство U обладает ортонормированным базисом $e_1, \ldots, e_s$ и его можно дополнить до ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n$ пространства V. Из п. 1 предложения 7.1.2 следует, что $\{e_1, \ldots, e_s\}^* = \langle e_1, \ldots, e_s\rangle^* = U^*$. Поскольку для любых $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ выполняется $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, то $\langle e_{s+1}, \ldots, e_n\rangle \subseteq U^*$. Следовательно, $V = U + U^*$. Если вектор $u \in U \cap U^*$, то $(u, u) = 0$ и $u = 0$. Таким образом, $V = U \oplus U^*$.

2. Пусть $u \in U$, $w \in U^*$. В силу свойства $(a, b) = \overline{(b, a)}$ скалярного произведения равенства $(u, w) = 0$ и $(w, u) = 0$ равносильны. Отсюда $U^{**} = U$.

3. Так как $U \leqslant U+W$, то $(U+W)^* \leqslant U^*$. Аналогично, $(U+W)^* \leqslant W^*$. Поэтому $(U + W)^* \leqslant U^* \cap W^*$. Для любого вектора $z \in U^* \cap W^*$ и любых векторов $u \in U$, $w \in W$ имеем $(u + w, z) = (u, z) + (w, z) = 0$. Следовательно, $z \in (U + W)^*$ и $U^* \cap W^* \leqslant (U + W)^*$.

4. Из пп. 2 и 3 теоремы следует, что $U^* + W^* = (U^* + W^*)^{**} = ((U^* + W^*)^*)^* = (U^{**} \cap W^{**})^* = (U \cap W)^*$. $\square$

Определение 7.1.9. Пусть U — подпространство евклидова (унитарного) пространства V. Каждый вектор $v \in V$ единственным образом разлагается в сумму $v = u + w$, где $u \in U$, $w \in U^*$. Вектор u из этого разложения называется *ортогональной проекцией* вектора v на подпространство U, а вектор w — *ортогональной составляющей* вектора v относительно U.

Упражнение 7.1.7. *Укажите приём вычисления ортогональной проекции и ортогональной составляющей вектора v, если известны вектор v и база $u_1, \ldots, u_s$ подпространства U. Найдите ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора $v = x^2$ относительно подпространства $U = \langle 1, x\rangle$ в евклидовом пространстве многочленов $\mathbb{R}_2[x]$ относительно скалярного произведения, заданного правилом $(f, g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$.*

§ 7.2. Преобразования евклидовых и унитарных пространств

Начиная с этого параграфа, мы займемся теорией линейных преобразований евклидовых и унитарных пространств, выделяя среди них те, которые естественным образом согласуются со скалярным произведением, заданным на соответствующем пространстве.

Определение 7.2.1. Пусть F — поле действительных или комплексных чисел, $A \in M_{m\times n}(F)$. Матрица $A^* = \overline{A}'$, т. е. матрица, полученная из матрицы A транспонированием и комплексным сопряжением всех её элементов, называется *сопряжённой* к A.

Упражнение 7.2.1. *Проверьте следующие свойства сопряжённых матриц.*

1. $A^{**} = A$ *и* $E^* = E$.

2. *Если A и B — матрицы одного и того же размера и $\alpha, \beta \in F$, то выполняется равенство* $(\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*$.

3. *Если A и B — матрицы согласованных размеров, то выполняется равенство* $(AB)^* = B^* A^*$.

Замечание. Для произвольной строки $[a]$, используя принятое определение, мы можем обозначить столбец $\overline{[a]}'$ через $[a]^*$. В частности, в ортонормированном базисе скалярное произведение векторов находится как $(a, b) = [a]\overline{[b]}' = [a][b]^*$.

Определение 7.2.2. Пусть φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства V. Преобразование φ^* пространства V называется *сопряжённым* к преобразованию φ, если для любых векторов $a, b \in V$ выполняется равенство $(a\varphi, b) = (a, b\varphi^*)$.

Теорема 7.2.1 (о сопряжённом преобразовании)**.** *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного евклидова (унитарного) пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Сопряжённое к φ преобразование φ^* существует, определено однозначно и является линейным преобразованием пространства V.*

2. *В любой ортонормированной базе пространства V матрица сопряжённого преобразования сопряжена матрице исходного преобразования, т. е.* $[\varphi^*] = [\varphi]^*$.

3. $\varphi^{**} = \varphi$ *и* $\varepsilon^* = \varepsilon$.

4. *Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ и любых $\alpha, \beta \in F$ выполняется* $(\alpha\varphi + \beta\psi)^* = \overline{\alpha}\varphi^* + \overline{\beta}\psi^*$.

5. *Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(V)$ выполняется* $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$.

6. *Если U — φ-инвариантное подпространство пространства V, то его ортогональное дополнение U^* инвариантно относительно φ^*.*

Доказательство. 1. Зафиксируем некоторый ортонормированный базис пространства V. Пусть $[\varphi]$ — матрица преобразования φ в данном базисе. Обозначим через ψ линейное преобразование пространства V, матрица которого в том же базисе сопряжена к матрице $[\varphi]$, т. е. $[\psi] = [\varphi]^* = \overline{[\varphi]}'$. Для любых векторов $a, b \in V$ имеем

$$(a\varphi, b) = [a\varphi][b]^* = ([a][\varphi])[b]^* = [a]([\varphi][b]^*) = [a]([\varphi]^{**}[b]^*) =$$
$$= [a]([b][\varphi]^*)^* = [a][b\psi]^* = (a, b\psi).$$

Таким образом, преобразование $\psi = \varphi^*$ — искомое. Из нашего определения ψ следует, что оно линейно. Нам осталось доказать, что преобразование ψ единственно.

Лемма. *Пусть φ, ψ — произвольные (не обязательно линейные) преобразования пространства V. Если для любых $a, b \in V$ выполняется $(a, b\varphi) = (a, b\psi)$, то $\varphi = \psi$.*

Доказательство леммы. Из равенства $(a, b\varphi) = (a, b\psi)$ следует, что $0 = (a, b\varphi) - (a, b\psi) = (a, b\varphi - b\psi)$. Поскольку эти равенства имеют место для любых векторов a и b пространства V, они выполняются и в случае, когда $a = b\varphi - b\psi$. Поэтому $(b\varphi - b\psi, b\varphi - b\psi) = 0$, откуда $b\varphi - b\psi = 0$. Следовательно, для любого вектора $b \in V$ имеем $b\varphi = b\psi$, а значит, $\varphi = \psi$. Лемма доказана.

Пусть τ — преобразование пространства V, сопряжённое к φ. Тогда $(a, b\tau) = (a\varphi, b) = (a, b\psi)$. По лемме $\tau = \psi$, и первый пункт теоремы полностью доказан.

2. Следует из доказательства п. 1.

Пп. 3–5 следуют из п. 2 и свойств матрицы, сопряжённой к данной (упражнение 7.2.1).

6. Пусть $w \in U^*$. Для любого $u \in U$ вектор $u\varphi \in U$. Поэтому $0 = (u\varphi, w) = (u, w\varphi^*)$. Следовательно, $w\varphi^* \in U^*$. □

Упражнение 7.2.2. *Докажите пп.* 3–5 *непосредственно из определения сопряжённого преобразования.*

В дальнейшем мы рассмотрим преобразования евклидовых и унитарных пространств, которые *согласованы* (в некотором точном смысле) с заданным на этих пространствах скалярным произведением. Существенную роль здесь будет играть понятие сопряжённого преобразования, поскольку *согласование* скалярного произведения и преобразования можно рассматривать как взаимосвязь между преобразованием и преобразованием, сопряжённым к нему. Наш первый шаг — изучение преобразований евклидовых и унитарных пространств, которые перестановочны со своими сопряжёнными.

Определение 7.2.3. Пусть φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства V. Преобразование φ называется *нормальным*, если $\varphi\varphi^* = \varphi^*\varphi$. Матрица $A \in M_n(F)$, где $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, называется *нормальной*, если $AA^* = A^*A$.

Теорема 7.2.2 (о свойствах нормального преобразования)**.** *Пусть φ — нормальное преобразование конечномерного евклидова (унитарного) пространства V над полем F, A — нормальная матрица из $M_n(F)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Для любого многочлена $f \in F[x]$ линейное преобразование $f(\varphi)$ и матрица $f(A)$ нормальны.*

2. *Если a — собственный вектор преобразования φ с собственным числом λ, то a — собственный вектор сопряжённого преобразования φ^* с собственным значением $\overline{\lambda}$.*

3. *Собственные векторы преобразования φ, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. 1. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$. Тогда из теоремы 7.2.1 следует, что $f(\varphi)^* = (a_0\varepsilon + a_1\varphi + \ldots + a_m\varphi^m)^* = \overline{a_0} + \overline{a_1}\varphi^* + \ldots + \overline{a_m}(\varphi^*)^m$. Поскольку φ нормально, для любых $i, j \in \mathbb{N}_0$ имеем $(\varphi)^i(\varphi^*)^j = (\varphi^*)^j\varphi^i$. Поэтому $f(\varphi)f(\varphi)^* = f(\varphi)^*f(\varphi)$. Для матриц проводится аналогичное рассуждение.

2. Положим $\psi = \varphi - \lambda\varepsilon$. В силу п. 1 преобразование ψ нормально, т. е. перестановочно с сопряжённым к нему преобразованием ψ^*, которое по теореме 7.2.1 равно $\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon$. Для собственного вектора a преобразования φ с собственным числом λ выполняется $a\psi = 0$. Имеем $0 = (a\psi, a\psi) = (a, a\psi\psi^*) = (a, \psi^*\psi) = (a\psi^*, a\psi^*)$. Следовательно, $0 = a\psi^* = a(\varphi^* - \overline{\lambda}\varepsilon)$, т. е. $a\varphi^* = \overline{\lambda}a$.

3. Пусть $a\varphi = \lambda a$, $b\varphi = \mu b$, где $\lambda \neq \mu$. Тогда $\lambda(a, b) = (\lambda a, b) = (a\varphi, b) = (a, b\varphi^*) = (a, \overline{\mu}b) = \mu(a, b)$. Поэтому $(\lambda - \mu)(a, b) = 0$, отсюда $(a, b) = 0$. □

Теорема 7.2.3 (о каноническом виде матрицы нормального преобразования в унитарном пространстве)**.** *Пусть φ — нормальное преобразование конечномерного унитарного пространства V. Тогда существует ортонормированный базис пространства V, состоящий из собственных векторов преобразования φ, и матрица преобразования φ в этом базисе диагональна.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $n > 1$, и что для пространств размерности, меньшей n, теорема уже доказана.

Предположим, что в V есть собственное ненулевое подпространство U, инвариантное относительно преобразований φ и φ^*. Пространство V есть прямая сумма U и его ортогонального дополнения: $V = U \oplus U^*$. Поскольку по нашему предположению U есть $\{\varphi, \varphi^*\}$-инвариантное подпространство, из п. 6 теоремы 7.2.1 вытекает, что U^* инвариантно относительно этих преобразований. Положим $\psi = \varphi|_U$ и $\tau = \varphi|_{U^*}$. Очевидно, что $\psi^* = \varphi^*|_U$ и $\tau^* = \varphi^*|_{U^*}$. Поэтому преобразования ψ и τ нормальны, а значит, удовлетворяют условию теоремы. По предположению индукции подпространства U и U^* обладают ортонормированными базисами, состоящими из собственных векторов этих преобразований. Но собственные векторы преобразований ψ и τ являются собственными векторами преобразования φ. Следовательно, объединение этих базисов — ортонормированный базис пространства V, в котором матрица преобразования φ диагональна. Таким образом, при доказательстве теоремы индукцией по n можно считать, что каждое ненулевое $\{\varphi, \varphi^*\}$-инвариантное подпространство совпадает с самим пространством V.

Поскольку поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто, корни характеристического многочлена $f_\varphi(x)$ преобразования φ лежат в $\mathbb{C}$, а значит, являются собственными числами преобразования φ. Если λ — один из этих корней, то найдётся ненулевой собственный вектор u такой, что $u\varphi = \lambda u$. Из п. 2 теоремы 7.2.2 следует, что $u\varphi^* = \overline{\lambda} u$. Поэтому одномерное подпространство U, натянутое на вектор u, является $\{\varphi, \varphi^*\}$-инвариантным. Тогда U должно совпадать с V и теорема доказана. □

Теорема 7.2.4 (о каноническом виде матрицы нормального преобразования в евклидовом пространстве)**.** *Пусть φ — нормальное преобразование конечномерного евклидова пространства V. Тогда существует ортонормированный базис пространства V такой, что матрица преобразования φ в этом базисе имеет клеточно диагональный вид*

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m \end{pmatrix}.$$

Каждая клетка этой матрицы либо одномерна и содержит в качестве элемента вещественный характеристический корень преобразо-

вания φ, либо двумерна, имеет вид

$$r\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

и соответствует паре комплексно сопряжённых характеристических корней преобразования φ, один из которых равен $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$.

Снова воспользуемся индукцией по $n = \dim V$. Как и при доказательстве предыдущей теоремы мы можем считать, что V не содержит собственных ненулевых $\{\varphi, \varphi^*\}$-инвариантных подпространств. В частности, если λ — вещественный характеристический корень преобразования φ, то, рассуждая как при доказательстве предыдущей теоремы, получим, что пространство V совпадает с одномерным подпространством, натянутым на собственный вектор преобразования φ, соответствующий λ. Следовательно, можно считать, что все корни характеристического многочлена $f(x)$ преобразования φ не лежат в поле действительных чисел. Пусть один из корней равен $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Поскольку $f(x)$ имеет действительные коэффициенты, то комплексно сопряжённое число $\overline{\lambda} = r(\cos\alpha - i\sin\alpha)$ тоже лежит в спектре преобразования φ.

Зафиксируем в пространстве V ортонормированный базис, состоящий из векторов $e_1, \ldots, e_n$. Пусть A — матрица преобразования φ в этом базисе. Рассмотрим теперь унитарное арифметическое пространство $\mathbb{C}^n$, на котором задано стандартное скалярное произведение. Поскольку можно считать, что $A \in M_n(\mathbb{C})$, матрицу A можно рассматривать как линейное преобразование пространства $\mathbb{C}^n$. Преобразование φ нормально, поэтому нормальна и матрица A, а значит, нормально и преобразование, задаваемое ею в $\mathbb{C}^n$. По теореме 7.2.3 пространство $\mathbb{C}^n$ обладает ортонормированным базисом из собственных векторов преобразования A. Так как характеристические многочлены матрицы A и преобразования φ равны, корни λ и $\overline{\lambda}$ являются собственными числами преобразования A пространства $\mathbb{C}^n$. Пусть строка $[v] \in \mathbb{C}^n$ — собственный вектор преобразования A, соответствующий λ. Из равенства $[v]A = \lambda[v]$ и вещественности элементов матрицы A следует, что $\overline{[v]}A = \overline{[v]}\,\overline{A} = \overline{[v]A} = \overline{\lambda[v]} = \overline{\lambda}\overline{[v]}$. Значит, строка $\overline{[v]}$ — собственный вектор преобразования A с собственным числом $\overline{\lambda}$. Пусть $[v] = (\alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \alpha_n + i\beta_n)$, где $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}$ — действительная и мнимая части k-го элемента строки $[v]$. Тогда $\overline{[v]} = (\alpha_1 - i\beta_1, \ldots, \alpha_n - i\beta_n)$. Рассмотрим теперь строки

$$[a] = \frac{1}{2}([v] + \overline{[v]}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$[b] = \frac{1}{2i}([v] - \overline{[v]}) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

пространства $\mathbb{C}^n$, элементы которых есть действительные числа, равные действительной и мнимой части элементов строк $[v]$ и $\overline{[v]}$ соответственно. Вычислим образы векторов $[a]$ и $[b]$ под действием преобразования A. Имеем

$$[a]A = (1/2)([v] + \overline{[v]})A = (\lambda[v] + \overline{\lambda}\overline{[v]})/2 =$$
$$= r(\cos\alpha[v] + i\sin\alpha[v] + \cos\alpha\overline{[v]} - i\sin\alpha\bar{[v]})/2 =$$
$$= r(\cos\alpha([v] + \overline{[v]})/2 - \sin\alpha([v] - \overline{[v]})/(2i)) = r(\cos\alpha[a] - \sin\alpha[b]).$$

Для вектора $[b]$ выкладка аналогична. Окончательно получаем равенства

$$\begin{aligned} [a]A &= r(\cos\alpha[a] - \sin\alpha[b]) \\ [b]A &= r(\sin\alpha[a] + \cos\alpha[b]) \end{aligned} \tag{1}$$

Исходя из равенств (1) и используя п. 2 теоремы 7.2.2, несложно проверить следующие два равенства

$$\begin{aligned} [a]A^* &= r(\cos\alpha[a] + \sin\alpha[b]) \\ [b]A^* &= r(-\sin\alpha[a] + \cos\alpha[b]). \end{aligned} \tag{2}$$

Вернёмся теперь к исходному евклидову пространству V и рассмотрим в нём подпространство, натянутое на векторы $a = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$ и $b = \sum_{k=1}^n \beta_k e_k$, строки которых в фиксированном нами ортонормированном базисе равны $[a]$ и $[b]$. Поскольку матрицы преобразований φ и φ^* в этом базисе равны A и A^* соответственно, из равенств (1) и (2) следует, что двумерное подпространство $U = \langle a, b\rangle$ инвариантно относительно φ и φ^*. Следовательно, можно считать, что $V = U$.

Рассмотренные выше векторы $[v]$ и $\overline{[v]}$ пространства $\mathbb{C}^n$ ортогональны, так как соответствуют различным собственным числам (см. п. 3 теоремы 7.2.2). Поскольку скалярное произведение векторов a и b в базисе в ортонормированном базисе совпадает со скалярным произведением строк $[a]$ и $[b]$ пространства $\mathbb{C}^n$, выполняется равенство $(a, b) = ([a], [b]) = (\frac{1}{2}([v] + \overline{[v]}), \frac{1}{2i}([v] - \overline{[v]})) = 0$. Следовательно, векторы a и b ортогональны. Если заранее выбрать векторы-строки $[v]$ и $\overline{[v]}$ так, чтобы длины этих векторов были равны $\sqrt{2}$, получим $|a| = |b| = 1$. Таким образом, векторы a и b образуют ортонормированный базис пространства V, в котором в силу (1) матрица преобразования φ имеет вид

$$r\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана. $\square$

Упражнение 7.2.3. *Укажите и обоснуйте практический способ поиска ортонормированного базиса унитарного и евклидова пространств, в котором матрица нормального преобразования имеет канонический вид. Проверьте, что матрица*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

нормальна. Найдите канонический вид матрицы A нормального преобразования сначала в унитарном, а затем евклидовом пространстве. Укажите ортонормированный базис, в котором этот вид достигается.

§ 7.3. Ортогональные и унитарные преобразования

Определение 7.3.1. Линейное преобразование φ евклидова (унитарного) пространства V называется *ортогональным (унитарным)*, если для любых векторов $a, b \in V$ выполняется равенство $(a\varphi, b\varphi) = (a, b)$

Замечание. Иными словами, преобразование ортогонально (соответственно, унитарно), если оно *сохраняет* скалярное произведение.

Определение 7.3.2. Матрица A из $M_n(\mathbb{R})$ (из $M_n(\mathbb{C})$) называется *ортогональной (унитарной)*, если $AA^* = E$.

Пример. Пусть $V = E^2$ — пространство геометрических векторов плоскости со стандартным скалярным произведением (см. пример 1 после определения 7.1.2). Поворот на угол α относительно начала координат и осевая симметрия относительно оси абсцисс сохраняют скалярное произведение, а значит, являются ортогональными операторами на V.

Теорема 7.3.1. *Пусть V — конечномерное евклидово (унитарное) пространство. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Преобразование φ — ортогональное (унитарное) преобразование пространства V.*
2. *Для любого $a \in V$ выполняется $|a\varphi| = |a|$.*
3. *Имеет место равенство $\varphi\varphi^* = \varepsilon$.*
4. *Матрица преобразования φ в любом ортонормированном базисе ортогональна (унитарна).*
5. *Преобразование φ переводит любой ортонормированный базис снова в ортонормированный базис.*

Доказательство. ($1 \Rightarrow 2$). Очевидно, так как $|a\varphi| = |a|$ тогда и только тогда, когда $(a\varphi, a\varphi) = (a, a)$.

($2 \Rightarrow 1$). Для любых $x, y \in V$ и $\lambda \in F$ (где $F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) имеем

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + \lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) + \lambda\overline{\lambda}(y, y).$$

С другой стороны,

$$(x + \lambda y, x + \lambda y) = ((x + \lambda y)\varphi, (x + \lambda y)\varphi) = (x\varphi + \lambda y\varphi, x\varphi + \lambda y\varphi) =$$
$$= (x\varphi, x\varphi) + \lambda(y\varphi, \lambda\varphi) + \overline{\lambda}(x\varphi, y\varphi) + \lambda\overline{\lambda}(y\varphi, y\varphi).$$

Таким образом,

$$\lambda(y, x) + \overline{\lambda}(x, y) = \lambda(y\varphi, x\varphi) + \overline{\lambda}(x\varphi, y\varphi). \tag{1}$$

Полагая $\lambda = 1$ в равенстве (1), получаем

$$(y, x) + (x, y) = (y\varphi, x\varphi) + (x\varphi, y\varphi). \tag{2}$$

Если $F = \mathbb{R}$, то требуемое доказано, так как в этом случае $(x, y) = (y, x)$.

Если $F = \mathbb{C}$, то положим дополнительно $\lambda = i$ в равенстве (1). Тогда

$$i(y, x) - i(x, y) = i(y\varphi, x\varphi) - i(x\varphi, y\varphi),$$

откуда

$$(y, x) - (x, y) = (y\varphi, x\varphi) - (x\varphi, y\varphi). \tag{3}$$

Вычитая из равенства (2) равенство (3), получим $2(x, y) = 2(x\varphi, y\varphi)$, что и требовалось.

($1 \Rightarrow 3$). Для всех $a, b \in V$ выполняются равенства $(a, b\varepsilon) = (a, b) = (a\varphi, b\varphi) = (a, b\varphi\varphi^*)$. В силу леммы из доказательства теоремы 7.2.1 имеем $\varphi\varphi^* = \varepsilon$.

($3 \Rightarrow 4$). По условию $\varphi\varphi^* = \varepsilon$. Следовательно, в любом ортонормированном базисе для матриц соответствующих преобразований выполняются равенства:

$$E = [\varepsilon] = [\varphi\varphi^*] = [\varphi][\varphi^*] = [\varphi][\varphi]^*,$$

причем последнее из них имеет место в силу п. 2 теоремы 7.2.1.

($4 \Rightarrow 5$). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис. Докажем, что $e_1\varphi, \ldots, e_n\varphi$ тоже является ортонормированным базисом, т. е. $(e_i\varphi, e_j\varphi) = (e_i, e_j)$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Имеем:

$$(e_i\varphi, e_j\varphi) = [e_i\varphi][e_j\varphi]^* = [e_i][\varphi][\varphi]^*[e_j]^* = [e_i][e_j]^* = (e_i, e_j).$$

(5 $\Rightarrow$ 1). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис. Тогда для любых $a, b \in V$

$$(a\varphi, b\varphi) = \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right) \varphi, \left(\sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right) \varphi \right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i (e_i\varphi), \sum_{j=1}^{n} b_j (e_j\varphi) \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \sum_{j=1}^{n} b_j e_j \right) = (a, b).$$

□

Следствие. *Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису ортогональна (унитарна).*

Упражнение 7.3.1. 1. *Пусть V — евклидово (унитарное) пространство. Обозначим через $GO(V)$ (через $GU(V)$) множество всех ортогональных (унитарных) преобразований пространства V. Докажите, что $GO(V)$ (соответственно $GU(V)$) — подгруппа общей группы $GL(V)$ невырожденных линейных преобразований пространства V.*

2. *Положим $GO_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid AA^* = E\}$ и $GU_n(\mathbb{C}) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = E\}$. Докажите, что $GO_n(\mathbb{R})$ и $GU_n(\mathbb{C})$ — подгруппы групп $GL_n(\mathbb{R})$ и $GL_n(\mathbb{C})$ соответственно.*

Определение 7.3.3. Группы, определенные в упражнении 7.3.1, называются:

$GO(V)$ — *общая группа ортогональных преобразований* пространства V,

$GU(V)$ — *общая группа унитарных преобразований* пространства V,

$GO_n(\mathbb{R})$ — *общая группа ортогональных матриц* размерности n над полем $\mathbb{R}$,

$GU_n(\mathbb{C})$ — *общая группа унитарных матриц* размерности n над полем $\mathbb{C}$.

Подгруппы этих групп носят те же названия, но без прилагательного "общая".

Теорема 7.3.2. 1. *Пусть A — нормальная матрица из $M_n(\mathbb{C})$. Тогда существует матрица $U \in GU_n(\mathbb{C})$ такая, что матрица $D = UAU^*$ дигональна.*

2. *Пусть A — нормальная матрица из $M_n(\mathbb{R})$. Тогда существует матрица $O \in GO_n(\mathbb{R})$ такая, что матрица $B = OAO^*$ клеточно диагональна и каждая клетка либо одномерна, либо двумерна и имеет*

вид

$$r\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Доказательство. 1. Пусть $V=\mathbb{C}^n$ — унитарное арифметическое пространство. Рассмотрим преобразование φ этого пространства, матрица которого $[\varphi]_1$ в стандартном базисе равна A. Преобразование φ нормально, так как нормальна матрица A. По теореме 7.2.3 существует ортонормированный базис пространства V, для которого $[\varphi]_2 = D$ — диагональная матрица. Матрица перехода U от стандартного базиса к этому базису унитарна по следствию из теоремы 7.3.1, следовательно, $D = UAU^{-1} = UAU^*$.

2. Аналогично, пусть φ — преобразование евклидова арифметического пространства $V=\mathbb{R}^n$ такое, что в стандартном базисе выполняется $[\varphi]_1 = A$. По теореме 7.2.4 существует ортонормированный базис, в котором матрица $[\varphi]_2 = B$ преобразования φ имеет требуемый вид и матрица перехода O к данному базису ортогональна. Тогда $B = OAO^{-1} = OAO^*$. □

Теорема 7.3.3 (о каноническом виде матрицы унитарного и ортогонального преобразований)**.** 1. *Собственные числа унитарного преобразования конечномерного унитарного пространства по модулю равны единице.*

2. *Характеристические корни унитарной матрицы матрицы по модулю равны единице.*

3. *Характеристические корни ортогонального преобразования конечномерного евклидова пространства по модулю равны единице.*

4. *Если A — унитарная матрица, то существует унитарная матрица U такая, что* $UAU^* = \begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$, *где* $|\lambda_i| = 1$.

5. *Если A — ортогональная матрица, то существует ортогональная матрица O такая, что* $OAO^* = \begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s\end{pmatrix}$, *где* $A_i = (\pm 1)$ *или* $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$.

Доказательство. 1. Пусть λ — собственное число унитарного преобразования φ. Тогда существует $a \neq 0$, для которого $a\varphi = \lambda a$ и, следовательно,

$$(a\varphi, a\varphi) = (\lambda a, \lambda a) = \lambda\overline{\lambda}(a, a).$$

Так как преобразование φ унитарно, то $(a, a) = (a\varphi, a\varphi) = \lambda\overline{\lambda}(a, a)$. Поэтому $\lambda\overline{\lambda} = 1$. Отсюда $|\lambda| = 1$.

2. Пусть $A \in GU_n(\mathbb{C})$. Рассмотрим $V = \mathbb{C}^n$ — унитарное арифметическое пространство со стандартным скалярным произведением. Выберем линейное преобразование φ пространства V так, чтобы в стандартном базисе его матрица равнялась A. Тогда характеристические корни матрицы A — это собственные числа преобразования φ, модули которых в силу п. 1 равны единице.

3. Утверждение вытекает из п. 2. Действительно, пусть $[\varphi] = A$ — матрица исходного ортогонального преобразования φ в ортонормированном базисе. Матрица A ортогональна, значит, если рассматривать A как матрицу из $M_n(\mathbb{C})$, то A унитарна. Следовательно, характеристические корни матрицы A равны единице. Осталось заметить, что $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(A)$.

4. Так как A — унитарная матрица, то $AA^* = E = A^*A$, поэтому A нормальна. Значит, по теореме 7.3.2 имеет место равенство $D = UAU^*$, где D — диагональная матрица. Числа, стоящие на главной диагонали этой матрицы совпадают с характеристическими корнями матрицы A, которые в силу п. 2 по модулю равны единице.

5. Поскольку матрица A нормальна, аналогично п. 4 используется теорема 7.3.2. Далее, характеристические корни матрицы A по модулю равны 1. Поэтому если $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ лежит в $\mathbb{R}$, то $\lambda = \pm 1$. Если же $\lambda = r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то $r = 1$ и соответствующая двумерная клетка имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. □

Упражнение 7.3.2. *Доказать, что в пространстве E^2 геометрических векторов плоскости каждое ортогональное преобразование является либо поворотом, либо осевой симметрией.*

Упражнение 7.3.3. *(теорема Эйлера) Доказать, что пространстве E^3 геометрических векторов пространства каждое ортогональное преобразование является либо поворотом относительно прямой, либо композицией поворота относительно прямой и симметрии относительно плоскости, ортогональной к этой прямой.*

§ 7.4. Самосопряжённые и косоэрмитовы преобразования

Определение 7.4.1. Пусть φ — линейное преобразование евклидова или унитарного пространства V. Преобразование φ называется *самосопряжённым* (или*симметрическим*), если $\varphi^* = \varphi$. Преобразование φ называется *косоэрмитовым* (или*кососимметрическим*), если $\varphi^* = -\varphi$.

Упражнение 7.4.1. *Преобразование φ евклидова или унитарного пространства V является самосопряжённым (соответственно косоэрмитовым) тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in V$ выполняется $(a\varphi, b) = (a, b\varphi)$ (соответственно $(a\varphi, b) = -(a, b\varphi)$).*

Напомним, что квадратная матрица A называется симметрической, если она совпадает с матрицей, транспонированной к ней: $A = A'$, и — кососимметрической, если $A = -A'$.

Определение 7.4.2. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется *эрмитовой* (соответственно косоэрмитовой) , если $A = \overline{A}'$ (соответственно $A = -\overline{A}'$).

Пример. В силу теоремы 7.2.1 матрица самосопряжённого преобразования в ортонормированном базисе эрмитова, причём в случае евклидова пространства она также является симметрической. Аналогично, матрица косоэрмитова преобразования в ортонормированном базисе косоэрмитова, причём в случае евклидова пространства она является и кососимметрической.

Теорема 7.4.1 (теорема о каноническом виде матрицы самосопряжённого преобразования)**.** 1. *Собственные числа самосопряжённого преобразования конечномерного унитарного пространства являются вещественными.*

2. *Характеристические корни эрмитовой матрицы вещественны.*

3. *Собственные числа симметрического преобразования конечномерного евклидова пространства вещественны.*

4. *Если φ — самосопряжённое преобразование конечномерного евклидова (унитарного) пространства, то существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования φ.*

5. *Если A — симметрическая (эрмитова) матрица, то существует ортогональная (унитарная) матрица U такая, что $D = UAU^*$ — вещественная диагональная матрица.*

Доказательство. 1. Поскольку $\varphi\varphi^* = \varphi^2 = \varphi^*\varphi$, преобразование φ нормально. Следовательно, собственный вектор a преобразования φ

с собственным числом λ является собственным вектором для $\varphi^* = \varphi$ с собственным числом $\overline{\lambda}$ (теорема 7.2.2). Отсюда $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{R}$.

2. Если $V = \mathbb{C}^n$ — унитарное пространство со стандартным скалярным произведением, то эрмитова матрица A соответствует самосопряжённому преобразованию этого пространства и требуемое вытекает из п. 1.

3. Пусть φ — самосопряжённое преобразование евклидова пространства V и A — его матрица в ортонормированном базисе. Тогда матрица $A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$ является эрмитовой. Остаётся применить п. 2.

4. Если V — унитарное пространство, то утверждение следует из нормальности φ и п. 1.

Если V — евклидово пространство, то в силу нормальности φ существует ортонормированный базис, в котором $[\varphi] = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$, где A_i одномерны или двумерны. Но двумерные клетки соответствуют только тем характеристическим корням преобразования φ, которые не лежат в $\mathbb{R}$, а таких в силу п. 3 преобразование φ не имеет.

5. Следует из теоремы 7.3.2 и п. 2. □

Теорема 7.4.2 (теорема о каноническом виде матрицы косоэрмитова преобразования). 1. *Собственные числа косоэрмитова преобразования конечномерного унитарного пространства лежат в множестве $i\mathbb{R}$.*

2. *Спектр косоэрмитова преобразования (косоэрмитовой матрицы) лежит в множестве $i\mathbb{R}$.*

3. *Если φ — косоэрмитово преобразование конечномерного унитарного пространства, то существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования φ диагональна.*

4. *Если φ — косоэрмитово преобразование конечномерного евклидова пространства, то существует ортонормированный базис, в котором матрица преобразования φ клеточно диагональна. Каждая клетка этой матрицы либо одномерная нулевая, либо имеет вид* $\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$, *где $b \in \mathbb{R}$.*

Упражнение 7.4.2. *Доказать теорему 7.4.2.*

Упражнение 7.4.3. 1. *Если φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства, то $\varphi + \varphi^*$ и $\varphi\varphi^*$ — самосопряжённые, а $\varphi - \varphi^*$ — косоэрмитово преобразования.*

2. *Если φ, ψ — самосопряжённые (косоэрмитовы) преобразования, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\varphi + \psi$, $\alpha\varphi$ — тоже самосопряжённые (косоэрмитовы) преобразования.*

3. *Если φ, ψ — самосопряжённые преобразования, то преобразование $\varphi\psi$ самосопряжённое тогда и только тогда, когда $\varphi\psi = \psi\varphi$.*

4. *Каждое линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства может быть представлено в виде суммы самосопряжённого и косоэрмитова преобразований.*

5. *Каждое линейное преобразование φ унитарного пространства может быть представлено в виде $\varphi = \psi + i\tau$, где ψ и τ — самосопряжённые преобразования.*

Теперь мы рассмотрим самосопряжённые преобразования специального вида, которые играют важную роль в дальнейшем изложении.

Определение 7.4.3. Самосопряжённое преобразование φ евклидова (унитарного) пространства V называется *неотрицательным*, если для любого $a \in V$ число $(a\varphi, a)$ является вещественным неотрицательным числом. Если, кроме того, для любого $a \neq 0$ число $(a\varphi, a)$ положительно, то φ называется *положительным*.

Теорема 7.4.3. *Пусть V — конечномерное евклидово или унитарное пространство. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Самосопряжённое преобразование φ неотрицательно тогда и только тогда, когда характеристические корни преобразования φ неотрицательны.*

2. *Для неотрицательного преобразования φ определено однозначно значение $\sqrt{\varphi}$ функции $f(x) = \sqrt{x}$ (арифметический корень). Преобразование $\psi = \sqrt{\varphi}$ является единственным неотрицательным линейным преобразованием пространства V, для которого $\psi^2 = \varphi$.*

Доказательство. 1. Пусть φ неотрицательно. Каждый характеристический корень λ преобразования φ является вещественным числом, а значит, является собственным числом преобразования φ. Поэтому существует собственный вектор a преобразования φ, для которого $a\varphi = \lambda a$. Тогда по определению неотрицательного преобразования имеем $\lambda(a, a) = (\lambda a, a) = (a\varphi, a) \geqslant 0$, откуда $\lambda \geqslant 0$.

Пусть все характеристические корни самосопряжённого преобразования φ неотрицательны. Рассмотрим ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов $e_1, \ldots, e_n$ преобразования φ (он существует в силу теоремы 7.4.1). Пусть a — произвольный вектор из V и $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Тогда $(a\varphi, a) = \left(\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right)\varphi, \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j e_j\right) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i e_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_j e_j\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i \overline{\alpha_i}(e_i, e_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2 \geqslant 0$.

Упражнение 7.4.4. *Доказать, что в определении неотрицательного преобразования можно сразу считать, что число* $(a\varphi, a) \in \mathbb{R}$.

Упражнение 7.4.5. *Самосопряжённое преобразование* φ *положительно тогда и только тогда, когда собственные значения* φ *положительны.*

2. Поскольку преобразование φ неотрицательно, существует ортонормированный базис, в котором $[\varphi] = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица и $\lambda_i \geqslant 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Тогда $\left[\sqrt{\varphi}\right] = D(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ по определению функции от линейного преобразования. Преобразование $\psi = \sqrt{\varphi}$, очевидно, является неотрицательным самосопряжённым преобразованием и $\psi^2 = \varphi$. Докажем, что ψ — единственное неотрицательное преобразование с этим свойством. Пусть τ — неотрицательное преобразование, для которого $\tau^2 = \varphi$. Рассмотрим ортонормированный базис пространства V, в котором $[\tau] = D(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ и $\mu_i \geqslant 0$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Тогда в этом же базисе $[\varphi] = [\tau]^2 = D(\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2) = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Снова в том же базисе имеем:

$$[\psi] = [\sqrt{\varphi}] = D(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}) = D(\mu_1, \ldots, \mu_n) = [\tau].$$

Таким образом, $\psi = \tau$, что и требовалось. □

Определение 7.4.4. Эрмитова (симметрическая) матрица A называется *неотрицательной* (*положительной*), если её характеристические корни неотрицательны (положительны).

Следствие. *Неотрицательное* (*положительное*) *преобразование евклидова* (*соответственно унитарного*) *пространства в ортонормированном базисе имеет неотрицательную* (*положительную*) *симметрическую* (*соответственно эрмитову*) *матрицу.*

§ 7.5. Сингулярные числа, полярное и сингулярное разложения

Определение 7.5.1. Два линейных преобразования φ и ψ евклидова (унитарного) пространства V *изометричны*, если для любых $a, b \in V$

выполняется $(a\varphi, b\varphi) = (a\psi, b\psi)$.

Пример. Каждое унитарное (ортогональное) преобразование φ изометрично тождественному преобразованию ε, так как $(a\varphi, b\varphi) = (a\varepsilon, b\varepsilon) = (a, b)$.

Упражнение 7.5.1. *Докажите, что φ нормально тогда и только тогда, когда φ и φ^* изометричны.*

Теорема 7.5.1. *Пусть φ — линейное преобразование евклидова (унитарного) пространства V. Тогда преобразование $\varphi\varphi^*$ является неотрицательным самосопряжённым преобразованием, а преобразование $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$ изометрично преобразованию φ.*

Доказательство. Преобразование $\varphi\varphi^*$ является самосопряжённым (см. п. 1 упражнения 7.4.3). Кроме того, $(a\varphi\varphi^*, a) = (a\varphi, a\varphi) \geqslant 0$, а значит, φ неотрицательно. Следовательно, в силу теоремы 7.4.3 неотрицательное преобразование $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$ определено однозначно. Имеем:

$$(a\psi, a\psi) = (a, a\psi\psi^*) = (a, a\psi^2) = (a, a\varphi\varphi^*) = (a\varphi, a\varphi),$$

т. е. φ и ψ изометричны. □

Определение 7.5.2. Характеристические корни неотрицательного преобразования $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$ называются *сингулярными числами* линейного преобразования φ евклидова (унитарного) пространства V. Характеристические корни неотрицательной матрицы $\sqrt{AA^*}$ называются *сингулярными числами* матрицы $A \in M_n(F)$ ($F = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$).

Упражнение 7.5.2. *Пусть*

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{10\times 10}.$$

Сравните характеристические корни и сингулярные числа матриц A_ε при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 10^{-10}$.

Теорема 7.5.2. *Если φ — нормальное преобразование евклидова (унитарного) пространства V, то сингулярные числа φ — это модули характеристических корней преобразования φ.*

Доказательство. Пусть сначала пространство V унитарно. По условию φ нормально, значит, существует ортонормированный базис, в котором

$$[\varphi] = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ а значит, } [\varphi^*] = [\varphi]^* = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Отсюда } [\varphi\varphi^*] = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix},$$

$$\text{и следовательно, } [\psi] = \left[\sqrt{\varphi\varphi^*}\right] = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n| \end{pmatrix}.$$

Случай евклидова пространства разбирается аналогично. Нужно лишь заметить, что

$$r\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot r\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

□

Теорема 7.5.3 (о полярном разложении). 1. *Пусть φ — линейное преобразование конечномерного евклидова (унитарного) пространства V. Тогда существуют неотрицательное преобразование ψ и ортогональное (унитарное) преобразование τ пространства V такие, что $\varphi = \psi\tau$. Преобразование $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$ определяется однозначно, и его характеристические корни — это сингулярные числа преобразования φ. Если преобразование φ невырождено, то τ также определяется однозначно.*

2. *Если A — вещественная (комплексная) матрица, то существуют неотрицательная матрица B и ортогональная (унитарная) матрица C такие, что $A = BC$. Матрица B определена однозначно и равна $\sqrt{AA^*}$. Если $|A| \neq 0$, то C также определена однозначно.*

Доказательство. Докажем только п. 1, так как п. 2 вытекает из п. 1. в силу соответствия между линейными преобразованиями и матрицами.

Пусть $e_1, \ldots, e_r$ — ортонормированный базис пространства $V\varphi$ — образа V относительно φ. Пусть векторы $x_1, \ldots, x_r \in V$ таковы, что

$x_i\varphi = e_i$ для $i = 1, \ldots, r$. Рассмотрим набор векторов $v_1, \ldots, v_r$, для которого $v_i = x_i\psi$, $i = 1, \ldots, r$, где $\psi = \sqrt{\varphi\varphi^*}$. Для всех $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ выполняются равенства:

$$(v_i, v_j) = (x_i\psi, x_j\psi) = (x_i\varphi, x_j\varphi) = (e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

иными словами, $v_1, \ldots, v_r$ — ортонормированный набор векторов. Дополним наборы $e_1, \ldots, e_r$ и $v_1, \ldots, v_r$ до ортонормированных базисов $e_1, \ldots, e_r, \ldots, e_n$ и $v_1, \ldots, v_r, \ldots, v_n$ пространства V. Существует линейное преобразование τ, которое переводит базис $v_1, \ldots, v_n$ в базис $e_1, \ldots, e_n$ по правилу $v_i\tau = e_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Преобразование τ переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, следовательно, τ ортогонально (унитарно) (следствие теоремы 7.3.1). Докажем, что $\varphi = \psi\tau$.

Лемма. *Если φ и ψ изометричны, то* $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$.

Доказательство. Если $u \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $(u\psi, u\psi) = (u\varphi, u\varphi) = 0$. Отсюда $u\psi = 0$ и $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. В обратную сторону доказательство аналогично. Лемма доказана.

Пусть $u \in V$ и $u\varphi = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$. Так как $x_i\varphi = e_i$, то $(u - \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i)\varphi = 0$. В силу леммы выполняется равенство $(u - \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i)\psi = 0$. Тогда $u\psi = \left(\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i x_i\right)\psi = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ и, следовательно,

$$u(\psi\tau) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i\right)\tau = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (v_i\tau) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = u\varphi,$$

откуда $\varphi = \psi\tau$.

Пусть $\varphi = \psi_1\tau_1$ — ещё одно разложение, причём ψ_1 — неотрицательное, а τ_1 — ортогональное (унитарное) преобразования. Тогда

$$\varphi\varphi^* = (\psi_1\tau_1)(\psi_1\tau_1)^* = \psi_1\tau_1\tau_1^*\psi_1^* = \psi_1^2.$$

По теореме 7.4.3 имеем $\psi_1 = \psi$.

Если φ невырождено, то невырождено и ψ, а значит, $\tau = \psi^{-1}\varphi$ определено однозначно. $\square$

Определение 7.5.3. Разложение, описанное в теореме 7.5.3, называется *полярным*.

Теорема 7.5.4 (о сингулярном разложении)**.** *Пусть F — это поле вещественных (комплексных) чисел и $A \in M_n(F)$. Тогда существуют диагональная матрица D с неотрицательными вещественными числами на главной диагонали и ортогональные (унитарные) матрицы Q_1 и Q_2 из $M_n(F)$, для которых $A = Q_1 D Q_2$. В каждом таком разложении спектр матрицы D определён однозначно и состоит из сингулярных чисел матрицы A.*

Доказательство. Из теоремы 7.5.3 следует, что $A = BC$, где $B = \sqrt{AA^*}$ и C — ортогональная (унитарная) матрица. По п. 5 теоремы 7.4.1 для матрицы B существует ортогональная (унитарная) матрица Q такая, что $B = QDQ^*$, где D — диагональная вещественная матрица. Поскольку спектры B и D совпадают, спектр D состоит из сингулярных чисел матрицы A, в частности, все эти числа вещественные и неотрицательные. Подставляя равенство $B = QDQ^*$ в равенство $A = BC$, получаем

$$A = QDQ^*C.$$

Произведение двух ортогональных (унитарных) матриц — снова ортогональная (унитарная) матрица. Поэтому $Q_1 = Q$, $Q_2 = Q^*C$ и D — искомые матрицы.

Предположим, что $A = Q_1 D Q_2$ — произвольное разложение матрицы A, в котором D диагональна и её спектр состоит из неотрицательных вещественых чисел, а Q_1 и Q_2 — ортогональные (унитарные) матрицы. Заметим, что для D выполняется $\sqrt{D^*D} = \sqrt{D^2} = D$, следовательно, сингулярные числа матрицы D равны её собственным числам. С другой стороны,

$$AA^* = (Q_1 D Q_2)(Q_1 D Q_2)^* = Q_1 D^2 Q_1^*,$$

поэтому собственные числа матриц AA^* и D^2 совпадают. Значит, совпадают и собственные числа матриц $\sqrt{AA^*}$ и $D = \sqrt{DD^*}$. Поэтому собственные числа матрицы D равны сингулярным числам матрицы A. □

Замечание. Фактически, в теореме 7.5.4 мы дали новое определение сингулярных чисел как чисел, стоящих на главной диагонали в диагональной матрице, возникающей в сингулярном разложении.

Упражнение 7.5.3. *Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ найдите сингулярные числа, а также полярное и сингулярное разложения.*

Упражнение 7.5.4. *Напомним, что объём n-мерного параллелепипеда в n-мерном евклидовом пространстве, натянутого на векторы a_1, $\ldots$, a_n, равен модулю определителя матрицы, составленной из строк* *координат векторов $a_1, \ldots, a_n$. Найдите условия на сингулярные числа оператора φ этого пространства, при выполнении которых φ "сохраняет" объёмы всех таких параллелепипедов.*

Глава 8

Квадратичные формы

§ 8.1. Квадратичная форма и её матрица

Определение 8.1.1. *Квадратичной формой* $f(x_1, \dots, x_n)$ от переменных x_1, …, x_n над полем F называется однородный многочлен степени 2 из $F[x_1, \dots, x_n]$, т.,е. многочлен вида $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} f_{ij} x_i x_j$, где $f_{ij} \in F$.

Замечание. Напомним, что однородность многочлена означает, что все его одночлены имеют одну и ту же степень по совокупности переменных. В случае квадратичной формы это означает, что все её одночлены имеют степень два по совокупности переменных. Иногда в идукционных рассуждениях удобно считать квадратичной формой нулевой многочлен.

Пример. Многочлен $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$ из $\mathbb{R}[x_1, x_2]$ является квадратичной формой, а многочлен $x_1^2 + x_2^2 + 3$ — нет.

Заметим, что если при суммировании не предполагать, что $i \leqslant j$, то нарушается однозначность записи. Например, для $f(x_1, x_2)$ из предыдущего примера имеем:

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2x_1 + 2x_2^2 = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2.$$

С другой стороны, полезно избавиться от этого ограничения следующим способом.

Определение 8.1.2. Предположим, что поле F имеет характеристику, не равную 2, и $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} f_{ij} x_i x_j$ — квадратичная форма над F. Для любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ положим

$$a_{ij} = \begin{cases} f_{ij} & \text{если } i = j; \\ \frac{f_{ij}}{2} & \text{если } i < j; \\ \frac{f_{ji}}{2} & \text{если } i > j. \end{cases}$$

Тогда $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ — *стандартная запись* квадратичной формы f. Матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется *матрицей квадратичной формы* f. Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то $f(x) = xAx'$ — *матричная форма записи* квадратичной формы $f(x)$.

Пример. Для $f(x_1, x_2)$ из вышеприведенного примера имеем

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \text{ и } f(x) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем на протяжении этой главы мы рассматриваем поля, характеристика которых не равна 2.

Предложение 8.1.1. 1. *Квадратичная форма f однозначно определяется своей матрицей A, т.,е. если $f(x) = xAx'$ и $g(x) = xBx'$ — квадратичные формы, то $f(x) = g(x)$ тогда и только тогда, когда $A = B$.*

2. *Матрица A квадратичной формы симметрическая, т. е. $A = A'$.*

Доказательство. Вытекает из определения 8.1.2. □

Определение 8.1.3. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = xAx'$ и $g(y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}y_iy_j = yBy'$ — квадратичные формы над полем F от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. Говорят, что форма f *эквивалентна* форме g, если существует такая невырожденная матрица $T = (t_{ij}) \in M_n(F)$, что при линейной замене переменных $x = yT$ (иными словами, при замене $x_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ji}y_j$ для любых $i = 1, \ldots, n$), форма f переходит в g. Матрица T называется *матрицей замены.* Обозначение: $f \sim g$ (или $f \underset{T}{\sim} g$).

Пример. Пусть $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$ и замена $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)T$ задана матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = y_1 - y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$. Тогда $g(y) = (y_1 - y_2)^2 + 3(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + 2(y_1 + y_2)^2 = 6y_1^2 + 2y_1y_2$ — форма, эквивалентная форме f.

Предложение 8.1.2. 1. *$f \sim f$;*

2. *Если $f \sim g$, то $g \sim f$;*

3. *Если $f \sim g \sim h$, то $f \sim h$.*

Доказательство. 1. Очевидно.

2. Если T — матрица замены $x = yT$, то T^{-1} — матрица замены $y = xT^{-1}$.

3. Если T и S — матрицы замен $x = yT$ и $y = zS$ и $f \underset{T}{\sim} g \underset{S}{\sim} h$, то замена $x = z(ST)$ осуществляет эквивалентность $f \underset{ST}{\sim} h$. □

Предложение 8.1.3. *Если $f(x) = xAx'$, $g(y) = yBy'$ и $f \underset{T}{\sim} g$, то $B = TAT'$.*

Доказательство. Так как $f \underset{T}{\sim} g$, то $f(x) = xAx' \underset{T}{\sim} (yT)A(yT)' = y(TAT')y' = g(y)$, следовательно, по предложению 8.1.1 $B = TAT'$. □

Определение 8.1.4. *Рангом* квадратичной формы f называется ранг её матрицы.

Следствие. *Ранги эквивалентных форм равны.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что если $|T| \neq 0$, то ранг A совпадает с рангом TAT'. □

§ 8.2. Диагонализация квадратичных форм

Определение 8.2.1. Квадратичная форма с матрицей A *имеет диагональный вид*, если A — диагональная матрица, т. е. $f(x) = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$.

Теорема 8.2.1 (алгоритм Лагранжа). *Каждая квадратичная форма f от n переменных над полем характеристики, отличной от 2, эквивалентна квадратичной форме диагонального вида.*

Доказательство. Заметим, что если $n = 1$, то форма $f = ax^2$ диагональна. Будем доказывать теорему индукцией по числу переменных n, т. е. будем полагать, что для всех квадратичных форм от s переменных, где $s < n$, теорема доказана.

Случай 1. Пусть существует $i \in \{1, \dots, n\}$ такое, что $a_{ii} \neq 0$. Поскольку замена $y_1 = x_i$, $y_i = x_1$, $y_j = x_j$ для всех $j \notin \{1, i\}$, невырожденная, то можно считать, что $a_{11} \neq 0$. Сгруппировав одночлены, в которые входит x_1, получим

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + f_1(x_2, \dots, x_n),$$

где $f_1(x_2, \dots, x_n)$ — квадратичная форма от $(n-1)$-ой переменной. С другой стороны, квадратичная форма

$$h(x) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2 = \\ = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + h_1(x_2, \dots, x_n)$$

имеет те же одночлены, включающие переменную x_1. Поэтому

$$g = f - h = f_1 - h_1$$

— квадратичная форма от переменных $x_2, \dots, x_n$. По предположению индукции существует $T_1 \in M_{n-1}(F)$ такая, что $|T_1| \neq 0$ и замена $(x_2, \dots, x_n) = (y_2, \dots, y_n)T_1$ приводит форму g к диагональному виду $b_2y_2^2 + \dots + b_ny_n^2$. Пусть

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n.$$

Подставляя в это равенство выражения переменных $x_2, \dots, x_n$ через $y_2, \dots, y_n$, найдем $t_{21}, \dots, t_{n1} \in F$, для которых

$$x_1 = y_1 + t_{21}y_2 + \dots t_{n1}y_n.$$

Тогда матрица

$$T = \left(\begin{array}{r|ccc} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \hline t_{21} & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ t_{n1} & & & \end{array}\right)$$

осуществляет замену, при которой форма $f = h + g$ переходит в форму $a_{11}y_1^2 + b_2y_2^2 + \dots + b_ny_n^2$. Матрица T невырождена, так как $|T| = |T_1| \neq 0$.

Случай 2. Пусть для любого $i = 1, \dots, n$ имеет место $a_{ii} = 0$. Если для $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{ij} = 0$, то форма имеет вид $f(x) = 0$ и её матрица диагональна. Значит, можно считать, что $a_{12} \neq 0$. Рассмотрим следующую замену переменных:

$$x_1 = y_1 - y_2, \quad x_2 = y_1 + y_2, \quad x_3 = y_3 \quad \dots \quad x_n = y_n.$$

Тогда

$$f(x) = 2a_{12}x_1x_2 + f_2(x) = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + g_2(y),$$

причём в записи $g_2(y)$ коэффициенты при y_1^2 и y_2^2 равны нулю, следовательно, указанная замена переводит форму $f(x)$ в форму $g(y) = 2a_{12}y_1^2 + \dots$, у которой коэффициент при y_1^2 не равен нулю. Мы пришли к случаю 1. Матрица замены

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

невырождена, так как $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ в поле характеристики, не равной 2. □

Пример.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{9}{4}x_2^2 + 2x_2^2 = \\ = \left(x_1 + \frac{3}{2}x_2\right)^2 - \frac{1}{4}x_2^2,$$

следовательно,

$$y_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2, \quad y_2 = x_2.$$

Замена $x_1 = y_1 - \frac{3}{2}y_2$, $x_2 = y_2$ с матрицей $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ приводит форму f к виду $y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.

Замечание. Метод диагонализации, использованный в теореме 8.2.1, называется *алгоритмом Лагранжа.*

Теперь мы обратимся к случаю, когда поле $F = \mathbb{R}$. В этом случае говорят, что f — *вещественная* квадратичная форма .

Теорема 8.2.2 (нормальный вид вещественной квадратичной формы)**.** *Каждая вещественная квадратичная форма $f(x)$ от n переменных невырожденной заменой переменных приводится к виду*

$$z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2 + 0 \cdot z_{r+1}^2 + \dots + 0 \cdot z_n^2.$$

Доказательство. В силу теоремы 8.2.1 существует невырожденная замена переменных $x = yR$ такая, что $f \underset{R}{\sim} g$, где

$$g(y) = a_1y_1^2 + \dots + a_sy_s^2 - a_{s+1}y_{s+1}^2 - \dots - a_ry_r^2 + 0 \cdot y_{r+1}^2 + \dots + 0 \cdot y_n^2,$$

$a_i \in \mathbb{R}$ и $a_i > 0$.

Рассмотрим замену, при которой $y_i = \frac{z_i}{\sqrt{a_i}}$ при $i \leqslant r$ и $y_i = z_i$ при $i > r$. Матрица замены

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{a_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

диагональна и невырождена, следовательно, матрица $T = SR$, осуществляющая замену $x = zT$, невырождена и приводит форму f к требуемуему виду. $\square$

Определение 8.2.2. Квадратичная форма

$$h(z) = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2,$$

эквивалентная вещественной квадратичной форме $f(x)$, называется *нормальным видом* формы $f(x)$. Число s называется *положительным индексом инерции*, а число $r - s$ — *отрицательным индексом инерции* формы f.

Теорема 8.2.3 (закон инерции квадратичных форм)**.** *Положительный и отрицательный индексы инерции вещественной квадратичной формы f зависят только от самой формы f и не зависят от способа приведения f к нормальному виду.*

Доказательство. Пусть

$$h(z) = z_1^2 + \dots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \dots - z_r^2$$

— нормальный вид квадратичной формы $f(x)$. Заметим, что ранг формы $h(z)$, очевидно, равный r, совпадает с рангом $f(x)$, а значит, число r зависит только от самой формы f. Пусть

$$g(y) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2$$

— ещё одна форма нормального вида, эквивалентная форме f. Предположим, что $k \neq s$ (для определённости считаем $k < s$). Так как $h \sim f \sim g$, то $h \sim g$, следовательно, существует невырожденная матрица T такая, что замена $z = yT$ переводит h в g, т. е.

$$z_i = \sum_{j=1}^{r} t_{ji} y_j.$$

Рассмотрим систему однородных линейных уравнений относительно переменных $y_1, \ldots, y_r$:

$$\begin{cases} y_1 = 0 \\ \vdots \\ y_k = 0 \\ t_{1,s+1}y_1 + \cdots + t_{r,s+1}y_r = 0, & \text{эквивалентно уравнению } z_{s+1} = 0 \\ \vdots \\ t_{1,r}y_1 + \cdots + t_{r,r}y_r = 0, & \text{эквивалентно уравнению } z_r = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Так как $k < s$, то число уравнений в этой системе меньше числа неизвестных, следовательно, существует ненулевое решение $y^0 = (0, \ldots, 0, a_{k+1}, \ldots, a_r)$ этой системы. Положим $z^0 = (b_1, \ldots, b_r) = y^0 T$. Поскольку $|T| \neq 0$, то z^0 — ненулевая строка. Однако из системы (1) следует, что $b_{s+1} = \cdots = b_r = 0$.

Так как замена $z = yT$ переводит h в g, то $h(z^0) = g(y^0)$. Но

$$h(z^0) = b_1^2 + \cdots + b_s^2 > 0,$$

так как хотя бы один $b_i \neq 0$, а

$$g(y^0) = -a_{k+1}^2 - \cdots - a_r^2 < 0.$$

Противоречие. Значит, $s = k$. □

Пример.

$$f(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 \sim y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2 \sim z_1^2 - z_2^2,$$

следовательно, $s = 1$, $r - s = 1$ для $f(x)$.

Теорема 8.2.4. *Пусть $f(x)$ — вещественная квадратичная форма с матрицей A. Существует ортогональная матрица Q такая, что замена $x = yQ$ приводит f к диагональному виду*

$$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

где λ_i — характеристические корни матрицы A.

Замечание. Характеристические корни матрицы A вещественны, так как A симметрическая.

Доказательство. В силу теоремы 7.4.1 для симметрической матрицы A найдётся ортогональная матрица Q такая, что $QAQ^{-1} = D(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ — характеристические корни матрицы A. Поскольку для ортогональной матрицы Q выполняется $Q^{-1} = Q'$, то при замене переменных $x = yQ$ форма f перейдёт в форму с матрицей $D = QAQ'$. □

Следствие. *Число положительных характеристических корней матрицы A формы f равно положительному индексу инерции, число отрицательных — отрицательному индексу, а ранг f равен числу ненулевых характеристических корней матрицы A с учётом их кратности.*

Определение 8.2.3. Форма

$$g(y) = \lambda_1 y_1^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

где λ_i — характеристические корни матрицы формы $f(x)$ называется *каноническим видом* формы f. Процесс приведения формы к каноническому виду с помощью ортогональной замены переменных называется *приведением формы к главным осям.*

Геометрическая интерпретация. 1. Если $h(x) = 0$ — уравнение эллипса, то в возникающей квадратичной форме $f(x)$ выполняется $r = s = 2$.

2. Если $h(x) = 0$ — уравнение гиперболы, то $s = 1$, $r = 2$.

3. Если $h(x) = 0$ — уравнение параболы, то $r = 1$.

Заметим, что ортогональная замена переменных — это замена, сохраняющая расстояния.

§ 8.3. Положительно определённые квадратичные формы и одновременная диагонализация пары форм

Определение 8.3.1. Вещественная квадратичная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ называется *положительно определённой* (краткое обозначение: $f(x) > 0$), если для любого ненулевого набора $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ выполняется $f(a_1, \dots, a_n) > 0$.

Примеры. 1. Форма $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ положительно определена.

2. Форма $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 0 \cdot x_2^2$ не является положительно определённой.

Определение 8.3.2. Пусть $A = (a_{ij})_{n\times n} \in M_n(F)$ и $k \in \{1, \dots, n\}$. *Угловым k-ым минором* матрицы A называется минор

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ & & \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Определитель минора A_k обозначается $\mathcal{D}_k(A)$.

Теорема 8.3.1. *Пусть $f(x) = xAx'$ — вещественная квадратичная форма от n переменных с матрицей коэффициентов A. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. $f(x) \sim y_1^2 + \dots + y_n^2$*;*
2. $f(x) > 0$ *(положительно определена);*
3. *Для любого $k = 1, \dots, n$ выполняется $\mathcal{D}_k(A) > 0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Если $f \underset{T}{\sim} g$, то $f > 0$, тогда и только тогда, когда $g > 0$.*

Пусть $x = yT$ — замена, переводящая f в g, и $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$. Тогда

$$(a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n)T \neq \overline{0},$$

так как $|T| \neq 0$ и

$$g(b_1, \dots, b_n) = f(a_1, \dots, a_n) > 0,$$

а это значит, что $g > 0$. В обратную сторону аналогично. Лемма доказана.

$2 \Rightarrow 1$. Приведём положительно определённую форму к нормальному виду

$$f \sim g(y) = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2 + 0 \cdot y_{r+1}^2 + \dots + 0 \cdot y_n^2.$$

Если $s < n$, то $g(\underbrace{0, \dots, 0}_{s}, 1, 0, \dots, 0) \leqslant 0$, т. е. g не является положительно определённой, что противоречит лемме. □

$1 \Rightarrow 3$. Если $f(x) = xAx' \underset{T}{\sim} g(y) = yBy'$ и $B = TAT'$, то $|B| = |TAT'| = |T|^2 \cdot |A|$, откуда $\operatorname{sgn}|A| = \operatorname{sgn}|B|$, т. е. $\operatorname{sgn}|A|$ не меняется при невырожденной замене переменных. Так как $f(x) \sim g(y) = y_1^2 + \dots + y_n^2$, то $\operatorname{sgn}|A| = \operatorname{sgn}|E| > 0$, т. е. $\mathcal{D}_n(A) > 0$. Пусть существует k, $1 \leqslant k < n$, такое, что $\mathcal{D}_k(A) \leqslant 0$. Рассмотрим форму от k переменных

$$f_1(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_k) A_k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Форма $f_1(x_1, \ldots, x_k)$ не является положительно определённой, так как $|A_k| = \mathcal{D}_k(A_k) = \mathcal{D}_k(A) \leqslant 0$. Значит, существуют $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ такие, что $f_1(a_1, \ldots, a_k) \leqslant 0$. Но тогда $f(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0) = f_1(a_1, \ldots, a_k) \leqslant 0$, т. е. f не является положительно определённой. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{D}_k(A) > 0$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

$3 \Rightarrow 1$. Пусть все $\mathcal{D}_k(A) > 0$. Докажем, что $f > 0$ индукцией по числу переменных (для $n = 1$ утверждение очевидно). Пусть

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j + 2a_{1,n} x_1 x_n + \cdots + 2a_{n-1,n} x_{n-1} x_n + a_{nn} x_n^2.$$

Рассмотрим форму от $n-1$ переменной

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, \ldots, x_n, 0) = \\ = (x_1, \ldots, x_{n-1}) A_{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Так как для любого $k = 1, \ldots, n-1$ имеет место $\mathcal{D}_k(A_{n-1}) = \mathcal{D}_k(A) > 0$, то существует $T_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ такая, что $|T_1| \neq 0$ и

$$f_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \underset{T_1}{\sim} g_1(y_1, \ldots, y_{n-1}) = y_1^2 + \cdots + y_{n-1}^2.$$

Пусть

$$T = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & T_1 & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

и $x = yT$. Тогда

$$f(x) \underset{T}{\sim} g(y) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_{i,n} y_i y_n + b_{nn} y_n^2.$$

Рассмотрим замену

$$y = zR = z\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & E & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline -b_{1n} & \dots & -b_{n-1,n} & 1 \end{array}\right).$$

Тогда

$$g(y) \underset{R}{\sim} h(z) = \sum_{i=1}^{n-1}(z_i - b_{i,n}z_n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} 2b_{i,n}(z_i - b_{i,n}z_n)z_n + b_{n,n}z_n^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + cz_n^2,$$

где $c \in \mathbb{R}$. Так как $\operatorname{sgn}\mathcal{D}_n(A) = \operatorname{sgn}(\det A)$ не меняется при невырожденной замене, то $\left|\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & E & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & c \end{array}\right| > 0$, откуда $c > 0$. Замена

$$z_1 = u_1, \quad \dots \quad z_{n-1} = u_{n-1}, \quad z_n = \frac{u_n}{\sqrt{c}}$$

приводит $h(z)$ к виду $u_1^2 + \dots + u_n^2$, следовательно, $f(x) \sim u_1^2 + \dots + u_n^2$. $\square$

Следствие. 1. *Квадратичная форма над $\mathbb{R}$ с матрицей A положительно определена тогда и только тогда, когда A — положительная симметрическая матрица.*

2. *Симметрическая матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ положительна тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_k(A) > 0$ для всех $k = 1, \dots, n$.*

Упражнение 8.3.1. *Доказать следствие 8.3.*

Теорема 8.3.2. *Пусть $f(x)$, $g(x)$ — квадратичные формы над $\mathbb{R}$ и $f(x) > 0$. Тогда существует $T \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $|T| \neq 0$ и $f \underset{T}{\sim} z_1^2 + \dots + z_n^2$, $g \underset{T}{\sim} \lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_n z_n^2$, т. е. одной и той же невырожденной заменой переменных $x = zT$ форма f приводится к нормальному виду, а форма g — к диагональному виду.*

Доказательство. Форма f положительно определена, следовательно, существует $R \in M_n(\mathbb{R})$ такая, что $x = yR$ приводит f к виду

$f_1(y) = y_1^2 + \cdots + y_n^2$. В частности, $f_1(y) = yEy'$. Эта же замена приводит g к некоторой форме $g_1(y_1, \ldots, y_n) = yBy'$. Рассмотрим ортогональную замену $y = zQ$, приводящую форму g_1 к каноническому виду:

$$g_1(y_1, \ldots, y_n) \underset{Q}{\sim} g_2(z_1, \ldots, z_n) = \lambda_1 z_1^2 + \cdots + \lambda_n z_n^2,$$

где λ_i — характеристические корни матрицы B. Имеем $g(x) \underset{T}{\sim} g_2(z)$, где $T = QR$ — невырожденная матрица замены. Кроме того, $f_1(y) \underset{Q}{\sim} f_2(z) = zCz'$. Так как

$$C = QEQ' = QEQ^{-1} = E,$$

то $f_2(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$, т. е. замена $x = zT$ приводит форму f к нормальному виду: $f(x) \underset{T}{\sim} f_2(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$. □

Если формы $f(x)$ и $g(x)$ выбраны произвольно, то ответ на вопрос, можно ли привести их одновременно к диагональному виду, вообще говоря, отрицательный, как показывает следующие упражнения.

Упражнение 8.3.2. *Пусть вещественные квадратичные формы $f(x) = xAx'$ и $g(x) = xBx'$ таковы, что замена $x = yT$ приводит их одновременно к диагональному виду. Доказать, что все корни многочлена $h(\lambda) = |A - \lambda B|$ вещественны.*

Указание. Пусть α — корень $h(\lambda)$. Тогда $0 = |A - \alpha B| = |T|^2 |A - \alpha B| = |T(A - \alpha B)T'| = \ldots$

Замечание. Утверждение, обратное к утверждению упражнения 8.3.2, неверно.

Упражнение 8.3.3. *Используя упражнение 8.3.2, докажите, что формы $f(x) = 2x_1x_2$ и $g(x) = x_1^2 - x_2^2$, нельзя привести к диагональному виду одной и той же заменой переменных.*

Предметный указатель

Указатель обозначений

Приложение

Программа курса высшей алгебры

2016–17 учебный год

1 семестр

1. Введение

Алгебраическая операция, алгебраическая система, сужение операции на подмножество, подсистема, изоморфизм [4, гл. 4, § 1]; [1, § 9].

2. Группы, кольца, поля

Группа, кольцо, поле: аксиомы, примеры, элементарные свойства, кольцо вычетов [1, § 6, 11, 12]; [5, § 63, 64, 43–45]; [2, гл. 1, § 3, 6]. Группа подстановок: проверка аксиом, разложение подстановки в произведение циклов, декремент, четность, разложение в произведение транспозиций, четность произведения, знакопеременная группа [4, гл. 4, § 2]. Кольцо квадратных матриц: проверка аксиом [6, § 1], разложение матрицы в произведение элементарных и диагональной матриц. Определитель, его поведение при простейших преобразованиях. Определитель произведения матриц. Разложение определителя по строке (столбцу) [5, § 4–6]. Обратная матрица: существование, вычисление, решение линейных матричных уравнений [6, § 2]. Поле комплексных чисел: существование, единственность. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент, тригонометрическая форма записи, формула Муавра, извлечение корня n-ой степени из комплексного числа [4, гл. 5, § 1]; [5, § 46]; [2, гл. 1,§ 5].

3. Векторные пространства

Векторное пространство над полем: аксиомы, примеры, понятие подпространства. Алгебра и подалгебра над полем: примеры [5, § 9, 29]; [6, § 4]; [2, гл. 1, § 7, 8]. Базис и размерность векторного пространства: линейные комбинации, линейная зависимость, эквивалентные наборы векторов, теорема о замене и её следствия, базис пространства, размерность, координаты, изоморфизм пространств. Матрица перехода, её невырожденность, связь между координатами в разных базах [5, § 9, 29, 30]; [6, § 4, 5]; [2, гл. 1, § 7, гл. 2, § 2]. Подпространство, базис, согласованный с подпространством, взаимное расположение подпространств, сумма и пересечение подпространств, связь между их размерностями, прямая сумма [6, § 6]; [2, гл. 5, § 1].

4. Системы линейных уравнений

Ранг матрицы: ранг набора векторов, строчный и столбцевой ранги матрицы, минор, минорный ранг, теорема о совпадении трёх рангов, вычисление ранга приведением матрицы к ступенчатому виду, ранг суммы и произведения матриц [5, § 10]; [6, § 5]; [2, гл. 2, § 1]. Система линейных уравнений: векторная и матричная формы, критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера–Капелли), общее решение и метод Гаусса его поиска, системы линейных уравнений с ненулевым определителем, формулы Крамера [5, § 1, 7]; [6, § 5]; [2, гл. 2, § 1]. Однородные системы: пространство решений, фундаментальный набор решений, связь между однородными и неоднородными системами, теорема Фредгольма [5, § 11, 12]; [6, § 5].

5. Кольца многочленов

Многочлены от одной переменной: определение, кольцо многочленов над кольцом и полем, степень суммы и произведения многочленов [5, § 20]; [2, гл. 3, § 1]. Делимость в кольце многочленов: деление с остатком, наибольший общий делитель, алгоритм Евклида, взаимно простые многочлены, неразложимые многочлены, разложение на линейные множители [5, § 21, 48]; [2, гл. 3, § 5]. Значения и корни многочленов: теорема Безу, теорема о числе корней, интерполяционный многочлен Лагранжа, кратные корни, характеристика поля, производная и её приложения к многочленам над полем характеристики 0, формула Тейлора, интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра [5, § 22], [6, § 16.3]; [2, гл. 3, § 2]. Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, элементарные свойства, лексикографическое упорядочение одночленов, старшая степень, симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах [5, § 51–52]; [2, гл. 3, § 7, 8]. Теорема о существовании корня многочлена в расширении поля и её следствия: разложение на линейные множители в расширении поля, формулы Виета [5, § 49]. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел [5, § 55]. Разложимость многочлена над полем рациональных чисел: сведение к многочленам с целочисленными коэффициентами, признак неразложимости над кольцом целых чисел и существование неразложимого многочлена произвольной степени, алгоритмическая разрешимость проблемы разложения многочлена над полем рациональных чисел [5, § 56-57]; [2, гл. 3, § 6]. Оценка числа действительных корней: границы корней, ряд Штурма и теорема Штурма [5, § 39, 40].

2 семестр

6. Линейные преобразования векторных пространств

Линейное преобразование (ЛП) и его матрица. Координаты образа, связь между матрицами ЛП в разных базах, подобные матрицы. Операции над ЛП, изоморфизм алгебраической системы ЛП и алгебры матриц [6, § 8,9]. Ядро и образ ЛП, невырожденные ЛП [6, § 10]; [7]. Инвариантное пространство, ограничение на нём ЛП. Собственные векторы и собственные значения, характеристический многочлен [6, § 11]; [7]. Корневые подпространства, разложение в прямую сумму корневых подпространств. Нильпотентное ЛП, разложение в прямую сумму циклических подпространств. Жорданова база пространства. Жорданова форма матрицы [7]; [4, Дополнение]; [2, гл. 6, § 4]. Многочлены от матриц и линейных преобразований. Минимальный аннулирующий многочлен, теорема Гамильтона–Кэли, теорема о ядерном разложении. Функции от матриц и линейных преобразований, представления их значений значениями многочленов [6, § 16]; [7].

7. Евклидовы и унитарные пространства и их линейные преобразования

Евклидовы и унитарные пространства: аксиомы, примеры. Процесс ортогонализации, ортонормированные базы, ортогональное дополнение к подпространству. Сопряжённые преобразования: связь между матрицами. Нормальные преобразования, свойство их собственных векторов, канонический вид матрицы нормального преобразования в унитарном и евклидовом пространстве. Унитарные, ортогональные, самосопряжённые и косоэрмитовы преобразования, их матрицы и канонический вид.

Неотрицательные самосопряжённые преобразования, сингулярные числа, полярное и сингулярное разложение матрицы [6, § 17–20].

8. Квадратичные формы

Матрица квадратичной формы, её изменение при линейной замене. Алгоритм Лагранжа приведения к диагональному виду. Нормальная форма вещественной квадратичной формы, закон инерции квадратичных форм. Приведение к главным осям. Положительно определённые квадратичные формы и одновременная диагонализация двух форм [6, § 22–23]; [5, §26–28].

9. Элементы теории групп

Группы и их подгруппы: примеры. Порождающее множество и циклическая подгруппа. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы и теорема Лагранжа. Сопряжённые элементы, коммутаторы, нормальные подгруппы и фактор-группы. Теоремы о гомоморфизмах. Прямые произведения групп, связь между двумя определениями. Разложение циклической группы конечного порядка в прямое произведение примарных подгрупп. Действие группы на множестве. Стабилизатор и орбита, связь между их порядками. Теорема Бернсайда о количестве орбит и её применение к задаче о раскраске тетраэдра [5, гл. 14]; [2, гл. 4 и гл. 10 § 1,3]; [3, § 1–2, 4, 11]; [1, гл. 2].

Список литературы

1. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. *Винберг Э. Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.
3. *Каргополов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
4. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
5. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.
6. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1970.
7. *Чуркин В. А.* Жорданова классификация конечномерных линейных операторов. Новосибирск: НГУ, 1991.