

Вопросы к экзамену

Лектор: проф. Васильев А.В.

1 семестр, 2016-17 учебный год

1. Алгебраическая операция, алгебраическая система, сужение операции на подмножество, подсистема, изоморфизм.
2. Группа: аксиомы, примеры, элементарные свойства. Симметрическая группа подстановок: проверка аксиом группы. Подгруппа. Знакопеременная группа подстановок как подгруппа симметрической группы.
3. Группа подстановок: проверка аксиом, разложение подстановки в произведение циклов, декремент, четность.
4. Разложение подстановки в произведение транспозиций, изменение знака подстановки при умножении на транспозицию, четность произведения подстановок.
5. Кольцо и поле: аксиомы, примеры, элементарные свойства. Кольцо вычетов.
6. Кольцо квадратных матриц: проверка аксиом.
7. Разложение матрицы в произведение элементарных и диагональной матриц.
8. Определитель квадратной матрицы, его поведение при простейших преобразованиях.
9. Определитель произведения матриц.
10. Разложение определителя по строке (столбцу).
11. Обратная матрица: существование, вычисление, решение линейных матричных уравнений.
12. Поле комплексных чисел: существование, единственность. Сопряжение комплексных чисел и его свойства.
13. Геометрическая интерпретация комплексных чисел: модуль, аргумент, тригонометрическая форма записи, формула Муавра, извлечение корня n -ой степени из комплексного числа.
14. Векторное пространство над полем: аксиомы, примеры, понятие подпространства. Алгебра и подалгебра над полем, примеры.
15. Наборы векторов: линейная комбинация набора, линейная зависимость, эквивалентность наборов, теорема о замене.
16. Базис векторного пространства, теорема о базисе конечномерного векторного пространства, размерность векторного пространства.
17. Базис пространства, размерность, координаты, изоморфизм пространств.
18. Матрица перехода от базы к базе, ее невырожденность, связь между координатами в разных базах.
19. Подпространство. Базис, согласованный с подпространством. Сумма и пересечение подпространств, теорема о взаимном расположении двух подпространств, следствие о размерности суммы подпространств.
19. Теорема об эквивалентных определениях прямой суммы подпространств.
20. Ранг матрицы: ранг набора векторов, строчный и столбцовый ранги матрицы, минор, минорный ранг, теорема о совпадении трех рангов.
21. Ранг матрицы: вычисление ранга приведением матрицы к ступенчатому виду, ранг суммы и произведения матриц.
22. Система линейных уравнений: векторная и матричная формы, критерий совместности системы линейных уравнений (теорема Кронекера — Капелли).

23. Общее решение системы линейных уравнений и метод Гаусса его поиска.
24. Системы линейных уравнений с ненулевым определителем, формулы Крамера.
25. Однородные системы: пространство решений, фундаментальный набор решений, связь между однородными и неоднородными системами.
26. Многочлены от одной переменной: определение, кольцо многочленов над кольцом и полем, степень суммы и произведения многочленов.
27. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов. Элементарные свойства делимости многочленов.
28. Наибольший общий делитель двух многочленов, алгоритм Евклида. Свойства взаимно простых многочленов.
29. Неразложимые многочлены. Теорема о разложении многочлена на неразложимые множители.
30. Значения и корни многочленов: теорема Безу, теорема о числе корней, интерполяционный многочлен Лагранжа.
31. Кратные корни, характеристика поля, производная и ее приложения к многочленам над полем характеристики 0, формула Тейлора и ее следствия.
32. Кольцо многочленов от нескольких переменных: определение, элементарные свойства, лексикографическое упорядочение одночленов, старшая степень.
33. Симметрические многочлены, основная теорема о симметрических многочленах.
34. Теорема о существовании корня многочлена в расширении поля и ее следствия: разложение на линейные множители в расширении поля, формулы Виета.
35. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел и разложение многочленов на множители над полями комплексных и вещественных чисел.
36. Теорема об интерполяционном многочлене Лагранжа — Сильвестра.
37. Оценка числа действительных корней: границы корней, ряд Штурма и теорема Штурма.