

## Вопросы к экзамену

Лектор: проф. Васильев А.В.

2 семестр, 2016-17 учебный год

1. Линейное преобразование и его матрица. Координаты образа, связь между матрицами линейного преобразования в разных базах, подобные матрицы.

2. Линейное преобразование и его матрица. Операции над линейными преобразованиями, изоморфизм алгебраической системы линейных преобразований и алгебры матриц.

3. Ядро и образ линейного преобразования. Ранг и дефект линейного преобразования, связь между ними и размерностью пространства.

4. Ядро и образ линейного преобразования. Теорема о невырожденном линейном преобразовании.

5. Подпространство, инвариантное относительно линейного преобразования. Сужение линейного преобразования на инвариантное подпространство. Теорема о матрице линейного преобразования в базе, согласованной с инвариантным подпространством.

6. Собственные векторы и собственные числа. Характеристический многочлен линейного преобразования. Связь между собственными числами и характеристическими корнями линейного преобразования.

7. Корневое подпространство, высота корневого подпространства. Теорема о разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств.

8. Нильпотентное линейное преобразование. Ниль-слой, жорданов набор, жорданов базис для нильпотентного линейного преобразования. Теорема о существовании жорданова базиса для нильпотентного линейного преобразования и ее матричная форма.

9. Жорданова база линейного преобразования. Теорема Жордана о существовании жордановой базы линейного преобразования. Матричная форма теоремы Жордана.

10. Значение многочлена от линейного преобразования и матрицы. Связь между значениями многочлена от подобных матриц. Теорема о вычислении значения многочлена матрицы через значение многочлена ее жордановой формы.

11. Значение многочлена от линейного преобразования и матрицы. Теорема о минимальном аннулирующем многочлене и теорема Гамильтона-Кэли.

12. Значение многочлена от линейного преобразования и матрицы. Теорема о ядерном разложении пространства относительно многочлена, аннулирующего линейное преобразование.

13. Значение функции от матрицы. Теорема о существовании многочлена, значение которого совпадает со значением функции от матрицы. Значение функции от линейного преобразования.

14. Евклидово и унитарное пространства: аксиомы, примеры. Ортогональный и ортонормированный наборы векторов, теорема о существовании ортонормированной базы в евклидовых и унитарных пространствах.

15. Ортогональные наборы векторов, ортогональное дополнение подпространства и его свойства. Теорема об ортогональном дополнении.

16. Сопряженные линейные преобразования и матрицы. Теорема о сопряженном преобразовании.

17. Нормальные преобразования и матрицы. Свойство собственных векторов нормальных преобразований. Теорема о каноническом виде матрицы нормального преоб-

разования в унитарном пространстве.

18. Нормальные преобразования и матрицы. Теорема о каноническом виде нормального преобразования в евклидовом пространстве.

19. Ортогональные и унитарные преобразования: эквивалентность нескольких определений.

20. Ортогональные и унитарные преобразования. Теорема о каноническом виде матрицы ортогонального и унитарного преобразования.

21. Самосопряженные преобразования. Симметрические и эрмитовы матрицы. Теорема о самосопряженном преобразовании.

22. Неотрицательные самосопряженные преобразования. Теорема о существовании и единственности неотрицательного квадратного корня из неотрицательного преобразования.

23. Изометрические линейные преобразования. Теорема о существовании неотрицательного преобразования, изомертичного данному линейному преобразованию. Сингулярные числа. Свойство сингулярных чисел нормального преобразования.

24. Теоремы о полярном и сингулярном разложении линейного преобразования евклидова или унитарного пространства.

25. Квадратичная форма и ее матрица. невырожденная линейная замена переменных в квадратичной форме, матрица замены. Изменение матрицы квадратичной формы при невырожденной линейной замене переменных.

26. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду.

27. Нормальный вид вещественной квадратичной формы. Закон инерции квадратичных форм.

28. Канонический вид вещественной квадратичной формы. Приведение квадратичной формы к главным осям с помощью ортогональной замены.

29. Положительно определенные квадратичные формы. Критерии положительной определенности формы.

30. Положительно определенные квадратичные формы. Одновременная диагонализация пары квадратичных форм, одна из которых положительно определена.

31. Подгруппа, порожденная множеством: эквивалентность двух определений. Циклическая группа. Теорема о строении циклических групп.

32. Смежные классы по подгруппе, индекс подгруппы, теорема Лагранжа и следствия из нее.

33. Нормальная подгруппа: эквивалентность нескольких определений. Факторгруппа по нормальной подгруппе.

34. Гомоморфизм групп. Первая теорема о гомоморфизмах.

35. Гомоморфизм групп. Вторая и третья теоремы о гомоморфизмах.

36. Прямое произведение групп. Связь между двумя определениями.

37. Прямое произведение групп. Теорема о разложении конечной циклической группы в прямое произведение примарных подгрупп.

38. Действие группы на множестве. Стабилизатор и орбита, связь между их порядками. Разбиение множества на непересекающиеся орбиты.

39. Действие группы на множестве. Теорема Бернсайда о количестве орбит и ее применение к задаче о раскраске тетраэдра.