

Программа высшей алгебры, 1 семестр, 2017-18 учебный год.

Лектор — Е.П.Вдовин

1. Множества и операции. Декартово произведение конечного числа множеств. Отношение, отношение эквивалентности. Теорема о классах эквивалентности.
2. Алгебраические ( $n$ -местные) операции, алгебраические системы. Ограничение операции на подмножество, индуцированные операции, подсистема. Гомоморфизм и изоморфизм. Примеры.
3. Группа, аксиомы и простейшие следствия. Подгруппа, гомоморфизм и изоморфизм групп. Симметрическая группа  $S(\Omega)$ : проверка аксиом. Группа  $S_n$ , её порядок.
4. Носитель и орбиты произвольного элемента из  $S_n$ . Определение циклической подстановки (цикла). Независимые циклы. Носитель и орбиты произведения независимых циклов.
5. Теорема о разложении подстановки в произведение независимых циклов.
6. Декремент, знак. Транспозиция. Доказательство того, что умножение на транспозицию меняет чётность. Следствия.
7. Порядок элемента в группе. Порядок цикла. Выражение порядка произвольной подстановки через порядки её независимых циклов.
8. Кольцо и поле, аксиомы и простейшие следствия. Делители нуля. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Ядро гомоморфизма. Критерий инъективности гомоморфизма.
9. Подкольцо, идеал, факторкольцо. Доказательство изоморфизма  $\varphi(R) \simeq R/\text{Ker}(\varphi)$ . Кольцо вычетов. Характеристика поля.
10. Евклидово кольцо, алгоритм Евклида. Теорема о разрешимости уравнений  $ax + by = z$ . Следствие об обратимых элементах в кольце вычетов по модуль  $m$ .
11. Множество прямоугольных матриц. Сложение и умножение матриц. Доказательство ассоциативности умножения и дистрибутивности для прямоугольных матриц. Множество квадратных матриц образует кольцо.
12. Элементарные матрицы (диагональные и трансвекции). Правила умножения на диагональные матрицы и на трансвекции. Теорема о разложении в произведение диагональной матрицы и трансвекций.
13. Определитель квадратной матрицы. Простейшие свойства.
14. Минор матрицы  $k$ -ого порядка. Формула разложения по строке.
15. Обратная матрица, теорема о существовании.
16. Поле комплексных чисел. Теорема о существовании и единственности. Тригонометрическая форма комплексного числа, формула Муавра.

17. Векторное пространство над полем, простейшие свойства. Линейная комбинация, линейная оболочка. Эквивалентные наборы векторов, критерий эквивалентности наборов векторов.
18. Линейная независимость. Базис. Теорема о существовании базиса в конечномерном векторном пространстве.
19. Лемма о замене. Размерность. Следствия.
20. Арифметические векторные пространства. Элементарные преобразования наборов векторов в арифметических пространствах. Приведение к ступенчатому виду, линейная независимость векторов, матрица координат которых имеет ступенчатый вид.
21. Изоморфизм конечномерного векторного пространства подходящему арифметическому пространству. Матрица перехода, связь координат вектора в разных базисах.
22. Сумма векторных пространств. Согласованные базисы. Существование согласованных базисов подпространств  $U$ ,  $W$ ,  $U \cap W$ . Связь между размерностями. Факторпространство, его размерность.
23. Прямая сумма. Теорема об эквивалентных определениях прямой суммы. Проекция.
24. Определение ранга матрицы. Теорема о ранге. Доказательство неравенств  $\text{rank}(A + B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ ,  $\text{rank}(A \cdot B) \leq \min(\text{rank}(A), \text{rank}(B))$ .
25. Система линейных уравнений. Критерий разрешимости системы (теорема Кронекера–Капелли).
26. Однородная система уравнений. Фундаментальный набор решений связь между рангом матрицы системы и размерностью пространства решений.
27. Нахождение решения системы линейных уравнений с помощью однородной системы линейных уравнений.
28. Теорема Фредгольма о связи между совместностью системы  $Ax = b$  и решениями системы  $A^T y = 0$ .
29. Кольцо многочленов от одной переменной над кольцом. Проверка аксиом. Степень, степень суммы и произведения.
30. Доказательство евклидовости кольца многочленов над полем. Свойства делимости многочленов.
31. Взаимно простые многочлены. Критерий взаимной простоты. Свойства взаимно простых многочленов
32. Неприводимые многочлены. Доказательство существования и единственности разложения произвольного многочлена в произведение унитарных неприводимых.
33. Теорема Безу. Следствие о количестве корней у многочлена. Интерполяционный многочлен Лагранжа.

34. Кратные корни. Ряд Тейлора над полем характеристики 0. Критерий кратности корня над полем характеристики 0.
35. Интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестера.
36. Многочлены от нескольких переменных, симметрические многочлены. Теорема о представимости произвольного симметрического многочлена в виде многочлена от базовых симметрических многочленов. Формулы Виета.
37. Основная теорема алгебры.
38. Неприводимые многочлены над  $\mathbb{C}$  и над  $\mathbb{R}$ .
39. Лемма Гаусса. Критерий Эйзенштейна.
40. Алгоритмическая разрешимость проблемы разложения многочленов над  $\mathbb{Q}$  на неприводимые.
41. Теорема о существовании корня. Алгебраическое замыкание поля (определение). Построение конечных полей.

## Список литературы

- [1] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
- [2] *Васильев А.В., Мазуров В.Д.* Высшая алгебра. Часть I. Новосибирск: Издательство НГУ, 2010.
- [3] *Винберг Э.Б.* Курс алгебры. М.: Факториал Пресс, 2002.
- [4] *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
- [5] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1968.