

НОВИКОВ Михаил Александрович

**АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОЙ ОЦЕНКИ ЗАТУХАНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ
ФЛЮИДОНАСЫЩЕННЫХ СРЕДАХ В ЗАВИСИМОСТИ
ОТ СВЯЗНОСТИ ТРЕЩИН С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНЕЧНО-
РАЗНОСТНОЙ АППРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ БИО
В ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОСТАНОВКЕ**

1.2.2 - Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

НОВОСИБИРСК - 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН).

Научный руководитель:

Лисица Вадим Викторович, доктор физико-математических наук

Официальные оппоненты:

Герке Кирилл Миронович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук (ИФЗ РАН), лаборатория фундаментальных проблем нефтегазовой геофизики и геофизического мониторинга, ведущий научный сотрудник.

Имомназаров Холматжон Худайназарович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук (ИВМиМГ СО РАН), лаборатория вычислительных задач геофизики, главный научный сотрудник.

Ведущая организация:

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр Сибирского отделения Российской академии наук» (ФИЦ КНЦ СО РАН).

Защита состоится **5 сентября 2023 г.** в 15:30 на заседании диссертационного совета 24.1.074.03, созданного на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН), по адресу: 630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на официальном сайте ИМ СО РАН: <https://math.nsc.ru>.

Автореферат разослан 04 августа 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.074.03
кандидат физико-математических наук

Скворцова
Мария Александровна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования – конечно-разностный метод численного решения системы уравнений Био в динамической постановке на сдвинутых сетках, метод имитации отжига, метод деконволюции сигналов на предмет их использования при разработке алгоритмов оценки затухания сейсмических волн для определения транспортных свойств трещиноватых формаций.

Актуальность и степень разработанности темы исследования. Современные высокопроизводительные вычислительные системы с параллельной архитектурой позволяют выполнять масштабные численные эксперименты, актуальность которых только растет в области изучения сейсмических процессов в глубинных слоях Земли. Поскольку реальная геологическая среда гетерогенная, нередко трещиновато-пористая и флюидонасыщенная, то геологические объекты требуют учета особенностей их мезо- и микроструктуры, однако зачастую описываются в рамках упругих моделей среды без учета описанных выше особенностей. Таким образом, возникает необходимость разработки новых алгоритмов, учитывающих как можно более детальную структуру геологической среды, и эффективного специализированного программного обеспечения.

Численный анализ диффузионных эффектов при распространении сейсмических волн в трещиновато-пористых средах – актуальное направление вычислительной физики горных пород. Так, при прохождении сейсмических и акустических волн в среде с трещинами, заполненными высокопористым флюидонасыщенным материалом, возникают индуцированные волной потоки флюидов (wave induced fluid flow WIFF – в англоязычной литературе)¹, приводящие к затуханию волны. Выделяют два типа мезомасштабных потоков: между трещинами и вмещающей средой (fracture-to-background WIFF, FB-WIFF) и между связанными трещинами fracture-to-fracture WIFF, FF-WIFF). Причем первый тип наиболее интенсивен в низкочастотном диапазоне и определяется контрастностью транспортных свойств материалов трещин и вмещающей породы, а второй наиболее интенсивен на высоких частотах (вплоть до десятков кГц) и характеризуется преимущественно ориентацией, геометрией и связностью трещин. Отсюда следует, что проявление потоков флюида в регистрируемых полях по таким характеристикам, как частотно-зависимая анизотропия и поглощение, можно использовать для оценки транспортных свойств трещиноватых коллекторов углеводородов.

¹Muller T. M, Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced fluid flow in porous rocks – A review / T. M. Muller, B. Gurevich, M. Lebedev // Geophysics. – 2010. – V. 75, No. 5. – P. 75A147-75A164.

Поскольку транспортные свойства трещиноватых коллекторов главным образом определяются по наличию протяженных систем связанных трещин, то для достоверного определения зависимостей между структурой трещиноватости и затуханием волны требуются численные модели систем трещин с глобальной связностью. Для построения таких моделей специалистами используется метод дискретной системы трещин (discrete fracture network, DFN – в англоязычной литературе)^{1,2}. Однако известные алгоритмы на его основе не позволяют заранее задавать степень связности трещин в системе. Поэтому развитие алгоритмической составляющей методов построения дискретной системы трещин с глобальной связностью трещин во всей рассматриваемой модели актуально.

В настоящее время исследования индуцированных сейсмической волной потоков флюида проводятся на теоретическом уровне и численными экспериментами с использованием системы уравнений модели Био пороупругой флюидонасыщенной среды в квазистатической¹ и в динамической³ постановках. Однако численные эксперименты выполняются в случае изотропной среды, а численное решение уравнений Био в квазистатической постановке не учитывает волновую природу процесса. В частности, не учитывается рассеяние волны на системе трещин, что значительно снижает точность оценки затухания на высоких частотах. Кроме того, физико-химические процессы в перколирующих трещинах приводят к значительной анизотропии свойств материала-наполнителя трещин. Отсюда следует, что разработка новых алгоритмов численной оценки затухания на основе полноволнового моделирования с использованием численных моделей сред, учитывающего их микромасштабную анизотропию, актуальна.

Цель исследования – развитие программно-алгоритмической составляющей методов оценки затухания сейсмических волн в трещиноватых средах за счет использования при разработке новых алгоритмов метода имитации отжига для построения дискретной системы трещин, метода конечных разностей и метода деконволюции сигналов для оценки затухания с учетом пористости, флюидонасыщенности, наличия систем связанных трещин, микромасштабной анизотропии.

¹Seismic Attenuation and Stiffness Modulus Dispersion in Porous Rocks Containing Stochastic Fracture Networks / J. Hunziker [et al.] // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2018. – V. 123, No. 1 – P. 125-143

²Lei Q. Scattering Attenuation of Elastic Waves in Fractured Media / Q. Lei, D. Sornette // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2020. – P. 1-27.

³Masson Y. J. Finite-Difference Modeling of Biot's Poroelastic Equations across All Frequencies / Y. J. Masson, S. R. Pride // Geophysics. – 2010. – V. 75, No. 2. – P. N33-N41.

Научные задачи:

1. Разработать и реализовать в виде программного продукта алгоритм построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции для построения численной модели трещиноватой среды с глобальной связностью трещин и анализа влияния глобальной связности трещин на затухание сейсмической волны при прохождении в среде с системой трещин.

2. Разработать и реализовать в виде программного продукта модульной архитектуры алгоритм численной оценки затухания сейсмических волн в неоднородных анизотропных пористых флюидонасыщенных средах для определения зависимости между транспортными свойствами трещиноватых сред и сейсмическим затуханием в них путем численной оценки частотно-зависимого параметра величины, обратной добротности, в трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах.

Теория, методы исследования, программное обеспечение. Основой решения поставленных задач являются элементы теории геостатистического моделирования. В частности, применяется метод имитации отжига – метод поиска глобального экстремума целевого функционала. При адаптации метода в целевой функционал включаются параметр вероятности протекания флюида (перколяции) по связанным трещинам на заданное расстояние и оценка фрактальной размерности множества центров трещин – статистического параметра для анализа равномерности их распределения.

Также используется теория пороупругости Био, а именно система уравнений в динамической постановке для описания волновых процессов с учетом микромасштабной анизотропии транспортных свойств. Для численного моделирования волновых сейсмических полей используется метод конечных разностей: система уравнений Био аппроксимируется явной конечно-разностной схемой на разнесенных сетках.

Для численной оценки затухания сейсмической волны рассчитывается параметр добротности в зависимости от частоты волны. Величина, обратная добротности, определяется методом деконволюции (обратной свертки) сигналов, основанным на преобразовании Фурье.

При программной реализации алгоритмов на языке C++ используется интегрированная среда разработки Visual Studio с установленным пакетом CUDA Toolkit для параллельных расчетов в наборах узлов расчетной сетки на графических сопроцессорах. Для программной реализации модуля алгоритма численной оценки сейсмического затухания на основе деконволюции синтетических сигналов используется пакет прикладных программ MATLAB.

Верификация алгоритма построения дискретной системы трещин и тестирование его программной реализации выполняются генерацией

трещиноватых сред с разной степенью связности и их сопоставлением. Верификация разработанного алгоритма численной оценки сейсмического затухания и тестирование его программной реализации проводится сравнением с известными аналитическими оценками. Выполнено сопоставление оценок затухания волны в однородной изотропной и периодической слоистой средах, полученных с использованием разработанного алгоритма с известными аналитическими оценками. Для верификации также используются численные оценки затухания на основе квазистатического моделирования с использованием элементов известной теории однократного рассеяния волн, в частности, эффективного поперечника рассеяния плоской волны.

Положения, выносимые на защиту:

1. Алгоритм построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции для численного моделирования трещиноватой среды с глобальной связностью трещин и определения её влияния на затухание сейсмической волны.
2. Алгоритм численной оценки затухания сейсмических волн в неоднородных анизотропных трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах в зависимости от их транспортных свойств путем численной оценки частотно-зависимого параметра величины, обратной добротности.

Научная новизна и личный вклад:

1. Разработан и реализован в виде научно-исследовательской версии программного продукта (в соавторстве с Д. Р. Колюхиным и В. В. Лисицей) алгоритм построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции, который включает ряд оригинальных решений:

– алгоритм разработан с использованием метода имитации отжига и его адаптации путем определения целевого функционала через параметр вероятности существования непрерывного пути по цепочке связанных трещин (перколяции) и параметр фрактальной размерности для обеспечения равномерного распределения трещин в расчетной области;

– построены численные модели трещиноватых сред шести разных степеней связности, от систем практически непересекающихся трещин до систем, в которых пересекающиеся трещины формируют протяженные цепочки и обеспечивают среднюю перколяцию в среде на заданное расстояние;

– по результатам статистического анализа геометрических характеристик трещиноватых сред (средних длины цепочки трещин, расстояния между концами, кривизны извилистости) в зависимости от ориентации цепочки трещин показано структурное различие построенных систем трещин с разной средней длиной перколяции.

2. Разработан и реализован в виде научно-исследовательской версии программного продукта (в соавторстве с Д. М. Вишневским и В. В. Лисицей), ориентированного на использование графических сопроцессоров, алгоритм

численной оценки затухания сейсмической волны в анизотропной трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде, который включает ряд оригинальных решений:

- алгоритм разработан на основе явной конечно-разностной схемы на сдвинутых сетках, аппроксимирующей систему уравнений Био для неоднородной анизотропной пористой флюидонасыщенной среды в динамической постановке;

- для численной оценки частотно-зависимого затухания по результатам численных экспериментов по распространению сейсмической волны в пороупругой флюидонасыщенной среде используется метод деконволюции синтетических сигналов, зарегистрированных на линиях приемников.

- по результатам лично выполненных с использованием разработанного алгоритма численных экспериментов по распространению волны в трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде рассчитаны полные волновые поля, демонстрирующие перепады давления на границах раздела вмещающей породы и материала-наполнителя трещин;

- построены более точные на высоких частотах численные оценки затухания волны (вызванного как индуцированными волной потоками флюидов, так и рассеянием), чем получаемые по результатам использования уравнений Био в квазистатической постановке.

- лично выполненными численными экспериментами по распространению волны в трещиноватых средах с разной степенью связности трещин показан рост затухания с ростом средней длины перколяции на всем рассматриваемом частотном диапазоне от 1 до 10 кГц.

- лично выполненными численными экспериментами по распространению сейсмической волны в трещиноватых средах с разным наполнителем трещин показано влияние микромасштабной анизотропии материала в трещинах на частотно-зависимое затухание.

Теоретическая и практическая значимость результатов.

Используемый в алгоритме построения дискретных систем трещин метод имитации отжига с целевой функцией, включающей оценку вероятности перколяции, позволяет явно задавать среднюю длину перколяции в моделях и этим дает возможность более точно определять зависимость сейсмического затухания от степени связности трещин, что важно для повышения точности интерпретации данных сейсморазведки.

Разработанный алгоритм численной оценки затухания позволяет точнее оценить затухание по сравнению с известным подходом на основе квазистатического нагружения трещиноватого образца, поскольку учитывает как перепады давления флюида и соответствующие флюидопотоки (на границах между вмещающей средой и материалом трещин, между связанными трещинами), так и динамические эффекты, в том числе рассеяние. Использование в алгоритме метода деконволюции сигналов позволяет

восстанавливать как частотно-зависимое затухание, так и фазовую скорость волны. Параллельные вычисления на графических сопроцессорах позволяют значительно сократить время вычисления для больших расчетных областей и детальных сеточных моделей среды со сложной структурой трещиноватости.

Степень достоверности и апробация результатов. Высокую степень достоверности полученных результатов определяет использование современных и признанных специалистами достижений в теории пороупругости, теории конечно-разностных методов, теории рассеяния волн, а также в областях геостатистического моделирования и вычислительной геометрии, а именно

- адаптированного метода имитации отжига для построения дискретной системы трещин и численных моделей трещиноватых сред;
- метода построения срединной оси многоугольника и элементов вычислительной геометрии для оценки средних геометрических характеристик трещиноватой среды;
- модели Био для описания волновых процессов в анизотропной неоднородной флюидонасыщенной пороупругой среде;
- конечно-разностного метода на сдвинутых сетках для численного решения системы уравнений Био в динамической постановке;
- метода деконволюции (обратной свертки) сигналов для оценки частотно-зависимых фазовой скорости и затухания сейсмической волны;
- элементов теории однократного рассеяния волн для оценки влияния рассеяния волны на системе трещин на её затухание.

Решение поставленных задач поддерживалось:

- Российским фондом фундаментальных исследований:
 - 2018-2020, проект № 18-05-00031 «Сейсмический мониторинг коллективных проявлений изменений микромасштабной структуры горных пород, вызванных геохимическими процессами», руководитель – Лисица В. В.,
 - 2019-2021, проект № 19-01-00347 "Цифровой керн: методология построения разномасштабной модели горных пород путём проведения виртуальных физических экспериментов", руководитель – Решетова Г. В.,
- Российским научным фондом: 2019-2022, проект № 19-77-20004 «Проявление связности систем трещин в волновых полях – численные исследования процессов распространения сейсмических и акустических волн в флюидонасыщенных трещиновато-пористых средах», руководитель – Роменский Е.И.,
- Советом по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых и по государственной поддержке ведущих научных школ Российской

Федерации: проект № МД-20.2019.5 «Проявление флюидонасыщения трещиновато-пористых сред в сейсмических полях», руководитель – Лисица В. В.

Результаты исследования обсуждались на 24 международных и всероссийских конференциях, в их числе

- Ежегодная конференция и выставка общества геофизиков (SEG Annual Meeting), Хьюстон, США, 2017; Анахейм, США, 2018.
- Конференция и выставка Европейского общества геоученых и инженеров (EAGE Conference and Exhibition), Копенгаген, Дания, 2018; Лондон, Великобритания, 2019;
- Международная конференция по теории и применению конечно-разностных методов (FDM 2018), Лозенец, Болгария, 2018;
- Международная конференция Европейского общества геоученых и инженеров (EAGE. Saint Petersburg), Санкт-Петербург, 2018, 2020.

На них 15 докладов сделано лично.

Публикации. Результаты исследования изложены в 30 научных публикациях, из которых 2 статьи в журналах, входящих в международные базы цитирования Web of Science (“Geophysical Prospecting”), Scopus (“Lobachevskii Journal of Mathematics”), 2 статьи – в научном журнале, входящем в Перечень рецензируемых научных изданий, рекомендованных ВАК (“Вычислительные методы и программирование”), 2 зарегистрированные программы для ЭВМ, 24 материала всероссийских и международных конференций.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы из 106 наименований. Общий объём составляет 107 страниц, включая 16 рисунков.

Благодарности. Диссертация выполнена в лаборатории вычислительной физики горных пород Института нефтегазовой геологии и геофизики СО РАН.

Автор выражает глубокую благодарность научному руководителю д.ф.-м.н. В.В. Лисице за предложенное интересное и перспективное направление исследований, всестороннюю помощь, профессиональные рекомендации при решении задач разработки алгоритмов, постоянную осязаемую поддержку и внимание при написании диссертации.

Особую благодарность автор выражает коллегам из разных научных институтов СО РАН с.н.с. Д.М. Вишневскому за профессиональную помощь при программной реализации модуля разработанного алгоритма для численного моделирования распространения сейсмической волны в пороупругой флюидонасыщенной среде, к.ф.-м.н. Д.Р. Колухину, д.ф.-м.н. Я.В. Базайкину за компетентность и профессионализм при совместном обсуждении и решении задач из области геостатистического моделирования при разработке алгоритма

построения дискретной системы трещин и задач вычислительной геометрии и математической статистики для оценки структуры полученных систем.

Автор благодарит к.ф.-м.н. Т.С. Хачкову за предоставление эффективных транспортных и упругих параметров по результатам численного анализа цифрового образца известняка, без которых невозможно было провести набор численных экспериментов для оценки затухания волны в трещиноватой среде с реалистичной микромасштабной анизотропией, а также иностранных коллег Е. Каспари, Н. Барбоса, Б. Кинтал, Д.Г. Рубино и К. Холлигера за предоставленные результаты численной оценки затухания на основе моделирования квазистатического нагружения образца пороупругой флюидонасыщенной среды для верификации разработанного алгоритма численной оценки затухания сопоставлением оценок затухания, а также за плодотворную работу над совместной публикацией.

Глубокую признательность хочется выразить своим коллегам научным сотрудникам из лаборатории вычислительной физики горных пород к.ф.-м.н. Т.С. Хачковой, к.ф.-м.н. В.И. Костину, к.ф.-м.н. С.А. Соловьеву, сотрудникам лаборатории многоволновых сейсмических исследований д.ф.-м.н. В.А. Чеверде, д.ф.-м.н. М.И. Протасову, к.ф.-м.н. Д.А. Неклюдову, к.ф.-м.н. К.Г. Гадыльшину, н.с. В.В. Карстену за важные замечания и плодотворные обсуждения в рамках темы диссертации, помощь при представлении работы.

Отдельную благодарность автор выражает В.И. Самойловой за постоянную всестороннюю помощь при подготовке текста диссертации и ценные методические рекомендации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении определен объект исследования, обоснована его актуальность, поставлены цель и определены научные задачи, указана методология исследования, сформулированы защищаемые научные результаты, научная новизна, а также теоретическая и практическая значимость найденных решений и разработок.

Глава 1. Разработка алгоритма построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции.

В разделе 1.1 представлен краткий обзор известных подходов¹. В частности, в решении задач выделяется стохастический подход, при котором характеристики трещин считаются случайными величинами с распределением, определяемым по образцам породы. Также приводятся примеры использования современных численных моделей трещиноватой среды в изучении затухания сейсмических волн. Отмечается, что при численных экспериментах

¹Lei Q. The use of discrete fracture networks for modelling coupled geomechanical and hydrological behaviour of fractured rocks / Q. Lei, J.-P. Latham, C.-F. Tsang // Computers and Geotechnics. – 2017. – V. 85. – P. 151-176.

используются простые модели, в которых локальная связность выражается попарными пересечениями трещин¹, а в более сложных системах она определяется лишь после построения. Отсюда следует, что глобальная связность трещин либо не учитывается вовсе, либо задаётся неявно, что, несомненно, значительно снижает достоверность изучения влияния связности на затухание. В рамках стохастического подхода выделяется метод имитации отжига – метод минимизации целевой функции от характеристик системы трещин². Достоинством этого метода при выявлении зависимостей между связностью трещин и затуханием сейсмической волны в трещиноватой среде является возможность добавления параметра, связанного с длиной перколяции³, в минимизируемую функцию. При таком подходе явно задаётся параметр средней длины цепочки связанных трещин, определяющий глобальную связность в рассматриваемой модели трещиноватой среды, выгодно отличающий результирующие трещиноватые модели среды от известных.

В разделе 1.2 описывается постановка задачи построения дискретной системы трещин методом имитации отжига. Поскольку метод имитации отжига итерационный, прежде всего определяется начальная система из двух семейств равномерно распределённых в расчётной области трещин с одинаковыми длиной и раскрытием, с ориентацией трещин в семействах перпендикулярно друг другу и параллельно координатным осям.

В разделе 1.3 для разработки алгоритма построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции используется метод имитации отжига [4]: целевая функция определяется через параметр степени связности трещин в расчётной области в виде взвешенной суммы двух параметров

$$f = \gamma f_P + (1 - \gamma) f_D, \quad (1.1)$$

где параметр f_P выражает степень связности трещин через вероятности наличия непрерывного пути по трещинам на заданное расстояние в направлениях координатных осей, а параметр f_D определяет степень равномерности распределения трещин оценкой величины фрактальной размерности множества центров трещин⁴. Значения целевой функции минимизируется итерационно изменением положения центров 1% трещин в расчётной области. При этом, изменённая система трещин принимается за исходную на следующей итерации при уменьшении значения целевой функции, а в противном случае принимается

¹Fracture connectivity can reduce the velocity anisotropy of seismic waves / J. G. Rubino [et al.] // Geophysical Journal International. – 2017. – V. 210 – P. 223-227.

²Tran N. H. Simulated annealing technique in discrete fracture network inversion: optimizing the optimization / N. H. Tran // Computational Geosciences. – 2007. – V. 11, No. 3. – P. 249-260.

³Тарасевич Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие / Ю. Ю. Тарасевич. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 112с.

⁴Короленко П. В. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. Фрактальные и мультифрактальные методы, вейвлет-преобразования / П. В. Короленко, М. С. Маганова, А. В. Меснянкин. – М. : МГУ, 2004. – 82 с.

с вероятностью

$$P_{acc}(t) = e^{-\Delta f/t}, \quad (1.2)$$

определяемой разностью значений целевой функции до и после изменения положений центров трещин Δf , а параметр t задает скорость уменьшения вероятности принятия новой системы. Критерий останова итерационного процесса – уменьшение значения целевой функции до порогового значения.

Кроме того, в разделе 1.3 отмечается модульная структура алгоритма и его программной реализации на языке C++ [6] наряду с универсальным для аналогичных алгоритмов форматом параметров. Такая структура дает возможность в последующем адаптировать программное обеспечение для построения более сложных и реалистичных моделей.

В разделе 1.4 описываются результаты проверки разработанного алгоритма. Поскольку при использовании программной реализации алгоритма предусмотрена возможность сохранять модели с промежуточных шагов итерационного процесса, построено 60 моделей трещиноватых сред – 10 реализаций по шесть моделей с разной степенью связности, определяемой значением параметра f_p целевой функции (Рисунок 1.1а).

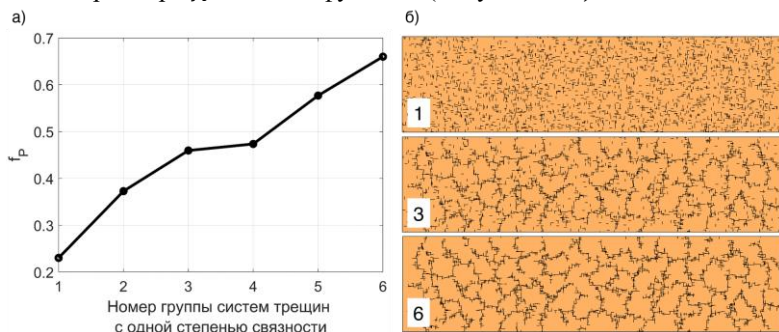


Рисунок 1.1 – Среднее по реализациям значение параметра f_p (а) и изображения сред с дискретными системами трещин (б). Оранжевым цветом показана вмещающая порода, черным – трещины, номерам 1,3,6 соответствует рост связности трещин.

Расчеты показывают, что предложенная целевая функция при адаптации метода имитации отжига позволяет с использованием разработанного алгоритма получать системы трещин с глобальной связностью путем формирования протяженных цепочек связанных трещин. Помимо конечных систем с сильной связностью трещин, построены промежуточные модели с разной средней длиной цепочек трещин, т. е. с разной степенью связности (Рисунок 1.1б).

Для более точного определения степени влияния структуры полученных систем трещин на затухание строится упрощенная структура с сохранением мезомасштабных геометрических характеристик исходной системы (длины цепочек трещин, их ориентации). Подход основан на теории вычислительной геометрии, позволяющей получить срединную ось полигональной области и

разбить ее на ломаные, соответствующие цепочкам трещин¹. Такой прием позволяет оценивать осредненные по реализациям число, длину, расстояние между концами, извилистость и интегральную кривизну ломаных в зависимости от их ориентации. Из анализа этих оценок следует, что наиболее протяженные цепочки трещин расположены под углом $\pm 45^\circ$ к осям и обеспечивают глобальную связность через перколяцию на заданное расстояние.

В заключительном разделе Главы 1 коротко описывается полученный результат – разработанный и программно реализованный алгоритм построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции из множества трещин двух ориентаций [4, 6]. Выгодным отличием разработанного алгоритма построения дискретной системы трещин от известных алгоритмов выделяется определение связности явно через длину перколяции в ходе построения системы трещин. Отсюда достоинством использованного подхода отмечается возможность строить системы с глобальной связностью трещин вместе с промежуточными по степени связности системами, что позволяет в дальнейшем более точно выявлять степень влияния глобальной связности трещин на затухание сейсмической волны.

Глава 2. Разработка алгоритма численной оценки затухания сейсмических волн в пористых флюидонасыщенных средах.

В разделе 2.1 дается обзор известных современных разработок в области численного исследования распространения сейсмических волн в трещиноватой среде. Специалисты считают важной характеристикой для локализации и характеризации зон трещиноватости затухание (потерю энергии и уменьшение амплитуды) волн, а одним из важнейших факторов, влияющих на него, – неупругость горных пород как показатель наличия флюида в поровом пространстве². Из описания типов флюидопотоков при прохождении сейсмической волны в трещиновато-пористой среде вследствие перепадов давления на границах раздела фаз и неоднородностей на разных масштабах^{3,4,5} следует, что наибольший интерес для промысловой геофизики представляет мезомасштабный тип затухания. Этим определяется разработка алгоритмов

¹Computational Geometry: Algorithms and Applications / M. de Berg [et al.]. – Heidelberg: Springer Berlin 2008. – 386 p.

²Muller T. M, Seismic wave attenuation and dispersion resulting from wave-induced fluid flow in porous rocks – A review / T. M. Muller, B. Gurevich, M. Lebedev // Geophysics. – 2010. – V. 75, No. 5. – P. 75A147-75A164.

³Pride S. R. Poroelastic finite difference modeling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity / S. R. Pride // Journal of Geophysical Research. – 2005. – V. 112 – P. B03204.

⁴Numerically quantifying energy loss caused by squirt flow / B. Quintal [et al.] // Geophysical Prospecting. – 2019. – V. 67, No. 8. – P. 2196-2212.

⁵Seismoacoustic signatures of fracture connectivity / J. G. Rubino [et al.] // Journal of Geophysical Research. – 2014. – V. 119 – P. 2252-2271.

оценки именно мезомасштабного затухания. Далее анализируются известные математические модели поропругой флюидонасыщенной среды. Наиболее известной является математическая модель, разработанная М. Био¹, а соответствующая система уравнений рассматривается как в динамической, так и в квазистатической постановках. Достоинство модели Био – оцениваемые специалистами с высокой точностью параметры в коэффициентах уравнений (проницаемость, извилистость, упругие параметры), и широкое развитие модельной базы реалистичных сред (с учетом двухфазности флюида, частичного насыщения). В последние годы Е.И. Роменским методом термодинамически согласованных систем выведена система уравнений² для описания поропругой флюидонасыщенной среды. Модель Роменского позволяет описывать фазы отдельно, что делает её применимой для оценки затухания на масштабе отдельных пор, а уравнения имеют дивергентную форму. Также указываются численные методы, используемые для решения системы уравнений Био: метод конечных разностей, псевдоспектральный метод, метод конечных элементов и разрывный метод Галеркина³. Отмечается относительная простота применения конечно-разностного метода и возможность эффективного распараллеливания вычислений. Недостаток метода – падение порядка точности аппроксимации у границ раздела среды не по линиям расчетной сетки. Достоинство конечно-элементного метода – возможность расчетов для области со сложной геометрией. Однако высокая точность в таком случае может потребовать значительного измельчения сетки, что значительно увеличит времени вычисления. Раздел завершается описанием известных алгоритмов оценки затухания сейсмических волн на основе модели Био путем численной оценки величины, обратной добротности⁴. Для этого используются восстановление эффективного тензора жесткости⁵, деконволюция сигналов⁶. Поскольку в последнее время численная оценка затухания выполняется в рамках теоретических исследований и численного

¹Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. low-frequency range / M. A. Biot // Journal of the Acoustical Society of America. – 1956. – V. 28. – P. 168-178.

²Modeling wavefields in saturated elastic porous media based on thermodynamically compatible system theory for two-phase solid-fluid mixtures / E. Romenski [et al.] // Computers and Fluids. – 2020. – V. 206, P. 104587.

³Carcione J. M Computational poroelasticity – a review / J. M. Carcione, C. Morency, J. E. Santos // Geophysics. – 2010. – V. 75. – P. A229-A243.

⁴Mavko G. The Rock Physics Handbook / G. Mavko, T. Mukerji, J. Dvorkin – Cambridge Univ. Press, New York, 2009. – 511 p.

⁵Quasi-static finite element modeling of seismic attenuation and dispersion due to wave-induced fluid flow in poroelastic media / B. Quintal [et al.] // Journal of Geophysical Research. – 2011. – V. 116. – P. 1–17.

⁶Masson Y. J. Poroelastic finite difference modeling of seismic attenuation and dispersion due to mesoscopic-scale heterogeneity / Y. J. Masson, S. R. Pride // Journal of Geophysical Research: Solid Earth. – 2007. – V. 112, No. B03. – P. 204.

квазистатического моделирования, то актуальна разработка алгоритма более точной численной оценки затухания.

В разделе 2.2 описывается постановка задачи распространения сейсмической волны в анизотропной пороупругой флюидонасыщенной среде [11]. В подразделе 2.2.1 описывается система уравнений Био ортотропной пороупругой флюидонасыщенной среды в двумерной постановке¹:

$$\begin{aligned} \rho_f \frac{T_x}{\phi} \frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\eta}{k_x} q_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \rho_f \frac{\partial v_x}{\partial t}, & \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} &= c_{11} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{13} \frac{\partial v_z}{\partial z} + M \alpha_x \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + S_{xx}, \\ \rho_f \frac{T_z}{\phi} \frac{\partial q_z}{\partial t} + \frac{\eta}{k_z} q_z &= -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_f \frac{\partial v_z}{\partial t}, & \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} &= c_{13} \frac{\partial v_x}{\partial x} + c_{33} \frac{\partial v_z}{\partial z} + M \alpha_z \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + S_{zz}, \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} - \rho_f \frac{\partial q_x}{\partial t}, & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} &= c_{55} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + S_{xz}, \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - \rho_f \frac{\partial q_z}{\partial t}, & -\frac{\partial p}{\partial t} &= M \alpha_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + M \alpha_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + M \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + S_f, \end{aligned} \quad (2.1)$$

Система описывает векторы скорости смещения твердых частиц упругого скелета $\{v_x, v_z\}$, относительной скорости смещения флюида $\{q_x, q_z\}$, компоненты тензора напряжений флюидонасыщенного скелета $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ и давление флюида p . В коэффициенты уравнений входят плотности флюида и флюидонасыщенного скелета ρ, ρ_f , динамическая вязкость флюида η , пористость упругого скелета ϕ , модуль взаимодействия между упругим скелетом и флюидом M , различные в направлениях осей параметры извилистости T_x, T_z , проницаемости k_x, k_z , параметры Био-Уиллиса α_x, α_z и компоненты тензора жесткости флюидонасыщенного скелета $c_{11}, c_{33}, c_{13}, c_{55}$. Наконец, $S_{xx}, S_{zz}, S_{xz}, S_f$ – функции источника возбуждения волны в твердом скелете и флюиде. Для моделирования распространения плоской продольной волны в двумерном пространстве ставится начально-краевая задача в прямоугольной области (Рисунок 2.1). Для представления плоской волны на одной части границы задаются периодические граничные условия, а на другой достраиваются «идеально согласованные слои» (perfectly matched layer, PML – в англоязычной литературе) – искусственные подобласти для избавления от нежелательных отражений волн².

В подразделе 2.2.2 представлена модификация уравнений Био в PML-слоях. Введением демпинг-функции и расщеплением решения на две компоненты модифицируется система уравнений [1]. При её использовании отражения от границы основной расчетной области пренебрежимо малы, а в PML-слое амплитуда волны убывает экспоненциально. В подразделе 2.2.3 конкретизируется расчетная область для численного моделирования распространения волны и описывается численный эксперимент (Рисунок 2.1).

¹Cheng A. H. D. Material coefficients of anisotropic poroelasticity / A. H. D. Cheng // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. – 1997. – V. 342. – P. 199–205.

²Colino F. Application of the Perfectly Matched absorbing layer model to the linear elastodynamics problem in anisotropic heterogeneous media / F. Colino, C. Tsogka // Geophysics. – 2001. – V. 66, No. 1. – P. 294–307.

В разделе 2.3 описывается аппроксимация системы уравнений Био (2.1) явной конечно-разностной схемой на разнесенных сетках¹. Распределение компонент приближенного решения системы (1.2) по четырем группам узлов (первая – σ_{xx} , σ_{zz} , p ; вторая – v_x , q_x , третья – v_z , q_z , четвертая – σ_{xz}) позволяет аппроксимировать производные в уравнениях центральными разностями со вторым порядком [11]. Для сохранения второго порядка аппроксимации вводятся операторы осреднения коэффициентов уравнений².

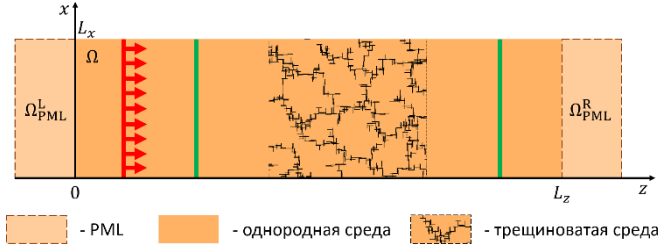


Рисунок 2.1 – Схематическое изображение исследуемой области. Красная линия показывает линию источников, красные стрелки показывают направление распространения волны. Зеленые линии – линии приемников.

В разделе 2.4 описывается оценка величины, обратной добротности, путем деконволюции сигналов с использованием трасс, зарегистрированных на линиях приемников до и после прохождения волны через трещиноватый слой [1]. Затухание определяется известной оценкой величины, обратной добротности,

$$Q^{-1} = \Im(c^2(\omega)) / \Re(c^2(\omega)), \quad (2.2)$$

где $c^2(\omega)$ – частотно-зависимая комплекснозначная фазовая скорость волны. Для избавления от ошибки оценки (2.2) из-за наличия границ раздела однородного и неоднородных слоев выполняется несколько численных экспериментов для разных толщин неоднородного слоя.

В разделе 2.5 разработанный алгоритм верифицируется серией численных экспериментов в моделях сред с однородным, слоистым, трещиноватым участком. Для однородной среды добротность вычисляется аналитически решением дисперсионного уравнения, а для периодических слоистых сред – с использованием модели Уайта³. Сопоставление численных

¹Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method / J. Virieux // Geophysics. – 1986. – V. 51, No. 4. – P. 889–901.

²Numerical Study of the Interface Errors of Finite-Difference Simulations of Seismic Waves / D. Vishnevsky [et al.] // Geophysics. – 2014. – V. 79, No. 4. – P. T219–T232.

³Уайт Д. Е. Распространение сейсмических волн в слоистых средах, насыщенных жидкостью и газом / Д. Е. Уайт, Н. Г. Михайлова, Ф. М. Ляховицкий // Физика Земли. – 1975. – № 10. – С. 44–52.

оценок с аналитическими в обоих случаях показывает хорошее соответствие. Также сравниваются численные оценки затухания в трещиноватых средах простой структуры по результатам использования разработанного алгоритма и алгоритма на основе системы уравнений Био в квазистатической постановке [3]. Сравнение показывает несовпадение оценок на высоких частотах, вызванное рассеянием. Скорректированные на основе теории однократного рассеяния волн оценки по результатам квазистатического моделирования¹ показывают хорошее соответствие оценкам, полученным при помощи разработанного алгоритма [2].

В разделе 2.6 описывается пример использования разработанного алгоритма и его реализации в виде программы для ЭВМ [5] для выявления зависимостей между связностью трещин и затуханием волны. В первом наборе из 600 численных экспериментов для построенных моделей трещиноватой среды (раздел 1.4) рассматривается высокопроницаемая вмещающая порода. Моментальные снимки распределения давления флюида (Рисунок 2.3а) показывают наличие интенсивных флюидопотоков типа FB-WIFF, приводящее к затуханию и падению скорости распространения волны.

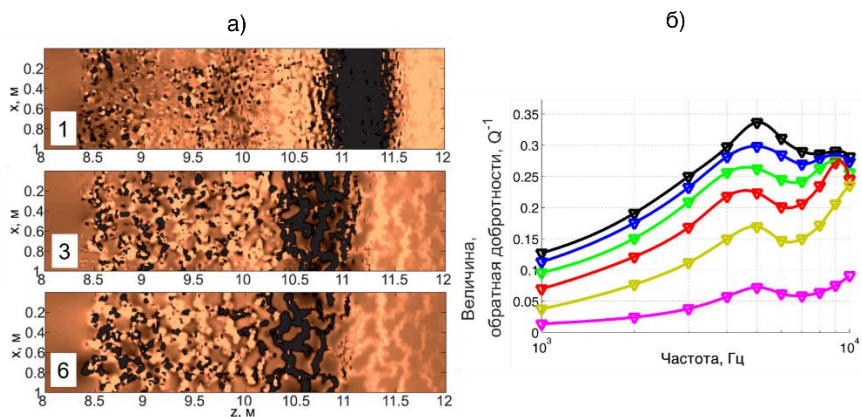


Рисунок 2.3 – Изменение распределения давления флюида при центральной частоте волны 3 кГц (а) и осредненные частотно-зависимые оценки затухания (б) в трещиноватой среде с высокопроницаемой вмещающей породой. Номерам (а) и цветам линий (б) соответствуют разные степени связности трещин, росту связности соответствуют номера 1,3,6 и последовательность цветов: розовый, желтый, красный, зеленый, синий, черный. Полученные осредненные оценки величины Q^{-1} для шести степеней связности и частотного диапазона от 1 до 10 кГц показывают значительный рост затухания с ростом связности (Рисунок 2.3б). При этом в диапазоне частот выше 6 кГц

¹Рытов С. М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 2. Случайные поля / С. М. Рытов, Ю. А. Кравцов, В. И. Татарский. – М. : Наука, 1978. – 456 с.

значительный рост затухания с увеличением частоты обуславливается доминированием рассеяния среди прочих механизмов затухания.

Далее в разделе описываются результаты 1800 численных экспериментов по оценке затухания в трещиноватых средах с низкопроницаемой вмещающей породой и тремя различными материалами-наполнителями трещин. Рассматривается один анизотропный и два изотропных наполнителя трещин. Свойства анизотропного материала задаются в соответствии с ориентацией трещин для обеспечения лучших транспортных свойств и большей мобильности флюида именно вдоль них, а свойства изотропных материалов соответствуют свойствам анизотропного наполнителя вдоль («мягкий» материал) и поперек трещин («жесткий» материал), соответственно. На моментальных снимках распределения давления флюида (Рисунок 2.4а) видно, что перепады давления в случае анизотропного наполнителя ниже, чем для «мягкого», и выше, чем для «жесткого» наполнителей.

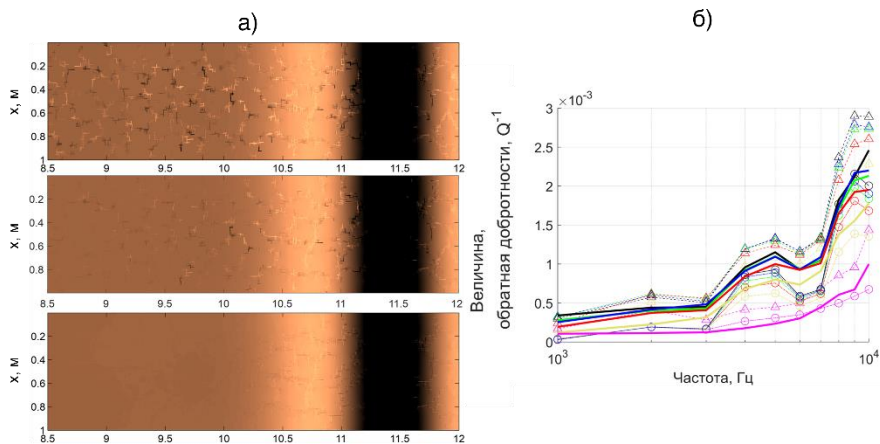


Рисунок 2.4 – Распределение давления флюида при центральной частоте волны 3 кГц для «мягкого» изотропного (а, сверху), анизотропного (а, по центру) и «жесткого» изотропного (а, снизу) наполнителей трещин и осредненные оценки затухания (б) в трещиноватой среде с высокой связностью и низкопроницаемой вмещающей породой. Жирные сплошные линии – оценки затухания для анизотропного, пунктирная с треугольниками – для «мягкого», штрихпунктирная с кружками – для «жесткого» наполнителя. Росту связности соответствует последовательность цветов: розовый, желтый, красный, зеленый, синий, черный.

Полученные оценки величины Q^{-1} (Рисунок 2.4, б) снова показывают рост затухания как с ростом частоты, так и с ростом связности трещин для всех наполнителей. При этом оценки для анизотропного наполнителя принимают промежуточное значение между оценками для двух изотропных материалов,

что свидетельствует о влиянии анизотропии упругих и фильтрационно-емкостных свойств материала на затухание.

В заключении Главы 2 сформулирован полученный результат – разработанный и программно реализованный модульный алгоритм численной оценки затухания сейсмических волн в пористых флюидонасыщенных средах через параметр, обратный добротности. Несомненное достоинство алгоритма – его модульная структура, позволяющая получать волновые поля в виде моментальных снимков для анализа флюидопотоков, а также возможность модификации и использования модулей алгоритма по отдельности. Кроме того, важнейшее преимущество алгоритма – большая точность оценки затухания в диапазоне относительно высоких частот по сравнению с оценками, получаемыми с помощью алгоритма на основе уравнений Био в квазистатической постановке за счет учета рассеяния волны на системе трещин. Наконец, апробация алгоритма на примере оценки затухания волны в трещиноватых средах с разной связностью трещин показывает перспективность реализации алгоритма для выявления зависимостей между трещиноватостью среды и частотно-зависимым затуханием сейсмической волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате численных исследований разработаны и реализованы два алгоритма: алгоритм построения дискретной системы трещин с заданной длиной перколяции во всей расчетной области на основе метода имитации отжига и алгоритм численной оценки сейсмического затухания в анизотропной трещиновато-пористой флюидонасыщенной среде на основе численного решения системы уравнений Био в динамической постановке.

Несомненное преимущество алгоритма построения дискретной системы трещин – использование оценки вероятности перколяции в целевой функции, позволяющее формировать перколирующие кластеры заданного размера, и тем самым в сочетании с алгоритмами оценки сейсмического затухания более достоверно определять зависимость между связностью трещин и частотно-зависимым затуханием, и дисперсией волны. Приведенные результаты численных экспериментов служат примером применения сочетания двух разработанных алгоритмов. Такие численные эксперименты направлены на повышение качества интерпретации сейсмических данных путем определения достоверных зависимостей между фильтрационно-емкостными свойствами, геометрической структурой системы трещин и затуханием сейсмических волн по синтетическим данным.

Использование в алгоритме оценки затухания численного решения системы уравнений Био в динамической постановке выгодно отличает разработанный алгоритм от аналогичных алгоритмов на основе решения уравнений квазистатики, поскольку он позволяет получать существенно более точную на высоких частотах оценку затухания, вызванного как флюидопотоками на мезомасштабном уровне, так и чисто динамическими

эффектами (рассеянием волны на системе трещин). В свою очередь, преимущество реализации алгоритма для использования на многоядерных графических процессорах и эффективного распараллеливания расчетов состоит в возможности оценки затухания сейсмических волн в сложных неоднородных средах с высокой детализацией.

Модульная структура разработанных алгоритмов предоставляет перспективы для дальнейшего их совершенствования. В частности, часть алгоритма оценки затухания, выполняющую численное решение системы уравнений Био, в дальнейшем планируется распространить на трехмерный случай, при этом не нужно будет изменять часть алгоритма, отвечающую непосредственно за оценку затухания путем деконволюции зарегистрированных сигналов. В свою очередь в алгоритме построения дискретной системы трещин, к примеру, введение реалистичного распределения длин трещин и их ориентаций незначительно изменит этап малого возмущения модели, совершенно не изменит этап оценки значения целевой функции. Однако в силу медленной сходимости итерационного процесса в ходе работы алгоритма его распространение на трехмерный случай приведет к необходимости эффективного распараллеливания и модификации практически всех частей алгоритма.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Статьи в рецензируемых научных журналах,
входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus**

1. **Новиков М. А.** Численное моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых флюидонаполненных средах / М. А. Новиков, В. В. Лисица, А. А. Козяев // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии: Электронный научный журнал. – 2018. – Т. 19. – № 2. – С. 130-149.
2. **Новиков М. А.** Моделирование волновых процессов в трещиновато-пористых средах: влияние связности трещин на поглощение сейсмической энергии / М. А. Новиков [и др.] // Вычислительные методы и программирование: Новые вычислительные технологии: Электронный научный журнал. – 2018. – Т. 19. – № 3. – С. 235-252.
3. Attenuation mechanisms in fractured fluid-saturated porous rocks: a numerical modelling study / E. Caspari, **M. Novikov** [et al.] // Geophysical Prospecting. – 2019. – V. 67. – N. 4. – P. 935-955.
4. **Novikov M. A.** Wave Propagation in Fractured-Porous Media with Different Percolation Length of Fracture Systems / M. A. Novikov, V. V. Lisitsa, Y. V. Bazaikin // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2020. – V. 41. – N. 8. – P. 1533-1544.

Зарегистрированные программы для ЭВМ

5. Вишнеvский Д. М. Biot_PlaneWave: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Д. М. Вишнеvский, **М. А. Новиков**, В. В. Лисица // № 2020612632, заявка № 2020611392 от 10.02.2020, зарегистрировано 27.02.2020, RU.
6. **Новиков М. А.** Percolating_DFN_SimAnn: Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / М. А. Новиков, В. В. Лисица, Д. Р. Колюхин // № 2021665763, заявка № 2021664756 от 23.09.2021, зарегистрировано 01.10.2021, RU.

Основные материалы конференций

7. **Novikov M.** Numerical study of fracture connectivity response in seismic wavefields / M. Novikov [et al.] // SEG Technical Program Expanded Abstracts. International Exposition and 87th Annual Meeting (Houston, USA, 24-29 September 2017). – 2017. – P. 3786-3790.
8. **Novikov M.** Fracture Connectivity Effect on Seismic Attenuation in Fractured Porous Fluid-saturated Media / M. Novikov [et al.] // Saint Petersburg 2018: 8th Saint Petersburg International Conference and Exhibition Saint Petersburg 2018. Innovations in Geosciences - Time for Breakthrough (Saint Petersburg, Russia, 9-12 April 2018). – 2018. – C. 44614.
9. Khachkova T. Effect of chemical calcite dissolution by CO₂ on seismic velocities and attenuation - Numerical study / T. Khachkova, **M. Novikov** [et al.] // 81st EAGE Conference and Exhibition 2019 Embrace Change - Creativity for the Future (London, United Kingdom, 3-6 June 2019). – 2019. – P. 1-5.
10. **Novikov M.** Numerical analysis of mesoscale fracture connectivity effect on seismic attenuation in fractured porous fluid-saturated media / M. Novikov, V. Lisitsa // EAGE. Saint Petersburg 2020. Geosciences: Converting Knowledge into Resources (Saint Petersburg, Russia, 6-9 April 2020). – Saint Petersburg, 2020. – P. 1-5.
11. Numerical Algorithm of Seismic Wave Propagation and Seismic Attenuation Estimation in Anisotropic Fractured Porous Fluid-Saturated Media / **M. A. Novikov** [et al.] // 21st International Conference on Computational Science and Its Applications, ICCSA 2021. Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics) (Cagliari, Italy, September 13-16, 2021) – Springer International Publishing – Berlin – 2021 – V. 12949 LNCS – P. 434-448.
12. **Новиков М. А.** Численный анализ влияния микромасштабной анизотропии на сейсмическое затухание, вызванное индуцированными волной флюидопотоками, в трещиновато-пористых флюидонасыщенных средах /

М. А. Новиков, В. В. Лисица // Конференция международных математических центров мирового уровня: материалы конф. Сириус (Сочи, Россия, 9-13 августа 2021 г.). – Красноярск: Сиб. Федер. Ун-т, 2021. – С. 107