Туров Михаил Михайлович

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА — ЛИУВИЛЛЯ В ЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

1.1.2 — Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Челябинский государственный университет», на кафедре математического анализа.

Научный руководитель:
Федоров Владимир Евгеньевич,
доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:
Псху Арсен Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», директор Института прикладной математики и автоматизации
Ситник Сергей Михайлович,
доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», профессор
Ведущая организация:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет»

Защита диссертации состоится **«05» сентября 2023 года** в **14:00** на заседании диссертационного совета **24.1.074.03** при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, проспект Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ИМ СО РАН https://math.nsc.ru.

Автореферат разослан **«28» июля 2023 г.**

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.1.074.03,
кандидат физико-математических наук М. А. Скворцова

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. В последнее время наблюдается заметный рост внимания исследователей к дробному исчислению. Это обусловлено многочисленными эффективными приложениями дробного интегродифференцирования, возникающими при описании широкого класса физических и химических процессов (см. работы А. М. Нахушева, R. Hilfer, В. В. Учайкина, В. Е. Тарасова), а также при моделировании экономических и социально-биологических явлений. Получаемые при этом математические модели представляют собой дифференциальные уравнения с различными дробными производными. Поэтому развитие аналитического аппарата теории уравнений с дробными производными является актуальной и важной задачей. В монографиях А. М. Нахушева, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, А. В. Псху исследуются и систематизируются различные свойства уравнений с дробными производными и их решений, методы решений, классы краевых задач.

Степень разработанности темы исследования. История использования интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в математическом анализе начинается, по-видимому, в XVII веке. Публикации на данную тему связаны с именами Я. Бернулли, Лейбница, Лопиталя, Лагранжа, Эйлера, Лапласа, Фурье, Абеля, Лиувилля, Римана, Грюнвальда, Летникова, Хэвисайда, Зигмунда, Куранта и др. На сегодняшний день существуют десятки целых классов определений дробной производной. Отметим посвященные изучению дробных производных работы K. B. Oldham, J. Spanier, С. Г. Самко, А. А. Килбаса, О. И. Маричева, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, I. Podlubny, А. М. Нахушева, А. В. Псху, K. Diethelm, M. Kostić, С. М. Ситника, Э. Л. Шишкиной и др.

Уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной, как правило, по времени, изучались в работах А. Пуанкаре, C. W. Oseen, J. Leray, E. Hopf, О. А. Ладыженской в связи с исследованием системы уравнений Навье — Стокса, описывающей динамику вязкой несжимаемой жидкости. Работы С. Л. Соболева середины XX века, посвященные динамике идеальной равномерно вращающейся жидкости, привлекли повышенное внимание исследователей к не разрешенным относительно старшей производной по времени уравнениям, которые теперь часто называют уравнениями соболевского типа. В последние десятилетия отметим в этом направлении работы R. E. Showalter, Н. А. Сидорова, Б. В. Логинова, М. В. Фалалеева, Г. В. Демиденко, С. В. Успенского, И. И. Матвеевой, Ю. Е. Бояринцева, В. Ф. Чистякова, М. В. Булатова, А. И. Кожанова, С. Г. Пяткова, И. Е. Егорова, С. В. Попова, А. Г. Свешникова, М. О. Корпусова, А. Б. Альшина, Ю. Д. Плетнера, И. А. Шишмарева, Е. И. Кайкиной, П. И. Наумкина. Методами теории полугрупп операторов вырожденные эволюционные уравнения (когда оператор при старшей производной по времени не обратим) в банаховых и локально выпуклых пространствах исследуются в работах различных авторов: A. Favini, A. Yagi, Г. А. Свиридюка, И. В. Мельниковой, М. В. Фалалеева, В. Е. Федорова и его учеников.

В последние десятилетия теория полугрупп операторов получила свое обобщение на случай уравнений дробного порядка, см. работы E. G. Bajlekova, В. Е. Федорова и его соавторов. При этом разрешающие семейства операторов уже не обладают полугрупповым свойством. Отметим исследования дробных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах А. В. Глушака и его учеников, теорию J. Prüs разрешающих семейств интегральных эволюционных уравнений Вольтерра. Отдельные результаты об эволюционных уравнениях дробного порядка, не разрешенных относительно старшей дробной производной, получены в работах K. Balachandran, F. Li, однако, в этих работах используется условие непрерывной обратимости оператора при старшей дробной производной. Вопросы однозначной разрешимости существенно вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах исследуются в работах В. Е. Федорова и его учеников. Также отметим работы М. В. Плехановой и ее учеников, в которых вырожденные уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто в банаховых пространствах исследуются при условии относительной ограниченности пары операторов в уравнении, работы М. Костича, в которых методами теории разрешающих операторов исследуются интегро-дифференциальные эволюционные уравнения, включая вырожденные.

Постановка начальной задачи для линейного уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля неочевидна, в одномерном случае такое уравнение исследовалось многими авторами. Для задачи типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k}z(0) = z_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

для уравнения

$$D^{\alpha}z(t) = \sum_{l=1}^{n} B_l D^{\alpha_l} z(t), \tag{1}$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, однозначная разрешимость была показана в скалярном случае в работах I. Ozturk, S. Hadid, A. M. Нахушева при условии $\alpha_n < \alpha \leq 1$. В монографии A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo предложены m решений уравнения, которые при $\alpha_n < \alpha - m + 1$ являются линейно независимыми (теорема 5.3 на с. 291) и ставится вопрос об их линейной независимости при $\alpha_n \geq \alpha - m + 1$ (замечание 5.3 на с. 295). В работе А. В. Псху показано, что задача типа Коши для исходного уравнения однозначно разрешима при произвольных $z_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, тогда и только тогда, когда $\alpha_n < \alpha - m + 1$. Этот результат получен как следствие теоремы об однозначной разрешимости специальной начальной задачи. В работе Yu. F. Luchko, H. M. Srivastava исследована некоторая начальная задача для уравнения с многочленом от оператора производной Римана — Лиувилля, в работе R. Hilfer, Yu. F. Luchko, Z. Tomovski — начальная задача для уравнения с производной Хилфера, более общей, чем производная Римана — Лиувилля. Отметим также работы о разрешимости краевой задачи для системы уравнений с производными Римана — Лиувилля по разным переменным М. О. Мамчуева, специальных начальных задач для некоторых классов уравнений в банаховых пространствах с композицией производных Римана — Лиувилля А. В. Глушака.

Вопросы однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных и квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля или вырожденных, изучались в работах В. Е. Федорова и его соавторов при условиях на операторы в уравнении, необходимых и достаточных для существования аналитического разрешающего семейства операторов уравнения.

Задачи для дифференциальных уравнений с неизвестными коэффициентами и условиями переопределения, называемые обратными или обратными коэффиентными задачами, играют важную роль во многих прикладных исследованиях, когда характер процесса известен (задан вид уравнения его динамики), некоторые его параметры недоступны для прямого измерения (неизвестные коэффициенты), но могут быть определены с помощью дополнительных измерений доступных параметров (задание условий переопределения). Отметим работы о разрешимости обратных задач для параболических или близких к ним уравнений А. И. Прилепко, И. В. Тихонова, Ю. С. Эйдельмана, Д. Г. Орловского, И. А. Васина, А. Б. Костина, М. В. Фалалеева, M. Al Horani, A. Favini, С. Г. Пяткова, А. И. Кожанова. В последние годы активно исследуются различные обратные задачи для уравнений с дробными производными в работах А. В. Глушака, Д. Г. Орловского, В. Е. Федорова и его соавторов.

Цели и задачи. Целью диссертационной работы является исследование вопросов однозначной разрешимости начальных и краевых задач для линейных и квазилинейных уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля.

При проведении диссертационного исследования стояла задача нахождения корректной постановки задачи типа Коши для исследуемого класса уравнений, разрешенных относительно старшей производной Римана — Лиувилля. Исследовались вопросы однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейных и квазилинейных уравнений, разрешенных относительно производной Римана — Лиувилля, в случае ограниченных линейных операторов при производных и неограниченных линейных замкнутых операторов, порождающих аналитическое в секторе семейство разрешающих операторов. Эти результаты использованы при постановке и исследовании начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля, а также для некоторых обратных задач для таких уравнений. Абстрактные результаты нашли свои приложения к начально-краевым задачам для уравнений и систем уравнений в частных производных.

Научная новизна. Результатом исследования задачи типа Коши для линейного уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля стало введение в рассмотрение понятия *дефекта* задачи типа Коши — такой целочисленной неотрицательной величины $m^* \leq m-1$, что для существования конечных пределов $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha-m+k}z(t) = z_k$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, а значит, и для существования решения задачи типа Коши, необходимо выполнение равенств $z_k = 0$, $k = 0, 1, \dots, m^*-1$. Получаемая в итоге неполная задача типа Коши стала ответом на вопрос, возникший (явно или нет) в упомянутых выше работах о корректной постановке задачи типа Коши для уравнения (1) при $\alpha_n \geq \alpha - m + 1$.

При изучении линейного уравнения с неограниченными операторами при дробных производных в данной работе вводится в рассмотрение новый класс $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$, наборов линейных замкнутых плотно определенных операторов, показано, что принадлежность ему необходима и достаточна для существования единственного классического решения неполной задачи типа Коши для линейного однородного уравнения (1), которое аналитически продолжимо в сектор $\{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \theta_0 - \pi/2,\ t \neq 0\}$. Предложенный класс $\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ обобщает класс операторов $\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$, в который он переходит, если все операторы нулевые, кроме оператора при искомой функции. Однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейных и нелинейных уравнений с производной Римана — Лиувилля и оператором из $\mathcal{A}_{\alpha}(\theta_0, a_0)$ в правой части исследовались в работах В.Е.Федорова и его учеников.

Что касается квазилинейных уравнений, в настоящей работе с помощью понятия дефекта задачи типа Коши, которое в этом случае определяется с учетом наличия младших дробных производных и в нелинейном операторе, удалось исследовать уравнения без дополнительных ограничений на порядки младших дробных производных, от которых зависит нелинейный оператор.

Полученные результаты о начальных задачах для уравнений в банаховых пространствах использованы для исследования однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального оператора высокого порядка по пространственным переменным и с несколькими производными Римана — Лиувилля по времени. Рассмотрены как невырожденный случай, когда многочлен при старшей производной по времени не имеет корней на спектре эллиптического оператора, так и вырожденный, когда корни на спектре у этого многочлена имеются. Кроме того, путем редукции к уравнениям с несколькими дробными производными в банаховых пространствах удалось исследовать некоторые системы уравнений, описывающие динамику и термоконвекцию в вязкоупругих средах.

Теоретическая и практическая значимость работы. В диссертационной работе получены результаты, которые, с одной стороны, являются обобщением соответствующих результатов в теории дифференциальных уравнений дробного порядка на случай уравнений с несколькими дробными производными, а с другой стороны — обобщают различные факты теории полугрупп операторов на случай дробных дифференциальных уравнений. Тем самым, они вносят вклад в развитие теории уравнений с дробными производными и теории полугрупп операторов.

Результаты работы (условия однозначной разрешимости, вид решений линейных уравнений, методы доказательства существования нелинейных уравнений) могут быть использованы при исследовании конкретных прикладных задач, в частности, для корректной постановки возникающих при их решении начально-краевых задач, для разработки методов численного решения и др.

Методология и методы исследования. Исследование в диссертационной работе разбито на три части. Сначала изучаются уравнения с ограниченными операторными коэффициентами при производных Римана — Лиувилля в линейной части: линейные однородные и неоднородные уравнения, квазилинейные уравнения. Затем исследуются уравнения с неограниченными операторами в линейной части, предложено условие на набор этих операторов, необходимое и достаточное для существования аналитических разрешающих семейств операторов этого уравнения. В заключительной части рассматриваются вырожденные эволюционные уравнения. В предположении относительной спектральной ограниченности пары операторов при двух старших производных исходное уравнение редуцировано к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах, для которых рассмотрены соответствующие неполные задачи типа Коши. Существенно различаются случаи, когда дробная часть порядка второй производной равна, либо отличается от дробной части порядка старшей производной.

Линейные уравнения исследуются с использованием методов преобразования Лапласа и методов теории полугрупп операторов, адаптированных к теории разрешающих семейств операторов уравнений дробного порядка. Локальная однозначная разрешимость квазилинейных уравнений доказывается с помощью теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения в полном метрическом пространстве. Для этого неполная задача типа Коши для исходного уравнения сводится к интегро-дифференциальному уравнению меньшего порядка и для применения теоремы Банаха выбирается специальное функциональное пространство, полнота и другие свойства которого исследуются предварительно.

Положения, выносимые на защиту.

1. Исследована однозначная разрешимость неполной задачи типа Коши для линейных уравнений в банаховых пространствах с несколькими производными Римана — Лиувилля, разрешенных относительно старшей производной, в случае ограниченных операторов при дробных производных, а также в случае набора неограниченных операторов, порождающего аналитические в секторе разрешающие семейства операторов.
2. Получены условия локального существования единственного решения неполной задачи типа Коши для разрешенных относительно старшей производной Римана — Лиувилля квазилинейных уравнений в банаховых пространствах, линейная часть которых содержит ограниченные операторы при дробных производных, либо набор замкнутых операторов, порождающий аналитические в секторе разрешающие семейства операторов.
3. Исследованы вопросы однозначной разрешимости некоторых начальных задач для линейных уравнений в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей дробной производной Римана — Лиувилля при условии относительной спектральной ограниченности пары операторов при двух старших производных.
4. Исследованы вопросы разрешимости коэффициентных обратных задач для уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля в банаховых пространствах. Рассмотрены как разрешенные относительно старшей производной уравнения, так и вырожденные.
5. Полученные абстрактные результаты использованы для исследования однозначной разрешимости различных начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных с дробными производными Римана — Лиувилля по времени.

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность полученных результатов обоснована строгостью применяемых математических методов исследования, корректностью использования математического аппарата.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара кафедры математического анализа Челябинского государственного университета (руководитель проф. В. Е. Федоров), на межгородском научно-исследовательском семинаре «Неклассические задачи математической физики» (руководители проф. А. И. Кожанов, проф. И. Е. Егоров, проф. С. В. Попов, проф. С. Г. Пятков, проф. А. П. Солдатов, проф. В. Е. Федоров), на семинаре «Избранные вопросы математического анализа» (руководитель проф. Г. В. Демиденко), на семинаре «Прикладная гидродинамика» (руководители чл.-корр. РАН В. В. Пухначев, д.ф.-м.н. Е. В. Ерманюк); на конференциях: Международная научная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Уфа, 2021, 2022; Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», Нальчик, 2021; O. A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's, St. Petersburg, 2022; The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations, Moscow, 2022; Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 2022.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах [1–13], из которых 7 статей [1–7] опубликованы в журналах, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК, базы данных Web of Science и Scopus. Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежит постановка задачи и общее руководство. Из работ, выполненных в соавторстве с W.-S. Du [3] и B. T. Kien [5, 6], в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа объемом в 142 страницы содержит введение, 3 главы, заключение, список обозначений и соглашений, список литературы, состоящий из 150 источников.

Основное содержание диссертационной работы

Во **введении** описаны актуальность темы исследования, историография вопроса, постановка задачи, новизна полученных результатов, их теоретическая и практическая значимость, методы исследования, выносимые на защиту положения, степень достоверности и апробации, краткое содержание работы.

Цель **первой главы** — вывод условий разрешимости начальных задач для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geq 0$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$, здесь и далее $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства $\mathcal{X}$ в банахово пространство $\mathcal{Y}$, $\mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X})$, D_t^γ — дробная производная Римана — Лиувилля, J_t^γ — дробный интеграл Римана — Лиувилля. После введения во втором параграфе первой главы описаны свойства дробной производной Римана — Лиувилля $D_t^\alpha h(t) = D_t^m J_t^{m-\alpha} h(t)$, $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, где D_t^m — обычная производная целого порядка, $J_t^{m-\alpha} := \int\limits_0^t g_{m-\alpha}(t-s) h(s) ds$ — дробный интеграл Римана — Лиувилля, $g_{m-\alpha}(t) := t^{m-\alpha-1}/\Gamma(m-\alpha)$ для $t > 0$.

Под решением уравнения (2) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $J_t^{m_l-\alpha_l} z \in C^{m_l}(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $J_t^{\beta_s} z \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, и выполняется равенство (2) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Во втором параграфе первой главы вводится понятие *дефекта задачи типа Коши* и обосновывается необходимость его использования. Предполагается исследовать уравнение (2) с помощью преобразования Лапласа, для этого должны быть известны значения

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \quad D_t^\gamma z(0) = y_\gamma, \quad \gamma \in \Lambda, \tag{3}$$

где $z_k, y_\gamma \in \mathcal{Z}$, $k = 0, 1, \dots, m-1$, $\gamma \in \Lambda$. Здесь через Λ обозначено множество $\{\alpha_1 - 1, \alpha_1 - 2, \dots, \alpha_1 - m_1, \alpha_2 - 1, \alpha_2 - 2, \dots, \alpha_n - m_n\}$. Выполнение начальных условий понимается в предельном смысле в норме пространства $\mathcal{Z}$. Установим, в каком случае указанные начальные условия совместны.

Лемма 1. *Пусть* $T > 0$, $J_t^{m-\alpha} z \in C([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{Z})$, $z_0 = \lim\limits_{t \to 0+} J_t^{m-\alpha} z(t) \neq 0$. *Тогда* $z(t) \sim t^{\alpha-m} z_0 / \Gamma(\alpha - m + 1)$ *при* $t \to 0+$.

Лемма 2. *Пусть* $T > 0$, *при некотором* $k \in \mathbb{N}$, $D_t^{\alpha-m+k} z \in C([0,T];\mathcal{Z}) \cap C^1((0,T];\mathcal{Z})$, $z_k = \lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha-m+k} z(t) \neq 0$. *Тогда* $z(t) \sim t^{\alpha-m+p} z_p / \Gamma(\alpha - m + p + 1)$ *при* $t \to 0+$ *для некоторых* $p \in \{0, 1, \dots, k\}$, $z_p \in \mathcal{Z} \setminus \{0\}$.

Следствие 1. *Если* $\alpha > \alpha_l$, $\alpha_l - m_l > \alpha - m$ *для какого-то* $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ *и при некотором* $k \in \{0, 1, \dots, m_l - 1\}$ $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha_l - m_l + k} z(t) \neq 0$, *то не существует решения задачи* (2), (3).

Следствие 2. *Если* $\alpha > \alpha_l$, $\alpha_l - m_l < \alpha - m$ *для какого-то* $l \in \{1, 2, \dots, n\}$ *и при некотором* $k \in \{0, 1, \dots, m_l - 1\}$ $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha_l - m_l + k} z(t) \neq 0$, *то не существует решения задачи* (2), (3).

Введём обозначения

$$\underline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\, \alpha_l - m_l < \alpha - m\}, \quad \underline{m} = \lceil \underline{\alpha} \rceil,$$
$$\overline{\alpha} := \max\{\alpha_l : l \in \{1, 2, \dots, n\},\, \alpha_l - m_l > \alpha - m\}, \quad \overline{m} = \lceil \overline{\alpha} \rceil.$$

Следствие 3. *Если* $\underline{\alpha} > 1$ *и* $z_k \neq 0$ *при каком-либо* $k \in \{0, 1, \dots, \underline{m} - 2\}$, *то не существует решения задачи* (2), (3).

Следствие 4. *Если* $\overline{\alpha} > 0$ *и* $z_k \neq 0$ *при каком-либо* $k \in \{0, 1, \dots, \overline{m} - 1\}$, *то не существует решения задачи* (2), (3).

Поэтому для уравнения (2) имеет смысл рассматривать только, вообще говоря, неполную задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \ k = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1. \tag{4}$$

Параметр $m^* := \{\underline{m} - 1, \overline{m}\}$, определяемый набором чисел $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, назовем *дефектом задачи типа Коши* (4) для уравнения (2). При этом остальные начальные данные в (3) с необходимостью равны нулю.

Под решением уравнения (2) с начальными условиями (4) будем понимать такую функцию $z : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$, что $J_t^{m-\alpha} z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathcal{Z}) \cap C^m(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $J_t^{m_l - \alpha_l} z \in C^{m_l}(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \dots, n$, $J_t^{\beta_s} z \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \dots, r$, выполняется равенство (2) при $t \in \mathbb{R}_+$ и условия (4).

В третьем параграфе доказана теорема об однозначной разрешимости задачи типа Коши для однородного уравнения.

Теорема 1. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \geq 0$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^* + 1, \dots, m - 1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2), (4), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p, Z_p(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-\alpha} R_\lambda \cdot \left(\lambda^{m-1-p} I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-1-p} A_j \right) e^{\lambda t} d\lambda,$$

$$R_\lambda := \left(I - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j - \sum_{l=1}^{n} \lambda^{\alpha_l - \alpha} B_l - \sum_{s=1}^{r} \lambda^{-\beta_s - \alpha} C_s \right)^{-1},$$

контур $\Gamma = \Gamma_+ \cup \Gamma_- \cup \Gamma_0$, $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\}$, $\Gamma_+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\}$, $\Gamma_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}$, $r_0 > 0$ — *достаточно большое число.*

В четвёртом параграфе рассматривается неоднородное уравнение

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + f(t),\ t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Теорема 2. *Пусть* $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geq 0$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $f \in C((0,T);\mathcal{Z}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Z})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (4), (5), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p + \int_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds.$$

Замечание 1. Неравенство $\alpha_n < \alpha - m + 1$ равносильно совокупности двух соотношений $\underline{m} \leq 1$, $\overline{m} = 0$, а потому и равенству $m^* = 0$, при котором в силу теоремы 1 полная задача типа Коши (4) для уравнения (2) однозначно разрешима, что соответствует результатам работ I. Ozturk, S. Hadid, A. M. Нахушева, полученным при $\alpha_n < \alpha \leq 1$, и монографии A. A. Килбаса с соавторами — при любых $\alpha > 0$. Кроме того, условие $m^* = 0$ является не только достаточным, но и необходимым для однозначной разрешимости задачи (2), (4) в силу следствий 3, 4, что соответствует утверждению следствия 1 из работы А. В. Псху.

Пятый параграф первой главы посвящен исследованию обратной задачи для уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + \varphi(t) u \quad (6)$$

с интегральным условием переопределения $\int_0^T z(t) d\mu(t) = z_T$ и начальными условиями типа Коши (4). Назовем такую задачу корректной, если для любых $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ существует единственное решение $u \in \mathcal{Z}$, такое, что $\|u\|_{\mathcal{Z}} \leq C(\|z_{m^*}\|_{\mathcal{Z}} + \|z_{m^*+1}\|_{\mathcal{Z}} + \cdots + \|z_{m-1}\|_{\mathcal{Z}} + \|z_T\|_{\mathcal{Z}})$, где $C > 0$ не зависит от z_k, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, и z_T. При заданных $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$, $z_T \in \mathcal{Z}$ обозначим

$$\psi := z_T - \int_0^T \sum_{p=m^*}^{m-1} Z_p(t) z_p d\mu(t), \quad \chi := \int_0^T d\mu(t) \int_0^t Z_{m-1}(t-s) \varphi(s) ds.$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m-1 < \alpha \leq m$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geq 0$, $A_j \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $B_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, $\varphi \in C((0,T];\mathbb{R}) \cap L_1(0,T;\mathbb{R})$, $\mu : [0,T] \to \mathbb{R}$ *имеет ограниченную вариацию, при* $m^* = 0$ *существует такое* $\varepsilon \in (0,T]$, *что* $\mu \in C^1([0,\varepsilon];\mathbb{R})$. *Тогда для корректности задачи типа Коши с интегральным условием переопределения уравнения* (6) *необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор* $\chi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. *При этом решение имеет вид* $u = \chi^{-1}\psi$.

В шестом параграфе исследуются квазилинейные уравнения специального вида. Седьмой параграф посвящен квазилинейным уравнениям общего вида

$$
\begin{aligned}
D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t) + \\
+F(t, D_t^{\alpha-m-\varrho} z(t), \dots, D_t^{\alpha-1} z(t), D_t^{\gamma_1} z(t), D_t^{\gamma_2} z(t), \dots, D_t^{\gamma_q} z(t)).
\end{aligned} \tag{7}
$$

Введены в рассмотрение специальные пространства, доказаны их свойства, необходимые для использования теоремы о неподвижной точке. Начальная задача редуцирована к интегро-дифференциальному уравнению, доказана теоремы об однозначной локальной разрешимости задачи типа Коши.

Определим $\mu^* := m^*(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma_1 + 1, \gamma_2 + 1, \dots, \gamma_q + 1) \in \mathbb{Z}$. Здесь приходится определять дефект μ^* не только по α_k, $k = 1, 2, \dots, n$, а еще и по числам $\gamma_i + 1$, $i = 1, 2, \dots, q$. На случай, когда $\mu^* < 0$ (это может произойти, если $B_l = 0$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\gamma_i < \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$), введем в рассмотрение величину $\mu_0^* := \max\{\mu^*, 0\}$. В силу следствий 1–4 для решения задачи Коши

$$
D_t^{\alpha-m+k} z(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{8}
$$

для уравнения будем рассматривать следующие начальные условия:

$$
D^{\alpha-m+k} z(t_0) = 0, \quad k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \dots, m-1. \tag{9}
$$

Лемма 3. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$. Тогда линейное пространство $C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z}) : J_t^{m-\alpha} x \in C^{m-1}([t_0, t_1]; \mathcal{Z}) \cap C^m((t_0, t_1]; \mathcal{Z}),$ $(t - t_0)^{m-\alpha} D_t^\alpha x(t) \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})\}$ с нормой $\|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} := \|J_t^{m-\alpha} x\|_{C^{m-1}([t_0,t_1];\mathcal{Z})} +$ $\|(t - t_0)^{m-\alpha} D_t^\alpha x(t)\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ является банаховым.*

Следствие 5. *Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ в условиях данного параграфа. Тогда при каждом $k \in \mathbb{Z}$, $k \le m - 1$ существуют такие $C_k > 0$, $\delta \in (0, 1)$, что для любых $t, \tau \in [t_0, t_1]$*

$$
\begin{gathered}
\|D_t^{\alpha-m+k} x(t) - D_t^{\alpha-m+k} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \le C_k \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} |t - \tau|, \quad k < m - 1, \\
\|D_t^{\alpha-1} x(t) - D_t^{\alpha-1} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \le C_{m-1} \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} |t - \tau|^\delta.
\end{gathered}
$$

Лемма 4. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z})$, $n - 1 < \beta \le n \in \mathbb{Z}$, $\beta < \alpha$, $\alpha - m \ne \beta - n$. Тогда $D_t^\beta x \in C((t_0, t_1]; \mathcal{Z})$.*

Пусть $C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z}) := \{x \in C_\alpha(t_0, t_1; \mathcal{Z}) : D_t^{\alpha-m+k} x(t_0) = 0,\ k = 0, \dots, \mu_0^* - 1\}$.

Следствие 6. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ в условиях данного параграфа. Тогда $D_t^{\gamma_i} x \in C([t_0, t_1]; \mathcal{Z})$, $i = 1, 2, \dots, q$, и существует такое $C_1 > 0$, что для всех $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ $\|D_t^{\gamma_i} x\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})} \le C_1 \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})}$.*

Следствие 7. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $x \in C_{\alpha;\mu_0^*}(t_0, t_1; \mathcal{Z})$ в условиях данного параграфа. Тогда при каждом $i = 1, 2, \dots, q$ существуют такие $C_i > 0$, $\delta_i \in (0, 1)$, что для любых $t, \tau \in [t_0, t_1]$ $\|D_t^{\gamma_i} x(t) - D_t^{\gamma_i} x(\tau)\|_{\mathcal{Z}} \le C_i \|x\|_{C_\alpha(t_0,t_1;\mathcal{Z})} |t - \tau|^{\delta_i}$.*

Теорема 4. *Пусть $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \le m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \ne \alpha - m$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \ge 0$, $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_q < \alpha$, $n_i - 1 < \gamma_i \le n_i \in \mathbb{Z}$, $\gamma_i - n_i \ne \alpha - m$, $i = 1, 2, \dots, q$, $A_j, B_l, C_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m - 1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k \in \mathcal{Z}$, $k = \mu_0^*, \mu_0^* + 1, \dots,$ $m-1$, Z открыто в $\mathbb{R} \times \mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0, 0, 0, \dots, 0, z_{\mu_0^*}, z_{\mu_0^*+1}, \dots, z_{m-1}, 0, 0, \dots, 0) \in Z$, отображение $F \in C(Z; \mathcal{Z})$ локально липшицево по $\overline{x}$. Тогда существует такое $t_1 > t_0$, что задача (7), (9) имеет единственное решение на $[t_0, t_1]$.*

В восьмом параграфе полученные результаты о начальных задачах для уравнений дробного порядка в банаховых пространствах были использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

В разделе 1.8.1 рассмотрены уравнения с многочленами от самосопряженного оператора. Пусть заданы многочлены $P_1(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} a_p\lambda^p$, $P_2^j(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} b_p^j\lambda^p$, $P_3^l(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} c_p^l\lambda^p$, $P_4^s(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{\nu} d_p^s\lambda^p$, $a_p, b_p^j, c_p^l, d_p^s \in \mathbb{C}$, $p = 0, 1, \dots, \nu \in \mathbb{N}$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$, $a_\nu \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\mathcal{A}w)(\xi) = \sum_{|q|\le 2\rho} a_q(\xi)\frac{\partial^{|q|}w(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}},\ \ a_q \in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(\mathcal{B}_l w)(\xi) = \sum_{|q|\le \rho_l} b_{lq}(\xi)\frac{\partial^{|q|}w(\xi)}{\partial\xi_1^{q_1}\partial\xi_2^{q_2}\dots\partial\xi_d^{q_d}},\ \ b_{lq} \in C^\infty(\partial\Omega),\ l = 1, 2, \dots, \rho,$$

$q = (q_1, q_2, \dots, q_d) \in \mathbb{N}_0^d$, $|q| = q_1 + \dots + q_d$, операторный пучок $\mathcal{A}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_\rho$ регулярно эллиптичен. Пусть оператор $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ задан на

$$D_{\mathcal{A}_1} = H^{2\rho}_{\{\mathcal{B}_l\}}(\Omega) := \{w \in H^{2\rho}(\Omega) : \mathcal{B}_l w(\xi) = 0,\ l = 1, 2, \dots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\},$$

$\mathcal{A}_1 w := \mathcal{A}w$. Предположим, что $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ действительный и дискретный. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора $\mathcal{A}_1$, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Возьмем $m - 1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m_l - 1 < \alpha_l \le m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \dots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \dots > \beta_r \ge 0$, $h : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$. Определим по набору чисел $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ дефект m^* и рассмотрим начально-краевую задачу

$$D_t^{\alpha-m+k}v(\xi, 0) = v_k(\xi),\ k = m^*, m^*+1, \dots, m-1,\quad \xi \in \Omega, \tag{10}$$

$$\mathcal{B}_l\mathcal{A}^k v(\xi, t) = 0,\ \ k = 0, 1, \dots, \nu-1,\ \ l = 1, 2, \dots, \rho,\ \ (\xi, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \tag{11}$$

$$\begin{aligned} D_t^\alpha P_1(\mathcal{A})v(\xi, t) = \sum_{j=1}^{m-1} P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}v(\xi, t) + \sum_{l=1}^{n} P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}v(\xi, t) + \\ + \sum_{s=1}^{r} P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}v(\xi, t) + h(\xi, t),\ \ (\xi, t) \in \Omega \times (0, T). \end{aligned} \tag{12}$$

Положим $\mathcal{X} = \{w \in H^{2\rho\nu}(\Omega) : \mathcal{B}_l\mathcal{A}^k w(\xi) = 0,\ k = 0, 1, \dots, \nu-1,\ l = 1, 2, \dots, \rho,\ \xi \in \partial\Omega\}$, $\mathcal{Y} = L_2(\Omega)$, $L := P_1(\mathcal{A}), M_j := P_2^j(\mathcal{A}), N_l := P_3^l(\mathcal{A}), S_s := P_4^s(\mathcal{A}) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$.

Пусть $P_1(\lambda_k) \neq 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}; \mathcal{X})$ и задача (10)–(12) представима в виде задачи (4), (5), где $\mathcal{Z} = \mathcal{X}$, $A_j = L^{-1}M_j, B_l = L^{-1}N_l, C_s = L^{-1}S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j = 1, 2, \dots, m-1$, $l = 1, 2, \dots, n$, $s = 1, 2, \dots, r$, $z_k = v_k(\cdot)$, $k = m^*, m^*+1, \dots, m-1$, $f(t) = L_1^{-1}h(\cdot, t)$, $t \in (0, T)$. По теореме 2 задача (10)–(12) однозначно разрешима при любых $v_k \in \mathcal{X}$, если $h \in C((0, T); L_2(\Omega)) \cap L_1(0, T; L_2(\Omega))$.

Рассмотрим уравнение в $\Omega \times (0, T]$

$$
\begin{gathered}
D_t^\alpha P_1(\mathcal{A})v(\xi,t)=\sum_{j=1}^{m-1}P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}v(\xi,t)+\\
+\sum_{l=1}^{n}P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}v(\xi,t)+\sum_{s=1}^{r}P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}v(\xi,t)+\varphi(t)w(\xi)
\end{gathered}
\tag{13}
$$

с начальными и краевыми условиями (10), (11) и условием переопределения

$$
\int_0^T v(\xi,t)d\mu(t)=v_T(\xi),\quad \xi\in\Omega. \tag{14}
$$

В силу теоремы 3 задача (10), (11), (13), (14) корректна тогда и только тогда, когда при некотором $c>0$ для всех $k\in\mathbb{N}$

$$
\left|\int_0^T\int_0^t\int_\Gamma R_{\lambda,k}P_1(\lambda_k)e^{\lambda(t-s)}d\lambda\varphi(s)dsd\mu(t)\right|\geq c, \tag{15}
$$

$$
R_{\lambda,k}:=\left(\lambda^\alpha P_1(\lambda_k)-\sum_{j=1}^{m-1}\lambda^{\alpha+j-m}P_2^j(\lambda_k)-\sum_{l=1}^{n}\lambda^{\alpha_l}P_3^l(\lambda_k)-\sum_{s=1}^{r}\lambda^{-\beta_s}P_4^s(\lambda_k)\right)^{-1}.
$$

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$
D_t^{\alpha-m+k}u(\xi,0)=u_k(\xi),\ k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\ldots,m-1,\quad \xi\in\Omega, \tag{16}
$$

$$
\mathcal{B}_l\mathcal{A}^k u(\xi,t)=0,\ \ k=0,1,\ldots,\nu-1,\ \ l=1,2,\ldots,\rho,\ \ (\xi,t)\in\partial\Omega\times(t_0,t_1], \tag{17}
$$

$$
\begin{gathered}
P_1(\mathcal{A})D_t^\alpha u(\xi,t)=\sum_{j=1}^{m-1}P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}u(\xi,t)+\\
+\sum_{l=1}^{n}P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}u(\xi,t)+\sum_{s=1}^{r}P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}u(\xi,t)+\\
+H(\xi,D_t^{\alpha-m}(\xi,t),\ldots,D_t^{\alpha-1}(\xi,t),D_t^{\gamma_1}(\xi,t),\ldots,D_t^{\gamma_q}(\xi,t)),
\end{gathered}
\tag{18}
$$

при $(\xi,t)\in\Omega\times(t_0,t_1]$. Положим $\rho_0\geq 0$, $\mathcal{X}:=\{v\in H^{2\rho\nu+\rho_0}(\Omega):\mathcal{B}_l\mathcal{A}^k v(\xi)=0,\ k=0,1,\ldots,\nu-1,\ l=1,2,\ldots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $\mathcal{Y}:=H^{\rho_0}(\Omega)$ — пространство Соболева $W_2^{\rho_0}(\Omega)$ при $\rho_0>0$ или пространство Лебега $L_2(\Omega)$, если $\rho_0=0$. Если $P_1(\lambda_k)\neq 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{Y};\mathcal{X})$ и задача (16)–(18) представима в виде (7), (9), где $\mathcal{Z}=\mathcal{X}$, $A_j=L^{-1}M_j, B_l=L^{-1}N_l, C_s=L^{-1}S_s\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\ldots,m-1$, $l=1,2,\ldots,n$, $s=1,2,\ldots,r$, $z_k=u_k(\cdot)$, $k=\mu_0^*,\ldots,m-1$, $F(x_0,x_1,\ldots,x_{m+q})=L^{-1}H(\cdot,x_0,x_1,\ldots,x_{m+q})$.

Теорема 5. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leq m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\ldots,n$, $\beta_1>\beta_2>\cdots>\beta_r\geq 0$, $\gamma_1<\gamma_2<\cdots<\gamma_q<\alpha$, спектр $\sigma(\mathcal{A}_1)$ не содержит начало координат и нулей многочлена P_1, $4\rho\nu+2\rho_0>d$, $u_k\in\mathcal{X}$, $k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\ldots,m-1$, $H\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^{m+q+1};\mathbb{R})$. Тогда для некоторого $t_1>t_0$ существует единственное решение задачи* (16)–(18).

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$
D_t^{\alpha-m+k}v(\xi,0)=v_k(\xi),\quad \xi\in\Omega,\quad k=m^*,m^*+1,\ldots,m-1, \tag{19}
$$

$$
v(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T], \tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
D_t^\alpha v(\xi,t)=\chi D_t^{\delta_1}\Delta v(\xi,t)+\nu D_t^{\delta_2}\Delta v(\xi,t)+\kappa D_t^{\delta_3}\Delta v(\xi,t)-\\
-r(\xi,t)+g(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],
\end{gathered}
\tag{21}
$$

$$
\nabla\cdot v(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T], \tag{22}
$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$, $\alpha, \chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\delta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, $m-1 < \max\{\alpha, \delta_1, \delta_2, \delta_3\} \leq m \in \mathbb{N}$, некоторые или все числа δ_i могут быть отрицательными. Здесь D_t^β — дробная производная Римана — Лиувилля порядка $\beta \geq 0$ (или дробный интеграл Римана — Лиувилля порядка $-\beta > 0$ в случае $\beta < 0$) по переменной t, m^* — дефект задачи типа Коши. Неизвестными являются вектор-функции скорости $v = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ и градиента давления $r = (r_1, r_2, \ldots, r_d) = \nabla p$, вектор-функция $g : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$ задана.

Теорема 6. *Пусть* $\delta_1 > \alpha > \delta_2 > \delta_3$, $m - 1 < \delta_1 \leq m \in \mathbb{N}$, $\chi, \nu, \kappa \in \mathbb{R}$, $\chi \neq 0$, $v_k \in \mathbb{L}_2$ *при* $k = m^*, m^* + 1, \ldots, m - 1$, $B^{-1}\Sigma g \in C([0, T]; \mathbb{H}_\sigma)$. *Тогда задача* (19)–(22) *имеет единственное решение.*

Во **второй главе** исследуются линейное и квазилинейное уравнения с неограниченными операторами в банаховом пространстве $\mathcal{Z}$. При $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$ вводится в рассмотрение класс $\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0, a_0)$ наборов линейных замкнутых операторов, пересечение областей определения $\mathcal{D}$ которых плотно в пространстве $\mathcal{Z}$ и снабжено нормой, представляющей собой сумму норм графиков этих операторов. Обозначим $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ — множество линейных замкнутых плотно определенных в пространстве $\mathcal{X}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{Y}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{X}; \mathcal{X}) := \mathcal{C}l(\mathcal{X})$. Пусть $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geq 0$. Через $\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0, a_0)$ обозначим класс наборов операторов A_1, A_2, ..., A_{m-1}, B_1, B_2, ..., B_n, C_1, C_2, ..., $C_r \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия: (i) $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{Z}$; (ii) при всех $\lambda \in S_{\theta_0, a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0\}$, $p = m^*, \ldots, m - 1$ существуют операторы $R_\lambda \cdot \left(I - \sum\limits_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j\right) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$; (iii) при любых $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $a > a_0$ существует такое $K(\theta, a)$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a}$, $p = m^*, m^*+1, \ldots, m-1$
$$\left\| R_\lambda \cdot \left(I - \sum_{j=p+1}^{m-1} \lambda^{j-m} A_j\right) \right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leq \frac{K(\theta,a)}{|\lambda-a|^{\alpha-m+p+1}|\lambda|^{m-p-1}}.$$

Замечание 2. При $\beta_r = 0$ выполняется условие $(0, \ldots, 0, C_r) \in \mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0, a_0)$ тогда и только тогда, когда $C_r \in \mathcal{A}_\alpha(\theta_0, a_0)$, при $\alpha = 1$ такие операторы называются секториальными.

В первом параграфе второй главы вводится понятие разрешающих семейств операторов. Во втором параграфе доказана теорема о преобразовании Лапласа аналитической в секторе функции. В третьем и четвертом параграфах получены разрешающие семейства операторов для линейного однородного уравнения, описаны некоторые их свойства, доказаны теоремы об однозначной разрешимости задачи типа Коши для однородного уравнения.

Рассмотрим линейное уравнение с неограниченными операторами
$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{j=1}^{m-1} A_j D_t^{\alpha-m+j} z(t) + \sum_{l=1}^{n} B_l D_t^{\alpha_l} z(t) + \sum_{s=1}^{r} C_s J_t^{\beta_s} z(t), \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{23}$$
с начальными условиями
$$D_t^{\alpha-m+k} z(0) = z_k, \ k = m^*, m^* + 1, \ldots, m - 1. \tag{24}$$

Пусть $p \in \{0, 1, \ldots, m - 1\}$. Семейство операторов $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ называется *p-разрешающим* для уравнения (23), если выполняются следующие условия: (i) $\{S_p(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ сильно непрерывно при $t > 0$; (ii) при $t > 0$ $S_p(t)[D_{A_j}] \subset D_{A_j}$, $S_p(t)A_j x = A_j S_p(t)x$ для всех $x \in D_{A_j}$, $j = 1, 2, \ldots, m - 1$; $S_p(t)[D_{B_l}] \subset D_{B_l}$, $S_p(t)B_l x = B_l S_p(t)x$ для всех $x \in D_{B_l}$,

$l=1,2,\dots,n$; $S_p(t)[D_{C_s}]\subset D_{C_s}$, $S_p(t)C_sx=C_sS_p(t)x$ для всех $x\in D_{C_s}$, $s=1,2,\dots,r$; (iii) при любом $z_p\in\mathcal{D}$ $S_p(t)z_p$ является решением задачи (23), (24) при $z_l=0$ для всех $l\in\{0,1,\dots,m-1\}\setminus\{p\}$.

Теорема 7. *Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\le m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\ne\alpha-m$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\ge 0$, $A_j,B_l,C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $l=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,r$, $\mathcal{D}$ плотно $\mathcal{Z}$. Тогда существуют p-разрешающие семейства операторов $\{S_p(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t>0\}$ уравнения (23) типа $(\theta_0,a_0,\alpha-m+p)$, $p=m^*,\dots,m-1$, если и только если $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0)$. При этом для $p=m^*,\dots,m-1$ $S_p(t)=Z_p(t):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma\lambda^{m-1-p}R_\lambda\left(I-\sum\limits_{j=p+1}^{m-1}\lambda^{j-m}A_j\right)e^{\lambda t}d\lambda$.*

Если $z_p\in\mathcal{D}$, $p=m^*,m^*+1,\dots,m-1$, то существует единственное решение задачи (23), (24), при этом оно имеет вид $z(t)=\sum\limits_{p=m^*}^{m-1}Z_p(t)z_p$. Решение аналитически продолжимо в сектор $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Замечание 3. p-Разрешающие семейства $\{S_p(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t>0\}$ при $p>m^*$ можно определить по m^*-разрешающему семейству $\{S_{m^*}(t)\in\mathcal{L}(\mathcal{Z}):t>0\}$ и операторам A_j, $j=m^*+1,m^*+2,\dots,p$.

В пятом параграфе исследуется неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD_t^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD_t^{\alpha_l}z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ_t^{\beta_s}z(t)+f(t),\qquad(25)$$

$t\in(0,T)$, с начальными условиями (24).

Теорема 8. *Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\le m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\ne\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\ge 0$, $A_j,B_l,C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $l=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,r$, $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_\alpha(\theta_0,a_0)$, $z_k\in\mathcal{Z}$, $k=m^*,m^*+1,\dots,m-1$, $f\in[C((0,T);\mathcal{D})\cap L_1(0,T;\mathcal{D})]\cup C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ при некотором $\gamma\in(0,1]$. Тогда существует единственное решение задачи (24), (25), при этом оно имеет вид $z(t)=\sum\limits_{p=m^*}^{m-1}Z_p(t)z_p+\int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds$.*

В шестом параграфе исследуются квазилинейные уравнения, в которых нелинейный оператор зависит от дробных производных, дробные части порядков которых равны. В седьмом параграфе вводятся вспомогательные функциональные пространства, доказываются некоторые их свойства.

Лемма 5. *Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $\gamma\in(0,1]$. Тогда линейное пространство $C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z}):=\{x\in C((t_0,t_1];\mathcal{Z}):(t-t_0)^{m-\alpha}x(t)\in C([t_0,t_1];\mathcal{Z}),$ $J^{m-\alpha}x\in C^{m-1,\gamma}([t_0,t_1];\mathcal{Z})\}$ с нормой $\|x\|_{C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z})}:=\|(t-t_0)^{m-\alpha}x(t)\|_{C([t_0,t_1];\mathcal{Z})}+\|J^{m-\alpha}x\|_{C^{m-1,\gamma}([t_0,t_1];\mathcal{Z})}$ является банаховым.*

Определим пространство

$$C_{\alpha,\gamma;\mu_0^*}(t_0,t_1;\mathcal{Z}):=\{x\in C_{\alpha,\gamma}(t_0,t_1;\mathcal{Z}):D^{\alpha-m+k}x(t_0)=0,\ k=0,1,\dots,\mu_0^*-1\}.$$

В восьмом параграфе исследуется квазилинейное уравнение общего вида с неограниченными операторами. Сначала задача редуцируется к интегродифференциальному уравнению, затем доказывается теорема об однозначной разрешимости квазилинейного уравнения

$$
\begin{gathered}
D^{\alpha}z(t)=\sum_{j=1}^{m-1}A_jD^{\alpha-m+j}z(t)+\sum_{l=1}^{n}B_lD^{\alpha_l}z(t)+\sum_{s=1}^{r}C_sJ^{\beta_s}z(t)+\\
+F(t,D^{\alpha-m-\varrho}z(t),\dots,D^{\alpha-1}z(t),D^{\gamma_1}z(t),D^{\gamma_2}z(t),\dots,D^{\gamma_q}z(t)).
\end{gathered}\tag{26}
$$

Определим $\mu^*:=m^*(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\gamma_1+1,\gamma_2+1,\dots,\gamma_q+1)$, $\mu_0^*:=\max\{\mu^*,0\}$.

.
$$
D^{\alpha-m+k}z(t_0)=z_k,\quad k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\dots,m-1.\tag{27}
$$

Теорема 9. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leq m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $\gamma_1<\gamma_2<\dots<\gamma_q<\alpha-1$, $n_i-1<\gamma_i\leq n_i\in\mathbb{Z}$, $\gamma_i-n_i\neq\alpha-m$, $i=1,2,\dots,q$, $A_j,B_l,C_s\in\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $j=1,2,\dots,m-1$, $l=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,r$, $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0,a_0)$, $z_k\in\mathcal{D}$, $k=\mu_0^*,\mu_0^*+1,\dots,m-1$, Z открыто в $\mathbb{R}\times\mathcal{Z}^{m+\varrho+q}$, $(t_0,0,0,\dots,0,z_{\mu_0^*},z_{\mu_0^*+1},\dots,z_{m-1},0,0,\dots,0)\in Z$, отображение $F\in C(Z;\mathcal{Z})$ локально липшицево. Тогда существует такое $t_1>t_0$, что задача* (26), (27) *имеет единственное решение на $(t_0,t_1]$.*

В девятом параграфе полученные результаты при исследовании начальных задач для уравнений дробного порядка в банаховых пространствах использованы для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений в частных производных дробного порядка по времени. Как в разделе 1.8, возьмем многочлены $P_1(\lambda)$, $P_2^j(\lambda)$, $P_3^l(\lambda)$, $P_4^s(\lambda)$. Обозначим $\nu_1=\max\{p\in\{0,1,\dots,\nu-1\}:a_p\neq0\}$, $\nu_2^j=\max\{p\in\{0,1,\dots,\nu\}:b_p^j\neq0\}$, $j\in J\subset\{1,2,\dots,m-1\}$, $\nu_3^l=\max\{p\in\{0,1,\dots,\nu\}:c_p^l\neq0\}$, $l=1,2,\dots,n$, $\nu_4^s=\max\{p\in\{0,1,\dots,\nu\}:d_p^s\neq0\}$, $s=1,2,\dots,r$. В предположении, что $P_1(\lambda_k)\neq0$ при всех $k\in\mathbb{N}$, зададим пространство $\mathcal{X}=\{w\in H^{2\rho\nu_1}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,\ k=0,1,\dots,\nu_1-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $A_j=P_1(\mathcal{A}_1)^{-1}P_2^j(\mathcal{A}_1)$, $D_{A_j}=\{w\in H^{2\rho\nu_2^j}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,k=0,1,\dots,\nu_2^j-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $j=1,2,\dots,m-1$, $B_l=P_1(\mathcal{A}_1)^{-1}P_3^l(\mathcal{A}_1)$, $D_{B_l}=\{w\in H^{2\rho\nu_3^l}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,\ k=0,1,\dots,\nu_3^l-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $l=1,2,\dots,n$, $C_s=P_1(\mathcal{A}_1)^{-1}P_4^s(\mathcal{A}_1)$, $D_{C_s}=\{w\in H^{2\rho\nu_4^s}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,\ k=0,\dots,\nu_4^s-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $s=1,2,\dots,r$. Возьмем $0<\alpha<2$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\leq m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\neq\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\geq0$.

Теорема 10. *Пусть в условиях данного параграфа выполняются условия:*

(i) *в случае нечетного $\nu-\nu_1$, $b_\nu^j/a_{\nu_1}\geq0$, $j\in J$, $c_\nu^l/a_{\nu_1}\geq0$, $l=1,2,\dots,n$, $d_\nu^s/a_{\nu_1}\geq0$, $s=1,2,\dots,r$;*

(ii) *в случае четного $\nu_0-\nu_1$, $b_\nu^j/a_{\nu_1}\leq0$, $j\in J$, $c_\nu^l/a_{\nu_1}\leq0$, $l=1,2,\dots,n$, $d_\nu^s/a_{\nu_1}\leq0$, $s=1,2,\dots,r$;*

(iii) *при $d_\nu^s\neq0$ $\beta_s\leq\alpha$, $s=1,2,\dots,r$.*

Тогда $(A_1,A_2,\dots,A_{m-1},B_1,B_2,\dots,B_n,C_1,C_2,\dots,C_r)\in\mathcal{A}^{n,r}_{\alpha}(\theta_0,a_0)$.

Рассмотрим также начально-краевую задачу
$$
D_t^{\alpha-m+k}v(\xi,0)=v_k(\xi),\quad \xi\in\Omega,\quad k=m^*,m-1,\tag{28}
$$
$$
D_t^{\alpha-m+k}\tau(\xi,0)=\tau_k(\xi),\quad \xi\in\Omega,\quad k=m^*,m-1,\tag{29}
$$
$$
v(\xi,t)=0,\quad \tau(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T],\tag{30}
$$
для линеаризованной системы уравнений термоконвекции в вязкоупругой среде
$$
\begin{gathered}
D_t^{\alpha}v(\xi,t)=\chi D_t^{\alpha}\Delta v(\xi,t)+\nu\Delta v(\xi,t)+\kappa D_t^{\delta}\Delta v(\xi,t)-\\
-r(\xi,t)+g(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],
\end{gathered}\tag{31}
$$
$$
\nabla\cdot v(\xi,t)=0,\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T],\tag{32}
$$
$$
D_t^{\alpha}\tau(\xi,t)=\varrho\triangle\tau(\xi,t)+\varsigma v_n(\xi,t)+h(\xi,t),\quad (\xi,t)\in\Omega\times(0,T].\tag{33}
$$

Теорема 11. *Пусть* $\alpha > \delta_1 > \delta_2 = 0 > \delta_3$, $\alpha - \delta_1 \neq 1$, $\chi, \varrho > 0$, $\nu, \kappa, \varsigma \in \mathbb{R}$; $v_0 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $\tau_0 \in H^2(\Omega)$ *при* $\alpha \in (0,1]$; $v_0, v_1 \in \mathbb{H}^2_\sigma$, $\tau_0, \tau_1 \in H^2(\Omega)$ *при* $\alpha \in (1,2)$; $h \in C([0,T];\mathbb{L}_2)$, $\Sigma h \in [C((0,T);\mathbb{H}^2_\sigma) \cap L_1(0,T;\mathbb{H}^2_\sigma)] \cap C^\gamma([0,T];\mathbb{H}^2_\sigma)$, $f \in [C((0,T);H^2(\Omega)) \cap L_1(0,T;H^2(\Omega))] \cap C^\gamma([0,T];H^2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (28)–(33).

В **третьей главе** диссертации исследуется однозначная разрешимость задачи типа Коши для вырожденного уравнения. Пусть заданы операторы $L, M_1, M_2, \ldots, M_{m-1}, N_1, N_2, \ldots, N_n, S_1, S_2, \ldots, S_r \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$. Все операторы $N_1, N_2, \ldots, N_n, S_1, S_2, \ldots, S_r$ нулевыми не являются, при этом некоторые (или все) операторы M_j могут быть нулевыми. Если все $M_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, то положим $j_0 = 0$, иначе существует $j_0 \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, такое, что $M_{j_0} \neq 0$, $M_j = 0$, $j = j_0+1, j_0+2, \ldots, m-1$.

В первом параграфе исследуется линейное неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha Lx(t) = \sum_{j=1}^{j_0} M_j D_t^{\alpha-m+j} x(t) + \sum_{l=1}^{n} N_l D_t^{\alpha_l} x(t) + \sum_{s=1}^{r} S_s J_t^{\beta_s} x(t) + g(t), \qquad (34)$$

которое будем называть вырожденным в силу предположения $\ker L \neq \{0\}$. Решением уравнения (34) называется такая функция $x : (0,T] \to \mathcal{X}$, что $J_t^{m-\alpha} Lx \in C^m((0,T);\mathcal{Y})$, $J_t^{m-\alpha} x \in C^{j_0}((0,T);\mathcal{X})$, $J_t^{m_l-\alpha_l} x \in C^{m_l}((0,T);\mathcal{X})$, $J_t^{\beta_s} x \in C((0,T);\mathcal{X})$ и выполняется равенство (34) при всех $t \in (0,T)$.

Установлено, что возможны две различные ситуации: когда порядок второй по старшинству дробной производной имеет такую же дробную часть, что и порядок старшей, или отличную от нее: $\alpha_n < \alpha - m + j_0$ или $\alpha_n > \alpha - m + j_0$.

При выполнении условий

$$QM_j = M_j P,\ j = 1, 2, \ldots, j_0 - 1, \quad QN_l = N_l P,\ l = 1, 2, \ldots, n, \quad QS_s = S_s P,\ s = 1, 2, \ldots, r, \qquad (35)$$

уравнение (34) редуцируется к системе двух уравнений на взаимно дополнительных подпространствах $\mathcal{X}^0$ и $\mathcal{X}^1$.

Теорема 12. *Пусть* $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha - m + j_0$, $m_l - 1 < \alpha_l \leq m_l \in \mathbb{N}$, $\alpha_l - m_l \neq \alpha - m$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_r \geq 0$, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M_j \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j = 1, 2, \ldots, j_0$, M_{j_0} $(L,0)$*-ограничен,* $N_l \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l = 1, 2, \ldots, n$, $S_s \in \mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s = 1, 2, \ldots, r$, *выполняются условия* (35), $x_k \in \mathcal{X}$, $k = m^*, m^*+1, \ldots, j_0 - 1$, $x_k \in \mathcal{X}^1$, $k = j_0, j_0+1, \ldots, m-1$, $g \in C((0,T);\mathcal{Y}) \cap L_1(0,T;\mathcal{Y})$. *Тогда существует единственное решение задачи*

$$D_t^{\alpha-m+k} x(0) = x_k,\ k = m^*, m^*+1, \ldots, j_0 - 1, \qquad (36)$$

$$D_t^{\alpha-m+k} (Px)(0) = x_k,\ k = j_0, j_0+1, \ldots, m-1, \qquad (37)$$

для уравнения (34).

В случае $\alpha_n > \alpha - m + j_0$ приходится пересчитывать дефект неполной задачи типа Коши и ставить новые начальные условия. Для уравнения на подпространстве без вырождения начальные условия примут вид

$$D_t^{\alpha-m+k} (Px)(0) = x_k,\ k = m^*, m^*+1, \ldots, m-1, \qquad (38)$$

а на подпространстве с вырождением определим параметры

$$\underline{\alpha}_0 = \max\{\alpha - m + j_0, \alpha_l : l = 1, 2, \ldots, n-1,\ \alpha_l - m_l < \alpha_n - m_n, \alpha - m < \alpha_n - m_n\},$$
$$\overline{\alpha}_0 = \max\{\alpha - m + j_0, \alpha_l : l = 1, 2, \ldots, n-1,\ \alpha_l - m_l > \alpha_n - m_n, \alpha - m > \alpha_n - m_n\},$$
$$\underline{m}_0 = \lceil \underline{\alpha}_0 \rceil, \quad \overline{m}_0 = \lceil \overline{\alpha}_0 \rceil, \quad m_0^* := \max\{\underline{m}_0 - 1, \overline{m}_0\}.$$

Теперь можно сформулировать начальные условия

$$D_t^{\alpha_n - m_n + k} (P_0 x)(0) = y_k,\ k = m_0^*, m_0^*+1, \ldots, m_n - 1. \qquad (39)$$

Теорема 13. *Пусть* $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $\alpha-m+j_0<\alpha_n$, $m_l-1<\alpha_l\le m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\ne\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\ge 0$, $L\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $\ker L\ne\{0\}$, $M_j\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $j=1,2,\dots,j_0$, $N_l\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $l=1,2,\dots,n$, N_n $(L,0)$*-ограничен,* $S_s\in\mathcal{L}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$, $s=1,2,\dots,r$, *выполняются условия* (35), $x_k\in\mathcal{X}^1$, $k=m^*,m^*+1,\dots,m-1$, $y_k\in\mathcal{X}^0$, $k=m_0^*,m_0^*+1,\dots,m_n-1$, $g\in C((0,T);\mathcal{Y})\cap L_1(0,T;\mathcal{Y})$. *Тогда существует единственное решение задачи* (38), (39) *для уравнения* (34).

Во втором параграфе третьей главы рассматриваются линейные обратные задачи для вырожденного уравнения

$$D_t^\alpha Lx(t)=\sum_{j=1}^{j_0}M_jD_t^{\alpha-m+j}x(t)+\sum_{l=1}^{n}N_lD_t^{\alpha_l}x(t)+\sum_{s=1}^{r}S_sJ_t^{\beta_s}x(t)+\varphi(t)u. \quad (40)$$

В третьем параграфе полученные результаты при исследовании начальных задач для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка в банаховых пространствах используются для изучения вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешимых относительно производной дробного порядка по времени.

Возьмем $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $0<\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $m_l-1<\alpha_l\le m_l\in\mathbb{N}$, $\alpha_l-m_l\ne\alpha-m$, $l=1,2,\dots,n$, $\beta_1>\beta_2>\dots>\beta_r\ge 0$, $h:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$. Построим по набору чисел $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ параметр m^* и рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}D_t^\alpha P_1(\mathcal{A})v(\xi,t)=\sum_{j=1}^{m-1}P_2^j(\mathcal{A})D_t^{\alpha-m+j}v(\xi,t)+\sum_{l=1}^{n}P_3^l(\mathcal{A})D_t^{\alpha_l}v(\xi,t)+\\+\sum_{s=1}^{r}P_4^s(\mathcal{A})J_t^{\beta_s}v(\xi,t)+h(\xi,t),\quad(\xi,t)\in\Omega\times(0,T),\end{aligned} \quad (41)$$

снабженное краевыми условиями

$$\mathcal{B}_l\mathcal{A}^kv(\xi,t)=0,\quad k=0,1,\dots,n-1,\quad l=1,2,\dots,\rho,\quad(\xi,t)\in\partial\Omega\times(0,T). \quad (42)$$

Предположим, что $P_1(\lambda_k)=0$ при некотором $k\in\mathbb{N}$, при некотором $j_0\in\{0,1,\dots,m-1\}$, $P_2^{j_0}\not\equiv 0$, $P_2^j\equiv 0$, $j=j_0+1,j_0+2,\dots,m-1$, $\alpha_n>\alpha-m+j_0$, тогда при условии, что многочлены P_1 и P_3^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$, оператор N_n $(L,0)$-ограничен. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия зададим в виде

$$D_t^{\alpha-m+k}P_1(\mathcal{A})v(\xi,0)=y_k(\xi),\ k=m^*,m^*+1,\dots,m-1,\quad\xi\in\Omega, \quad (43)$$

при всех $i\in\mathbb{N}$, для которых $P_1(\lambda_i)=0$,

$$\langle D_t^{\alpha_n-m_n+k}v(\cdot,0),\varphi_i\rangle=c_{ki},\ k=m_0^*,m_0^*+1,\dots,m_n-1. \quad (44)$$

Таких $i\in\mathbb{N}$ конечное число, так как P_1 — многочлен. Конечный набор чисел c_{ki} определяет проекцию $D_t^{\alpha_n-m_n+k}u(\cdot,0)$ на подпространство $\mathcal{X}^0:=\ker P$, $k=m_0^*,m_0^*+1,\dots,m_n-1$. Параметры m^*, m_0^* определяются как в разделе 3.1.2.

Теперь задача (41)–(44) представима в виде (34), (38), (39) с выбранными пространствами $\mathcal{X}=\{w\in H^{2\rho\nu_1}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,\ k=0,1,\dots,\nu_1-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $\mathcal{Y}=L_2(\Omega)$ и операторами $L=P_1(\mathcal{A}_1)$, $M_j=P_2^j(\mathcal{A}_1)$, $D_{M_j}=\{w\in H^{2\rho\nu_2^j}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,k=0,1,\dots,\nu_2^j-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $j=1,2,\dots,j_0$, $N_l=P_3^l(\mathcal{A}_1)$, $D_{N_l}=\{w\in H^{2\rho\nu_3^l}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,\ k=0,1,\dots,\nu_3^l-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $l=1,2,\dots,n$, $S_s=P_4^s(\mathcal{A}_1)$, $D_{S_s}=\{w\in H^{2\rho\nu_4^s}(\Omega):\mathcal{B}_\zeta\mathcal{A}^kw(\xi)=0,\ k=0,\dots,\nu_4^s-1,\ \zeta=1,2,\dots,\rho,\ \xi\in\partial\Omega\}$, $s=1,2,\dots,r$. Здесь $\nu_1=\max\{p\in\{0,1,\dots,\nu-1\}:a_p\ne 0\}$, $\nu_2^j=\max\{p\in$

$\{0,1,\ldots,\nu\} : b^j_p \neq 0\}$, $j \in J \subset \{1,2,\ldots,m-1\}$, $\nu^l_3 = \max\{p \in \{0,1,\ldots,\nu\} : c^l_p \neq 0\}$, $l = 1,2,\ldots,n$, $\nu^s_4 = \max\{p \in \{0,1,\ldots,\nu\} : d^s_p \neq 0\}$, $s = 1,2,\ldots,r$.

Аналогичным образом исследована обратная задача

$$\begin{gathered} D^\alpha_t P_1(\mathcal{A})v(\xi,t) = \sum_{j=1}^{m-1} P^j_2(\mathcal{A})D^{\alpha-m+j}_t v(\xi,t)+ \\ +\sum_{l=1}^{n} P^l_3(\mathcal{A})D^{\alpha_l}_t v(\xi,t) + \sum_{s=1}^{r} P^s_4(\mathcal{A})J^{\beta_s}_t v(\xi,t) + \varphi(t)w(\xi), \end{gathered} \tag{45}$$

с краевыми условиями

$$\mathcal{B}_l\mathcal{A}^k v(\xi,t) = 0,\;\; k = 0,1,\ldots,\nu-1,\;\; l = 1,2,\ldots,\rho,\;(\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{46}$$

и условием переопределения

$$\int_0^T v(\xi,t)d\mu(t) = v_T(\xi), \quad \xi \in \Omega. \tag{47}$$

Вид начальных условий зависит от соотношения дробных частей порядков старших производных.

Заключение

В диссертационной работе найдены условия существования аналитических (в разрезанной комплексной плоскости для первой и третьей главы и в содержащем положительную действительную полуось для второй главы) разрешающих семейств операторов линейных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля. Это позволило исследовать однозначную разрешимость задачи типа Коши для линейных однородных, неоднородных и квазилинейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно дробной производной, а также некоторых начальных задач для уравнений, имеющих при старшей производной Римана — Лиувилля вырожденный линейный оператор. Рассмотрены некоторые линейные обратные задачи для таких уравнений. Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, в частности, для систем, описывающих динамику и термоконвекцию в вязкоупругих средах.

Проведенные в диссертации исследования могут быть распространены на близкие задачи: поиск условий существования сильно непрерывных разрешающих семейств линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля, использование этих условий при исследовании линейных и квазилинейных уравнений, исследование вопросов существования нелокальных решений квазилинейных уравнений, исследование различных обратных задач, изучение вырожденных эволюционных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля в линейной части при условии существования аналитического в секторе или сильно непрерывного разрешающего семейства операторов, в том числе квазилинейных.

Список работ автора по теме диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК, базы данных Web of Science и Scopus

1. Туров, М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля произвольных порядков / М. М. Туров // Челяб. физмат. журн. — 2022. — Т. 7, № 4. — С. 434–446.

2. Федоров, В. Е. Дефект задачи типа Коши для линейных уравнений с несколькими производными Римана — Лиувилля / В. Е. Федоров, М. М. Туров // Сиб. матем. журн. — 2021. — Т. 62, № 5. — С. 1143–1162.

3. Fedorov, V. E. On the Unique Solvability of Incomplete Cauchy Type Problems for a Class of Multi-Term Equations with the Riemann — Liouville Derivatives / V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. M. Turov // Symmetry. — 2022. — Vol. 14, No. 1.

4. Fedorov, V. E. Sectorial Tuples of Operators and Quasilinear Fractional Equations with Multi-Term Linear Part / V. E. Fedorov, M. M. Turov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2022. — Vol. 43, no. 6. — P. 1502–1512.

5. Fedorov V. E. A Class of Quasilinear Equations with Riemann — Liouville Derivatives and Bounded Operators / V. E. Fedorov, M. M. Turov, B. T. Kien // Axioms. — 2022. — Vol. 11, No. 3. — P. 96.

6. Turov M. M. Linear inverse problems for multi-term equations with Riemann — Liouville derivatives / M. M. Turov, V. E. Fedorov, B. T. Kien // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2021. — Vol. 38. — P. 36–53.

7. Fedorov V. E. Multi-term equations with Riemann – Liouville derivatives and Holder type function spaces / V. E. Fedorov, M. M. Turov // Boletin de la Sociedad Matemática Mexicana. — 2023. — Vol. 29, No. 2. — P. 42.

Другие публикации автора

8. Туров М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля / М. М. Туров // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сб. тез. Междунар. науч. конф. — Уфа: Аэтерна, 2022. — С. 69.

9. Туров М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля в секториальном случае / М. М. Туров // The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations: сб. тез. Междунар. научн. конф. — Москва: РУДН, 2022. — С. 162.

10. Туров М. М. Квазилинейные уравнения с несколькими дробными производными в линейной части / М. М. Туров, В. Е. Федоров // Уфимская осенняя математическая школа: мат. междунар. научн. конф., Уфа: РИЦ БашГУ, 2022. — С. 260.

11. Туров М. М. Неоднородная задача типа Коши для линейного уравнения с несколькими дробными производными Римана — Лиувилля / М. М. Туров, В. Е. Федоров // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: матер. VI междунар. научн. кофн., Нальчик, 2021. — С. 81.

12. Туров М. М. Аналитические в секторе решения одного уравнения с несколькими производными Римана — Лиувилля / М. М. Туров, В. Е. Федоров // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: сб. тез. докладов. Суздаль, 2022. — С. 192.

13. Turov M.M. Sectorial Tuples of Operators and Fractional Multi-Term Linear Equations / M. M. Turov, V. E. Fedorov // O. A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDE's: Book of abstracts, St. Petersburg, 2022. — P. 96.