На правах рукописи

Тесемников Павел Игоревич

Асимптотический анализ случайных блужданий с тяжёлыми хвостами приращений по направленным случайным графам и смежные вопросы

Специальность 1.1.4 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Новосибирск — 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:
Фосс Сергей Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор.

Официальные оппоненты:
Яровая Елена Борисовна, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», кафедра теории вероятностей, профессор.

Петров Фёдор Владимирович, доктор физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет», факультет математики и компьютерных наук, профессор.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук.

Защита состоится 31 января 2024 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета 24.1.074.04 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л Соболева Сибирского отделения Российской академии наук и на сайте https://math.nsc.ru.

Автореферат разослан «___» ________ 2023 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
24.1.074.04 к. ф.-м. н. Ц. Ч.-Д. Батуева

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Распределения с *тяжёлыми хвостами* прочно заняли своё место в стохастическом моделировании многих современных сложных систем и процессов, где использование классических вероятностных распределений с тонкими (лёгкими) хвостами не позволяет получить адекватное описание их динамики. В диссертации получены обобщения одномерных результатов Н. Веравербеке[1], С. Асмуссена[2], С. Г. Фосса и С. Захари[3], С. Г. Фосса, З. Пальмовски и С. Захари[4] и ряда других авторов об асимптотике вероятностей редких событий для случайных блужданий с тяжелохвостовыми распределениями приращений на некоторые классы случайных блужданий по направленным случайным графам.

Научная новизна В диссертации получен вид точной хвостовой асимптотики различных функционалов от траектории случайного блуждания по направленным случайным графам двух типов. Кроме того, исследованы структурные свойства этих случайных графов, а именно, получен явный вид предельного распределения минимальной длины пути в обобщённом графе Барака – Эрдёша.

Цели и задачи исследования. Объектами исследования диссертации являются случайные блуждания по направленным случайным графам двух типов. Основная **цель** диссертации состоит в получении явного вида точной асимптотики хвоста распределения различных функционалов от траекторий этих блужданий на случайных интервалах времени и изучение условий, при которых эта асимптотика является равномерной в некоторых классах функцио-

---

[1]Veraverbeke, N. *Asymptotic behavior of Wiener-Hopf factors of a random walk*, Stochastic Processes and their Applications, **5** (1977), 27–37.

[2]Asmussen, S., *Subexponential asymptotics for stochastic processes: extremal behavior, stationary distributions and first passage probabilities*, The Annals of Applied Probability, **8** (1998), 354–374.

[3]Foss, S., Zachary, S., *The maximum on a random time interval of a random walk with long-tailed increments and negative drift*, The Annals of Applied Probability, **13** (2003), 37–53.

[4]Foss, S., Palmowski, Z, Zachary, S, *The probability of exceeding a high boundary on a random time interval for a heavy-tailed random walk*, The Annals of Applied Probability, **15** (2005), 1936–1957.

налов.

Практическое значение полученных результатов. Диссертация носит теоретический характер.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на Международной научной студенческой конференции НГУ (г. Новосибирск, 2018, 2019 и 2020), международных конференциях "Applied Probability Workshop" (г. Новосибирск, 2019 и 2020), "Random Networks and Interacting Particle Systems" (г. Париж, 2021), "Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures" (г. Москва, 2022), "Боровковские чтения" (г. Новосибирск, 2022), «6-я Санкт-Петербургская молодёжная конференция по теории вероятностей и математической физике» (г. Санкт-Петербург, 2022) и представлены в сборниках тезисов приведённых конференций. Результаты работы также докладывались на объединённом семинаре кафедры теории вероятностей и математической статистики НГУ и лаборатории теории вероятностей и математической статистики ИМ им. С. Л. Соболева СО РАН, онлайн-семинаре трёх городов (Москва, Новосибирск, Санкт-Петербург) «Вероятность и математическая статистика» (2022) и городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике (г. Санкт-Петербург, 2022).

Публикации. Все основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[4]

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав и списка литературы. Объём диссертации составляет 112 страниц. Список литературы содержит 46 наименований.

Автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сергею Георгиевичу Фоссу за постановки задач, плодотворные обсуждения и поддержку в написании диссертации, а также кандидату физико-математических наук, Евгению Игоревичу Прокопенко за полезные советы и консультации при получении результатов, представленных в диссертации.

Основные результаты диссертации

1. Получен явный вид точной хвостовой асимптотики самой правой точки блуждания по генеалогическому дереву ветвящегося случайного процесса в меняющейся среде. Получены достаточные условия равномерности этой асимптотики по некоторым классам криволинейных границ и временных интервалов.

2. Получен явный вид точной хвостовой асимптотики суммы случайного числа частичных максимумов независимых случайных блужданий, приращения которых имеют тяжёлые правые хвосты распределений.

3. Получен точный вид предельного распределения минимальной длины пути в обобщённом графе Барака – Эрдёша.

Краткое содержание работы

Во **введении** обсуждается актуальность задачи изучения теоретических свойств распределений с тяжёлыми хвостами и их связь с популярной философской концепцией «Чёрных лебедей», введённой Н. Н. Талебом[5].

В **первой главе** приводятся некоторые основания теории распределений с тяжёлыми хвостами, необходимые для дальнейшего изложения. Дадим ряд базовых определений и свойств. Обозначим через η случайную величину с функцией распределения G, и через η_1, η_2 — независимые копии η.

Распределение G имеет *тяжёлый (правый) хвост*, если его производящая функция моментов

$$\varphi_G(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda\eta} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda x} G(dx) = \infty$$

при всех $\lambda > 0$.

[5] Taleb, N. N., *The Black Swan : the Impact of the Highly Improbable*, New York:Random House, 2007.

Распределение G имеет *длинный хвост* (является *локально степенным*; $G \in \mathcal{L}$), если $\overline{G}(x) > 0$ при всех $x > 0$ и при любом фиксированном $h > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\eta > x + h | \eta > x\right) \equiv \frac{\overline{G}(x+h)}{\overline{G}(x)} \to 1$$

при $x \to \infty$, где через $\overline{G}$ обозначен правый хвост распределения G: $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$.

При условии $\mathbf{E}\eta^+ < \infty$ корректно определено так называемое *распределение интегрального хвоста*

$$\overline{G}_I(x) = \min\{1, \int_x^\infty \overline{G}(t)dt\} \qquad \text{при } x \geq 0.$$

Известно, что если $\mathbf{E}\eta^+ < \infty$ и $G \in \mathcal{L}$, то и $G_I \in \mathcal{L}$ и, более того,

$$\overline{G}(x) = o\left(\overline{G}_I(x)\right) \qquad \text{при } x \to \infty.$$

Известно, что для любого распределения $G \in \mathcal{L}$ найдётся такая неубывающая функция $h(x) \to \infty$, что

$$\sup_{|h|<h(x)} \left| \frac{\overline{G}(x+h)}{\overline{G}(x)} - 1 \right| \to 0$$

при $x \to \infty$, т.е. распределение G является *h-нечувствительным.*

Распределение G называется *субэкспоненциальным* ($G \in \mathcal{S}$), если $G \in \mathcal{L}$ и

$$\mathbf{P}\left(\eta_1 + \eta_2 > x\right) \equiv \overline{G * G}(x) \sim 2\overline{G}(x) \equiv 2\mathbf{P}\left(\eta_1 > x\right)$$

при $x \to \infty$.

Распределение G называется *сильно субэкспоненциальным* ($G \in \mathcal{S}^*$), если $\overline{G}(x) > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $m_+ := \mathbf{E}\eta^+ < \infty$ и

$$\int_0^x \overline{G}(y)\overline{G}(x-y)dy \sim 2m_+\overline{G}(x)$$

при $x \to \infty$.

Во **второй главе** приводится ряд результатов, устанавливающих вид точной хвостовой асимптотики различных функционалов от траектории блуждания по генеалогическому дереву ветвящегося процесса в меняющейся среде. Определим основные объекты исследования.

Ветвящийся процесс в меняющейся среде Z_n — это случайный процесс в дискретном времени, задаваемый с помощью рекурсии:

$$Z_0 = 1, \qquad Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} \zeta_{n,j},\ n \geq 0,$$

где набор $\{\zeta_{n,j}\}_{n,j\geq 0}$ состоит из независимых в совокупности неотрицательных целочисленных случайных величин таких, что при фиксированном номере поколения $n \geq 0$ величины $\zeta_{n,1}, \zeta_{n,2}, \ldots$ предполагаются одинаково распределёнными. Через $\mathcal{T}$ обозначим генеалогическое дерево, соответствующее процессу Z_n.

Все основные результаты второй получены в предположении строгой надкритичности ветвящегося процесса: $\zeta_{n,1} \geq 1$ п.н. при всех $n \geq 0$. Кроме того, мы предполагаем, что $\mathbf{E}\zeta_{n,1} < \infty$ при всех $n \geq 0$. Мы будем уделять особое внимание процессам, для которых выполнено т.н. *условие быстрого затухания ветвления*, т.е.

$$\prod_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\zeta_{n,1} < \infty. \tag{1}$$

Из (1) следует, что существует неотрицательная целочисленная случайная величина Z такая, что $Z_n \to Z$ п.н. и в $L_1(\Omega)$ при $n \to \infty$, т.е., что финальное число ветвей в дереве $\mathcal{T}$ конечно и, более того, имеет конечное среднее значение.

Определим теперь случайное блуждание по дереву $\mathcal{T}$. Рассмотрим набор $\{\xi, \xi_{i,k}\}_{i,k\geq 1}$ независимых в совокупности и распределённых согласно закону F случайных величин. Эти величины играют роль *приращений блуждания.* Мы предполагаем, что последовательности $\{\xi_{i,k}\}$ и $\{\zeta_{n,j}\}$ независимы в совокупности, т.е. *механизм ветвления не зависит от механизма смещения*, и что распределение F центрировано: $\mathbf{E}\xi = 0$.

Блуждание по дереву $\mathcal{T}$ определяется по следующему правилу:

$$S(\emptyset) = 0, \qquad S(\pi) = \sum_{k=1}^{n} \xi_{i(e_k),k} \ \text{ при } \ n = |\pi| \geq 1,$$

где $\pi = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — произвольный путь в $\mathcal{T}$, стартующий из его корня, а при каждом $k = 1, \ldots, n$ под $i(e_k)$ понимается номер вершины в поколении k, в котором заканчивается ребро e_k.

Для произвольной функции g на множестве неотрицательных целых чисел и произвольной неотрицательной целочисленной случайной величины $\mu \leq \infty$ обозначим через

$$R^g_{\mu,\mathcal{T}} = R^g_{\mu,\mathcal{T}}(S(\pi)) = \max_{\pi:|\pi|\leq\mu} (S(\pi) - g(|\pi|))$$

максимум т.н. *g-смещённого случайного блуждания* по первым μ поколениям $\mathcal{T}$. В случае тяжелохвостности приращений блуждания типичный вид асимптотики хвоста $R^g_{\mu,\mathcal{T}}$ даётся функцией

$$H^g_{\mu,\mathcal{T}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[Z_n \mathbf{I}\left(\mu \geq n\right)\right] \overline{F}(x + g(n)).$$

Первый из основных результатов диссертационной работы обобщает известную теорему Веравербеке об асимптотике хвоста распределения максимума на бесконечном интервале времени стандартного случайного блуждания с тяжелохвостовыми приращениями.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1) *и* $F_I \in \mathcal{S}$. *Тогда при любом* $c > 0$

$$\mathbf{P}\left(R^{\widehat{c}}_{\infty,\mathcal{T}} > x\right) \sim H^{\widehat{c}}_{\infty,\mathcal{T}}(x) \sim \frac{\mathbf{E}Z}{c} \cdot \overline{F}_I(x)$$

при $x \to \infty$, *где* $\widehat{c}(n) = cn$ *при всех* $n \geq 0$.

В следующих трёх теоремах изучается точная хвостовая асимптотика максимума g-смещённого блуждания по дереву $\mathcal{T}$ на случайном конечном интервале времени.

Теорема 2. *Пусть μ не зависит от приращений блуждания $\{\xi_{i,k}\}$, и $\mathbf{E}\,[\mu Z_\mu] < \infty$. Предположим к тому же, что распределение приращений блуждания $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда при любом $c > 0$*

$$\mathbf{P}\left(R^{\widehat{c}}_{\mu,\mathcal{T}} > x\right) \sim H^{\widehat{c}}_{\mu,\mathcal{T}}(x) \sim \mathbf{E}\eta_\mu \cdot \overline{F}(x)$$

при $x \to \infty$, где функция $\widehat{c}$ определена в теореме 1, а $\eta_\mu = \sum_{n=1}^{\mu} Z_n$.

Отметим, что случайная величина $\eta_\mu \le \mu Z_\mu$ п.н., а значит при выполнении условий теоремы 2 среднее значение $\mathbf{E}\eta_\mu < \infty$. В теореме 2 приведена лишь *индивидуальная* асимптотика хвоста распределения максимума. Теоремы 3 и 4 содержат, в том числе, вид *равномерной* асимптотики. Для их формулировки определим класс $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ неотрицательных целочисленных случайных величин $\mu \le \infty$, *не зависящих от будущего* в следующем смысле: при любом фиксированном $n \ge 1$ для любых событий $A \in \sigma(\xi_{i,k}, k \le n;\ \mathbf{I}(\mu \le n);\ Z)$ и $B \in \sigma(\xi_{i,k}, k > n;\ Z)$ равенство

$$\mathbf{P}\,(AB|Z) = \mathbf{P}\,(A|Z)\,\mathbf{P}\,(B|Z)$$

справедливо с вероятностью единица. Примером случайной величины μ, принадлежащей классу $\mathcal{F}(\mathcal{T})$, может служить аналог первого нижнего лестничного момента для стандартного случайного блуждания:

$$\mu = \inf\{n \ge 1 \text{ такое, что } r^g_{n,\mathcal{T}} \le 0\},$$

где $r^g_{n,\mathcal{T}}$ — максимум g-смещённого блуждания в поколении $n \ge 1$. Для любого целого $N \ge 1$ положим

$$\mathcal{F}_N(\mathcal{T}) = \{\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{T}) \text{ таких, что } \mu \le N\}.$$

Теорема 3 устанавливает вид *равномерной* асимптотики хвоста распределения $R^g_{\mu,\mathcal{T}}$ в случае ограниченных μ.

Теорема 3.

(i) *Предположим, что* $F \in \mathcal{L}$. *Тогда при любом целом* $N \geq 1$ *нижняя оценка*

$$\mathbf{P}\left(R^g_{\mu,\mathcal{T}} > x\right) \geq (1+o(1))H^g_{\mu,\mathcal{T}}(x)$$

при $x \to \infty$ *справедлива равномерно по всем* $\mu \in \mathcal{F}_N(\mathcal{T})$ *и всем неубывающим функциям* g *таким, что* $g(0) = 0$.

(ii) *Предположим, что* $F \in \mathcal{S}$. *Тогда при любом целом* $N \geq 1$ *верхняя оценка*

$$\mathbf{P}\left(R^g_{\mu,\mathcal{T}} > x\right) \leq (1+o(1))H^g_{\mu,\mathcal{T}}(x)$$

при $x \to \infty$ *справедлива равномерно по всем* $\mu \in \mathcal{F}_N(\mathcal{T})$ *и всем неубывающим функциям* g *таким, что* $g(0) = 0$.

В теореме 4 приводятся равномерная верхняя и индивидуальная нижняя оценка точной хвостовой асимптотики для $R^g_{\mu,\mathcal{T}}$ в случае, когда моменты μ не ограничены сверху.

Теорема 4.

(i) *Пусть* $\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$, $\mathbf{E}\eta_\mu < \infty$ *и* $F \in \mathcal{S}$. *Тогда при любом* $c > 0$

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\overline{F}(x)} \mathbf{P}\left(R^{\widehat{c}}_{\mu,\mathcal{T}} > x\right) \geq \mathbf{E}\eta_\mu.$$

(ii) *Пусть* $F \in \mathcal{S}^*$. *Тогда при любых* $c_2 > c_1 > 0$,

$$\mathbf{P}\left(R^g_{\mu,\mathcal{T}} > x\right) \leq (1+o(1)) \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[Z_\mu \mathbf{I}\left(\mu \geq n\right)\right] \overline{F}(x+g(n))$$

при $x \to \infty$ *равномерно по всем* $\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ *и* $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$, *где класс* $\mathcal{G}_{c_1,c_2}$ *состоит из равномерно асимптотически линейных функций, т.е. таких функций* g, *что*

$$g(n)/n \to c_g \in [c_1, c_2] \quad \text{и} \quad \sup_{g\in\mathcal{G}_{c_1,c_2}} \sup_{m\geq n} |g(m)/m - c_g| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Отметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[Z_\mu \mathbf{I}\left(\mu \geq n\right)\right] \geq \mathbf{E}\left[Z_n \mathbf{I}\left(\mu \geq n\right)\right] = \mathbf{E}\eta_\mu,$$

следовательно, верхняя оценка в пункте *(ii)* теоремы 4 в общем случае не совпадает с нижней оценкой в пункте *(i)*. Оценки совпадают по порядку в случае, когда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[Z_\mu \mathbf{I}\left(\mu \geq n\right)\right]$$

сходится. Отметим также, что оценки полностью совпадают в частном случае, когда ветвление возможно *лишь в нулевом поколении*, т.е. когда количество потомков любой частицы в поколении с номером $n \geq 1$ имеет вырожденное в единице распределение:

$$\zeta_{1,1} = \zeta_{2,1} = \ldots = 1 \qquad \text{п.н.} \tag{2}$$

В этом случае дерево $\mathcal{T}$ полностью определяется случайной величиной $\zeta_{0,1} \equiv Z$, как показано на рис. 1. По этой причине мы будем заменять символ $\mathcal{T}$ на Z при описании остальных результатов второй главы.

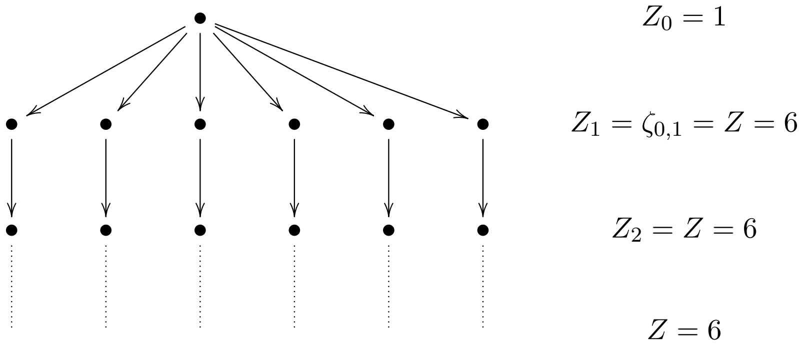

Рис. 1: *Вид генеалогического дерева* $\mathcal{T}$ *при выполнении условия* (2).

В теореме 5 приводится равномерная асимптотика хвоста распределения максимума именно для модели (2). Отметим, что условие быстрого затухания ветвления (1) в этом случае эквивалентно конечности математического ожидания $\mathbf{E}Z < \infty$.

Верхняя оценка

$$\mathbf{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \le (1+o(1))H^g_{\mu,Z}(x) \tag{3}$$

при $x \to \infty$ справедлива равномерно по всем $\mu \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$ и $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$, являясь прямым следствием пункта *(ii)* теоремы 4. Достаточные условия для выполнения аналогичной соотношению (3) равномерной нижней оценки приведены в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие* (2) *и* $\mathbf{E}Z < \infty$*. Предположим, что* $F \in \mathcal{L}$ *и что выполнено одно из двух условий:*

(i) Z *не зависит от сигма-алгебры, порождённой приращениями блуждания* $\{\xi_{i,j}, i, j \ge 1;\ \mu\}$*;*

(ii) $Z \le N$ *п.н. для некоторого целого* $N \ge 1$*.*

Тогда при любых $c_2 > c_1 > 0$ *нижняя оценка*

$$\mathbf{P}\left(R^g_{\mu,Z} > x\right) \ge (1+o(1))H^g_{\mu,Z}(x)$$

справедлива при $x \to \infty$ *равномерно по* $\mu \in \mathcal{F}(Z)$ *и* $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$*.*

В теореме 6 приведена *индивидуальная* точная хвостовая асимптотика для другого функционала от траектории блуждания. Предположим, что выполнено условие (2) и при $i = 1, , 2 \ldots, Z$ обозначим через $S_{i,k}$ стандартное случайное блуждание по i-ой ветви дерева $\mathcal{T}$, начинающееся в его корне. Через $\mathcal{F}^\infty(Z)$ и $\mathbb{R}^\infty$ обозначим множества бесконечных последовательностей элементов из $\mathcal{F}(Z)$ и $\mathbb{R}$ соответственно. Для произвольных $\boldsymbol{\mu} \in \mathcal{F}^\infty(Z)$ и $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\infty$ обозначим через

$$\Sigma^{\widehat{\boldsymbol{a}}}_{\boldsymbol{\mu},Z} = \sum_{i=1}^{Z} \sup_{0\le k\le \mu_i} (S_{i,k} - a_i k)$$

сумму случайного числа частичных максимумов. Справедлива

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* (2), $Z \le N$ *п.н. для некоторого* $N \ge 1$, *и* $F \in \mathcal{S}^*$. *Предположим к тому же, что при всех* $i \ge 1$ *математическое ожидание* $\mathbf{E}\mu_i < \infty$, *и для некоторой функции* h *такой, что распределение* F *является* h*-нечувствительным, асимптотическое соотношение*

$$\mathbf{P}\left(\mu_i > h(x)\right) = o\left(\overline{F}(x)\right)$$

справедливо при $x \to \infty$. *Тогда при любом* $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^\infty$

$$\mathbf{P}\left(\Sigma^{\widehat{\boldsymbol{a}}}_{\boldsymbol{\mu},Z} > x\right) \sim \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{Z} \mu_i\right] \overline{F}(x)$$

при $x \to \infty$.

В диссертационной работе отмечено, что результат теоремы 6 остаётся справедливым и в более общей постановке, когда распределения приращений блуждания могут быть различными для разных ветвей дерева $\mathcal{T}$.

В **третьей главе** приведены результаты, устанавливающие явный вид предельного распределения минимальной длины пути в обобщённом графе Барака – Эрдёша.

Случайный граф Барака – Эрдёша $\mathfrak{G}_n$ состоит из неслучайного множества вершин $\mathcal{V}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ и случайного множества рёбер $\mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{V}_n \times \mathcal{V}_n$, причём при всех $i, j \in \mathcal{V}_n$

$$\mathbf{P}\left((i,j) \in \mathcal{V}_n\right) = \begin{cases} p, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и все рёбра существуют независимо друг от друга. В оригинальной работе А. Б. Барака и П. Эрдёша[6] предполагалось, что вероятность p — это некоторое фиксированное число из отрезка $[0, 1]$. В диссертационной работе рассматривается обобщение этой модели, при

[6] Barak, A. B., Erdős, P. *On the maximal number of strongly independent vertices in a random acyclic directed graph*, SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, **5** (1984), 508–514.

котором вероятность $p = p_{i,j}(n)$ зависит как от номеров вершин, инцидентных ребру (i, j), так и от общего количества вершин $n+1$.

Основным результатом третьей главы диссертационной работы является найденный явный вид предельного распределения минимальной длины пути (под длиной пути мы понимаем количество рёбер, составляющих этот путь) $m_{0,n}$ из вершины 0 в вершину n в графе $\mathfrak{G}_n$. Связь между второй и третьей главами диссертационной работы проясняет приводимая ниже теорема 7. Дадим ряд определений, необходимых для её формулировки.

Рассмотрим набор независимых в совокупности случайных величин $\{\xi, \xi_{i,j}\}$, распределённых согласно закону F, и не зависящих от графа $\mathfrak{G}_n$. Мы предполагаем, что $\mathbf{E}\xi = 0$. Пусть g произвольная функция на $\mathbb{Z}_+$. Определим g-смещённое блуждание по графу $\mathfrak{G}_n$ по следующему правилу:

$$S^g(\emptyset) = 0, \qquad S^g(\pi) = \sum_{(i,j)\in\pi} \xi_{i,j} - g(|\pi|),$$

где $\pi = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ — произвольный путь в графе $\mathfrak{G}_n$, и соответствующий процесс частичных максимумов

$$M^g(\pi) = \max_{\rho\subseteq\pi} S^g(\rho),$$

где через ρ обозначены все подпути пути π с началом в вершине i_1.

Обозначим через $\mathcal{M}_{0,n}$ множество путей минимальной длины из вершины с номером 0 в вершину с номером n в графе $\mathfrak{G}_n$. При фиксированном $\mathcal{M}_{0,n}$ определим случайную величину α, принимающую с равными вероятностями значения $1, 2, \ldots, |\mathcal{M}_{0,n}|$ и не зависящую от приращений блуждания. Положим

$$T_n^g = \sum_{j=1}^{|\mathcal{M}_{0,n}|} \mathbf{I}\,(\alpha = j)\, M^g(\pi_j),$$

где $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_{|\mathcal{M}_{0,n}|} \in \mathcal{M}_{0,n}$ в случае, когда множество $\Pi_{0,n}$ непусто. Иначе положим T_n равным нулю. Введённую величину можно интерпретировать как время проезда из пункта 0 в пункт n по случайно выбранному пути минимальной длины. В теореме 7 находится точная хвостовая асимптотика величины T_n^g.

Теорема 7.

(i) *Предположим, что $F \in \mathcal{S}$. Тогда для любого $n \geq 1$ и любой функции g справедлива эквивалентность*

$$\mathbf{P}\left(T_n^g > x\right) \sim \mathbf{E}\left[m_{0,n}\mathbf{I}(m_{0,n} < \infty)\right] \overline{F}(x)$$

при $x \to \infty$.

(ii) *Предположим, что $F \in \mathcal{S}^*$. Тогда при любых $0 < c_1 < c_2$ эквивалентность*

$$\mathbf{P}\left(T_n^g > x\right) = (1 + o(1)) \sum_{l=1}^{n} \mathbf{P}\left(\infty > m_{0,n} \geq l\right) \overline{F}(x + g(l))$$

при $x \to \infty$ справедлива равномерно по всем $n \geq 1$ и $g \in \mathcal{G}_{c_1,c_2}$.

Отметим, что математическое ожидание $\mathbf{E}\left[m_{0,n}\mathbf{I}(m_{0,n} < \infty)\right]$ в правой части эквивалентности в пункте *(i)* теоремы 7 конечно в силу неравенства $m_{0,n}\mathbf{I}(m_{0,n} < \infty) \leq n$ п.н.

Правые части асимптотических эквивалентностей в теореме 7 зависят от распределения минимальной длины пути $m_{0,n}$. Следующая теорема даёт ответ на вопрос о распределении $m_{0,n}$ при больших n в случае, когда

$$p_{i,j}(n) = n^{-\gamma} f(i/n, j/n), \tag{4}$$

где f — положительная интегрируемая по Риману на $[0,1]^2$ функция, а $\gamma \in (0,1)$ — некоторая положительная постоянная.

Теорема 8. *Предположим, что $\gamma = 1 - 1/k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$m_{0,n} \xrightarrow{d} m_{0,\infty}$$

при $n \to \infty$, где

$$\mathbf{P}\left(m_{0,\infty} = k + 1\right) = 1 - \mathbf{P}\left(m_{0,\infty} = k\right) = \exp\left(-c_k(f)\right),$$

а

$$c_k(f) = \int_{0<u_1<\ldots<u_{k-1}<1} \prod_{j=0}^{k-1} f(u_j, u_{j+1}) du_1 \cdots du_{k-1} \in (0, \infty),$$

где $u_0 = 0$ *и* $u_k = 1$.

Соображения каплинга позволяют в качестве следствия из теоремы 8 получить вид предельного распределения $m_{0,n}$ в случае произвольного $\gamma \in (0, 1)$.

Следствие 1. *Предположим, что* $1 - 1/(k-1) < \gamma < 1 - 1/k$ *при некотором* $k \geq 2$ *и* $c_k(f) < \infty$. *Тогда* $m_{0,n} \xrightarrow{p} k$ *при* $n \to \infty$.

В диссертации отмечено, что в частных случаях, когда $p_{i,j}(n)$ зависит лишь от количества вершин в графе $n+1$ или от разности между номерами вершин $j - i$, следствие 1 остаётся справедливым в более общей, чем (4), постановке.

В **четвёртой главе** содержатся доказательства основных результатов диссертации.

В **заключении** перечислены основные результаты диссертации.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых журналах

[1] Тесемников, П. И., *Об асимптотике кратчайшего расстояния между крайними вершинами в обобщённом графе Барака – Эрдёша*, Сибирские Электронные Математические Известия, **15** (2018), 1556–1565.

[2] Тесемников, П. И., *О сумме максимумов случайных сумм случайных величин при наличии тяжёлых хвостов распределений*, Сибирские Электронные Математические Известия, **16** (2019), 1785–1794.

[3] Тесемников, П. И, Фосс, С. Г., *Вероятность достижения удаляющейся границы ветвящимся случайным блужданием с затуханием ветвления и тяжёлым хвостом распределения скачков*, Труды Математического института имени В. А. Стеклова, **316** (2022), 336–354.

[4] Mallein, B., Tesemnikov, P., *On the length of the shortest path in a sparse Barak–Erdős graph*, Statistics & Probability Letters, **190** (2022).

Тезисы и материалы конференций

[5] Тесемников, П. И., *Асимптотика наименьшего расстояния между крайними вершинами в одном классе случайных графов на прямой*, Материалы 56-й Международной научной студенческой конференции, 2018, С. 218.

[6] Тесемников, П. И., *О сумме максимума случайных сумм случайных величин при наличии тяжёлых хвостов распределений*, Материалы 57-й Международной научной студенческой конференции, 2019, С. 175.

[7] Tesemnikov, P., *On the distribution tail of the sum of the maxima of two randomly stopped sums in the presence of heavy tails*, Applied Probability Workshop, 2019, P. 8.

[8] Тесемников, П. И., *Об асимптотике самой правой точки ветвящегося случайного блуждания при наличии тяжёлых хвостов распределений*, Материалы 58-й Международной научной студенческой конференции, 2020, С. 174.

[9] Tesemnikov, P., *The probability of exceeding a high boundary by a heavy-tailed branching random walk in varying environment*, Abstracts of the international conference "Applied Probability Workshop 2020", 2020, P. 26.

[10] Tesemnikov, P., *On the asymptotics for the minimal distance between extreme vertices in a generalised Barak – Erdős graph*,

Abstracts of the international conference “Random Networks and Interacting Particle Systems”, 2021.

[11] Tesemnikov, P., *The probability of reaching a receding boundary by a random walk on branching process with fading branching and heavy-tailed jump distribution*, Abstracts of the international conference “Branching Processes, Random Walks and Probability on Discrete Structures”, 2022, P. 48.

[12] Тесемников, П. И., Фосс, С. Г., *Верхние и нижние оценки хвостовых вероятностей в модели ветвящегося случайного блуждания в случае тяжёлых хвостов распределений приращений*, Сборник тезисов международной конференции «Боровковские чтения», 2022, С. 17.

[13] Тесемников, П. И., *О распределении длины кратчайшего пути в обобщённом графе Барака – Эрдёша*, Сборник тезисов международной конференции «Боровковские чтения», 2022, С. 28.

[14] Тесемников, П. И., *Вероятность достижения удаляющейся границы случайным семейством случайных блужданий с тяжёлым хвостом распределения скачков.*, Аннотации докладов «Шестой Санкт-Петербургской молодёжной конференции по теории вероятностей и математической физике», 2022, С. 16