

Дроздов Дмитрий Алексеевич

**Анализ на самоподобных множествах с конечным
пересечением**

Специальность 1.1.1 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель:

Тетенев Андрей Викторович,

д. ф.-м. н., доцент,

Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, ведущий научный сотрудник лаборатории теории функций

Официальные оппоненты:

Селезнёв Вадим Александрович,

д. ф.-м. н., профессор,

Новосибирский государственный технический университет, заведующий кафедры инженерной математики

Махрова Елена Николаевна,

к. ф.-м. н.,

Институт информационных технологий, математики и механики ННГУ им. Лобачевского, научный сотрудник и доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа

Ведущая организация:

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Сибирский федеральный университет»

Защита состоится 16.12.2024 г. в 16:00 на заседании диссертационного совета 24.1.074.01 при Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук по адресу: 630090, г. Новосибирск, просп. академика Коптюга, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИМ СО РАН и на сайте <https://math.nsc.ru/dis-council/dissert>.

Автореферат разослан __. __. 2024 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
24.1.074.01,
д. ф.-м. н.

Подвигин Иван Викторович

1 История вопроса и основные направления

Диссертация посвящена актуальным вопросам современного анализа, лежащим на стыке геометрической теории меры, фрактальной геометрии, теории графов и теории функции действительного переменного. В диссертации исследуются самоподобные множества на плоскости и в пространстве, самоподобные дендриты и фрактальные k -кубы.

1.1 Самоподобные множества

Геометрическая теория множеств целой и дробной размерности развивается уже более века, при этом множества дробной размерности встречаются и во многих других разделах математики, таких как теория чисел и нелинейные дифференциальные уравнения. Начало систематическому изучению таких множеств было положено работой¹ Б. Мандельброта 1975 года. В этой работе такие множества были применены для описания природных явлений, а также впервые введён термин «фрактал». Термин «фрактал» происходит от латинских *fractus* (дробный) и *frangere* (ломать), которыми и описывается суть фрактала как нерегулярного и «изломанного» множества.

Мандельброт дал первое определение фрактала как множества, размерность Хаусдорфа которого превосходит топологическую, но он сам признал его неполным. На практике строго определить фрактал не так просто. К. Фальконер² даёт несколько признаков, которым могут удовлетворять фракталы. Для того, чтобы можно было назвать объект A фракталом, он должен характеризоваться какими-либо из свойств, перечисленных ниже.

1. A имеет тонкую структуру, т. е. содержит сложные структурные элементы на любых масштабах;
2. A слишком неоднородно, чтобы описываться на традиционном геометрическом языке;
3. A самоподобно в том или ином смысле, т. е. имеет повторяющуюся структуру в разных масштабах;
4. «Фрактальная» размерность (например, размерность Хаусдорфа или клеточная размерность) множества A превышает его топологическую размерность и зачастую является не натуральным числом;
5. A можно построить через рекурсивные или итеративные схемы (что позволяет моделировать фракталы на компьютерах).

¹**Mandelbrot B.**, Les objets fractals: forme hasard et dimension // Paris. Flammarion. 1975.

²**Falconer K. J.**, Fractal geometry: mathematical foundations and applications / K. J. Falconer. — 3rd ed. — New York: J. Wiley and Sons., 2014. — 398 p.

Важным разделом фрактальной геометрии является теория самоподобных множеств. На протяжении всей работы мы будем рассматривать именно самоподобные множества. Понятие самоподобия упоминается довольно давно, так, например, в 1904 году Хельге фон Кох строит непрерывную кривую, не имеющую касательной ни в одной из своих точек, а в 1905 году Чезаро указывает на её самоподобие. Из более поздних примеров самоподобных множеств можно указать на П. Леви, который в 1939 году описал самоподобные кривые, состоящие из n копий одинакового размера.

Дж. Хатчинсон в 1981 г.³ дал строгое определение самоподобного множества K как множества, являющегося объединением $\bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ образов самого себя относительно отображений из системы сжимающих подобий $\mathcal{S} = \{S_i, i = 1, \dots, m\}$. Такое K также будем называть аттрактором системы \mathcal{S} . В этой работе он ввёл систему понятий и чёткий математический аппарат к исследованию таких множеств. Работа Хатчинсона послужила основой для множества дальнейших исследований.

Р. Молдин и С. Вильямс⁴ разработали концепцию граф-ориентированных систем подобий, аттрактором которых является система компактов, каждый из которых может состоять не только из своих копий, но и из копий других компактов системы.

В 1996 году М. Моран⁵ определил бесконечно-порождённые самоподобные множества и указал условия, при которых их свойства аналогичны свойствам конечнопорождённых самоподобных множеств.

В теории самоподобных множеств часто возникает вопрос о вычислении фрактальной размерности самоподобного множества. Под фрактальной размерностью обычно подразумевают одну из нескольких размерностей: размерность Минковского (или т.н. клеточная размерность), упаковочная размерность, размерность Ассuada, размерность Хаусдорфа и некоторые другие. Для некоторых фракталов эти размерности могут совпадать, но в общем случае они не эквивалентны.

Фрактальная размерность самоподобного множества $K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K)$ почти всегда зависит как от коэффициентов подобия $\text{Lip}(S_i)$ отображений системы \mathcal{S} , так и от взаимного расположения и структуры пересечения копий самоподобного множества. Условия отделимости систем сжимающих подобий, порождающих эти фракталы, помогают определить то, насколько сильно расположение и структура пересечений копий самоподобного множества влияют на его фрактальную размерность. Среди условий отделимости наиболее часто применяются условие открытого множества (OSC) и слабое условие отделимости (WSP).

³Hutchinson J., Fractals and Self-Similarity // Indiana University Mathematics Journal. 1981. Т. 30. № 5. С. 713–747.

⁴Mauldin R. D., Williams S. C., Hausdorff dimension in graph directed constructions // Transactions of the American Mathematical Society. 1988. Т. 309. № 2. С. 811–829.

⁵Moran M., Hausdorff measure of infinitely generated self-similar sets // Monatshefte für Mathematik. 1996. Т. 122. № 4. С. 387–399.

П. Моран в 1946 г.⁶ ввёл условие открытого множества (OSC) для самоподобных множеств на прямой, а Дж. Хатчинсон⁶ применил введённое Мораном условие открытого множества к системам сжимающих подобий в \mathbb{R}^n для любого натурального n .

Мы говорим, что система сжимающих подобий $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ удовлетворяет условию открытого множества, если существует открытое множество O такое, что множества $\{O_i = S_i(O) \mid S_i \in \mathcal{S}\}$ содержатся в O и попарно друг с другом не пересекаются. Если система $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих подобий в \mathbb{R}^n с коэффициентами подобия r_1, \dots, r_m удовлетворяет условию открытого множества, то хаусдорфова размерность аттрактора этой системы равна его размерности подобия s , которая является решением уравнения Морана

$$r_1^s + \dots + r_m^s = 1.$$

Условие открытого множества справедливо далеко не всегда. Но и в случае, когда система \mathcal{S} удовлетворяет OSC, его проверка может быть сопряжена с определёнными трудностями. Например, открытое множество может иметь очень сложную структуру или состоять из бесконечного числа связанных компонент. Поэтому К. Бандт и З. Граф в 1992 году⁷ нашли алгебраический аналог для OSC и ввели алгебраическое условие, основанное на ассоциированном семействе подобий $\mathcal{F}(\mathcal{S})$. Это условие состоит в том, что $\text{Id} \notin \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S})}$. Авторы показали, что оно эквивалентно тому, что для системы \mathcal{S} с размерностью подобия s , s -мерная мера Хаусдорфа её аттрактора положительна, то есть

$$\text{Id} \notin \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow H^s(K) > 0.$$

Более того, при выполнении этого условия пересечения копий самоподобного множества K имеют нулевую меру.

Условие открытого множества можно усилить требованием, согласно которому открытое множество O и аттрактор K системы \mathcal{S} имеют непустое пересечение. Так получается сильное условие открытого множества (SOSC). В 1994 г. А. Шиф⁸ показал, что все три условия — SOSC, OSC и условие положительности меры Хаусдорфа в размерности подобия — эквивалентны.

В 1996 году М. Цернер⁹ ввёл слабое условие отделимости (WSP). Самоподобное множество удовлетворяет WSP, если тождественное отображение

⁶Moran P. A. P., Additive functions of intervals and Hausdorff measure // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1946. Т. 42. № 1. С. 15–23.

⁷Bandt C., Graf S., Self-Similar Sets 7. A Characterization of Self-Similar Fractals with Positive Hausdorff Measure // Proceedings of the American Mathematical Society. 1992. Т. 114. № 4. С. 995–1001.

⁸Schief A., Separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. Т. 112. №. 1. С. 111–115.

⁹Zerner M. P. W., Weak separation properties for self-similar sets // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – Т. 124, №. 11. – С. 3529–3539.

Id не является предельной точкой в ассоциированном семействе подобий $\mathcal{F}(S)$, то есть $\text{Id} \notin \overline{\mathcal{F}(S)} \setminus \mathcal{F}(S)$. Для самоподобных множеств, удовлетворяющих WSP, можно модифицировать уравнение Морана так, что решение этого уравнения будет совпадать с размерностью Хаусдорфа. Для систем сжимающих подобий, не удовлетворяющих WSP, вычисление размерности Хаусдорфа их аттракторов может быть непростой задачей.

1.2 Дендриты

Дендритом называют локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг. Вообще говоря, слово «дендрит» является термином из общей топологии. Согласно обзору¹⁰ Я. Харатоника и В. Харатоника, история исследований в этой области охватывает более чем 75 лет.

В теории самоподобных множеств с самого её начала предпринимались попытки выработать некоторые подходы к самоподобным дендритам. В 1985 году М. Хата¹¹ показал, что нетривиальный самоподобный дендрит имеет бесконечное множество конечных точек. В 1990 году К. Бандт¹² показал, что кратчайшие дуги, соединяющие пары точек самоподобной границы в посткритически конечном самоподобном множестве, являются аттракторами граф-ориентированных систем, а множество возможных значений размерностей таких дуг конечно. Такие дуги с минимальной размерностью и мерой называются кратчайшими дугами. В случае самоподобных дендритов, эти результаты описывают главные дуги.

К. Бандт также рассмотрел факторизацию индексного пространства, приводящую к появлению дендритов. Дж. Кигами в своей работе¹³ применил к дендритам методы гармонического анализа на фракталах.

В работах последней четверти XX века рассматривались несколько важных примеров самоподобных дендритов. К ним можно отнести дерево Хаты, множество Вичека или пентадендрит. Тем не менее, долгое время отсутствовали удобные геометрические методы, позволяющие целенаправленно конструировать системы сжимающих подобий, аттракторы которых являлись бы дендритами. Позднее, в статье¹⁴ были описаны методы задания и геометрические свойства самоподобных дендритов в \mathbb{R}^d — вопросы, до 2017 года ещё недостаточно освещённые в теории самоподобных фракталов. Для этого был построен и исследован класс P -полиэдральных дендритов в \mathbb{R}^d .

¹⁰Charatonik J. J., Charatonik W. J., Dendrites // Aportaciones Mat. Comun. 1998. Т. 22. С. 227–253.

¹¹Hata M., On the structure of self-similar sets // Japan Journal of Applied Mathematics. 1985. Т. 2. № 2. С. 381–414.

¹²Bandt C., Stahnke J., Self-similar sets 6. Interior distance on deterministic fractals // preprint, 1990

¹³Kigami J., Harmonic Calculus on Limits of Networks and Its Application to Dendrites // Journal of Functional Analysis. 1995. Т. 128. № 1. С. 48–86.

¹⁴Тетенов А. В., О дендритах, заданных системами полиэдров и их точках ветвления / А. В. Тетенов, М. Самуэль, Д. А. Ваулин // Труды ИММ УРО РАН, 2017, т.23, № 4, С. 281 – 291.

Такие дендриты K определяются как аттракторы систем $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ сжимающих подобий в \mathbb{R}^d , переводящих заданный полиэдр $P \subset \mathbb{R}^d$ в полиэдры $P_i \subset P$, попарные пересечения которых либо пусты, либо одноточечны и при этом являются общими вершинами полиэдров P_i , а граф попарных пересечений системы полиэдров P_i ацикличесен. Эти же авторы в работе¹⁵ более подробно изучили стягиваемые P -полигональные системы — двумерный частный случай P -полиэдральных систем и привели примеры изоморфизмов между аттракторами двух геометрически различных полигональных систем. Это привело к поиску более широкого класса дендритов путём ослабления условий, задающих стягиваемые P -полигональные системы. Исследование такого класса дендритов является одной из целей данной работы.

Говоря о полигональных системах, нельзя не упомянуть о полигаскетах, описанных К. Бандтом и Й. Штанке в работе¹² и Р. Стритчартсом в работе¹⁶, которые хоть и не являются дендритами, но для их построения использовались схожие геометрические методы. Для полигаскетов ими также были описаны кратчайшие дуги, соединяющие пару точек полигаскета и имеющих минимальную размерность и меру. Кратчайшие дуги позднее будут применены в работах^{14 15} для построения главных дуг и главного дерева самоподобного дендрита, являющегося аттрактором полигональных систем.

Проверка того, является ли самоподобное множество дендритом, связана со структурой попарных пересечений копий этого аттрактора. Следует начать с результатов М. Хаты¹¹, который в 1985 году доказал для самоподобного множества критерий связности. Опишем эквивалентную формулировку этого критерия.

Рассмотрим для самоподобного множества его граф пересечений, в котором вершинам графа соответствуют копии самоподобного множества, а рёбра соединяют вершины, для которых соответствующие копии имеют непустое пересечение. М. Хата показал, что самоподобное множество K связно тогда и только тогда, когда его граф пересечений связан. При этом, если K связно, то оно локально связно и линейно связно.

В дальнейшем К. Бандт и К. Келлер (1991) показали, что если у самоподобного множества копии пересекаются не более чем по одной точке и его граф пересечений есть дерево, то это множество является дендритом. Для дендритов, в которых по одной точке пересекались более двух копий, ими была сформулирована идея двудольного графа пересечений. Завершил доказательство этой идеи А. В. Тетенев¹⁷, определив двудоль-

¹⁵Samuel M., Tetenov A. V., Vaulin D. A., Self-similar dendrites generated by polygonal systems in the plane // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Т. 14. С. 737–751.

¹⁶Strichartz R., Isoperimetric Estimates on Sierpinski Gasket Type Fractals // Transactions of the American Mathematical Society. 1999. Т. 351. № 5. С. 1705–1752.

¹⁷Tetenov A., Finiteness properties for self-similar continua // arXiv:2003.04202v2 [math.MG]. 2021.

ный граф пересечений, в котором одной доле соответствуют копии аттрактора, а другой доле — точки попарных пересечений этих копий. Ребрами в графе могут соединяться только точки разных долей, если соответствующая точка пересечения лежит в соответствующей копии. Таким образом было получено необходимое и достаточное условие того, что самоподобные множества с одноточечным пересечением являются дендритами.

Данная диссертация в значительной степени посвящена изучению самоподобных дендритов. Во второй главе определяются обобщённые полигональные системы и даются условия, при которых аттрактор такой системы будет дендритом. В третьей главе представлен алгоритм, выявляющий среди фрактальных кубов дендриты с одноточечным пересечением. В четвёртой главе более рассматриваются фрактальные квадраты, являющиеся дендритами, в частности, их самоподобные границы и главные деревья.

1.3 Фрактальные квадраты

Рассмотрим единичный квадрат на плоскости. Разобьём этот квадрат на n^2 равных квадратов с ребром $1/n$, и в этом множестве квадратов разбиения выберем какое-то непустое подмножество. Построим систему $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ гомететий, переводящих единичный квадрат в выбранные квадраты. Аттрактор K этой системы мы будем называть *фрактальным квадратом*. Широко известными примерами фрактальных квадратов являются множество Вичека и ковёр Серпинского.

Фрактальные квадраты являются самоподобным частным случаем самоаффинных *ковров Бедфорда-МакМаллена*. Последние, в свою очередь, являются двумерным аналогом самоаффинных *губок Серпинского*. Самоподобную губку Серпинского называют фрактальным кубом.

В 1984 году независимо друг от друга Т. Бедфорд¹⁸ и К. МакМаллен¹⁹ определили и рассмотрели класс самоаффинных множеств, которые впоследствии стали называть коврами Бедфорда-МакМаллена. Одним из их результатов была формула для вычисления хаусдорфовой размерности таких множеств.

Как оказалось, размерность и мера ковров Бедфорда-МакМаллена и их многомерных аналогов обладает более сложным поведением по сравнению со своими самоподобными частными случаями. Так, Ю. Перес²⁰ в 1994 году показал, что мера Хаусдорфа (в своей размерности) у ковров Бедфорда-МакМаллена может быть не σ -конечной. Позднее Ю. Перес и Р. Кенъон²¹ вывели формулу хаусдорфовой размерности для

¹⁸ Bedford T., Crinkly curves, Markov partitions and dimension: Phd Thesis / University of Warwick, 1984.

¹⁹ McMullen C., The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets // Nagoya Mathematical Journal. 1984. Т. 96. С. 1–9.

²⁰ Peres Y., The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1994. Т. 116. № 3. С. 513–526.

²¹ Kenyon R., Peres Y., Measures of full dimension on affine-invariant sets // Ergodic Theory

губок Серпинского. М. Елекес с соавторами (2009) рассматривали меры на самоаффинных губках и на пересечениях губок при смещениях. Подробный обзор и сравнение различных фрактальных размерностей (Хаусдорфа, клеточная, упаковочная, Ассуада и др.) для губок Серпинского в 2021 году привёл Дж. Фрейзер²². Т. Зайцева и В. Протасов (2022) исследовали структуру многомерных периодических замощений.

В 2013 году К.-С. Лау, Дж. Дж. Луо и Х. Рао²³ рассмотрели топологические свойства замощений плоскости фрактальными квадратами. Л. Кристеа и Б. Штайнски выпустили цикл работ, посвящённый выделению и исследованию подгук во фрактальных квадратах и фрактальных треугольниках. Они выделили один класс фрактальных квадратов, являющихся дендритами, назвав их лабиринтными фракталами и изучали случайные фракталы, принадлежащие этому классу. Дж.-Ц. Сяо (2021) строил и изучал несвязные фрактальные квадраты с конечным числом компонент, для этого он особым образом модифицировал граф пересечений.

В третьей главе данной диссертации рассматривается структура и свойства пересечения пары фрактальных k -кубов. В четвёртой главе более подробно рассмотрены самоподобная граница, свойство одноточечного пересечения и главное дерево у односвязных фрактальных квадратов.

2 Научная новизна. Теоретическая и практическая ценность.

На защиту выносятся следующие положения.

1. Найдено необходимое условие, при котором аттрактор обобщённой полигональной системы является дендритом.
2. Доказано, что при достаточно малом $\delta = \delta(\mathcal{S}) > 0$ аттрактор любой (удовлетворяющей условию совпадения параметров) δ -деформации \mathcal{S}' полигональной системы \mathcal{S} является дендритом, изоморфным аттрактору системы \mathcal{S} .
3. Получена формула, выражающая пересечение двух фрактальных k -кубов в терминах их множеств единиц. Найдены условия, при которых такое пересечение будет пустым, конечным, счётным и несчётным. Для конечного пересечения получена оценка мощности.
4. Разработан алгоритм, позволяющий проверить, является ли фрактальный k -куб дендритом с одноточечным пересечением.

and Dynamical Systems. 1996. Т. 16. № 2. С. 307–323.

²²Fraser J. M., Fractal Geometry of Bedford-McMullen Carpets // Thermodynamic Formalism / под ред. M. Pollicott, S. Vaienti. : Springer International Publishing, 2021. С. 495–516.

²³Lau K.-S., Luo J. J., Rao H., Topological structure of fractal squares // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2013. Т. 155. № 1. С. 73–86.

5. Доказано, что нетривиальные односвязные фрактальные квадраты являются дендритами со свойством одноточечного пересечения.
6. Доказано, что нетривиальные односвязные фрактальные квадраты допускают ровно семь возможных топологических типов главного дерева.

Перечисленные результаты являются новыми.

Работа носит теоретический характер. Её результаты и методы могут быть использованы для дальнейшего изучения самоподобных множеств, фрактальных кубов, ковров Бедфорда-МакМаллена и губок Серпинского. Результаты работы могут быть использованы специалистами по комплексному, действительному и функциональному анализу, топологии и фрактальной геометрии.

Результаты, полученные на основе полигональных дендритов и фрактальных квадратов, могут иметь практическое применение в радиофизике, во фрактальной реконструкции сигналов и радиолокационных изображений, в материаловедении и в других областях физики, химии и биологии.

3 Апробация результатов.

Основные результаты диссертации опубликованы в шести изданиях [1, 2, 3, 4, 5, 6], пять из которых [1, 2, 3, 5, 6] опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК. Результаты всех работ получены авторами совместно при равном вкладе и являются неделимыми.

Результаты и основные положения диссертации докладывались на семинаре «Геометрическая теория функций» ИМ СО РАН (руководители: проф. А. Д. Медных, чл.-корр. РАН А. Ю. Веснин, проф. В. В. Асеев); на семинаре «Теория графов» ИМ СО РАН (руководители: к.т.н. Е. В. Константинова, к.ф.-м.н. А. А. Добрынин); на семинаре «Геометрия, топология и их приложения» ИМ СО РАН (руководитель акад. И. А. Тайманов).

Результаты диссертации были представлены на международных конференциях «Dynamics in Siberia» (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2021, 2024); на Международной научной студенческой конференции (Новосибирск, НГУ, 2021); на Международной школе-конференции «Комплексный анализ и его приложения» (Геленджик, КубГУ, 2021); на Международной школе-конференции «Siberian summer conference: Current developments in Geometry» (Новосибирск, НГУ, ИМ СО РАН, 2021); на Международной конференции «AMS Fall Western Virtual Sectional Meeting» (University of New Mexico, 2021); на Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2022» (Москва, МГУ, 2022); на Международной конференции «AMS Spring Western Virtual Sectional Meeting» (University of Denver, 2022); на Международной конференции «023w: Геометрия и топология трёхмерных многообразий» (Сочи, МЦ Сириус, 2022);

на Международной конференции по геометрическому анализу, посвященной памяти Ю.Г. Решетняка (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2022); на Второй конференции Математических центров России (Москва, МГУ, МИАН, 2022); на Международной конференции «030w: Geometric and Algebraic Methods in Knot Theory» (Сочи, МЦ Сириус, 2023); на Школе-конференции по геометрическому анализу (Новосибирск, НГУ, 2023); на Международной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, ИМ СО РАН, 2023).

4 Содержание диссертации

Перейдём к описанию структуры работы и точным формулировкам основных результатов. Диссертация выполнена в издательской системе \LaTeX , содержит 85 страниц и состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы. Список литературы приведён в алфавитном порядке. Изображения построены в программе IFSfile и с помощью макропакета PGF/Tikz для системы \LaTeX .

В **первой главе** вводятся базовые понятия теории самоподобных множеств.

Определение 1.1. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ — система (инъективных) сжимающих отображений полного метрического пространства (X, d) . Непустое компактное множество $K \subset X$ называется аттрактором системы \mathcal{S} , если

$$K = \bigcup_{i=1}^m S_i(K).$$

Мы также называем множество K самоподобным (инвариантным) относительно системы \mathcal{S} .

На протяжении всей работы особый интерес будут представлять самоподобные множества, являющиеся дендритами.

Определение 1.6. Дендрит — это локально связный континуум, не содержащий простых замкнутых дуг.

Простой замкнутой дугой мы называем непрерывный инъективный образ окружности.

Самоподобной границей аттрактора K называется множество ∂K всех таких точек $x \in K$, что для некоторой композиции $S_j = S_{j_1} \dots S_{j_n}$ отображений системы \mathcal{S} образ $S_j(x)$ содержится в пересечении пары копий аттрактора K .

Определение 1.13. Пусть K — самоподобный дендрит с конечной самоподобной границей ∂K . Минимальный поддендрит $\hat{\gamma} \subset K$, содержащий ∂K , называется главным деревом дендрита K .

Если в самоподобном множестве его копии попарно пересекаются не более чем по одной точке, то мы говорим, что такое множество обладает свойством одноточечного пересечения. Первым удобным классом самоподобных дендритов с одноточечным пересечением являются аттракторы стягиваемых полигональных систем.

Определение 1.11. Пусть $P \subset \mathbb{R}^2$ — гомеоморфный диску ограниченный многоугольник, а \mathcal{V}_P — множество его вершин. Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ — такая система подобий в \mathbb{R}^2 , что:

- (D1) для любого $i \in I$ множество $P_i = S_i(P) \subset P$;
- (D2) для любых неравных $i, j \in I$, $P_i \cap P_j = \mathcal{V}_{P_i} \cap \mathcal{V}_{P_j}$, а $\#(\mathcal{V}_{P_i} \cap \mathcal{V}_{P_j}) \leq 1$;
- (D3) $\mathcal{V}_P \subset \bigcup_{i \in I} S_i(\mathcal{V}_P)$;
- (D4) множество $\tilde{P} = \bigcup_{i=1}^m P_i$ стягиваемо.

Такая система \mathcal{S} , удовлетворяющая условиям D1 – D4, называется стягиваемой P -полигональной системой подобий.

Теорема 1.12. Аттрактор K стягиваемой P -полигональной системы подобий \mathcal{S} является дендритом.

Обнаружить самоподобные дендриты с одноточечным пересечением позволяет двудольный граф пересечений.

Определение 1.9. Пусть $K = K(\mathcal{S})$ — самоподобное множество, обладающее свойством одноточечного пересечения. Двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ системы \mathcal{S} — это двудольный граф с долями $\mathcal{K} = \{K_i : i \in I\}$ (белые вершины) и $\mathcal{P} = \{p : p \in K_i \cap K_j, i, j \in I, i \neq j\}$ (чёрные вершины), и с множеством рёбер $E = \{(K_i, p) : p \in K_i\}$.

Теорема 1.10. Пусть $K = K(\mathcal{S})$ — самоподобный континуум со свойством одноточечного пересечения. Если граф пересечений $\hat{\Gamma}(\mathcal{S})$ системы \mathcal{S} является деревом, то её аттрактор K — дендрит с одноточечным пересечением.

Во второй главе получен более широкий класс полигональных дендритов. Для этого были ослаблены требования, накладываемые на стягиваемые полигональные системы.

Определение 2.1. Система $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$, удовлетворяющая условиям D2- - D4 определения 1.11, называется обобщённой P -полигональной

системой подобий.

Основные результаты главы затрагивают те обобщённые полигональные системы, которые являются δ -деформациями стягиваемых полигональных систем.

Определение 2.4. Пусть $\delta > 0$. Обобщённая P' -полигональная система $S' = \{S'_1, \dots, S'_m\}$ называется δ -деформацией P -полигональной системы $S = \{S_1, \dots, S_m\}$, если существует биекция $f : \bigcup_{k=1}^m \mathcal{V}_{P_k} \rightarrow \bigcup_{k=1}^m \mathcal{V}_{P'_k}$ такая, что

- a) $f|_{\mathcal{V}_P}$ продолжается до гомеоморфизма $\tilde{f} : P \rightarrow P'$;
- b) $|f(x) - x| < \delta$ для любого $x \in \bigcup_{k=1}^m \mathcal{V}_{P_k}$;
- c) $f(S_k(x)) = S'_k(f(x))$ для любого $k \in I$ и $x \in \mathcal{V}_P$.

Аттрактор K обобщённой полигональной системы S уже не обязан быть дендритом, поэтому для S требуется дополнительно проверить, что равенство $S_i(K) \cap S_j(K) = P_i \cap P_j$ выполняется. В таком случае аттрактор K стягиваемой полигональной системы S и аттрактор K' её δ -деформации S' изоморфны.

Рассмотрим дугу Γ с концами в точках A, B и такое сжимающее подобие S , что $S(A) = A$. Если $S(\Gamma) \subset \Gamma$, то мы говорим, что Γ инвариантна относительно подобия S .

Параметром инвариантной дуги Γ относительно конца A называется отношение $\lambda := \frac{\alpha}{\ln \rho}$, где $\alpha = \Delta \operatorname{Arg}_{z \in \Gamma \setminus S(\Gamma)}(z - A)$ и $\rho = \operatorname{Lip}(S)$.

Мы будем говорить, что обобщённая полигональная система система S удовлетворяет *условию совпадения параметров*, если для каждого $x = S_i(P) \cap S_j(P)$ (при $i \neq j$) все инвариантные дуги $\gamma_i \subset S_i(K)$ и $\gamma_j \subset S_j(K)$ с концом в x имеют относительно x одинаковые параметры.

Основные результаты главы формулируются в следующих теоремах.

Теорема 2.17 (о совпадении параметров). Пусть аттрактор K обобщённой полигональной системы S является дендритом. Тогда система S удовлетворяет условию совпадения параметров.

Теорема 2.23 (о малых деформациях). Для каждой полигональной системы S существует такое $\delta(S) > 0$, что для всякой её δ -деформации S' , удовлетворяющей условию совпадения параметров, аттрактор системы S' является дендритом, изоморфным аттрактору системы S .

В **третьей главе** рассматриваются фрактальные k -кубы, структура пересечения их копий, а также пересечение пары фрактальных k -кубов. В конце главы описывается последовательность действий, по которым мож-

но определить, является ли данный фрактальный куб дендритом с одно-точечным пересечением.

Определение 3.1. Пусть $D = \{d_1, \dots, d_r\}$, $d_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}^k$, где $n \geq 2$, а $1 < \#D < n^k$. Фрактальным k -кубом порядка n с множеством единиц D называют компактное множество $K \subset \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее равенству

$$K = \frac{K + D}{n} = \bigcup_{d_i \in D} \frac{d_i + K}{n}.$$

Пусть $A = \{-1, 0, 1\}^k$. Каждому вектору $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in A$ соответствует единственная грань единичного k -куба $P = [0, 1]^k$, задаваемая равенством $P_\alpha = P \cap (P + \alpha)$. Такое соответствие между множеством A и множеством граней k -куба P является взаимно-однозначным. Мы будем говорить, что $\alpha \sqsubseteq \beta$ если и только если $P_\alpha \supseteq P_\beta$.

Пусть K^1 и K^2 — фрактальные k -кубы порядка n с множествами единиц D^1 и D^2 . Гранью K_α^i фрактального k -куба K^i называется множество $K^i \cap P_\alpha$. Для любого $\alpha \in A$ символом F_α обозначим пересечение $K_\alpha^1 \cap (K_\alpha^2 + \alpha) = K^1 \cap (K^2 + \alpha)$ пары граней фрактальных k -кубов K^1 и K^2 . Первый результат этой главы выражает пересечение F_α в терминах множеств F_β (где $\beta \supseteq \alpha$) и множеств единиц D^1 и D^2 .

Теорема 3.7. Семейство множеств $\{F_\alpha = K^1 \cap (K^2 + \alpha) : \alpha \in A\}$ удовлетворяет системе Σ уравнений

$$F_\alpha = \bigcup_{\beta \supseteq \alpha} \frac{F_\beta + G_{\alpha\beta}}{n}, \text{ где } G_{\alpha\beta} = D^1 \cap (D^2 + n\alpha - \beta). \quad (3.3)$$

Отношения между множествами F_α описываются структурным графом Γ_Σ с множеством вершин $\{\alpha \in A : F_\alpha \neq \emptyset\}$ и множеством рёбер $\{(\alpha, \beta) : \alpha \sqsubseteq \beta, G_{\alpha\beta} \neq \emptyset, F_\beta \neq \emptyset\}$, где ребро (α, β) направлено из α в β и отмечено $G_{\alpha\beta}$.

Мы пишем $\beta \succcurlyeq \alpha$, если Γ_Σ содержит направленный путь из α в β , и $\beta \succ \alpha$, если при этом $\alpha \neq \beta$. Обозначим через Γ_α подграф графа Γ_Σ с множеством вершин $\{\beta : \beta \succcurlyeq \alpha\}$.

Следующая оценка множества F_α является вторым результатом главы.

Теорема 3.11.

- (1) Если $\#G_\beta > 1$ для некоторого $\beta \succcurlyeq \alpha$, то F_α несчётно.
- (2a) Если $\#G_\beta \leq 1$ для любого $\beta \succcurlyeq \alpha$, то F_α не более чем счётно.
- (2b) Если при этом $\exists \beta' \succ \beta$ такое, что $\#G_{\beta'} = 1$ и $F_{\beta'} \neq \emptyset$, то F_α счётно.

- (3) Если $\#G_\beta = 1$ для всех максимальных вершин β в Γ_α , и $G_{\alpha_i} = \emptyset$ для всех остальных вершин α_i в Γ_α , то F_α конечно. В этом случае $\#F_\alpha$ не превосходит сумму произведений $\prod_{j=1}^{p-1} \#G_{\alpha_j \alpha_{j+1}}$, взятых по всем цепочкам $\alpha = \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_p = \beta$, где β максимальна в Γ_α .
- (4) Если все $\alpha_i \succ \alpha$ образуют единственную цепочку $\alpha = \alpha_1 \prec \dots \prec \alpha_p$, в которой $G_{\alpha_j} = \emptyset$ и $\#G_{\alpha_j \alpha_{j+1}} = 1$, $\#G_{\alpha_p} = 1$ для всех $j \leq p-1$, то $\#F_\alpha = 1$.

Далее будем полагать, что $K = K^1 = K^2$. Тогда $F_\alpha = K \cap (K + \alpha)$. Фрактальный k -куб K является множеством с одноточечным пересечением, если для каждого $\alpha \succ 0$ множество F_α одноточечно.

Чтобы проверить, является ли фрактальный k -куб K дендритом с одноточечным пересечением, нужно выполнить следующие шаги.

1. Найдём все множества $G_\alpha, G_{\alpha\beta}$ и выпишем систему уравнений Σ .
2. Построим структурный граф Γ_Σ и рассмотрим подграф Γ_0 .
3. Проверим, является ли K множеством с одноточечным пересечением. Если это не так, то K — это не дендрит с одноточечным пересечением.
4. Построим двудольный граф пересечений $\hat{\Gamma}$ для фрактального куба K , сопоставив белым вершинам векторы из D . Тогда для каждого $\alpha \sqsupset 0$ пара белых вершин $d, d + \alpha$ соединена рёбрами с общей чёрной вершиной, если $d \in G_{0\alpha}$. Теорема 3.14 и следствие 3.15 позволят обнаружить случаи, когда чёрная вершина в $\hat{\Gamma}$ соединена более чем с двумя белыми вершинами.
5. Проверим, является ли граф $\hat{\Gamma}$ деревом. Если $\hat{\Gamma}$ — дерево, то K — дендрит с одноточечным пересечением.

В **четвёртой главе** были рассмотрены главные деревья нетривиальных односвязных фрактальных квадратов.

Фрактальные квадраты являются частным случаем фрактальных k -кубов при $k = 2$, поэтому их более глубокое изучение в значительной степени опирается на результаты предыдущей главы.

Если у самоподобного дендрита конечная самоподобная граница, то главные деревья таких дендритов имеют конечное число концов. Тогда мы можем перечислить все топологические типы главных деревьев. Это позволит разбить все фрактальные квадраты на конечное число классов согласно форме главного дерева.

Первый результат текущей главы заключается в следующем.

Предложение 4.6. *Всякий односвязный фрактальный квадрат K либо совпадает с P , либо является дендритом. В последнем случае K со свойством одноточечного пересечения.*

Из этого следует, что фрактальный квадрат K является дендритом тогда и только тогда, когда его двудольный граф пересечений является деревом.

В дальнейшем, говоря «односвязный фрактальный квадрат», мы будем иметь ввиду «нетривиальный (то есть не совпадающий с P) односвязный фрактальный квадрат».

Для фрактального квадрата K с множеством единиц D мы определим множество $A_D = \{\alpha \in A \setminus \{(0, 0)\} : G_{0\alpha} \neq \emptyset, F_\alpha \neq \emptyset\}$. Тогда самоподобная граница ∂K фрактального квадрата K есть объединение $\partial K = \bigcup_{\alpha \in A_D} F_\alpha$. Если при этом K — дендрит, то для любого $\alpha \in A_D$ множество F_α одноточечно.

Следующая теорема группирует односвязные фрактальные квадраты по типам в зависимости от расположения точек их самоподобной границы.

Теорема 4.9. Пусть K — односвязный фрактальный квадрат, не являющийся отрезком. Тогда $\#\partial K \in \{3, 4, 6\}$.

Если $\#\partial K = 4$, то $\partial K = F_\alpha \cup F_{-\alpha} \cup F_\beta \cup F_{-\beta}$, где пара α, β принимает одно из следующих значений:

- A.** $\alpha = (1, 0), \beta = (0, 1)$;
- B.** $\alpha = (1, 1), \beta = (1, -1)$;
- C.** $\alpha \in \{(1, 1), (1, -1)\}, \beta \in \{(1, 0), (0, 1)\}$.

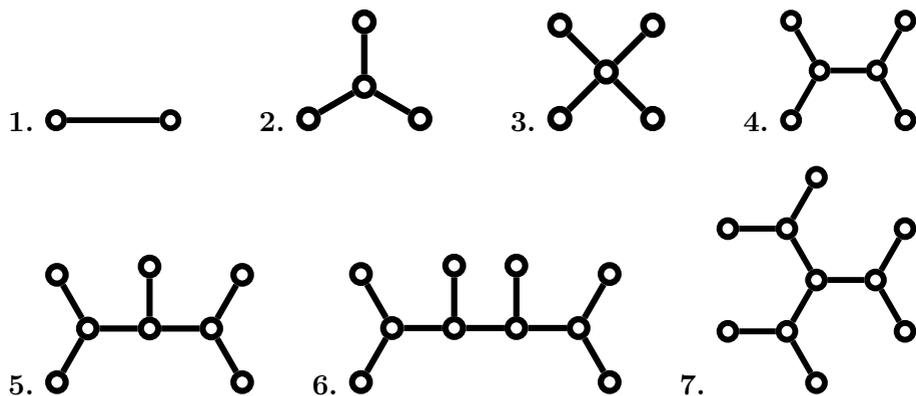
Если $\#\partial K = 3$ или $\#\partial K = 6$, то

- D.** $\partial K = F_{(1,0)} \cup F_{(-1,0)} \cup F_{(0,1)} \cup F_{(0,-1)} \cup F_\beta \cup F_{-\beta}$, где $\beta \in \{(1, 1), (1, -1)\}$.

Зная мощность самоподобной границы односвязных фрактальных квадратов, можно перечислить все топологические типы их главных деревьев. Поскольку $\#\partial K \leq 6$, в главном дереве не может быть более 6 концов.

Пусть K — односвязный фрактальный квадрат. Лемма 4.10 указывает для K комбинации векторов, которые не могут встречаться в множестве единиц D . Согласно лемме 4.11, $Ord(x, K) \leq 2$ для любой угловой точки x . Теорема 4.12 указывает количество угловых точек для каждого типа самоподобной границы. Теорема 4.13 оценивает порядок ветвления произвольной точки $x \in K$ и гласит, что $Ord(x, K) \leq 4$ для любого $x \in K$. Согласно предложению 4.14, если ∂K типу **D6** и γ — его главное дерево, то $Ord(x, \gamma) \leq 2$ для любого $x \in \partial K$ и $Ord(x, \gamma) \leq 3$ для любого $x \in \gamma$. Эти свойства ограничивает перечень допустимых типов главного дерева и позволяет сформулировать последний результат главы.

Теорема 4.15. Для нетривиальных односвязных фрактальных квадратов существует только 7 топологических типов главного дерева, модели которых показаны ниже.



Если мы будем классифицировать односвязные фрактальные квадраты по типу главного дерева, то мы получим 7 классов.

Публикации автора по теме диссертации

- [1] **Drozdov D., Samuel M., Tetenov A.**, On deformation of polygonal dendrites preserving the intersection graph // *The Art of Discrete and Applied Mathematics*. 2021. Т. 4. № 2. С. 1–21. 10
- [2] **Drozdov D., Samuel M., Tetenov A.**, On δ -deformations of Polygonal Dendrites // *Topological Dynamics and Topological Data Analysis*. : Springer Singapore, 2021. С. 147–164. 10
- [3] **Drozdov D. A., Tetenov A. V.**, On the dendrite property of fractal cubes // *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*. 2024. Т. 8. № 1. С. 73–80. 10
- [4] **Drozdov D., Tetenov A.**, On fractal squares possessing finite intersection property // *Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences*. 2022. Т. 5. № 3. С. 164–181. 10
- [5] **Drozdov D., Tetenov A.**, On the classification of fractal square dendrites // *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and Its Application*. 2023. Т. 7. № 3. С. 19–96. 10
- [6] **Ваулин Д. А., Дроздов Д. А., Тетенов А. В.**, О связанных компонентах фрактальных кубов // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. 2020. Т. 26. № 2. С. 98–107. 10