

Федеральное государственное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

На правах рукописи

Грюнвальд Лилия Александровна

**Аналитическая теория циркулянтных графов
и ее приложения к комбинаторному анализу**

1.1.1 —

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н, профессор

Медных Александр Дмитриевич

Новосибирск — 2024

Содержание

Введение.	5
Актуальность и степень разработанности темы исследования . . .	5
Цели и задачи	10
Основные результаты	11
Научная новизна и значимость работы	11
Методы исследований	12
Апробация работы	12
Публикации	13
Благодарности	14
Глава 1. Элементы спектральной теории циркулянтных графов	14
1.1. Циркулянтные графы, остовные деревья и леса.	14
1.2. Циркулянтное расслоение	17
1.3. Матрица Лапласа графа. Число остовных деревьев и число корневых остовных лесов	21
1.4. Критическая группа графа	26
1.5. Спектр циркулянтных графов	28
Глава 2. Корневые остовные леса в циркулянтных графах	29
§ 1. Циркулянтные графы, остовные деревья и леса	29
1.1. Арифметические свойства числа корневых остовных ле- сов в циркулянтных графах с чётной степенью вершин	33

1.2. Асимптотические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с чётной степенью вершин	35
1.3. Примеры	37
§2. Число отмеченных остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин	39
2.1. Арифметические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин	42
2.2. Асимптотические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин	44
2.3. Примеры	44
§3. Число корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении	45
3.1. Арифметические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении	55
3.2. Асимптотические свойства числа отмеченных остовных лесов в циркулянтном расслоении	57
3.3. Примеры	60
Глава 3. Критические группы циркулянтных графов	66
§1. Число остовных деревьев в конусе над графом	66
§2. Коядро линейного оператора	69
§3. Критическая группа конуса над графом и лесная группа	75
§4. Критическая группа конуса над циркулянтными графами	77
4.1. Лесная группа циркулянтного графа с чётной степенью вершин	78
4.2. Лесная группа циркулянтного графа с нечётной степенью вершин	79

4.3. Лесная группа кобордизма двух циркулянтных графов .	81
4.4. Примеры	82
Заключение	87
Список литературы	88

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования.

Диссертация посвящена изучению актуальных вопросов современного анализа, которые находятся на стыке комплексного анализа, комбинаторики, теории графов и алгебры. В работе рассматриваются спектральные и алгебраические свойства дискретного лапласиана, применительно к широкому семейству циркулянтных графов и их различным обобщениям.

Дискретный лапласиан, или матрица Лапласа, или матрица Кирхгофа графа G может быть определена как разность между диагональной матрицей степеней вершин $D(G)$ и матрицей смежности $A(G)$, то есть $L(G) = D(G) - A(G)$. Альтернативно, лапласиан может быть представлен через матрицу инцидентности B как $L(G) = BB^T$. В контексте математической физики, уравнение Лапласа $\Delta\phi = \lambda\phi$, представляет собой дифференциальное уравнение, где Δ — оператор Лапласа. При дискретизации на решетке, аналогичный процесс для графа приводит к формированию дискретного лапласиана $L(G)$, где B функционирует как дискретный оператор градиента (см. стр. 259 [1]).

Параметрическое семейство циркулянтных графов $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ на n вершинах с параметрами (скачками) $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$, представляют собой одно из самых обширных и разнообразных семейств графов, которое иногда рассматривается как граф Кэли для циклических групп. Это семейство включает в себя: граф-цикл, полный граф, полные двудольные графы, графы антипризмы, графы призмы, граф-корону, пустые гра-

фы, ладейные графы, графы Пэли простого порядка, лесницу Мёбиуса, а также множество других [2]. Матрица смежности таких графов является циркулянтной [3], что дает значительные преимущества для анализа их спектральных характеристик, так как матрица Лапласа циркулянтного графа также обладает циркулянтной структурой. Эта особенность делает циркулянтные графы особенно привлекательными для теоретического изучения и прикладных исследований. В данной работе рассматриваются только неориентированные циркулянтные графы.

В работе также вводится новый объект, обобщающий конструкцию семейства циркулянтных графов — циркулянтное расслоение [4, 69]. Это многослойный граф [5], каждый слой которого является произвольным циркулянтным графом. Основание такого расслоения образует связный граф H , допускающий наличие кратных ребер. Отличительной особенностью циркулянтного расслоения является возможность включения циркулянтных графов $C_n(\emptyset)$ с нулевыми скачками, что позволяет расширить классификацию графов в этом семействе, включая такие графы, как I -графы, Y -графы и H -графы [6].

Понятие числа корневых остовных лесов возникло в контексте изучения характеристического многочлена матрицы Лапласа графа. А. К. Кельманс значительно продвинул понимание влияния корней и коэффициентов этого многочлена на структуру графов [7, 8, 9]. Важное открытие, сделанное Кельмансом совместно с В. М. Челноковым (см. стр. 203, пункт 12 [10]), показало, что для неориентированного графа G на n вершинах, с точностью до знака, коэффициент c_k характеристического многочлена $\chi_G(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda$ матрицы Лапласа $L(G)$, равен числу кор-

невых остовных лесов, состоящих из k деревьев, где $k = 1, \dots, n - 1$. Этот результат является расширением известной матричной теоремы о деревьях Кирхгофа [11], где коэффициент c_1 соответствует общему числу остовных деревьев графа, умноженному на число его вершин. Из теоремы Кельманса-Челнокова можно заключить [12, 13, 68], что число корневых остовных лесов выражается как определитель матрицы $I_n + L(G)$, которая так же известна как дискретный оператор Гельмгольца [14], где I_n — единичная матрица порядка n .

Для семейства циркулянтных графов вопросы, связанные с исследованием числа корневых остовных лесов, ранее не рассматривались (насколько это известно автору). В данной работе представлены аналитические формулы для циркулянтных графов и циркулянтного расслоения, выраженные через многочлены Чебышёва. Это позволило представить число корневых остовных лесов в виде произведения, пределы которого не зависят от числа вершин в графе, а определяются исключительно скачками. Использование аналитической природы многочленов Чебышёва [15, 16, 17, 18] позволило исследовать асимптотическое поведение числа корневых остовных лесов при увеличении количества вершин графа до бесконечности. Выяснилось, что оно асимптотически выражается через меру Малера специального вида многочлена Лорана, который, будучи непосредственно связанным с лапласианом графа, оказывается более простым для вычисления по сравнению с использованием спектра характеристического многочлена графа. Кроме того, многочлены Чебышёва способствуют исследованию арифметических свойств числа корневых остовных лесов, демонстрируя, что оно представляет собой квадраты некоторых целочисленных последовательностей, умно-

женные на заданную константу, не зависящую от числа вершин в графах. Особенно интересным является факт, что в случае циркулянтных расслоений квадрат такой целочисленной последовательности, умножается на число корневых остовных лесов в графе H . Эти результаты опубликованы в ряде работ автора [68, 69, 70, 71].

Мы также исследуем структуру критической группы графа, известную под различными названиями: песочная группа, якобиан, группа Пикара или долларовая группа. Эти названия используются в зависимости от контекста; например, термин «якобиан» возник как дискретный аналог классического понятия из теории римановых поверхностей [19, 20]. Хотя критическая группа графа сама по себе не является спектральным инвариантом, она связана с ними через лапласиан графа. Именно, критическая группа графа изоморфна подгруппе кручения коядра лапласиана $\text{coker}(L(G))$, а ее порядок равен числу остовных деревьев графа. Это наблюдение позволяет вычислять структуру критической группы графа через нахождение нормальной формы Смита для матрицы Лапласа графа. Однако вычислительная сложность этого процесса возрастает с увеличением числа вершин графа, что в общем случае становится трудоемкой задачей.

Для графа-конуса с основанием, соответствующим произвольному графу G , можно доказать, что число его остовных деревьев соответствует числу корневых остовных лесов в основании. Кроме того, критическая группа графа-конуса изоморфна коядру $I_n + L(G)$; мы называем эту группу «лесной группой» графа G . Следовательно, порядок лесной группы равен числу корневых остовных лесов в основании конуса. Эту группу можно рассматривать как обобщение классического понятия критической группы произ-

вольного графа. Основное преимущество рассмотрения семейства циркулянтных графов как основание конуса, заключается в упрощении численных вычислений структуры критической группы. Это достигается за счет использования сопровождающей матрицы фиксированного размера, вместо матрицы Лапласа графа. Сопровождающая матрица, соответствующая сопровождающему многочлену Лорана, позволяет вычислять нормальную форму Смита более эффективно. Пользуясь этими фактами, можно получить структурные теоремы для критической группы конуса над циркулянтным графом и циркулянтным расслоением. Результаты данного исследования были опубликованы автором в работе [72].

В работах [21, 22] рассматриваются параллели между структурой графа-конуса и некоторыми аспектами теории узлов, основанные на теории циклических накрытий над графами и описаниях групп гомологий разветвленных циклических накрытий над узлами. Приведен следующий терминологический словарь, элементы правой части которого являются результатами данной диссертации, изложенными в 3 й главе:

Объект	Соответствие
Узел K в сфере S^3	Вершина графа-конуса
Многочлен Александера узла K	Сопровождающий многочлен Лорана основания конуса
Дополнение $S^3 \setminus K$	Основание конуса
Циклическое накрытие над $S^3 \setminus K$	Циклическое накрытие над основанием конуса
Циклическое накрытие M_n сферы S^3 , разветвленное над узлом K	Циклическое накрытие графа-конуса, разветвленное над его вершиной
Первая группа гомологий $H_1(M_n, \mathbb{Z})$	Критическая группа графа-конуса

Такие параллели обогащают наше понимание изучаемых объектов, стимулируя формулировку новых исследовательских вопросов. Они раскрывают возможности для применения методов из различных научных областей и способствуют расширению существующих подходов в науке.

Цели и задачи.

К основным целям диссертации относятся:

1. Нахождение аналитической формы для числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях;
2. Изучение арифметических и асимптотических свойств числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях;
3. Изучение структуры критической группы конуса над циркулянтным графом.

Основные результаты.

К основным результатам диссертации относятся:

1. Установлено, что число корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях эффективно выражается через многочлены Чебышёва первого рода [68, 69, 71];
2. Изучены арифметические свойства, показывающие, что число корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях может быть представлено в виде квадрата целочисленной последовательности, умноженной на заданную константу, не зависящую от числа вершин в графах [68, 69, 71];
3. Исследованы асимптотические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах и циркулянтных расслоениях. Показано, что при стремлении числа вершин к бесконечности, число корневых остовных лесов асимптотически выражается через меру Малера сопровождающего многочлена Лорана [68, 69, 71];
4. Установлена взаимосвязь между числом корневых остовных лесов и числом остовных деревьев в конусе над графом. В результате найдена структура критической группы конуса над графом [72].

Научная новизна и значимость работы.

Работа носит теоретический характер. Теоретические результаты демонстрируются на конкретных примерах, подчеркивающих преимущества

разработанных методов при вычислении инвариантов циркулянтных графов и циркулянтных расслоений. Результаты являются новыми и были опубликованы в рейтинговых журналах, включая международные издания [68, 69, 70, 71, 72]. Учитывая многочисленные пересечения с разными областями математики и естественных наук, поставленные задачи имеют широкий спектр применения.

Методы исследований.

В исследовании числа корневых остовных лесов использовались элементы теории результатов, что позволило выразить число корневых остовных лесов в терминах многочленов Чебышёва. Анализ корней многочлена Лорана с целыми коэффициентами был применён для исследования асимптотического поведения числа корневых остовных лесов. В результате число корневых остовных лесов асимптотически выражается через меру Малера при стремлении числа вершин графа к бесконечности. Для изучения структуры критической группы использовались методы теории чисел, которые показали, что для получения необходимых результатов достаточно вычислить нормальную форму Смита для матрицы фиксированного размера, вместо вычисления нормальной формы Смита для матрицы, размер которой неограниченно растёт.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на международной научной студенческой конференции (МНСК) (Новосибирск, апрель 2019-2021 г.); меж-

дународной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2021» (Москва, апрель 2021 г.); четырнадцатом международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О.Б. Лупанова (Москва, июнь 2022 г.); the 9th China-Russia Conference on Knot Theory and Related Topics (Китай, август 2023 г.); международной научной конференции «Дни геометрии в Новосибирске» (Новосибирск, август 2023 г.).

Результаты были представлены на международном семинаре «Knots and representation theory» под руководством В.О. Мантурова, И. М. Никонова, С. Ким (Москва, август 2023 г.); научно-исследовательском семинаре по дискретной геометрии и геометрии чисел под руководством профессоров Н. П. Долбилина, Н. Г. Мощевитина, М. Д. Ковалева и И.Х.Сабитова (Москва, апрель 2024 г.).

Результаты диссертации неоднократно обсуждались на семинарах ИМ СО РАН «Геометрия, топология и их приложения» под руководством академика И.А. Тайманова, на семинаре «Теория графов» под руководством Е.В. Константиновой и А.А. Добрынина и на семинаре «Геометрическая теория функций» под руководством А.Д. Медных, А.Ю. Веснина и В.В. Асеева.

Публикации.

Результаты автора по теме диссертации были опубликованы в работах [68, 69, 70, 71, 72]. Реферируемые журналы из списка ВАК [71, 72]. Индексируются в базах Scopus и Web of Science [68, 69, 70, 72].

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Александру Дмитриевичу Медных за всестороннюю поддержку, регулярную помощь, консультации и советы в ходе выполнения данной работы. Также автор благодарен кандидату физико-математических наук Илье Александровичу Медных за плодотворное сотрудничество, постоянные консультации и дискуссионные встречи. Автор признателен всем сотрудникам лаборатории теории функций Института математики Сибирского отделения Российской академии наук за дружескую атмосферу и полученные знания.

Глава 1. Элементы спектральной теории циркулянтных графов.

В этой главе представлены основные определения и свойства объектов, которые будут изучаться в данной работе. Рассмотрены определения и ключевые характеристики конструкций графов, а также их различные инварианты. Кроме того, приведен краткий обзор существующих результатов по изучаемой теме и краткий исторический экскурс.

1.1. Циркулянтные графы, остовные деревья и леса. Следуя, например, работе [23], определим граф G как тройку $G = (V, E, I)$, где $V = V(G)$ — множество вершин графа G , $E = E(G)$ — множество ребер, а I — правило, устанавливающее отношения между множествами V и E . Согласно этому правилу, каждое ребро $e \in E$ соединяет две различные

вершины $v_1, v_2 \in V$, то есть ребро *инцидентно* им. Ребро, инцидентное одной и той же вершине, называется *петлей*. Ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *кратными*. Число ребер, инцидентных заданной вершине v в графе G , определяет *степень* этой вершины, которую мы обозначаем как d_v .

Пусть $V'(G) \subset V(G)$. Граф, содержащий множество вершин V' и все ребра из $E(G)$, инцидентные вершинам в V' , называется *подграфом графа G* .

Рассмотрим граф G , построенный на n вершинах. Для дальнейшего изложения определим необходимые нам подграфы графа G . *Путем* в графе G называется последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n$ (повторение ребер и вершин допускается), где каждое ребро e_i инцидентно вершинам v_{i-1} и v_i для всех $i = 1, \dots, n$. Путь называется *циклом*, если $v_0 = v_n$. *Остовным деревом* графа G называется подмножество ребер, которое соединяет все его вершины и не содержит циклов. *Остовным лесом* на графе G называется подграф, не содержащий циклов, множество вершин которого совпадает с множеством вершин графа G . Связные компоненты остовного леса — это *деревья*. Остовный лес называется *корневым*, если для каждого дерева, входящего в его состав, выбрана вершина, которая назначается *корнем*. Лес, состоящий из одного дерева, является корневым остовным деревом. Лес, состоящий из k деревьев называется *k -лесом*.

В данной работе мы рассматриваем различные виды графов, среди которых есть графы, обладающие *связностью*. В таких графах любые две вершины можно соединить путем.

Рассмотрим последовательность целых чисел s_1, s_2, \dots, s_k , удовлетво-

ряющую условиям $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \frac{n}{2}$. Граф $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ с n вершинами, пронумерованными от 0 до $n - 1$ называется *циркулянтным*, если каждая его вершина i , где $0 \leq i \leq n - 1$, соединена с вершинами $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k \pmod{n}$. Числа s_1, s_2, \dots, s_k также называются «скачками». Когда n — чётное число и параметр $s_k = \frac{n}{2}$, каждая вершина графа имеет нечётную степень $2k - 1$. Такие графы будем обозначать как $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, где $2n$ подчеркивает чётность числа вершин и соответствие условиям на параметры $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$.

Для определения связности циркулянтного графа $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ используется результат, описанный в [24]. Граф является связным тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель параметров s_1, s_2, \dots, s_k и числа вершин n равен единице, то есть

$$\gcd(s_1, s_2, \dots, s_k, n) = 1.$$

Если $\gcd(s_1, s_2, \dots, s_k, n) > 1$, обозначим это число как d . Тогда граф разбивается на d компонент связности, каждая из которых изоморфна графу $C_{n/d}(s_1/d, s_2/d, \dots, s_k/d)$.

Семейство циркулянтных графов является одним из ключевых объектов данного исследования. Поскольку для задания циркулянтного графа требуется лишь указать набор скачков и число вершин, это семейство является параметрическим. Это семейство включает такие известные графы, как граф-цикл $C_n(1)$, полный граф $C_n(1, 2, \dots, n - 1)$, полные двудольные графы (граф-корона) $K_{n,n} = C_{2n}(1, 3)$, граф антипризмы $C_{2n}(1, 2)$, граф призмы $C_{2n}(2, n)$, ладейный граф $C_{nm}(m, 2m, 3m, \dots, nm/2, n, 2n, 3n, \dots, nm/2)$, граф Пэли простого порядка, лестница Мёбиуса $C_{2n}(1, n)$, а также многие другие [2]. Циркулянтные графы иногда рассматриваются как графы Кэли

для циклической группы [25].

Циркулянтные графы находят применение в разнообразных научных и прикладных областях. В частности, в компьютерных науках они известны под названием «циркулянтные сети» и широко используются для разработки сетевых структур [26]. В области квантовых вычислений и квантовой информатики циркулянтные графы исследуются как потенциальные квантовые сети, способные к идеальной передаче состояния (PST) [27]. В химии изучается метрическая размерность циркулянтных графов [28]. Кроме того, они представляют интерес в таких математических дисциплинах, как теория графов [29, 30, 31] и теория чисел [32], среди прочих.

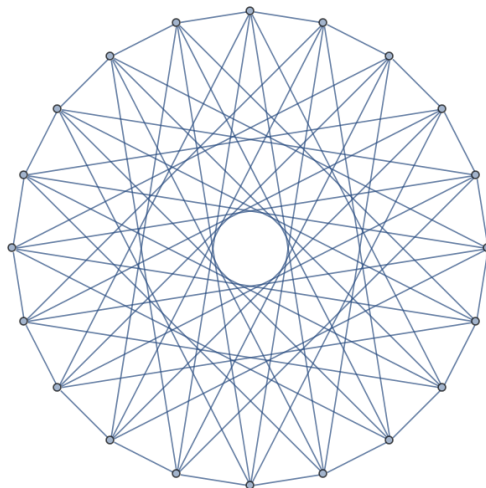


Рис. 1: Циркулянтный граф $C_{20}(1, 7, 9)$.

1.2. Циркулянтное расслоение. Пусть H будет графом с множеством вершин v_1, v_2, \dots, v_m , без петель и допускающим кратные ребра. Обозначим через a_{ij} количество ребер в H , соединяющих вершины v_i и v_j . Отсутствие петель в H гарантирует, что $a_{ii} = 0$ для всех i .

Согласно [4, 69], циркулянтное расслоение H_n над графом H определя-

ется как граф с множеством вершин

$$V(H_n) = \{(k, v_i) \mid k = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Вершины (k, v_i) и (k, v_j) соединены a_{ij} ребрами при фиксированном k . Для каждого фиксированного i и всех $k = 1, 2, \dots, n$, вершины (k, v_i) образуют циркулянтный граф

$$G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i}). \quad (1)$$

Как уже обсуждалось в пункте 1.1, каждая вершина (k, v_i) смежна с вершинами $(k \pm s_{i,1}, v_i), (k \pm s_{i,2}, v_i), \dots, (k \pm s_{i,k_i}, v_i) \pmod{n}$. Это показывает, что в структуре циркулянтного расслоения циркулянтные графы выполняют функцию «слоев». Важно отметить, что количество вершин в каждом слое одинаково. Если иное не указано, мы иногда будем обращаться к графу H как к базе расслоения.

Основной особенностью конструкции циркулянтного расслоения является наличие «особенных» слоев. Под особенными слоями мы подразумеваем циркулянтные графы, которые не имеют скачков, то есть $G_i = C_n(\emptyset)$. В таких случаях полагаем $k_i = 1$ и $s_{i,1} = 0$. Введение особенных слоев позволяет рассматривать, например, I -графы, Y -графы и H -графы [6].

Циркулянтное расслоение представляет собой частный случай многослойных структур, известных в литературе под названием «многослойные графы» (англ. multilayer graph) [5]. Эти виды графов находят применение в разнообразных областях, включая компьютерные науки и биологию. В дальнейшем мы будем обозначать циркулянтное расслоение как

$$H_n = H_n(G_1, G_2, \dots, G_m), \quad (2)$$

где каждый i -й слой является циркулянтным графом вида (1). Примеры, включая те, что содержат пустые слои $C_n(\emptyset)$, представлены ниже.

I -граф $I(n, k, l)$ [6, 33]. Рассмотрим базу H как граф-путь из двух вершин. В качестве слоев выступают $G_1 = C_n(k)$ и $G_2 = C_n(l)$, где k и l — произвольные целые числа. Согласно (2), циркулянтное расслоение представляется как $H_n = H_n(C_n(k), C_n(l))$.

Обобщенный граф Петерсена $GP(n, k)$ [33]. Этот вариант расслоения отличается от I -графа изменением одного слоя: $G_2 = C_n(1)$.

Граф-сэндвич. Рассмотрим H как граф-путь на m вершинах, где каждый слой формируется согласно (1) для $i = 1, \dots, m$. Графы $I(n, k, l)$ и $GP(n, k)$ являются частными случаями этой структуры при $m = 2$. Подробное исследование ситуации при $m = 2$ с произвольными циркулянтными слоями вида (1), известное как *обобщенная призма* $Pr(n)$ или *кобордизм двух циркулянтных графов*, приведено в работе [70].

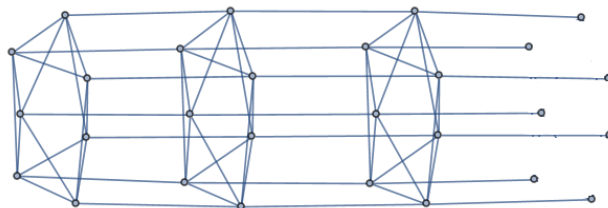


Рис. 2: Граф-сэндвич: первые 3 слоя представлены графами $G_1 = G_2 = G_3 = C_7(1, 2)$, а последний слой $G_4 = C_7(\emptyset)$.

Обобщенный Y -граф. Базой расслоения служит Y -образный граф, состоящий из четырех вершин v_1, v_2, v_3, v_4 и трех ребер v_1v_4, v_2v_4, v_3v_4 . Вершина v_4 имеет степень $d_4 = 3$, оставшиеся вершины — степень равную единице. Слоями являются циркулянтные графы (1) для $i = 1, 2, 3$, в то время как $G_4 = C_n(\emptyset)$ представляет собой пустой граф. Частный случай

этой конструкции был рассмотрен в работах [6, 34].

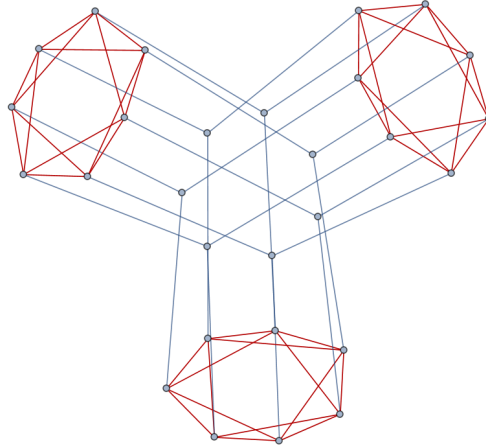


Рис. 3: *Обобщенный Y-граф*: три слоя представлены графами $G_1 = G_2 = G_3 = C_7(1, 2)$, а последний слой пустой $G_4 = C_7(\emptyset)$.

Обобщенный H-граф. В качестве базы используется H -образный граф, который включает в себя вершины $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$. Вершины v_5 и v_6 имеют степень $d_{v_5} = d_{v_6} = 3$, а остальные вершины — степень равную единице. В качестве слоев для $i = 1, \dots, 4$ выступают циркулянтные графы (1), тогда как слои G_5 и $G_6 = C_n(\emptyset)$ являются пустыми. Частные случаи этой конструкции также описаны в [6, 34].

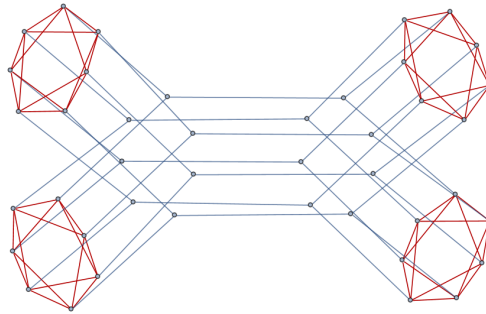


Рис. 4: *Обобщенный H-граф*: четыре слоя представлены графами $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = C_7(1, 2)$, а последние слои пустые $G_5 = G_6 = C_7(\emptyset)$.

Дискретный тор $T_{n,m} = C_n(1) \times C_m(1)$. Это циркулянтное расслоение представляет собой *декартово произведение* двух циркулянтных графов $C_n(1)$ и $C_m(1)$. В данном случае базой расслоения является граф $H = C_m(1)$, а слоями — циклы $C_n(1)$. Циркулянтное расслоение (2) в этом контексте описывается как $H_n = H_n(C_n(1), \dots, C_n(1))$, что соответствует m копиям $C_n(1)$.

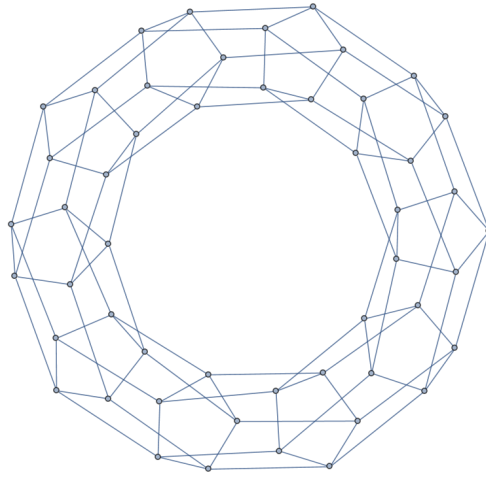


Рис. 5: Дискретный тор $T_{5,10} = C_5(1) \times C_{10}(1)$.

1.3. Матрица Лапласа графа. Число остовных деревьев и число корневых остовных лесов. В данном пункте мы рассмотрим два спектральных инварианта графа: число остовных деревьев и число корневых остовных лесов.

Рассмотрим граф G на n вершинах, который может содержать кратные ребра, но не содержит петель.

Определим для каждой пары вершин $u, v \in V(G)$ число a_{uv} , которое равно количеству ребер между u и v . Матрица $A(G) = \{a_{uv}\}_{u,v \in V(G)}$ называется *матрицей смежности* графа G . Если степень вершины v равна d_v ,

то диагональная матрица $D(G)$, элементы которой равны d_v для соответствующих вершин согласно их нумерации, называется *матрицей степеней* вершин графа. Рассмотрим матрицу

$$L(G) = D(G) - A(G).$$

Она известна как *матрица Лапласа*, или *матрица Кирхгофа*, или, более просто, *лапласиан* графа G .

В данной работе мы также используем обобщенное понятие матрицы Лапласа. Пусть $D(X)$ — диагональная матрица, элементами которой являются независимые переменные из набора $X = (x_v, v \in V(G))$, соответствующие нумерации вершин. Определим матрицу $L(G, X) = D(X) - A(G)$ как *обобщенную матрицу Лапласа* графа G .

Лапласиан обладает рядом интересных графовых характеристик и инвариантов. Основным инструментом для их изучения служит *характеристический многочлен* матрицы Лапласа $\chi_G(\lambda) = \det(\lambda I_n - L(G))$, где I_n — единичная матрица порядка n . Характеристический многочлен выражается следующим образом:

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda, \quad (1)$$

где c_1, c_2, \dots, c_{n-1} некоторые целочисленные коэффициенты.

Симметричная матрица Лапласа $L(G)$ графа G является вырожденной и неотрицательно определенной. Таким образом, все собственные значения лапласиана $L(G)$ являются неотрицательными действительными числами, причем наименьшее из них равно нулю. Кратность этого нулевого собственного значения указывает на количество связных компонент графа G ; так, граф является связным тогда и только тогда, когда эта кратность равна

единице [35]. Остальные корни характеристического многочлена матрицы $L(G)$ также несут важную информацию о структуре графа [36].

Кроме того, матрица Лапласа связана с подсчетом числа $\tau(G)$ остовных деревьев (см. пункт 1.1, глава 1) в графе G , также известного как *сложность* графа. Матричная теорема о деревьях, предложенная Кирхгофом [11], утверждает, что число остовных деревьев в связном графе равно любому его алгебраическому дополнению. Если же граф несвязен, то $\tau(G) = 0$ [1]. В терминах характеристического многочлена лапласиана графа матричная теорема о деревьях формулируется следующим образом:

Теорема 1. Пусть $\chi_G(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы Лапласа графа G . Тогда $\tau(G) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \chi'_G(0)$.

Изначально подход к изучению числа деревьев и графов в целом рассматривался с точки зрения электрических сетей [37]. Несмотря на вычислительную сложность, методы, предложенные Кирхгофом, значительно развились со временем. Хотя матричная теорема о деревьях не всегда применялась, для некоторых семейств графов были найдены относительно простые формулы. Среди них — известная формула Кэли для полных графов [38], колеса [39], веера [40], лестницы [41], лестницы Мёбиуса [42], решетки [43], призмы [44], антипризмы [45] и многие другие.

В работе [15] многие из перечисленных формул были впервые представлены в терминах многочленов Чебышёва. Этот подход улучшает не только читаемость формул, но и открывает новые возможности для изучения числа корневых остовных лесов и других графовых инвариантов. Кроме того, применение многочленов Чебышёва способствует ускорению компьютерных вычислений. В данной работе мы также опираемся на хо-

рошо изученные свойства многочленов Чебышёва, представленные в [46]. Введем *многочлены Чебышёва* первого рода $T_n(z) = \cos(n \arccos z)$ и второго рода $U_{n-1}(z) = \sin(n \arccos z)/\sin(\arccos z)$. Многочлены первого рода обладают важным свойством

$$T_n\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}).$$

Применение многочленов Чебышёва для анализа графов дополнительно обсуждается в [16, 17, 18].

Результатом, расширяющим матричную теорему о деревьях, является теорема о числе $f(G)$ корневых остовных лесов (см. пункт 1.1, глава 1), полученная А. К. Кельмансом и В. М. Челноковым [10]. Для данного исследования приводим следующую формулировку:

Теорема 2. *Пусть $\chi_G(\lambda)$ — характеристический многочлен (1). Тогда абсолютное значение его k -го коэффициента c_k равно числу корневых остовных лесов в графе G , состоящих из k деревьев.*

Отметим, что коэффициент $|c_1|$ соответствует числу корневых остовных деревьев в графе G . Поэтому число остовных деревьев в графе G равно $\frac{|c_1|}{n}$, где n — это число вершин в графе G .

Поскольку все собственные значения матрицы Лапласа графа G неотрицательны, последовательность коэффициентов $\{c_k\}$, $k = 1, \dots, n-1$ имеет чередующиеся знаки. Таким образом, число корневых остовных лесов в графе G может быть вычислено с использованием следующей формулы:

$$\begin{aligned} f(G) &= f_1 + f_2 + \dots + f_n = |c_1 - c_2 + c_3 - \dots + (-1)^{n-1}c_n| \quad (2) \\ &= (-1)^n \chi_G(-1) = \det(I_n + L(G)), \end{aligned}$$

где $c_n = 1$. Этот результат был независимо получен в работах [12, 13, 72].

Здесь оператор $I_n + L(G)$ известен как дискретный оператор Гельмгольца [14].

Однако аналитические формулы для вычисления числа корневых остовных лесов известны только для ограниченного числа случаев. К примеру, в работе [13] были предложены аналитические формулы для полного графа K_n и некоторых других типов графов, а в работе [47] для двудольных графов [48], а также для циклов и путей.

Иногда с вычислительной точки зрения предпочтительно изучать асимптотическое поведение спектральных инвариантов графов при неограниченном увеличении числа вершин. Один из подходов к анализу такого поведения может быть связан с использованием меры Малера, как указано в [49, 50].

Рассмотрим многочлен с комплексными переменными $P(z) = a_0 z^d + \dots + a_{d-1} z + a_d = a_0 \prod_{i=1}^d (z - \alpha_i)$, где $a_0 \neq 0$. Согласно [51], мера Малера многочлена P определяется как

$$M(P) := \exp \left(\int_0^1 \log |P(e^{2\pi i t})| dt \right).$$

Как показано в [52], эту величину также можно выразить в альтернативной форме

$$M(P) = |a_0| \prod_{|\alpha_i| > 1} |\alpha_i|.$$

Мера Малера может быть расширена на класс *многочленов Лорана*

$$P(z) = a_0 z^p + a_1 z^{p+1} + \dots + a_{s-1} z^{p+s-1} + a_s z^{p+s} = a_s z^p \prod_{i=1}^s (z - \alpha_i),$$

где $a_0, a_s \neq 0$, а p — произвольное целое число.

Мера Малера также встречается в различных областях математики, включая изучение объемов гиперболических многообразий и многочлена Александера [53].

1.4. Критическая группа графа. В дополнение к числу $\tau(G)$ остовных деревьев и числу $f(G)$ корневых остовных лесов графа G , рассмотренных в пункте 1.2, в текущем рассматривается другой инвариант, не относящийся к классу спектральных. Известный в литературе под различными названиями, такими как *критическая группа (critical group)*, *песочная группа (sandpile group)*, *якобиан (Jacobian)*, и *группа Пикара (Picard group)*, этот инвариант отражает разные аспекты одного понятия, возникшего независимо в нескольких научных областях.

Термин «критическая группа» или «песочная группа» используется в теории самоорганизованной критичности (SOC) в статистической физике, где он иллюстрируется на примере модели песочной кучи. В этой модели постепенное добавление песчинок может привести к лавинообразному сдвигу, когда система достигает критического состояния и становится чувствительной к минимальным возмущениям [54, 55]. В исследованиях на прямоугольной сетке было показано, что нейтральный элемент в критической группе обладает фрактальными свойствами [56].

С другой стороны, термины «якобиан» и «группа Пикара» возникли в алгебраической геометрии как дискретные аналоги классических понятий из теории римановых поверхностей [19, 20].

В данной работе мы строим определение критической группы, следуя подходу, описанному в работе [20]. Рассмотрим связный граф G с числом

вершин $|V(G)|$. Лапласиан $L(G)$ этого графа рассматривается как гомоморфизм из $\mathbb{Z}^{|V(G)|}$ в $\mathbb{Z}^{|V(G)|}$. Коядро этого гомоморфизма, обозначаемое как

$$\text{coker}(L(G)) = \mathbb{Z}^{|V(G)|} / \text{im}(L(G)),$$

формирует абелеву группу. Эта группа допускает каноническое разложение в прямую сумму циклических групп

$$\text{coker}(L(G)) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{|V(G)|}},$$

где каждый делитель d_i удовлетворяет условию $d_i | d_{i+1}$ для $(1 \leq i \leq |V(G)|)$. Здесь $d_i = \delta_i / \delta_{i-1}$, где δ_i — наибольший общий делитель всех $i \times i$ миноров матрицы Лапласа $L(G)$, при $\delta_0 = 1$.

Поскольку граф G связан, все группы $\mathbb{Z}_{d_1}, \mathbb{Z}_{d_2}, \dots, \mathbb{Z}_{d_{|V(G)|-1}}$ конечны, в то время как $\mathbb{Z}_{d_{|V(G)|}} = \mathbb{Z}$. В этом контексте, *критическая группа* графа G определяется как

$$\text{Jac}(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{|V(G)|-1}}.$$

Это означает, что группа $\text{Jac}(G)$ изоморфна подгруппе кручения коядра $\text{coker}(L(G))$ лапласиана графа.

Порядок группы $\text{Jac}(G)$ равен числу остовных деревьев в графе G [19].

Критическая группа независимо возникла в разных областях математики. В комбинаторных играх на графах, например в «долларовой игре» [57], критическая группа позволяет анализировать способы перераспределения весов вершин для достижения баланса. В контексте парковочных функций

[58] она помогает изучать возможные способы размещения автомобилей, соответствующие определенным правилам. Это понятие также расширяется до теории тропических кривых [59].

В то же время структура критической группы графа известна только в некоторых специальных случаях, например [57, 58, 60, 61].

1.5. Спектр циркулянтных графов. В данном пункте мы определим основные свойства, характерные только для семейств циркулянтных графов. Эти свойства будут ключевыми в рамках нашего исследования.

Мы называем матрицу размера $n \times n$ *циркулянтной*, если она имеет следующий вид

$$\text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Предположим, что G является циркулянтным графом $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ на n вершинах, со скачками $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \frac{n}{2}$. Тогда его матрица смежности $A(G)$ также является циркулянтной. Этот факт может служить определением циркулянтного графа. Заметим, что матрица Лапласа $L(G)$ циркулянтного графа также является циркулянтной матрицей. При подходящей нумерации вершин графа обратное утверждение также верно: если матрица Лапласа графа циркулянтная, то и сам граф является циркулянтным.

Согласно [3], собственные значения циркулянтной матрицы (1) определяются формулой $\lambda_j = p(\varepsilon_n^j)$, для $j = 0, 1, \dots, n - 1$. Здесь $p(z)$ — это

многочлен $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1}$, а ε_n — первообразный корень степени n из единицы. Лапласиан циркулянтного графа может быть представлен как $L(G) = p(T)$, где T — это циркулянтная матрица вида $T = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$, что является матричным представлением *оператора циклического сдвига*. Многочлен $p(z)$ мы будем называть *сопровождающим многочленом* или *ассоциированным многочленом* лапласиана.

Глава 2. Корневые остовные леса в циркулянтных графах.

§1. Число корневых остовных лесов в циркулянтных графах с чётной степенью вершин. Этот параграф посвящен анализу структуры и свойств числа корневых остовных лесов $f(G)$ в циркулянтных графах $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Напомним, когда параметр $s_k < \frac{n}{2}$, все вершины графа G имеют чётную степень, равную $2k$. Именно для этой разновидности циркулянтных графов мы будем изучать $f(G)$ в данном параграфе.

Как было отмечено в пункте 1.3, главы 1, характеристический многочлен графа G имеет вид

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda,$$

где степень многочлена равна числу вершин n графа, а корни многочлена $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответствуют собственным значениям матрицы Лапласа $L(G)$ графа G .

Теорема 1.1. Пусть $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$.

Тогда число $f(G)$ корневых остовных лесов в графе G задается формулой

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} |2T_n(w_p) - 2|,$$

где w_p , $p = 1, 2, \dots, s_k$ — корни алгебраического уравнения

$$\sum_{j=1}^k (2T_{s_j}(w) - 2) = 1,$$

а $T_s(w)$ — многочлен Чебышёва 1-го рода.

Доказательство. Как указано в пункте 1.3, главы 1, число корневых остовных лесов в графе G можно определить как $\det(I_n + L(G))$. Для этого необходимо вычислить произведение всех собственных значений матрицы $I_n + L(G)$.

Поскольку лапласиан $L(G)$ графа G представляет собой циркулянтную матрицу размера $n \times n$, мы можем построить сопровождающий многочлен для вычисления его спектра. Таким образом, матрица $I_n + L(G)$ описывается выражением

$$I_n + L(\mathbb{T}_n) = P(\mathbb{T}_n) = (2k + 1)I_n - \sum_{i=1}^k (\mathbb{T}_n^{s_i} + \mathbb{T}_n^{-s_i}), \quad (1)$$

где $P(z) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^k (z^{s_i} + z^{-s_i})$ — многочлен Лорана с целыми коэффициентами, связывающий структуру графа G с его собственными значениями.

Здесь k является числом заданных скачков в циркулянтном графе.

Нетрудно установить, что первообразные корни из единицы ε_n^j , $j = 0, 1, \dots, n-1$, являются собственными значениями циркулянтной матрицы \mathbb{T}_n , где $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Поскольку они все различны, матрица \mathbb{T}_n подобна диагональной матрице $\mathbb{T} = \text{diag}(1, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n^{n-1})$ с элементами $1, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n^{n-1}$. Отсюда следует, что матрица $I_n + L(G)$ подобна диагональной матрице $P(\mathbb{T})$.

Пусть теперь λ будет собственным значением матрицы $I_n + L(G)$, а x — соответствующий ему собственный вектор. Тогда, используя выражение (1), получаем систему уравнений:

$$((2k + 1 - \lambda)I_n - \sum_{i=1}^k (\mathbb{T}^{s_i} + \mathbb{T}^{-s_i}))x = 0.$$

Поскольку все матрицы в этой системе диагональны, на $(j + 1, j + 1)$ -ом месте диагонали матрицы \mathbb{T} находятся числа ε_n^j , где $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Таким образом, для каждого $j = 0, \dots, n - 1$, собственным значением матрицы $P(\mathbb{T})$ будет $\lambda_j = P(\varepsilon_n^j) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^k (\varepsilon_n^{js_i} + \varepsilon_n^{-js_i})$. Следовательно, число корневых остовных лесов $f(G)$ выражается как

$$f(G) = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_j = \prod_{j=0}^{n-1} P(\varepsilon_n^j). \quad (2)$$

Для дальнейшего исследования полученного числа $f(G)$ корневых остовных лесов нам потребуется следующая лемма

Лемма 1.1. *Справедливо соотношение*

$$\prod_{j=0}^{n-1} P(\varepsilon_n^j) = (-1)^{s_k} \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(w_p) - 2), \quad (3)$$

где $w_p, j = 1, \dots, s_k$ — все корни алгебраического уравнения

$$\sum_{j=1}^k (2T_{s_j}(w) - 2) = 1.$$

Доказательство. Введем модифицированный многочлен $\tilde{P}(z)$ степени $2s_k$ в виде $\tilde{P}(z) = -z^{s_k} P(z)$. Он имеет те же корни, что и $P(z)$, и, используя соотношение $P(z) = P(\frac{1}{z})$ можно убедиться, что корни многочлена имеют вид $z_1, \frac{1}{z_1}, \dots, z_{s_k}, \frac{1}{z_{s_k}}$.

Тогда

$$\prod_{j=0}^{n-1} P(\varepsilon_n^j) = \prod_{j=0}^{n-1} (-\varepsilon_n^{-s_k j} \tilde{P}(\varepsilon_n^j)) = (-1)^{(s_k+1)(n+1)-1} \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{P}(\varepsilon_n^j).$$

Для продолжения доказательства воспользуемся свойствами теории результатов, а именно, что результат двух многочленов, равен произведению значений одного из многочленов по корням другого [62]. Тогда получим следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{P}(\varepsilon_n^j) &= \text{Res}(\tilde{P}(z), z^n - 1) = \text{Res}(z^n - 1, \tilde{P}(z)) \\ &= \prod_{z:\tilde{P}(z)=0} (z^n - 1) = \prod_{z:P(z)=0} (z^n - 1). \end{aligned}$$

Далее, применяя свойство многочлена Чебышёва $T_n(\frac{1}{2}(z + z^{-1})) = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$, получаем

$$\prod_{p=1}^{s_k} (z_p^n - 1)(z_p^{-n} - 1) = (-1)^{s_k} \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(w_p) - 2).$$

Здесь $w_p = \frac{1}{2}(z_p + \frac{1}{z_p})$, $p = 1, \dots, s_k$ являются корнями алгебраического уравнения $\sum_{j=1}^k (2T_{s_j}(w) - 2) = 1$. Лемма доказана.

Теперь, учитывая, что собственные значения матрицы $I_n + L(G)$ положительны, вычислим абсолютное значение правой части уравнения (3), что с использованием равенства (2) позволяет завершить доказательство теоремы.

Теорема 1.1. показывает, что число корневых остовных лесов $f(G)$ представляет собой целочисленную функцию от числа n вершин в циркулянтном графе G .

1.1. Арифметические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с чётной степенью вершин. В этом пункте мы будем исследовать теоретико-числовые свойства, которые проявляются при рассмотрении последовательностей чисел корневых остовных лесов. Последовательности мы рассматриваем относительно числа n вершин в циркулянтном графе.

Известно, что любое положительное целое число p можно единственным образом представить в виде $p = qr^2$, где r и q — положительные целые числа, причем число q свободное от квадратов. Мы будем называть q *свободной от квадратов частью* числа p .

Теорема 2.1. Пусть $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$. Пусть p — число нечётных элементов в последовательности s_1, s_2, \dots, s_k и q — свободная от квадратов часть числа $4p + 1$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что

1. $f(G) = a(n)^2$, если n нечётное;
2. $f(G) = qa(n)^2$, если n чётное.

Доказательство. Как было показано в доказательстве теоремы 1.1., собственные значения матрицы $I_n + L(G)$ можно найти по формуле

$$\lambda_j = P(\varepsilon_n^j), \quad j = 0, \dots, n-1, \quad (4)$$

где многочлен $P(z)$ имеет вид $P(z) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^k (z^{s_i} + z^{-s_i})$ и $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Так как $\lambda_0 = P(\varepsilon_n^0) = P(1) = 1$, то формула (2) принимает вид

$$f(G) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j.$$

Далее, в силу периодичности первообразных корней из единицы, собственные значения (4) обладают свойством симметрии

$$\lambda_{n-j} = P(\varepsilon_n^{n-j}) = P(\varepsilon_n^j) = \lambda_j.$$

Тогда возникают два случая:

$$1^\circ f(G) = \left(\prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_j\right)^2 \text{ при нечётном } n;$$

$$2^\circ f(G) = \lambda_{\frac{n}{2}} \left(\prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_j\right)^2 \text{ при чётном } n.$$

Введем числовые последовательности $b(n)$ и $c(n)$ такие, что $b(n) = \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_j$ и $c(n) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_j$. Поскольку каждое λ_j входит в произведение $\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j$ со всеми своими Галуа сопряженными, последовательности $b(n)$ и $c(n)$ являются целочисленными. Это следует из свойства Галуа сопряжения, согласно которому, если число является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то все его сопряженные также являются корнями этого многочлена и вносят вклад в произведение, образуя целое число.

Число p , представляющее количество нечётных элементов в последовательности скачков $s_1, s_2, s_3, \dots, s_k$, определяется по формуле $p = \sum_{i=1}^k \frac{1-(-1)^{s_i}}{2}$. Тогда для чётных n собственное значение матрицы Лапласа равно

$$\lambda_{\frac{n}{2}} = 2k + 1 - \sum_{i=1}^k ((-1)^{s_i} + (-1)^{-s_i}) = 1 + 2 \sum_{i=1}^k (1 - (-1)^{s_i}) = 4p + 1.$$

Таким образом, для случая 1° имеем: $f(G) = b(n)^2$, если n нечётное, и для случая 2° имеем: $f(G) = (4p + 1) c(n)^2$, если n чётное.

Пусть q будет свободной от квадратов частью числа $4p + 1$, которое представляется как $4p + 1 = q r^2$. Обозначим через $a(n)$ числовую последо-

вательность, где $a(n) = b(n)$ для первого случая и $a(n) = r c(n)$ для второго. Таким образом, $a(n)$ является целочисленной последовательностью в обоих случаях. Получили требуемое. \square

1.2. Асимптотические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с чётной степенью вершин. В предыдущем пункте были рассмотрены арифметические свойства функции $f(G)$ корневых остовных лесов в циркулянтном графе G . Этот пункт посвящен изучению асимптотического поведения этой функции при стремлении числа вершин n к бесконечности. Следующая теорема дает представление об асимптотическом поведении:

Теорема 3.1. *Число корневых остовных лесов $f(G)$ в циркулянтном графе $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$ имеет следующую асимптотику*

$$f(G) \sim A^n, \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $A = \exp(\int_0^1 \log(P(e^{2\pi it})) dt)$ — мера Малера многочлена Лорана

$$P(z) = 2k + 1 - \sum_{i=1}^k (z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

Доказательство. Как показано в теореме 1.1., число корневых остовных лесов определяется формулой

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} |2T_n(w_p) - 2|,$$

и пусть w_s — произвольный корень уравнения

$$\sum_{j=1}^k (2T_{s_j}(w) - 2) = 1. \tag{5}$$

Тогда $T_n(w_s) = \frac{1}{2}(z_s^n + z_s^{-n})$, где z_s и $1/z_s$ корни многочлена $P(z)$.

Можно убедиться, что корни многочлена $P(z)$ не лежат на единичной окружности. Действительно, пусть $\varphi \in \mathbb{R}$, тогда для значений $P(e^{i\varphi})$ получим оценку

$$P(e^{i\varphi}) = 2k + 1 - \sum_{j=1}^k (e^{is_j\varphi} + e^{-is_j\varphi}) = 2k + 1 - 2 \sum_{j=1}^k \cos(s_j\varphi) \geq 1,$$

следовательно $|z_s| \neq 1$. Меняя местами z_s на $1/z_s$, если это необходимо, мы можем предположить, что $|z_s| > 1$. Тогда в силу произвольности выбранного корня w_s эта оценка справедлива для всех корней w_p , $p = 1, 2, \dots, s_k$ уравнения (5). В итоге получаем оценку $T_n(w_s) \sim \frac{1}{2}z_s^n$, в то время как $n \rightarrow \infty$. Откуда следует

$$|2T_n(w_s) - 2| \sim |z_s|^n, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Рассматривая произведение по всем s_k корням уравнения (5), получаем:

$$\prod_{s=1}^{s_k} |2T_n(w_s) - 2| \sim \prod_{s=1}^{s_k} |z_s|^n = \prod_{P(z)=0, |z|>1} |z|^n = A^n,$$

где $A = \prod_{P(z)=0, |z|>1} |z|$ является мерой Малера многочлена $P(z)$. Согласно пункту 1.3., главы 1, мера Малера может быть также вычислена как

$$A = \exp\left(\int_0^1 \log(P(e^{2\pi it})) dt\right).$$

Таким образом, асимптотическое поведение числа корневых остовных лесов $f(G)$ при $n \rightarrow \infty$ выражается следующим образом

$$f(G) = \prod_{s=1}^{s_k} |2T_n(w_s) - 2| \sim A^n, n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

1.3. Примеры. Рассмотрим несколько примеров, которые демонстрируют применение выше изложенных результатов.

Граф-цикл $G = C_n(1)$. По теореме 1.1., необходимо решить уравнение $1 + 2 - 2T_1(w) = 0$. Его единственным корнем является $w = 3/2$. Тогда число корневых остовных лесов задается формулой $f(G) = 2T_n(3/2) - 2$. По теореме 3.1., асимптотика этого числа равна

$$f(G) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

По теореме 2.1., число корневых остовных лесов совпадает с квадратом последовательности Фибоначчи $f(G) = 5F_n^2$, если n чётное, и с квадратом последовательности Люка $f(G) = L_n^2$, если n нечётное. Аналогичный результат, полученный другими методами, был опубликован в [47].

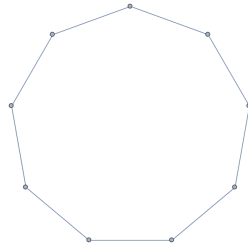


Рис. 6: *Граф-цикл* $C_9(1)$.

Граф $G = C_n(1, 2)$. Согласно теореме 1.1., требуется решить уравнение

$$1 + 4 - 2T_1(w) - 2T_2(w) = 0.$$

Его корнями являются числа $w_1 = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{29})$ и $w_2 = \frac{1}{4}(-1 - \sqrt{29})$. По теореме 2.1., существует целочисленная последовательность $a(n)$, так что $f(G) = 5a(n)^2$, если n чётное, и $f(G) = a(n)^2$, если n нечётное.

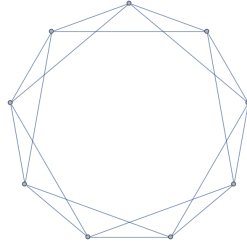


Рис. 7: Граф $C_9(1, 2)$.

Граф $G = C_n(1, 3)$. Пусть w_1 , w_2 и w_3 являются корнями уравнения $1 + 4 - 2T_1(w) - 2T_3(w) = 0$. Тогда по теореме 1.1., число корневых остовных лесов равно

$$f(G) = (2T_n(w_1) - 2)(2T_n(w_2) - 2)(2T_n(w_3) - 2).$$

Согласно теореме 3.1., асимптотика равна

$$f(G) \sim A^n,$$

при $n \rightarrow \infty$, где $A \simeq 4.48461\dots$ — мера Малера многочлена Лорана $P(z) = 5 - z - z^{-1} - z^3 - z^{-3}$. Можно отдельно убедиться, что A является корнем уравнения $1 - x - 2x^2 - 4x^3 + x^4 = 0$. В то же время, по теореме 2.1., $f(G) = a(n)^2$ для некоторой целочисленной последовательности $a(n)$.

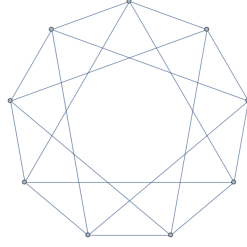


Рис. 8: Граф $C_9(1, 3)$.

§2. Число отмеченных остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин. Ссылаясь на определение из пункта 1.1, главы 1, рассмотрим циркулянтный граф $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, где последний параметр $s_k = \frac{n}{2}$. Параметры скачков удовлетворяют условию $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$. В таком графе число вершин n чётно, а степень каждой вершины составляет $2k - 1$, что делает степень каждой вершины нечётной.

Аналогично § 1, в данном параграфе мы представляем три теоремы, которые касаются следующих аспектов: числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах, арифметических свойств этого числа и его асимптотического поведения.

Теорема 1.2. Пусть $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$. Тогда число $f(G)$ корневых остовных лесов в графе G задается формулой

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2)(2T_n(v_p) + 2),$$

где u_p и v_p , $p = 1, 2, \dots, s_k$ корни алгебраических уравнений $Q(u) - 1 = 0$ и $Q(v) + 1 = 0$ соответственно. Здесь $Q(w) = 2k + 2 - 2 \sum_{i=1}^k T_{s_i}(w)$, где $T_k(w)$ — многочлен Чебышёва первого рода.

Доказательство. Число $f(G)$ корневых остовных лесов в циркулянтном

графе $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$ определяется, как и ранее, по формуле

$$f(G) = \det(I_{2n} + L(G)) = \prod_{j=0}^{2n-1} \lambda_j. \quad (1)$$

Здесь λ_j представляет собой j -е собственное значение матрицы $I_{2n} + L(G)$. Используя $2n \times 2n$ циркулянтную матрицу $\mathbf{T} = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$, перепишем матрицу $I_{2n} + L(G)$ в следующем виде

$$I_{2n} + L(G) = (2k + 2)I_{2n} - \sum_{j=1}^k (\mathbf{T}^{s_j} + \mathbf{T}^{-s_j}) - \mathbf{T}^n. \quad (2)$$

Первообразные корни из единицы ε_{2n}^j , $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$, где $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{2\pi i}{2n}}$, являются собственными значениями циркулянтной матрицы \mathbf{T} . Ввиду того, что все они различны, сама матрица \mathbf{T} подобна диагональной матрице $\mathbb{T} = \text{diag}(1, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{2n}^{2n-1})$ с элементами на диагонали $1, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{2n}^{2n-1}$. Следовательно, матрица (2) будет подобна диагональной матрице, для которой числа

$$\lambda_j = 2k + 2 - \sum_{l=1}^k (\varepsilon_{2n}^{j s_l} + \varepsilon_{2n}^{-j s_l}) - \varepsilon_{2n}^{j n}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1 \quad (3)$$

являются ее собственными значениями.

Введем многочлен Лорана

$$P(z) = 2k + 2 - \sum_{i=1}^k (z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

Учитывая, что $\varepsilon_{2n}^n = -1$, собственные значения, заданные выражением (3), могут быть представлены следующим образом: для чётных j имеем $\lambda_j = P(\varepsilon_{2n}^j) - 1$, а для нечётных j имеем $\lambda_j = P(\varepsilon_{2n}^j) + 1$. Таким образом, выражение для $f(G)$ принимает вид

$$f(G) = \prod_{j=0}^{2n-1} \lambda_j = \prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_{2n}^{2s}) - 1) \prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_{2n}^{2s+1}) + 1) =$$

$$= \prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_{2n}^{2s}) - 1) \frac{\prod_{p=0}^{2n-1} (P(\varepsilon_{2n}^p) + 1)}{\prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_{2n}^{2s}) + 1)} = \prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_n^s) - 1) \frac{\prod_{p=0}^{2n-1} (P(\varepsilon_{2n}^p) + 1)}{\prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_n^s) + 1)}.$$

Рассмотрим правую часть этого равенства более детально. Применим лемму 1.1. из § 1 и методы, использованные в доказательстве теоремы 1.1. из § 1, к каждому из этих произведений. В результате получим

$$(I) \quad \prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_n^s) - 1) = (-1)^{n(s_k+1)} \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2),$$

$$(II) \quad \prod_{s=0}^{n-1} (P(\varepsilon_n^s) + 1) = (-1)^{n(s_k+1)} \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(v_p) - 2), \text{ и}$$

$$(III) \quad \prod_{p=0}^{2n-1} (P(\varepsilon_{2n}^p) + 1) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_{2n}(v_p) - 2),$$

где u_p и v_p — корни алгебраических уравнений $Q(u) - 1 = 0$ и $Q(v) + 1 = 0$ соответственно, а $Q(w) = 2k + 2 - 2 \sum_{i=1}^k T_{s_i}(w)$.

Следовательно,

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2) \prod_{p=1}^{s_k} \frac{T_{2n}(v_p) - 1}{T_n(v_p) - 1}.$$

Учитывая, что $T_{2n} = \cos(2\alpha)$, мы можем записать

$$T_{2n}(w) - 1 = 2(T_n(w) - 1)(T_n(w) + 1).$$

Таким образом, итоговое выражение для $f(G)$ принимает вид

$$f(G) = \prod_{p=1}^{s_k} (2T_n(u_p) - 2)(2T_n(v_p) + 2).$$

Теорема доказана.

2.1. Арифметические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин.

Теорема 2.2. Пусть $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$.

Обозначим через p количество нечётных элементов в последовательности s_1, s_2, \dots, s_k . Пусть q будет свободной от квадратов частью числа $4p + 1$, а r будет свободной от квадратов частью числа $4p + 3$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что

1. $f(G) = q a(n)^2$, если n чётное;
2. $f(G) = r a(n)^2$, если n нечётное.

Доказательство. Собственные значения матрицы $I_{2n} + L(G)$ выражаются следующим образом

$$\lambda_j = P(\varepsilon_{2n}^j) - (-1)^j, \quad j = 0, 1, \dots, 2n - 1,$$

где $P(z) = 2k + 2 - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l})$ и $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{\pi i}{n}}$.

Учитывая, что $\lambda_0 = 1$, согласно формуле (1) имеем

$$f(G) = \prod_{j=1}^{2n-1} \lambda_j.$$

Благодаря периодичности собственных значений $\lambda_{2n-j} = \lambda_j$, число корневых остовных лесов можно выразить как

$$f(G) = \lambda_n \left(\prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j \right)^2, \quad (4)$$

где $\lambda_n = P(-1) - (-1)^n$.

Как и прежде, количество p нечётных элементов в последовательности s_1, s_2, \dots, s_k равно сумме $\sum_{i=1}^k \frac{1-(-1)^{s_i}}{2}$. Анализируя λ_n в выражении (4) и применяя стандартные преобразования, находим

$$\lambda_n = 2k+2-(-1)^n - 2 \sum_{l=1}^k (-1)^{s_l} = 2-(-1)^n + 4 \sum_{l=1}^k \frac{1-(-1)^{s_l}}{2} = 4p+2-(-1)^n.$$

Следовательно, $\lambda_n = 4p + 1$ при чётном n и $\lambda_n = 4p + 3$ при нечётном n .

Учитывая, что каждое алгебраическое число λ_j входит в произведение (4) вместе со всеми своими Галуа сопряженными, последовательность $c(n) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j$ является целочисленной.

Собирая полученные выше результаты вместе и применяя их к (4), получаем два возможных случая $f(G) = (4p + 1)c(n)^2$, если n чётное, и $f(G) = (4p + 3)c(n)^2$, если n нечётное.

Пусть теперь q и r будут свободными от квадратов частями чисел $4p + 1$ и $4p + 3$ соответственно. Таким образом, существуют целые числа x и y , такие что разложение принимает вид $4p + 1 = qx^2$ и $4p + 3 = ry^2$.

Тогда число корневых остовных лесов $f(G)$ может быть представлено следующим образом

$$1^\circ f(G) = q(xc(n))^2, \text{ если } n \text{ чётное и}$$

$$2^\circ f(G) = r(yc(n))^2, \text{ если } n \text{ нечётное.}$$

Предположим, что $a(n)$ является числовой последовательностью для любого натурального n . В случае чётного n примем $a(n) = xc(n)$, а в случае нечётного n примем $a(n) = yc(n)$. Поскольку x , y , и $c(n)$ всегда целые числа, последовательность $a(n)$ также будет целочисленной. Это завершает доказательство теоремы.

2.2. Асимптотические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтных графах с нечётной степенью вершин. Следующая теорема основывается на теореме 1.2. этого параграфа и доказывается с использованием метода, аналогичного тому, что представлен в доказательстве теоремы 3.1., § 1.

Теорема 3.2. *Число корневых остовных лесов $f(G)$ в циркулянтном графе $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$ имеет следующую асимптотику*

$$f(G) \sim K^n, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Здесь $K = \exp\left(\int_0^1 \log(P^2(e^{2\pi it}) - 1) dt\right)$ — мера Малера многочлена Лорана $P(z)^2 - 1$, где $P(z) = 2k + 2 - \sum_{i=1}^k (z^{s_i} + z^{-s_i})$.

2.3. Примеры. Граф лестница Мёбиуса определяется как циркулянтный граф, вершины которого имеют нечётную степень. Применение результатов, полученных в этом параграфе, позволяет найти число корневых остовных лесов в данном графе.

Граф лестница Мёбиуса $G = C_{2n}(1, n)$. Согласно теореме 1.2., нам нужно решить уравнения $3 - 2T_1(w) = 0$ и $5 - 2T_1(w) = 0$. Их корнями являются числа $u_1 = \frac{3}{2}$ и $v_1 = \frac{5}{2}$ соответственно. Тогда по теореме 3.2. имеем:

$$f(G) = \left(2T_n\left(\frac{3}{2}\right) - 2\right) \left(2T_n\left(\frac{5}{2}\right) + 2\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} K^n,$$

где $K = \frac{1}{4}(3 + \sqrt{5})(5 + \sqrt{21}) \simeq 12.5438\dots$. По теореме 2.2. имеем $f(G) = 5a(n)^2$, если n чётное, и $f(G) = 7a(n)^2$, если n нечётное для некоторой целочисленной последовательности $a(n)$. Аналогичный результат был получен другими методами в [42].

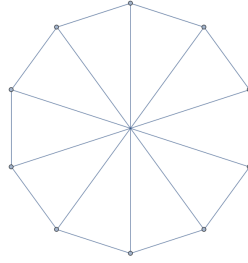


Рис. 9: Лестница Мёбиуса $G = C_{10}(1, 5)$.

§3. Число корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении.

В этом параграфе проводится исследование функции числа корневых остовных лесов для циркулянтных графов, обладающих более сложной структурой, что представляет собой расширение анализа, выполненного в параграфах § 1 и § 2. Как обсуждалось в пункте 1.2, главы 1, введение дополнительных конструктивных элементов, дает возможность значительно расширить класс рассматриваемых циркулянтных графов. Циркулянтное расслоение включает в себя, в том числе, и графы, анализируемые в предыдущих параграфах этой главы. Это дает возможность применить методы, созданные для их анализа. Как будет видно, это позволит не только представить точную формулу числа корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении, но и выявить их арифметические характеристики, а также описать асимптотическое поведение с учетом увеличивающейся структурной сложности графов.

Рассмотрим конечный связный граф H с t вершинами, допускающий наличие кратных ребер. Циркулянтным расслоением над графом H называется граф

$$H_n = H_n(G_1, G_2, \dots, G_m),$$

где i -м слоем этого графа является циркулянтный граф

$$G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i}), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1)$$

Напомним, что для каждого слоя количество вершин едино и равно n . Также, из рассмотрения не исключаются пустые циркулянтные графы $G_i = C_n(\emptyset)$. Геометрически, такой слой представляет собой несвязный граф, компонентами связности которого являются n вершин.

Пусть $A(H)$ — это матрица смежности графа H . Поскольку H может быть мультиграфом, то для его матрицы смежности размера $m \times m$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & 0 & a_{2,3} & \dots & a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

входящие элементы $a_{i,j}$ равны количеству ребер между вершинами i и j . Как и положено для неориентированных графов, эта матрица — симметричная.

Согласно пункту 1.5, главы 1, сопровождающий многочлен Лорана для циркулянтного графа (1) задается как

$$P_i(z) = 2k_i - \sum_{j=1}^{k_i} (z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}}).$$

Следовательно, его матрица смежности представляется в виде

$$\sum_{p=1}^{k_i} (\mathbb{T}_n^{s_{i,p}} + \mathbb{T}_n^{-s_{i,p}}),$$

где, как и всегда, $\mathbb{T}_n = \mathbb{T} = \text{circ}(0, 1, \dots, 0)$ — $n \times n$ матричный вид оператора циклического сдвига. Очевидно, что пустой циркулянтный граф имеет нулевую матрицу смежности.

Следовательно, блочная матрица смежности $A(H_n)$ циркулянтного расслоения H_n над графом H , со слоями (1), имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} \sum_{p=1}^{k_1} (\mathbb{T}_n^{s_{1,p}} + \mathbb{T}_n^{-s_{1,p}}) & a_{1,2}I_n & a_{1,3}I_n & \dots & a_{1,m}I_n \\ a_{2,1}I_n & \sum_{p=1}^{k_2} (\mathbb{T}_n^{s_{2,p}} + \mathbb{T}_n^{-s_{2,p}}) & a_{2,3}I_n & \dots & a_{2,m}I_n \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}I_n & a_{m,2}I_n & a_{m,3}I_n & \dots & \sum_{p=1}^{k_m} (\mathbb{T}_n^{s_{m,p}} + \mathbb{T}_n^{-s_{m,p}}) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Эта матрица имеет размер $nm \times nm$. Однако, в отличие от матриц смежности, рассмотренных в § 1 или § 2, данная матрица не является циркулянтной. Зная структуру матрицы (3), можно легко построить Лапласиан $L(H_n)$ графа H_n , следуя определению из пункта 1.3, главы 1.

Для удобства, можно представить лапласиан циркулянтного расслоения над графом H следующим образом:

Замечание 1.3. Пусть $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ — множество вершин графа H . Каждому блоку $A(H_n)_{ij} = a_{i,j}I_n$ матрицы (3) при $i \neq j$, ($i, j = 1, \dots, m$), соответствует (i, j) -й элемент матрицы (2). Согласно определению циркулянтного расслоения, каждой вершине v_i , $i = 1, \dots, m$, соответствует произвольный циркулянтный граф (1). Таким образом, каждому блоку главной диагонали матрицы Лапласа $L(H_n)$, соответствуют сопровождающие многочлены Лорана

$$A_i(z) = 2k_i + d_i - \sum_{j=1}^{k_i} (z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}}), \quad (4)$$

где d_i обозначает степень вершины v_i в графе H .

Итак, мы подошли к ключевой части этого параграфа: аналитическому

представлению числа корневых остовных лесов $f(G)$ (см. пункт 1.1, глава 1) в циркулянтном расслоении H_n над графом H , где как и всегда

$$f(n) = \det(I_{nm} + L(H_n)). \quad (5)$$

Применяя замечание 1.3. и формулу (5), а также используя определение обобщенной матрицы Лапласа графа из пункта 1.3. главы 1, определим матрицу $L(H, X)$ как *обобщенную матрицу Лапласа циркулянтного расслоения над графом H* , где $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ — это набор переменных. Каждая переменная x_i определяется выражением

$$x_i = A_i(z) + 1 = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} (z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}}). \quad (6)$$

Таким образом, структура матрицы $L(H, X)$ представлена в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & x_2 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & x_m \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Для дальнейшего исследования нам потребуется знание о степени старшего члена целочисленного многочлена $P(z) = \det(L(H, X))$. Начнем с того, что для циркулянтных графов, если $G_i \neq C_n(\emptyset)$, то набор скачков $\{s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i}\}$ не пуст, и выполняется условие $1 \leq s_{i,1} < s_{i,2} < \dots < s_{i,k_i}$. В таких случаях x_i представляет собой многочлен Лорана, чей старший член (по положительной степени) равен $-z^{s_{i,k_i}}$. Если же $G_i = C_n(\emptyset)$, то $x_i = d_i + 1$. Ответ на основной вопрос дает следующая лемма:

Лемма 1.3. Пусть $V' = (v_1, v_2, \dots, v_{m'})$ будет подмножеством (возможно, пустым) вершин графа H с тривиальными циркулянтными слоями

$C_n(\emptyset)$. Определим H' , как подграф графа H , индуцированный вершинами V' . Тогда старший член многочлена $P(z)$ имеет вид

$$(-1)^{m-m'} \eta z^s,$$

где $\eta = \det(L(H', X'))$, $s = \sum_{j=1}^m s_{j,k_j}$, $X' = (d_1 + 1, d_2 + 1, \dots, d_{m'} + 1)$ и число d_j является степенью вершины v_j в графе H .

Доказательство. Ранее было указано, что $P(z) = \det(L(H, X))$. Согласно условиям леммы, для индексов $j = 1, 2, \dots, m'$ установлено, что $x_j = d_j + 1$, где d_j обозначает степень вершины v_i в графе H . Если $j = m' + 1, \dots, m$, главные члены многочлена x_j будут $-z^{s_{j,k_j}}$. Поскольку все другие элементы матрицы $L(H, W)$ являются целыми константами, пользуясь основными свойствами определителей, мы получаем утверждение леммы.

Отметим, что $L(H', X')$ является симметричной и строго диагонально преобладающей матрицей. По [63] она положительно определена, а значит мы всегда имеем $\eta > 0$. В случае, когда $m' = 0$, мы полагаем $\eta = 1$.

В заключение введем другой метод определения обобщенной матрицы Лапласа для циркулянтного расслоения над графом H , на этот раз используя многочлены Чебышёва.

Определение 1.3. Пусть $L(H, W)$ — обобщенная матрица Лапласа с набором переменных $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)$, и каждая переменная w_i имеет вид

$$w_i = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w),$$

где $T_k(w) = \cos(k \arccos w)$ — многочлен Чебышёва первого рода. Положим $Q(w) = \det(L(H, W))$. Тогда $Q(w)$ является многочленом с целыми

коэффициентами, степени $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \dots + s_{m,k_m}$. И, поскольку

$$\frac{1}{2}(z^n + z^{-n}) = T_n\left(\frac{1}{2}(z + z^{-1})\right),$$

то очевидно выполняется равенство $P(z) = Q(w)$, где $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$. Таким образом, $Q(w)$ имеет следующий вид

$$Q(w) = \det \begin{pmatrix} w_1 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & w_2 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & w_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Замечание 2.3. Согласно лемме 1.3., старший член многочлена $Q(w)$ выражается как

$$(-1)^{m-m'} 2^s \eta w^s.$$

Теперь перейдем к основному результату этого параграфа, который представлен следующей теоремой.

Теорема 1.3. Число корневых остовных лесов $f(n)$ в циркулянтном раслоении H_n над графом H задается формулой

$$f(n) = \eta^n \prod_{p=1}^s |2T_n(w_p) - 2|,$$

где $s = s_{1,k_1} + s_{2,k_2} \dots + s_{m,k_m}$, w_p , $p = 1, 2, \dots, s$ являются всеми корнями уравнения $Q(w) = 0$ и η такое же, как и в лемме 1.3.

Доказательство. Мы знаем, что число корневых остовных лесов $f(n)$ в графе $H_n(G_1, G_2, \dots, G_m)$ равно произведению собственных значений матрицы $I_{nm} + L(H_n)$, где $L(H_n)$ — лапласиан графа H_n . Тогда, согласно (3),

матрица $I_{nm} + L(H_n)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbb{T}_n) & -a_{1,2}I_n & -a_{1,3}I_n & \dots & -a_{1,m}I_n \\ -a_{2,1}I_n & \mathbf{A}_2(\mathbb{T}_n) & -a_{2,3}I_n & \dots & -a_{2,m}I_n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1}I_n & -a_{m,2}I_n & -a_{m,3}I_n & \dots & \mathbf{A}_m(\mathbb{T}_n) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $\mathbf{A}_i(z) = A_i(z) + 1 = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} (z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}})$, для $i = 1, \dots, m$.

Для определения собственных значений матрицы $I_{nm} + L(H_n)$ рассмотрим следующую систему уравнений: пусть λ будет собственным значением этой матрицы, а вектор (u_1, u_2, \dots, u_m) , где каждый $u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, \dots, u_{i,n})^t$ и $i = 1, \dots, m$, будет соответствующим собственным вектором для λ . Таким образом, система уравнений примет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\mathbb{T}_n) - \lambda I_n & -a_{1,2}I_n & -a_{1,3}I_n & \dots & -a_{1,m}I_n \\ -a_{2,1}I_n & \mathbf{A}_2(\mathbb{T}_n) - \lambda I_n & -a_{2,3}I_n & \dots & -a_{2,m}I_n \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1}I_n & -a_{m,2}I_n & -a_{m,3}I_n & \dots & \mathbf{A}_m(\mathbb{T}_n) - \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0. \quad (10)$$

Здесь $\mathbb{T}_n = \text{diag}(1, \varepsilon_n, \dots, \varepsilon_n^{n-1})$ обозначает диагональную матрицу, подобную циркулянтной матрице сдвига \mathbb{T}_n (см. § 1, доказательство теоремы 1.1.). Величины ε_n^k , где $k = 1, \dots, n-1$, являются первообразными корнями из единицы, при этом $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Так как все блоки в рассматриваемой матрице являются диагональными $n \times n$ матрицами, и (j, j) -й элемент матрицы \mathbb{T}_n равен ε_n^{j-1} . Следовательно, уравнение (10) разбивается на n уравнений, каждое из которых, при

фиксированном j , $j = 0, 1, \dots, n - 1$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(\varepsilon_n^j) - \lambda & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & \mathbf{A}_2(\varepsilon_n^j) - \lambda & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & \mathbf{A}_m(\varepsilon_n^j) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{m,j+1} \end{pmatrix} = 0.$$

Из каждого такого уравнения находится m собственных значений матрицы $I_{nm} + L(H_n)$, скажем $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \dots, \lambda_{m,j}$. Для определения этих собственных значений рассмотрим

$$P(z, \lambda) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1(z) - \lambda & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & \mathbf{A}_2(z) - \lambda & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & \mathbf{A}_m(z) - \lambda \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Тогда $\lambda_{1,j}, \lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{m,j}$ являются корнями уравнения

$$P(\varepsilon_n^j, \lambda) = 0.$$

В частности, по формулам Виета известно, что произведение

$$p_j = \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \dots \lambda_{m,j} \quad (12)$$

можно найти, рассмотрев многочлен $P(\varepsilon_n^j, \lambda)$ при $\lambda = 0$:

$$P(\varepsilon_n^j, 0) = P(\varepsilon_n^j) = p_j, \quad (13)$$

где $P(z) = Q(\frac{1}{2}(z + z^{-1}))$ удовлетворяет определению 1.3.

Таким образом, для любого $j = 0, \dots, n - 1$, матрица $I_{nm} + L(H_n)$ имеет m собственных значений $\lambda_{1,j}, \lambda_{2,j}, \dots, \lambda_{m,j}$, которые удовлетворяют алгебраическому уравнению $P(\varepsilon_n^j, \lambda) = 0$.

В итоге, объединяя (5), (12), и (13), получаем следующее выражение

$$f(n) = \prod_{j=0}^{n-1} \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \dots \lambda_{m,j} = \prod_{j=0}^{n-1} p_j = \prod_{j=0}^{n-1} P(\varepsilon_n^j). \quad (14)$$

Для дальнейшего доказательства нам необходимо устранить коэффициент при старшем члене многочлена $P(z)$. Для этого введем модифицированный многочлен Лорана:

$$\tilde{P}(z) = (-1)^{m-m'} \frac{z^s}{\eta} P(z), \quad (15)$$

где m , m' и η определены в лемме 1.3. Таким образом, $\tilde{P}(z)$ преобразуется в монический многочлен степени $2s$ с теми же корнями, что и у многочлена $P(z)$, вида

$$z_1, 1/z_1, z_2, 1/z_2, \dots, z_s, 1/z_s. \quad (16)$$

Используя выражение (15), можно установить следующее соотношение

$$\eta^n \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{P}(\varepsilon_n^j) = (-1)^{(m-m')n} \varepsilon_n^{\frac{(n-1)n}{2}s} \prod_{j=0}^{n-1} P(\varepsilon_n^j) = (-1)^{(m-m')n+s(n-1)} \prod_{j=0}^{n-1} P(\varepsilon_n^j). \quad (17)$$

Из того, что корнями многочленов $\tilde{P}(z)$ и $Q(w)$ являются, соответственно, (16) и $w_j = \frac{1}{2}(z_j + z_j^{-1})$, $j = 1, \dots, s$, и из рассуждений доказательства теоремы 1.1., § 1, мы приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \prod_{j=0}^{n-1} \tilde{P}(\varepsilon_n^j) &= \text{Res}(\tilde{P}(z), z^n - 1) = \text{Res}(z^n - 1, \tilde{P}(z)) \\ &= \prod_{z: \tilde{P}(z)=0} (z^n - 1) = \prod_{j=1}^s (z_j^n - 1)(z_j^{-n} - 1) \\ &= \prod_{j=1}^s (2 - z_j^n - z_j^{-n}) = (-1)^s \prod_{j=1}^s (2T_n(w_j) - 2). \end{aligned} \quad (18)$$

Собирая вместе формулы (14), (17) и (18), мы выводим следующую формулу для числа корневых остовных лесов

$$f(n) = (-1)^{(m-m')n+sn} \eta^n \prod_{j=1}^s (2T_n(w_j) - 2). \quad (19)$$

Так как $f(n)$ по определению является положительным числом, из формулы (19) следует утверждение теоремы

$$f(n) = \eta^n \prod_{j=1}^s |2T_n(w_j) - 2|.$$

□

Утверждение 1.3. Пусть $f(H)$ обозначает число корневых остовных лесов в графе H . Тогда число корневых остовных лесов $f(n)$ в циркулянтном расслоении H_n над графом H кратно $f(H)$.

Доказательство. Заметим, что многочлен (11) при $z = 1$ выступает в роли характеристического многочлена для матрицы $I_m + L(H)$, где $L(H)$ — Лапласиан графа H . Тогда произведение собственных значений

$$p_0 = P(1, 0) = P(1) = \lambda_{1,0} \lambda_{2,0} \dots \lambda_{m,0} \quad (20)$$

равно $f(H)$, где $f(H)$ обозначает число корневых остовных лесов в графе H . Следовательно, формула (14) принимает вид

$$f(n) = f(H) \prod_{j=1}^{n-1} P(\varepsilon_n^j). \quad (21)$$

Теперь необходимо доказать целочисленность значения R , задаваемого выражением $R = \prod_{j=1}^{n-1} P(\varepsilon_n^j)$. Это значение может быть найдено как результат

двух многочленов с целыми коэффициентами, $\frac{z^n-1}{z-1}$ и $\eta\tilde{P}(z)$. Поскольку матрица Сильвестра для этих многочленов составлена из целых чисел, определитель этой матрицы также является целым числом. Следовательно, R действительно является целым числом. \square

3.1. Арифметические свойства числа корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении. Пусть H и $H_n = H_n(G_1, G_2, \dots, G_m)$ будут определены так же, как это было сделано в начале данного параграфа.

Напомним, что любое положительное целое число p может быть единственным образом представлено в форме $p = qr^2$, где q и r положительные целые числа и q свободная от квадратов часть числа p .

Теорема 2.3. Пусть $f(n)$ — число корневых остовных лесов в графе H_n . Пусть q будет свободной от квадратов частью числа $Q(-1)$. Тогда существует целочисленная последовательность $a(n)$ такая, что

1. $f(n) = f(H) a(n)^2$, если n нечётное;
2. $f(n) = q f(H) a(n)^2$, если n чётное.

Доказательство. Согласно формулам (14) и (21), функция $f(n)$ выражается через произведение

$$f(n) = f(H) \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \dots \lambda_{m,j}, \quad (22)$$

где, в соответствии с формулой (20), $f(H)$ представляется как

$$f(H) = \lambda_{1,0} \lambda_{2,0} \dots \lambda_{m,0}.$$

Исходя из периодичности первообразных корней из единицы, можно отметить, что для каждого $j = 0, \dots, n-1$, собственные значения $\lambda_{i,j}$ обладают свойством

$$\lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \dots \lambda_{m,j} = P(\varepsilon_n^j) = P(\varepsilon_n^{n-j}) = \lambda_{1,n-j} \lambda_{2,n-j} \dots \lambda_{m,n-j}. \quad (23)$$

Определим числовую последовательность $c(n)$ как

$$c(n) = \prod_{j=1}^{\frac{n-1}{2}} \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \dots \lambda_{m,j}, \text{ если } n \text{ нечётное}, \quad (24)$$

и числовую последовательность $d(n)$ как

$$d(n) = \prod_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} \lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \dots \lambda_{m,j}, \text{ если } n \text{ чётное}. \quad (25)$$

Каждое алгебраическое число $\lambda_{i,j}$ в этих произведениях входит в них со всеми своими сопряженными по Галуа элементами, что гарантирует, что обе последовательности, $c(n)$ и $d(n)$, являются целочисленными. Кроме того, когда n чётно, на основе правой части равенства (23) и свойства $P(z) = Q(\frac{1}{2}(z + z^{-1}))$, получаем, что произведение

$$\lambda_{1,\frac{n}{2}} \lambda_{2,\frac{n}{2}} \dots \lambda_{m,\frac{n}{2}} = P(-1) = Q(-1). \quad (26)$$

Объединив результаты из (22), (24), (25), и (26), находим, что $f(n) = f(H) c(n)^2$ для нечётных n , и $f(n) = f(H) Q(-1) d(n)^2$ для чётных n . Поскольку $Q(-1)$ положительное целое число, то его можно представить как $Q(-1) = q r^2$, где q свободная от квадратов, мы приходим к следующим формулам

$$1^\circ \frac{f(n)}{f(H)} = c(n)^2, \text{ если } n \text{ нечётное};$$

2° $\frac{f(n)}{f(H)} = q(r d(n))^2$, если n чётное.

Исходя из утверждения 1.3., отношение $\frac{f(n)}{f(H)}$ всегда целое число. Поскольку q свободно от квадратов, то последовательности стоящие под квадратом в 1° и 2° также целые. Определив $a(n) = c(n)$ для нечётных n и $a(n) = r d(n)$ для чётных, мы завершаем доказательство теоремы.

На практике точная формула для $Q(-1)$ значительно облегчает вычисления.

Замечание 3.3. Обозначим через t_i количество нечётных элементов в последовательности скачков $s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i}$ циркулянтного графа (1). Тогда

$$Q(-1) = \det L(H, W),$$

где $W = (d_1 + 4t_1 + 1, d_2 + 4t_2 + 1, \dots, d_m + 4t_m + 1)$.

Действительно, если $Q(w)$ как в определении 1.3., то поскольку диагональные элементы матрицы $L(H, W)$ равны $w_i = 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w)$, где $i = 1, \dots, m$ имеем

$$T_{s_{i,j}}(-1) = \cos(s_{i,j} \arccos(-1)) = \cos(s_{i,j} \pi) = (-1)^{s_{i,j}},$$

и тогда $w_i = d_i + 1 + 4 \sum_{j=1}^{k_i} \frac{1 - (-1)^{s_{i,j}}}{2} = d_i + 4t_i + 1$.

3.2. Асимптотические свойства числа отмеченных остовных лесов в циркулянтном расслоении. В этом пункте представлена теорема, обобщающая теорему 3.1. из § 1 (или теорему 3.2. из § 2). Она описывает асимптотическое поведение числа корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении H_n над графом H .

Теорема 3.3. Число корневых остовных лесов $f(n)$ в графе H_n имеет следующую асимптотику

$$f(n) \sim A^n, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Здесь $A = \exp\left(\int_0^1 \log |Q(\cos 2\pi t)| dt\right)$ — мера Малера многочлена $Q(w)$.

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 2.3. Пусть z корень многочлена Лорана $P(z)$, тогда $|z| \neq 1$.

Доказательство. Предположим, что для уравнения $P(z) = 0$, его корень $|z| = 1$. Тогда $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, т.е. z лежит на единичной окружности. Поскольку $P(z) = Q(w)$ (см. определение 1.3. данного параграфа), где $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, по формуле (8) мы имеем

$$P(e^{i\varphi}) = \det \begin{pmatrix} x_1 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,m} \\ -a_{2,1} & x_2 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,m} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{m,1} & -a_{m,2} & -a_{m,3} & \dots & x_m \end{pmatrix}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} x_i &= 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} (z^{s_{i,j}} + z^{-s_{i,j}}) = \\ &= 2k_i + d_i + 1 - \sum_{j=1}^{k_i} (e^{i s_{i,j} \varphi} + e^{-i s_{i,j} \varphi}) = d_i + 1 + \sum_{j=1}^{k_i} (2 - 2 \cos(s_{i,j} \varphi)) \end{aligned}$$

и $d_i = \sum_{j=1, j \neq i}^m a_{i,j}$. Следовательно, $x_i \geq d_i + 1 > d_i$, $i = 1, \dots, m$. Таким образом, матрица (27) строго диагонально преобладающая. По теореме Гершгорина [63] она невырождена. То есть, $P(z) \neq 0$. Противоречие. \square

Теперь перейдем к доказательству теоремы 3.3.

Доказательство. В соответствии с теоремой 1.3., мы имеем

$$f(n) = \eta^n \prod_{j=1}^s |2T_n(w_j) - 2|,$$

где w_j являются всеми корнями многочлена $Q(w)$. В силу соотношения $P(z) = Q(\frac{1}{2}(z + z^{-1}))$ получим $w_j = \frac{1}{2}(z_j + z_j^{-1})$, где z_j и $1/z_j$, $j = 1, \dots, s$ являются всеми корнями многочлена $P(z)$. Согласно лемме 2.3., мы имеем $|z_j| \neq 1$, для всех $j = 1, 2, \dots, s$.

Поскольку многочлен Чебышёва $T_n(w_j)$ раскрывается как $\frac{1}{2}(z_j^n + z_j^{-n})$, и заменяя z_j на $1/z_j$, если это необходимо, мы всегда можем предположить, что $|z_j| > 1$ для всех $j = 1, 2, \dots, s$. Тогда

$$T_n(w_j) \sim \frac{1}{2}z_j^n \text{ и } |2T_n(w_j) - 2| \sim |z_j|^n \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\eta^n \prod_{j=1}^s |2T_n(w_j) - 2| \sim \eta^n \prod_{j=1}^s |z_j|^n = \eta^n \prod_{P(z)=0, |z|>1} |z|^n = A^n.$$

По лемме 1.3., η является абсолютным значением главного коэффициента многочлена $P(z)$. Тогда $A = \eta \prod_{P(z)=0, |z|>1} |z|$ определяется как мера Малера многочлена $P(z)$. Тогда, из пункта 1.3, главы 1 следует, что мера Малера A для многочлена $P(z)$ вычисляется как

$$A = \exp \left(\int_0^1 \log |P(e^{2\pi it})| dt \right),$$

и, учитывая, что $P(z) = Q(\frac{1}{2}(z + z^{-1}))$, получаем

$$A = \exp \left(\int_0^1 \log |Q(\cos 2\pi t)| dt \right).$$

□

3.3. Примеры. Конструкция циркулянтного расслоения над произвольным графом H была вдохновлена предыдущими исследованиями [6, 33, 34]. В попытках обобщить уже известные конструкции графов, часто применяемые в приложениях, нам удалось не только предложить универсальный подход к знакомым задачам, но и внедрить методы, разработанные нами и описанные в параграфах § 1, § 2 и § 3. Это предоставляет возможность рассмотреть известные объекты под новым углом, что в свою очередь обещает возникновение новых исследований. В данном пункте будут представлены конкретные примеры, на которые распространяется вся теория из § 3.

С приведенными ниже конструкциями можно подробно ознакомиться в пункте 1.2, главы 1.

1. Циркулянтный граф $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Рассмотрим циркулянтное расслоение $H_n(G_1)$, построенное над одновершинным графом $H = \{v_1\}$. Эта структура содержит единственный слой, представленный графом $G_1 = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Степень вершины графа H равна нулю, то есть $d_1 = 0$. Все вышесказанное приводит к простой форме обобщенной матрицы Лапласа циркулянтного расслоения (см. формулу (7))

$$L(H, X) = (x_1).$$

Соответственно, многочлен $P(z) = 2k + 1 - \sum_{p=1}^k (z^{s_p} + z^{-s_p})$ и его чебышёвская модификация $Q(w) = 2k + 1 - \sum_{p=1}^k 2T_{s_p}(w)$ являются ключевыми элементами этой конструкции.

Таким образом, обсуждаемые в параграфах § 1 и § 2 циркулянтные графы становятся частным случаем циркулянтного расслоения.

Дополнительные исследования, посвященные циркулянтным графам представлены в следующих работах: [68, 72, 21].

2. I -граф $I(n, k, l)$ и обобщенный граф Петерсена $GP(n, k)$. Рассмотрим граф H , представляющий собой путь на двух вершинах. В качестве слоев для этого графа выберем циркулянтные графы со скачками $s_{1,1} = k$ и $s_{2,1} = l$ соответственно, т.е. $G_1 = C_n(k)$ и $G_2 = C_n(l)$. В контексте циркулянтного расслоения I -граф можно определить как $I(n, k, l) = H_n(G_1, G_2)$. Аналогично, обобщенный граф Петерсена определяется как $GP(n, k) = I(n, k, 1)$. Таким образом, многочлены $P(z) = (4 - z^k - z^{-k})(4 - z^l - z^{-l}) - 1$ и $Q(w) = (4 - 2T_k(w))(4 - 2T_l(w)) - 1$ описывают соответствующие структуры рассматриваемых графов.

3. Сэндвич из m циркулянтных графов. (см. например рис. 2, пункта 1.2, главы 1.) Мы снова рассматриваем граф-путь H , но теперь на m вершинах. В этом случае циркулянтное расслоение $H_n(G_1, G_2, \dots, G_m)$ над H , образует граф-сэндвич, состоящий из циркулянтных графов $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i})$, $i = 1, 2, \dots, m$. В данной конструкции степени вершин в графе H равны $d_1 = d_m = 1$ и $d_i = 2$ для $i = 2, \dots, m - 1$. Обозначим определитель обобщенной матрицы Лапласа циркулянтного расслоения (см. формулу (7)) через $D(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где набор переменных x_1, x_2, \dots, x_m зависит непосредственно от слоев (см. формулу (6)). Этот

многочлен имеет следующий вид

$$D(x_1, x_2, \dots, x_m) = \det \begin{pmatrix} x_1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x_2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x_{m-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x_m \end{pmatrix}.$$

Прямыми вычислениями находим, что

$$D(x_1, x_2, \dots, x_m) = x_1 D(x_2, \dots, x_m) - D(x_3, \dots, x_m),$$

$$D(x_1) = x_1, \quad D(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1.$$

Следовательно, $Q(w) = D(w_1, w_2, \dots, w_m)$ и

$$Q(-1) = D(d_1 + 4t_1 + 1, d_2 + 4t_2 + 1, \dots, d_m + 4t_m + 1),$$

где w_i и t_i те же, что и в замечании 3.3.

Особый случай, когда $H_n(G_1, G_2)$, был исследован в работе [70].

4. Обобщенный Y-граф. (см. например рис. 3, пункта 1.2, главы 1.)

Пусть граф H представляет собой "Y" -образный граф на четырех вершинах. В контексте циркулянтного расслоения, обобщённый Y-граф имеет представление $Y_n(G_1, G_2, G_3) = H_n(G_1, G_2, G_3)$, где каждый слой $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i})$ для $i = 1, 2, 3$. В этом случае многочлен $Q(w)$ (см. (8)) определяется формулой

$$Q(w) = 4A_1(w)A_2(w)A_3(w) - A_1(w)A_2(w) - A_1(w)A_3(w) - A_2(w)A_3(w),$$

где $A_i(w) = 2k_i + 2 - \sum_{j=1}^{k_i} 2T_{s_{i,j}}(w)$.

В частном случае, когда $s_{i,1} = 1$, $i = 1, 2, 3$. т.е. $G_1 = G_2 = G_3 = C_n(1)$, то получаем Y -граф, для которого

$$Q(w) = 208 - 336w + 180w^2 - 32w^3, \quad \eta = 4$$

и по теореме 1.3., число корневых остовных лесов задается формулой

$$f(n) = 4^n(2T_n(13/8) - 2)(2T_n(2) - 2)^2.$$

Согласно теореме 2.3., существует целочисленная последовательность $a(n)$, так что для нечётных n имеем $f(n) = f(1)a(n)^2$, а для чётных n имеем $f(n) = qf(1)a(n)^2$, где множитель $q = 21$ является свободной от квадратов частью $Q(-1)$. При этом $f(1) = 20$ является числом корневых остовных лесов в основании данного циркулянтного расслоения, то есть в Y -графе. По теореме 3.3., асимптотическое поведение числа корневых остовных лесов определяется как

$$f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} A^n,$$

где константа $A = \frac{1}{2}(7 + 4\sqrt{3})(13 + \sqrt{105})$.

5. Обобщенный H -граф. (см. например рис. 4, пункта 1.2, главы 1.)

Рассмотрим обобщенный "H" -образный граф на шести вершинах, обозначаемый как $H_n(G_1, G_2, G_3, G_4)$, где каждый слой $G_i = C_n(s_{i,1}, s_{i,2}, \dots, s_{i,k_i})$, $i = 1, 2, 3, 4$. Многочлен $Q(w)$ задается выражением

$$Q(w) = \left(\left(4 - \frac{1}{A_1(w)} - \frac{1}{A_2(w)} \right) \left(4 - \frac{1}{A_3(w)} - \frac{1}{A_4(w)} \right) - 1 \right) \prod_{i=1}^4 A_i(w),$$

где $A_i(w)$ такое же, как в примере 4.

Если $G_1 = G_2 = G_3 = G_4 = C_n(1)$, то

$$Q(w) = 16(-2 + w)^2(-5 + 3w)(-9 + 5w)$$

и $\eta = 15$ (см. лемму 1.3.). Таким образом, в соответствии с теоремой 1.3., число корневых остовных лесов в таком H -графе задается формулой

$$f(n) = 15^n(2T_n(5/3) - 2)(2T_n(9/5) - 2)(2T_n(2) - 2)^2.$$

Кроме того, по теореме 2.3., для некоторой целочисленной последовательности $a(n)$, мы имеем $f(n) = f(1)a(n)^2$ для нечётных n и $f(n) = qf(1)a(n)^2$ для чётных n , где число $q = 7$ — свободная от квадратов часть $Q(-1)$ и $f(1) = 128$ — число корневых остовных лесов в H -графе. Согласно теореме 3.3., асимптотическое поведение определяется константой $A = 9(7 + 4\sqrt{3})(9 + 2\sqrt{14})$.

6. Дискретный тор $T_{n,m} = C_n \times C_m$. (см. например рис. 5, пункта 1.2, главы 1.) Дискретный тор определяется как циркулянтное расслоение над циклическим графом $H = C_m(1)$, который состоит из m вершин. Слои этой конструкции — циклические графы $C_n(1)$, каждый из которых содержит n вершин. Таким образом, дискретный тор представлен как $T_{n,m} = H_n(\underbrace{C_n(1), \dots, C_n(1)}_{m \text{ раз}})$. Для этой структуры обобщенная матрица Лапласа $L(H, X)$ с набором переменных $X = (\underbrace{x, \dots, x}_{m \text{ раз}})$, где $x = 5 - z - z^{-1}$ (см. формулу (7)), имеет следующий вид:

$$L(H, X) = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $L(H, X)$ является $m \times m$ циркулянтной матрицей с собственными значениями $\mu_j = x - e^{\frac{2\pi ij}{m}} - e^{-\frac{2\pi ij}{m}} = x - 2 \cos\left(\frac{2\pi j}{m}\right)$, $j = 1, \dots, m$

(см. § 1, доказательство теоремы 1.1.). Следовательно,

$$\det L(H, X) = \prod_{j=1}^m \mu_j = 2T_m\left(\frac{x}{2}\right) - 2.$$

Подставляя значения $x = 5 - z - z^{-1}$ и $w = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, мы получаем, что $Q(w) = 2T_m\left(\frac{5}{2} - w\right) - 2$. Таким образом, по теореме 1.3. этого параграфа, число корневых остовных лесов в дискретном торе $T_{n,m}$ равно

$$f(n) = \prod_{j=1}^m (2T_n(w_j) - 2),$$

где $w_j = \frac{5}{2} - \cos\left(\frac{2\pi j}{m}\right)$, $j = 1, 2, \dots, m$.

7. Декартово произведение $H \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Пусть H — произвольный d -регулярный граф на m вершинах (см. главу 1). Декартово произведение графа H и циркулянтного графа $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ точно соответствует циркулянтному расслоению $H_n(\underbrace{G, \dots, G}_{m \text{ раз}})$. Стоит отметить, что в данном случае все слои имеют одинаковые наборы скачков.

Пусть $A(H)$ — матрица смежности графа H . Рассмотрим обобщенную матрицу Лапласа (см. (7))

$$L(H, W) = u I_m - A(H),$$

где набор переменных $W = (u, u, \dots, u)$, а $u = 2k + 1 + d - \sum_{j=1}^k 2T_{s_j}(w)$. Согласно определению 1.3., многочлен $Q(w) = \det(L(H, W))$. Тогда можно сделать вывод, что

$$Q(w) = \chi_H(2k + 1 + d - \sum_{j=1}^k 2T_{s_j}(w)).$$

Здесь $\chi_H(x)$ — характеристический многочлен графа H . В частности, $Q(-1) = \chi_H(d + 4t + 1)$, где t — количество нечётных элементов в наборе скачков $\{s_j, j = 1, \dots, k\}$ каждого слоя j .

Глава 3. Критические группы циркулянтных графов.

В данной главе обсуждается инвариант, обладающий более сложной структурой по сравнению с теми, что представлены в главе 2. Основные результаты применимы к произвольным связным неориентированным графам. В заключительном параграфе главы рассматриваются приложения для конкретных семейств графов, включая циркулянтные и их обобщения.

§1. Число остовных деревьев в конусе над графом. Этот параграф открывает основные результаты данной главы, посвященной критической группе конуса над циркулянтным графом. Мы начнем с изложения общих результатов, которые применимы к широкому классу графов.

Вспомним некоторые определения, представленные в пункте 1.3, главы 1. Пусть G — произвольный граф на n вершинах, не содержащий петель. Мы будем использовать единые обозначения, встречающиеся на протяжении всего исследования. Характеристический многочлен лапласиана графа G , обозначаемый $\chi_G(\lambda)$, определяется как

$$\chi_G(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda,$$

где c_1, c_2, \dots, c_{n-1} некоторые целочисленные коэффициенты, а $L(G) = D(G) - A(G)$ — матрица Лапласа графа G . Здесь, при соблюдении согласованности нумерации вершин, $D(G)$ является диагональной матрицей степеней вершин графа G , а $A(G)$ — матрицей смежности графа G .

В классической работе А. К. Кельманса [9] вводится понятие *соединения* графов, часто упоминаемое как *произведение*, и обозначаемое символом

"*". Два произвольных графа G_1 и G_2 на m и n вершинах соответственно могут быть соединены таким образом, что каждая вершина G_1 соединяется с каждой вершиной G_2 , формируя новый граф $G = G_1 * G_2$ порядка $m + n$.

Если $m = 1$, то $G_2 = K_1$ — тривиальный одновершинный граф без ребер, а граф $G = G_1 * K_1$ назовем *конусом* над графом G_1 . В дальнейшем этот граф мы будем обозначать как \hat{G} , и *основание* конуса G_1 будет играть важную роль в нашем исследовании.

В главе 2, посвященной числу $f(G)$ корневых остовных лесов в циркулянтных графах, основным инструментом исследования стало следствие [12, 13] из знаменитой теоремы Кельманса-Челнокова [10]. Согласно этому следствию, число корневых остовных лесов в произвольном графе G можно определить по формуле

$$\begin{aligned} f(G) &= f_1 + f_2 + \dots + f_n = |c_1 - c_2 + c_3 - \dots + (-1)^{n-1}| \quad (1) \\ &= (-1)^n \chi_G(-1) = \det(I_n + L(G)). \end{aligned}$$

Используя этот факт, мы подготовили основу для доказательства следующей важной теоремы.

Теорема 1.1. *Число остовных деревьев $\tau(\hat{G})$ в графе \hat{G} , который является конусом над произвольным графом G , совпадает с числом корневых остовных лесов $f(G)$ в графе G .*

Доказательство. В соответствии с классической теоремой о деревьях [11], число остовных деревьев графа G порядка n можно выразить следующей формулой (см. главу 1, пункт 1.3.) $\tau(G) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \chi'_G(0)$. Согласно работам А. К. Кельманса [7, 8], характеристический многочлен соединения двух

графов G_1 и G_2 , имеющих порядки m и n соответственно, задается как

$$\chi_{G_1 * G_2}(x) = \frac{x(x-n-m)}{(x-n)(x-m)} \chi_{G_1}(x-n) \chi_{G_2}(x-m).$$

Для графа $\hat{G} = G_1 * G_2$, где $G_1 = G$ и $G_2 = K_1$ (одновершинный граф), получаем

$$\tau(\hat{G}) = \frac{(-1)^n}{n+1} \chi'_{\hat{G}}(0) = \frac{(-1)^m}{m+1} \left(\frac{x(x-1-n)}{(x-1)(x-n)} \chi_{K_1}(x-n) \chi_G(x-1) \right)'_{x=0}.$$

Так как $\chi_{K_1}(x) = x$, выражение упрощается до

$$\tau(\hat{G}) = \frac{(-1)^n}{n+1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-1-n)(x-n) \chi_G(x-1)}{(x-1)(x-n)} = (-1)^n \chi_G(-1).$$

Сравнивая полученный результат с формулой (1), подтверждается требуемое. □

Этот результат был независимо получен в работе [64].

Из теоремы следует очевидное

Следствие 1.1. Число остовных деревьев в конусе над графом G можно найти по формуле $|\chi_G(-1)|$.

Можно наглядно проиллюстрировать результат теоремы 1.1. следующим образом (см. рис. 10).

Замечание 1.1. Рассмотрим \hat{G} , представляющий собой соединение графа G с одновершинным графом $\{v_0\}$, обозначаемое как $G * \{v_0\}$. Предположим, что t — остовное дерево в \hat{G} . Обозначим ребра $v_0 v_j$, где $j = 1, 2, \dots, k$ как все ребра графа t , исходящие из вершины v_0 . Тогда $f = t \cap G$ представляет собой остовный лес в G , состоящий из k деревьев t_1, t_2, \dots, t_k , выбранных так, чтобы каждая вершина v_j была корнем соответствующего дерева t_j .

Таким образом, пары (t_j, v_j) , где $j = 1, 2, \dots, k$ формируют остовный лес в G .

Если (t_j, v_j) , где $j = 1, 2, \dots, k$, представляют собой остовный лес в G , то граф t , созданный путем объединения ребер v_0v_j с деревьями t_j , для $j = 1, 2, \dots, k$, будет остовным деревом в \hat{G} .

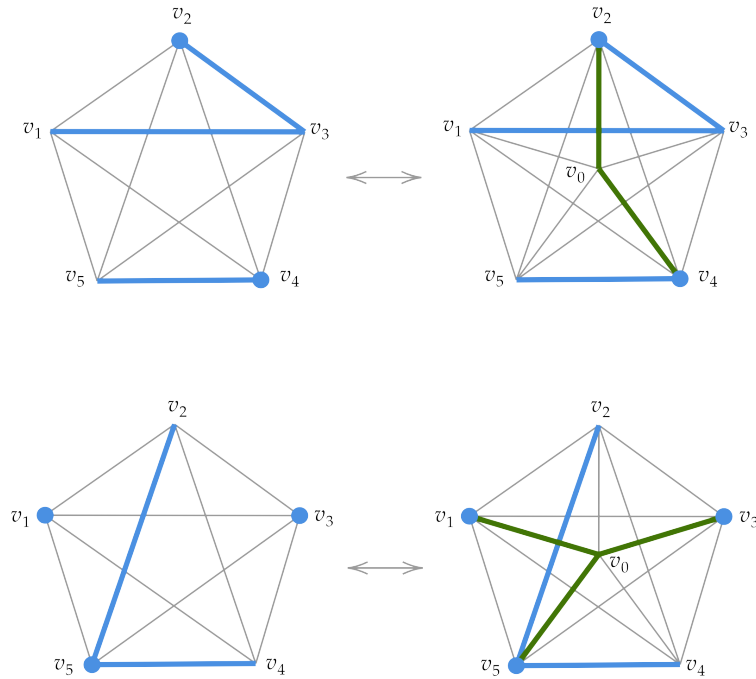


Рис. 10: Примеры построения корневого остовного леса графа G и соответствующего ему остовного дерева графа \hat{G} .

§2. Коядро линейного оператора. В этом параграфе мы рассмотрим свойство матрицы Лапласа графа в случае, когда ее сопровождающий многочлен является бимоническим многочленом Лорана. Это свойство позволяет с точностью до изоморфизма определить вид критической группы графа. Особенностью данного представления является то, что при бесконечном увеличении количества вершин в графе, вычисление коядра матрицы Лапласа, размер которой также стремится к бесконечности, упрощается до

вычисления коядра специальной матрицы фиксированного размера.

Для перехода к основному результату данного параграфа необходимо ввести некоторые определяющие конструкции. Термин «бимонический» мы применяем к многочлену Лорана с целыми коэффициентами из-за его структуры

$$P(z) = z^p + a_1 z^{p+1} + \dots + a_{s-1} z^{p+s-1} + z^{p+s}, \quad (1)$$

где первый и последний члены многочлена имеют коэффициенты, равные единице, p — произвольное целое число, а s — это положительное целое число. Для данного многочлена определим *сопровождающую матрицу* \mathcal{A} (см. стр. 194, [65])

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -1 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{s-1} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Эта матрица размера $s \times s$ является обратимой, и обратная к ней матрица \mathcal{A}^{-1} также является целочисленной матрицей.

Здесь мы будем пользоваться обозначениями, взятыми из работы [4]. Пусть $\mathbb{A} = \langle \alpha_j, j \in \mathbb{Z} \rangle$ — свободная абелева группа, свободно порожденная элементами $\alpha_j, j \in \mathbb{Z}$. Каждый элемент группы \mathbb{A} представляет собой линейную комбинацию $\sum_j c_j \alpha_j$ с целыми коэффициентами c_j .

Определим оператор сдвига $T : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ как \mathbb{Z} -линейный оператор, действующий на порождающих элементах группы \mathbb{A} по правилу

$$T : \alpha_j \rightarrow \alpha_{j+1}, j \in \mathbb{Z}.$$

Другими словами, на произвольный элемент группы \mathbb{A} , оператор T действует по правилу $T : \sum_j c_j \alpha_j \rightarrow \sum_j c_j \alpha_{j+1}$. Таким образом, T является эндоморфизмом группы \mathbb{A} . Если $P(z)$ — произвольный многочлен Лорана с целыми коэффициентами, то $A = P(T)$ также является эндоморфизмом группы \mathbb{A} . Поскольку A представляет собой линейную комбинацию степеней T , действие A на порождающих элементах α_j можно представить в виде бесконечного набора линейных преобразований

$$A : \alpha_j \rightarrow \sum_i a_{i,j} \alpha_i, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Все суммы предполагаются конечными.

Обозначим $\beta_j = \sum_i a_{i,j} \alpha_i$. Таким образом, из определения группы \mathbb{A} следует, что для оператора A его образ $\text{im } A$ является подгруппой группы \mathbb{A} , порождаемой элементами β_j , $j \in \mathbb{Z}$. Пусть x_j будет образом при каноническом гомоморфизме $\pi : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}/\text{im } A$, то есть $\pi : \alpha_j \rightarrow x_j$, $j \in \mathbb{Z}$ и

$$\pi(\beta_j) = \sum_i a_{i,j} \pi(\alpha_i) = \sum_i a_{i,j} x_i = 0.$$

Тогда, с учетом (3), факторгруппа $\mathbb{A}/\text{im } A$ представляет собой абстрактную абелеву группу

$$\langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid \sum_i a_{i,j} x_i = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle,$$

порожденную x_i , $i \in \mathbb{Z}$ с набором соотношений $\sum_i a_{i,j} x_i = 0$, $j \in \mathbb{Z}$.

Поскольку T и $A = P(T)$ коммутируют, подгруппа $\text{im } A$ инвариантна под действием T . Действительно, рассмотрим $T(\beta_j)$, $\beta_j \in \text{im } A$

$$T(\beta_j) = T \left(\sum_i a_{i,j} \alpha_i \right) = \sum_i a_{i,j} T(\alpha_i) = \sum_i a_{i,j} \alpha_{i+1}.$$

Тогда, из того, что T и A коммутируют, следует

$$\text{im } A \ni \beta_{j+1} = A(\alpha_{j+1}) = \sum_i a_{i,j+1} \alpha_i = \sum_i a_{i,j} \alpha_{i+1} = T(\beta_j).$$

Таким образом, действия T и A корректно определены на факторгруппе $\mathbb{A}/\text{im } A$ и задаются как

$$T : x_j \rightarrow x_{j+1} \text{ и } A : x_j \rightarrow \sum_i a_{i,j} x_i \quad (4)$$

соответственно. Это позволяет представить группу $\mathbb{A}/\text{im } A$ следующим образом

$$\langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid P(T)x_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle. \quad (5)$$

Аналогичным образом, задав набор $P_1(z), P_2(z), \dots, P_s(z)$ многочленов Лорана с целыми коэффициентами, можно определить группу

$$\langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid P_1(T)x_j = 0, P_2(T)x_j = 0, \dots, P_s(T)x_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle.$$

До этого наши рассуждения строились для произвольных многочленов Лорана с целыми коэффициентами. Далее мы исследуем бимонические многочлены Лорана.

Под I будем понимать тождественный оператор, а I_n его матричную форму — единичную матрицу порядка n .

Предложение 1.2. Пусть $P(z)$ — бимонический многочлен Лорана с целыми коэффициентами и \mathcal{A} — сопровождающая матрица $P(z)$. Рассмотрим $L = P(T_n) : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ как \mathbb{Z} -линейный оператор. Тогда

$$\text{coker } L \cong \text{coker}(\mathcal{A}^n - I).$$

Доказательство. Пусть $P(z)$ многочлен Лорана с целыми коэффициентами вида (1), а \mathcal{A} его сопровождающая матрица вида (2).

Пользуясь рассуждениями выше, мы рассмотрим сокер $A = \mathbb{A}/\text{im } L$ как абстрактную абелеву группу с представлением (5).

Пусть $\mathbf{x}_j = (x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+s})^t$ — s -кортеж из порождающих элементов $x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+s}$ группы (5). Поскольку $P(T)$ — бимонический многочлен, то для любого $j \in \mathbb{Z}$ соотношение $P(T)x_j = 0$ в развернутой форме имеет вид

$$x_j + a_1x_{j+1} + \dots + a_{s-1}x_{j+s-1} + x_{j+s} = 0,$$

что эквивалентно линейной системе уравнений

$$\mathbf{x}_j = \mathcal{A}\mathbf{x}_{j-1}.$$

Пусть $\mathbf{x}_0 = (x_1, x_2, \dots, x_s)^t$. Из последовательного применения \mathcal{A} к соотношениям $\mathbf{x}_1 = \mathcal{A}\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathbf{x}_0$ получаем

$$\mathbf{x}_j = \mathcal{A}^j \mathbf{x}_0$$

для любого $j \in \mathbb{Z}$. Обратное утверждение также верно: если $\mathbf{x}_j = \mathcal{A}^j \mathbf{x}_0$, то $\mathbf{x}_j = \mathcal{A}\mathbf{x}_{j-1}$ и, следовательно, $P(T)x_j = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$.

Покажем, что сокер $A \cong \mathbb{Z}^s$. Действительно,

$$\begin{aligned} \text{coker } A &= \langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid P(T)x_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle = \\ &= \langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid x_j + a_1x_{j+1} + \dots + a_{s-1}x_{j+s-1} + x_{j+s} = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle \\ &= \langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid (x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+s})^t = \mathcal{A}(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+s-1})^t, j \in \mathbb{Z} \rangle \\ &= \langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid (x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+s})^t = \mathcal{A}^j(x_1, x_2, \dots, x_s)^t, j \in \mathbb{Z} \rangle \end{aligned}$$

Отсюда видно, что все x_i , $i \in \mathbb{Z}$ могут быть выражены через x_1, x_2, \dots, x_s , где s — положительное целое. Поэтому

$$\text{coker } A = \langle x_1, x_2, \dots, x_s \mid - \rangle \cong \mathbb{Z}^s.$$

Далее, для завершения доказательства, рассмотрим оператор $L : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ как \mathbb{Z} -линейный оператор. Тогда по определению лапласиана в пункте 1.5, главы 1, $L = P(T)$, $T^n = 1$. Здесь $P(z)$ — бимонический многочлен Лорана с целыми коэффициентами, который, к тому же, является симметрическим. Оператор T определен как оператор сдвига, описанный в (4), и тождественное отображение задается как $x_j = 1x_j$. Тогда

$$\text{coker } L = \langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid P(T)x_j = 0, (T^n - 1)x_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle. \quad (6)$$

Обозначим оператор $B = T^n - 1$. Тогда согласно ([18], лемма 3.1), имеем

$$\text{coker } L \cong \text{coker } A / \text{im}(B|_{\text{coker } A}) \cong \text{coker } (B|_{\text{coker } A}). \quad (7)$$

Опишем действие эндоморфизма $B|_{\text{coker } A}$ на $\text{coker } A$. Поскольку операторы $A = P(T)$ и T коммутируют, то

$$T|_{\text{coker } A} : x_j \rightarrow x_{j+1}, j \in \mathbb{Z},$$

и действие оператора сдвига T на $\text{coker } A$ корректно определено. Теперь опишем действие $T|_{\text{coker } A}$ на набор порождающих x_1, x_2, \dots, x_s . Для любого $i = 1, \dots, s - 1$, имеем

$$T|_{\text{coker } A}(x_i) = x_{i+1},$$

а для $i = s$, имеем

$$T|_{\text{coker } A}(x_s) = x_{s+1} = -x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{s-2}x_{s-1} - a_{s-1}x_s.$$

Таким образом, действие $T|_{\text{coker } A}$ на $\text{coker } A$ задается матрицей \mathcal{A} . Рассматривая \mathcal{A} как эндоморфизм $\text{coker } A$, можно записать $T|_{\text{coker } A} = \mathcal{A}$. Следовательно, $B|_{\text{coker } A} = \mathcal{A}^n - I$ и, с учетом (7), наконец получаем

$$\text{coker } L \cong \text{coker } (\mathcal{A}^n - I).$$

□

§3. Критическая группа конуса над графом и лесная группа. В этом параграфе мы докажем теорему, замыкающую цепочку исследований инвариантов, изученных в данной работе. Основным объектом изучения, как и ранее, являются корневые остовные леса в графе. Именно здесь мы установим связь между критической группой графа и числом корневых остовных лесов в произвольном связном графе.

Теорема 1.3. *Пусть G — связный граф на n вершинах. Тогда критическая группа конуса \hat{G} над графом G изоморфна коядру линейного оператора $I_n + L(G)$, где $L(G)$ — матрица Лапласа графа G , а I_n — единичная матрица порядка n .*

Доказательство. Для любого связного графа G на n вершинах обозначим через $L(G)$ его матрицу Лапласа. Матрица Лапласа графа \hat{G} может быть представлена в следующем виде

$$L(\hat{G}) = \begin{pmatrix} n & -\mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n^T & I_n + L(G) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{1}_n$ — вектор из n единиц.

Напомним некоторые факты из главы 1, пункта 1.4. Рассмотрим лапласиан $L(\hat{G})$ как гомоморфизм $L(\hat{G}) = \mathbb{Z}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+1}$, где $n + 1$ — количество вершин в графе \hat{G} . Коядро этого оператора, $\text{coker}(L(\hat{G})) = \mathbb{Z}^{n+1} / \text{im}(L(\hat{G}))$ представляет собой абелеву группу. Пусть

$$\text{coker}(L(\hat{G})) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_{n+1}}$$

где данная последовательность является нормальной формой Смита матрицы $L(\hat{G})$ и удовлетворяет условию $d_i \mid d_{i+1}$, для всех i от 1 до n . Поскольку граф \hat{G} связан, все группы $\mathbb{Z}_{d_1}, \mathbb{Z}_{d_2}, \dots, \mathbb{Z}_{d_n}$ конечны, а $\mathbb{Z}_{d_{n+1}} = \mathbb{Z}$. Здесь $d_i = \delta_i / \delta_{i-1}$, где δ_i , $i = 1, 2, \dots, n+1$ обозначает наибольший общий делитель всех $i \times i$ миноров матрицы $L(\hat{G})$, и $\delta_0 = 1$. Таким образом,

$$\text{Jac}(\hat{G}) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_n}$$

является критической группой графа \hat{G} .

Для приведения матрицы к нормальной форме Смита можно применять следующие базовые операции, которые преобразуют матрицу в диагональный вид

1. Добавление к строке произвольной целочисленной линейной комбинации других строк;
2. Добавление к столбцу произвольной целочисленной линейной комбинации других столбцов;
3. Перестановка любых двух строк или столбцов.

Эти операции сохраняют структуру абелевой группы, порожденной строками матрицы, и позволяют последовательно добиться диагональной формы, где каждый следующий элемент на диагонали делит последующий, что и является нормальной формой Смита.

В матрице Лапласа, добавляя все остальные строки к первой строке, мы получаем нулевую первую строку. Затем добавляем все остальные столбцы к первому столбцу, что приводит к получению нулевого первого столбца. С

помощью базовых операций 1. – 3., матрица (1) эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{0} \\ \mathbb{0}^T & I_n + L(G) \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{0}$ — вектор с n нулями. Следовательно, все ненулевые элементы нормальной формы Смита полностью определяются матрицей $I_n + L(G)$. \square

Эта теорема была независимо доказана другими авторами (см. например, [66], замечание 3, и [72], теорема 2).

Из главы 1 мы знаем, что матрица $I_n + L(G)$ всегда невырождена и, кроме того, $\text{соker}(I_n + L(G))$ — это абелева группа, порядок которой, равный $\det(I_n + L(G))$, соответствует количеству корневых остовных лесов в графе G . Поэтому естественно назвать $\text{соker}(I_n + L(G))$ *лесной группой* G и обозначить ее как $F(G)$. Тогда основное утверждение теоремы 1.3. можно переформулировать следующим образом:

Критическая группа конуса \hat{G} над графом G изоморфна его лесной группе $F(G)$.

§4. Критическая группа конуса над циркулянтными графами. В предыдущих параграфах данной главы, в качестве основания G конуса \hat{G} (см. § 1) мы рассматривали произвольный связный граф. В этом параграфе мы рассмотрим конус, основанием которого является циркулянтный граф. По аналогии с материалами главы 2, рассмотренными в § 1 и § 2, будут изучены циркулянтные графы $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ с чётной степенью вершин и $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$ с нечётной степенью вершин. Также будет обсуждено расслоение над циркулянтными графами (см. глава 2, § 3).

Исходя из результатов параграфов § 2 и § 3 текущей главы, мы собираемся установить общие структурные теоремы для критической группы графа \hat{G} или, что эквивалентно, для *лесной группы*

$$F(G) = \text{coker}(I + L(G)).$$

4.1. Лесная группа циркулянтного графа с чётной степенью вершин. Рассмотрим циркулянтный граф $G = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ с чётной степенью вершин и со скачками $1 \leq s_1 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$. Его лапласиан имеет вид $L(G) = 2kI_n - \sum_{l=1}^k (T_n^{s_l} + T_n^{-s_l})$, где $T_n = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$ — это $n \times n$ циркулянтная матрица, представляющая матричную форму оператора сдвига: $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \rightarrow (x_2, x_3, \dots, x_n, x_1)$. Тогда лесная группа $\text{coker}(I + L(G))$ описывается как

$$\langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid (2k + 1)x_j - \sum_{l=1}^k (x_{j+s_l} + x_{j-s_l}) = 0, x_{j+n} = x_j, j \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Согласно предложению 1.2., из § 2, заключаем, что коядро $\text{coker}(I + L(G))$ изоморфно коядру $\text{coker}(\mathcal{A}^n - I)$, где \mathcal{A} — сопровождающая матрица бимонического симметрического многочлена Лорана

$$2k + 1 - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l}).$$

В соответствии с этим наблюдением и с применением теоремы 1.3. из § 3, получаем следующее

Теорема 1.4. Пусть \hat{G} — конус над циркулянтным графом $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, где $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < \frac{n}{2}$. Тогда

$$\text{Jac}(\hat{G}) \cong \text{coker}(\mathcal{A}^n - I),$$

где \mathcal{A} — сопровождающая матрица многочлена Лорана

$$2k + 1 - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l}).$$

4.2. Лесная группа циркулянтного графа с нечётной степенью вершин. Рассмотрим циркулянтный граф $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, с нечётной степенью вершин, где $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$. лапласиан графа G задается выражением $(2k + 1)I_{2n} - T_{2n}^n - \sum_{j=1}^k (T_{2n}^{s_j} + T_{2n}^{-s_j})$, где $T_{2n} = \text{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$ — это циркулянтная матрица размером $2n \times 2n$.

Аналогично с предыдущим обсуждением, для анализа структуры лесной группы графа G , исследуем $\text{socer}(I + L(G))$, которое, согласно § 2 текущей главы, представляет собой бесконечно порожденную абелеву группу с соотношениями

$$\langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid (2k + 2)x_j - x_{j+n} - \sum_{l=1}^k (x_{j+s_l} + x_{j-s_l}) = 0, x_{j+2n} = x_j, j \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Применяя оператор сдвига $T : x_j \rightarrow x_{j+1}, j \in \mathbb{Z}$, перепишем эту группу в виде

$$\langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid P(T)x_j = 0, (T^{2n} - 1)x_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle,$$

где $P(z) = (2k + 2 - z^n - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l}))$.

Пользуясь тем, что можно расширить набор соотношений за счет добавления линейных комбинаций уже имеющихся элементов, группу можно представить в альтернативной форме. Например, рассмотрим следующую комбинацию

$$(T^{2n} - 1) + B(T)P(T) = (2k + 2 - \sum_{l=1}^k (T^{s_l} + T^{-s_l}))^2 - 1,$$

где $B(T) = 2T^n + P(T) = 2k + 2 + T^n - \sum_{l=1}^k (T^{s_l} + T^{-s_l})$. Здесь $T^{2n} - 1$ представляет собой линейную комбинацию $P(T)$ и $(2k + 2 - \sum_{l=1}^k (T^{s_l} + T^{-s_l}))^2 - 1$. Следовательно, лесная группа $\text{coker}(I + L(G))$ может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} \langle x_i, i \in \mathbb{Z} \mid (2k + 2 - T^n - \sum_{l=1}^k (T^{s_l} + T^{-s_l}))x_j = 0, \\ (2k + 2 - \sum_{l=1}^k (T^{s_l} + T^{-s_l}))^2 - 1)x_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle. \end{aligned}$$

Пусть сопровождающая матрица \mathcal{A} соответствует многочлену Лорана

$$(2k + 2 - \sum_{l=1}^k (z^{s_l} + z^{-s_l}))^2 - 1.$$

Согласно предложению 1.2., из § 2, $\text{coker}(I + L(G))$ изоморфно

$$\text{coker}(\mathcal{A}^n - (2k + 2)I + \sum_{l=1}^k (\mathcal{A}^{s_l} + \mathcal{A}^{-s_l})).$$

Используя теорему 1.3. из § 3, мы можем переформулировать полученный результат следующим образом

Теорема 2.4. Пусть \hat{G} — конус над циркулянтным графом

$$G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n), \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n.$$

Тогда

$$\text{Jac}(\hat{G}) \cong \text{coker}(\mathcal{A}^n - (2k + 2)I + \sum_{j=1}^k (\mathcal{A}^{s_j} + \mathcal{A}^{-s_j})),$$

где \mathcal{A} — сопровождающая матрица многочлена Лорана

$$(2k + 2 - \sum_{j=1}^k (z^{s_j} + z^{-s_j}))^2 - 1.$$

4.3. Лесная группа кобордизма двух циркулянтных графов.

Рассмотрим два циркулянтных графа на n вершинах, обозначенных как $C_1 = C_n(s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,k})$ и $C_2 = C_n(s_{1,1}, s_{1,2}, \dots, s_{1,l})$, имеющих соответственно k и l скачков. Кобордизм двух циркулянтных графов C_1 и C_2 представляет собой граф G , полученный путем соединения каждой i -й вершины графа C_1 с соответствующей i -й вершиной графа C_2 . Как известно из пункта 1.2, главы 1, этот граф является графом-сэндвичем, со слоями C_1 и C_2 . В случае, когда $C_1 = C_n(1)$ и $C_2 = C_n(1)$, граф G называется графом-призмой $Pr(n)$.

Согласно формуле (9) из § 3, главы 2, матрица Лапласа графа G имеет вид

$$\begin{pmatrix} (2k+1)I_n - \sum_{r=1}^k (\mathbb{T}_n^{s_{1,r}} + \mathbb{T}_n^{-s_{1,r}}) & -I_n \\ -I_n & (2l+1)I_n - \sum_{r=1}^l (\mathbb{T}_n^{s_{2,r}} + \mathbb{T}_n^{-s_{2,r}}) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через \hat{G} конус над графом G . Для исследования структуры критической группы $Jac(\hat{G})$, мы будем использовать две бесконечные последовательности $x_j, y_j, j \in \mathbb{Z}$. Тогда коядро линейного оператора $I + L(G)$ изоморфно группе с двумя соотношениями

$$\langle x_i, y_i, i \in \mathbb{Z} \mid (2k+2)x_j - \sum_{r=1}^k (x_{j+s_{1,r}} + x_{j-s_{1,r}}) - y_j = 0, x_{j+n} - x_j = 0, \\ (2l+2)y_j - \sum_{r=1}^l (y_{j+s_{2,r}} + y_{j-s_{2,r}}) - x_j = 0, y_{j+n} - y_j = 0, j \in \mathbb{Z} \rangle.$$

Преобразуем первое соотношение $y_j = (2k+2)x_j - \sum_{r=1}^k (x_{j+s_{1,r}} + x_{j-s_{1,r}})$, в операторной форме это записывается как

$$y_j = (2k+2 - \sum_{r=1}^k (T^{s_{1,r}} + T^{-s_{1,r}}))x_j.$$

Таким образом, вышеуказанная группа изоморфна группе

$$\langle x_i \mid (2k + 2 - \sum_{r=1}^k (T^{s_{1,r}} + T^{-s_{1,r}}))(2l + 2 - \sum_{r=1}^l (T^{s_{2,r}} + T^{-s_{2,r}})) - 1 \rangle x_j = 0, \\ (T^n - 1)x_j = 0, j \in \mathbb{Z}.$$

Согласно предложению 1.2. из § 2 и теореме 1.3. из § 3, мы получаем следующий результат.

Теорема 3.4. *Пусть \hat{G} — конус над кобордизмом G . Тогда $Jac(\hat{G})$ изоморфна коядру линейного оператора $\mathcal{A}^n - I$, где \mathcal{A} — сопровождающая матрица многочлена Лорана*

$$(2k + 2 - \sum_{r=1}^k (z^{s_{1,r}} + z^{-s_{1,r}}))(2l + 2 - \sum_{r=1}^l (z^{s_{2,r}} + z^{-s_{2,r}})) - 1.$$

Число корневых остовных лесов и другие спектральные свойства кобордизма G были исследованы в [70, 67].

4.4. Примеры. В данном пункте продемонстрировано применение результатов этой главы к конкретным примерам известных графов, входящих в рассматриваемые семейства.

Граф-колесо $W(n)$. Граф $W(n)$ представляет собой конус над графом-циклом $C_n = C_n(1)$. Согласно теореме 1.1. из § 1 текущей главы, количество остовных деревьев $\tau(W(n))$ равно количеству корневых остовных лесов в C_n , которое было найдено в пункте 1.3, § 1, главы 2. Следовательно, $\tau(W(n)) = 2T_n(\frac{3}{2}) - 2$.

Согласно теореме 1.4. из пункта 4.1, § 4, критическая группа графа-колеса $Jac(W(n))$ изоморфна коядру линейного оператора $\mathcal{A}^n - I_2$, где \mathcal{A} —

сопровождающая матрица многочлена Лорана $3 - z - z^{-1}$, имеющая вид

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают, что критическая группа $Jac(W(n))$ изоморфна $\mathbb{Z}_{F_n} \oplus \mathbb{Z}_{5F_n}$, если n чётное, и $\mathbb{Z}_{L_n} \oplus \mathbb{Z}_{L_n}$, если n нечётное, где F_n и L_n — числа Фибоначчи и Люка соответственно. Этот известный результат был получен в [60].

Сравните это с результатами для графа-цикла, полученными в примере пункта 1.3, § 1, главы 2.

Конус над лесницей Мёбиуса $\hat{M}(n)$. Граф $M(n)$ — это циркулянтный граф $C_{2n}(1, n)$. Согласно теореме 1.1. из § 1 и теореме 1.2. из § 2, главы 2, число остовных деревьев в конусе над лесницей Мёбиуса $\hat{M}(n)$ можно найти следующим образом

$$\tau(\hat{M}(n)) = 4 \left(T_n \left(\frac{3}{2} \right) - 1 \right) \left(T_n \left(\frac{5}{2} \right) + 1 \right).$$

Критическая группа конуса над лесницей Мёбиуса, $M(n)$, изоморфна коядру линейного оператора $\mathcal{A}^n - 4I_4 + \mathcal{A} + \mathcal{A}^{-1}$, где \mathcal{A} — сопровождающая матрица многочлена Лорана $(4 - z - z^{-1})^2 - 1$.

Численный расчет для $Jac(\hat{M}(n))$ и $\tau(\hat{M}(n)) = |Jac(\hat{M}(n))|$ приведен в таблице 1 в конце текущего пункта.

Конус над графом-призмой $\hat{Pr}(n)$. (см. начало пункта 4.3). Согласно теореме 1.1. из § 1 и теореме 1.3. из § 3, главы 2, число остовных деревьев в конусе над графом-призмой $\hat{Pr}(n)$ задается формулой

$$\tau(\hat{Pr}(n)) = 4 \left(T_n \left(\frac{3}{2} \right) - 1 \right) \left(T_n \left(\frac{5}{2} \right) - 1 \right).$$

По теореме 3.4. из пункта 4.3, § 4, критическая группа конуса над графом-призмой $Pr(n)$ изоморфна коядру линейного оператора $\mathcal{A}^n - I_4$, где \mathcal{A} — сопровождающая матрица многочлена Лорана $(4 - z - z^{-1})^2 - 1$.

Численный расчет для $Jac(\hat{Pr}(n))$ и $\tau(\hat{Pr}(n)) = |Jac(\hat{Pr}(n))|$ приведен в таблице 2 в конце текущего пункта.

Таблица 1.

n	$Jac(\hat{M}(n))$	$ Jac(\hat{M}(n)) $
3	$\mathbb{Z}_4^3 \oplus \mathbb{Z}_{28}$	1792
4	$\mathbb{Z}_{69} \oplus \mathbb{Z}_{345}$	23805
5	$\mathbb{Z}_{209} \oplus \mathbb{Z}_{1463}$	305767
6	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{880}^2$	3872000
7	$\mathbb{Z}_{2639} \oplus \mathbb{Z}_{18473}$	48750247
8	$\mathbb{Z}_{11067} \oplus \mathbb{Z}_{55335}$	612392445
9	$\mathbb{Z}_4^2 \oplus \mathbb{Z}_{8284} \oplus \mathbb{Z}_{57988}$	7685961472
10	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{25} \oplus \mathbb{Z}_{27775}^2$	96431328125
11	$\mathbb{Z}_{415711} \oplus \mathbb{Z}_{2909977}$	1209709448647
12	$\mathbb{Z}_{1742112} \oplus \mathbb{Z}_{8710560}$	15174771102720
13	$\mathbb{Z}_{5214689} \oplus \mathbb{Z}_{36502823}$	190350869567047
14	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{21852805}^2$	2387725431840125
15	$\mathbb{Z}_4^2 \oplus \mathbb{Z}_{16352996} \oplus \mathbb{Z}_{114470972}$	29951093555713792
16	$\mathbb{Z}_{274116549} \oplus \mathbb{Z}_{1370582745}$	375699412178347005
17	$\mathbb{Z}_{820512241} \oplus \mathbb{Z}_{5743585687}$	4712682363415894567
18	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{3438451280}^2$	59114736024668192000
19	$\mathbb{Z}_{10292304751} \oplus \mathbb{Z}_{72046133257}$	741520759612200204007
20	$\mathbb{Z}_{41}^2 \oplus \mathbb{Z}_{1051977795} \oplus \mathbb{Z}_{5259888975}$	9301454448259586320125

Таблица 2.

n	$Jac(\hat{Pr}(n))$	$ Jac(\hat{Pr}(n)) $
3	$\mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{72}$	1728
4	$\mathbb{Z}_{15}^2 \oplus \mathbb{Z}_{105}$	23625
5	$\mathbb{Z}_{319} \oplus \mathbb{Z}_{957}$	305283
6	$\mathbb{Z}_8^2 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{2520}$	3870720
7	$\mathbb{Z}_{4031} \oplus \mathbb{Z}_{12093}$	48746883
8	$\mathbb{Z}_{105} \oplus \mathbb{Z}_{2415}^2$	612383625
9	$\mathbb{Z}_{50616} \oplus \mathbb{Z}_{151848}$	7685938368
10	$\mathbb{Z}_{30305} \oplus \mathbb{Z}_{3182025}$	96431267625
11	$\mathbb{Z}_{635009} \oplus \mathbb{Z}_{1905027}$	1209709290243
12	$\mathbb{Z}_{48} \oplus \mathbb{Z}_{720} \oplus \mathbb{Z}_{7920} \oplus \mathbb{Z}_{55440}$	15174770688000
13	$\mathbb{Z}_{7965569} \oplus \mathbb{Z}_{23896707}$	190350868481283
14	$\mathbb{Z}_{13}^2 \oplus \mathbb{Z}_{366821} \oplus \mathbb{Z}_{38516205}$	2387725428997545
15	$\mathbb{Z}_{99918456} \oplus \mathbb{Z}_{299755368}$	29951093548271808
16	$\mathbb{Z}_{105} \oplus \mathbb{Z}_{59817135}^2$	375699412158863625
17	$\mathbb{Z}_{1253353151} \oplus \mathbb{Z}_{3760059453}$	4712682363364886403
18	$\mathbb{Z}_8^2 \oplus \mathbb{Z}_{93791448} \oplus \mathbb{Z}_{9848102040}$	59114736024534650880
19	$\mathbb{Z}_{15721755199} \oplus \mathbb{Z}_{47165265597}$	741520759611850588803
20	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{75} \oplus \mathbb{Z}_{1882395075} \oplus \mathbb{Z}_{13176765525}$	9301454448258671015625

Заключение.

В данной работе были исследованы спектральные инварианты семейства циркулянтных графов и циркулянтных расслоений. Отдельное внимание уделялось критической группе конуса над произвольным графом. Были установлены следующие результаты: число корневых остовных лесов, представляющее естественное обобщение числа остовных лесов, выражается через многочлены Чебышёва первого рода. При этом количество вершин в графе не влияет на сложность вычисления, так как она зависит от числа скачков, оставаясь фиксированной характеристикой для каждого рассматриваемого графа.

Это и некоторые спектральные свойства были установлены для циркулянтных графов и расслоений. Например, арифметические свойства циркулянтных графов позволяют предсказать поведение последовательности значений числа корневых остовных лесов при изменении числа вершин в анализируемом графе. Оно равно квадрату некоторой целочисленной последовательности с заданным множителем, непосредственно связанным со скачками в графе. В случае циркулянтного расслоения постоянный множитель у квадрата целочисленной последовательности равен числу корневых остовных лесов в базе расслоения.

Было показано, что число корневых остовных лесов в циркулянтном расслоении равно произведению всех собственных значений, соответствующих каждому циркулянтному слою. Если база расслоения является деревом, то полученное число корневых остовных лесов демонстрирует, что значительное усложнение конструкции циркулянтного графа не влияет на

его спектральные свойства. Асимптотическое поведение числа корневых остовных лесов показывает, что при стремлении числа вершин к бесконечности оно асимптотически выражается через меру Малера сопровождающего многочлена анализируемого графа. В случае циркулянтного расслоения аналогом сопровождающего многочлена является определитель обобщённой матрицы Лапласа.

Также в работе рассматривалась критическая группа графа-конуса, основание которого может быть любым графом, сохраняющим его связность. Было установлено, что число корневых остовных лесов в основании конуса совпадает с числом остовных лесов в самом конусе. Этот факт подтверждается существованием критической группы, порядок которой позволяет вычислить число корневых остовных лесов в графе. Мы называем её лесной группой. Лесная группа возникает именно через конструкцию конуса и, подобно классической критической группе графа, проявляет себя как важный инвариант. Это дополнительно позволило разработать структурные теоремы для лесной группы циркулянтного графа, принимая за основание графа-конуса сами циркулянтные графы.

Можно заключить, что переход от геометрических конструкций графов к их аналитическим характеристикам позволяет установить тонкие связи между объектами, которые на первый взгляд не кажутся очевидными. Этот процесс не только способствует разработке методов для более эффективных вычислений, но и обеспечивает получение более общих результатов.

Список литературы

- [1] **Cvetkovic, D.** An Introduction to the Theory of Graph Spectra / **D. Cvetkovic, S. Simic, P. Rowlinson.** — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. —364 p.
- [2] Some invariants of circulant graphs / **M. Munir, W. Nazeer, Z. Shahzadi, S. M. Kang** // Symmetry. —v. 8, №11. —2016. —p. 1–8.
- [3] **Davis, P. J.** Circulant Matrices / **P. J. Davis.**— 2nd ed. — New York: Chelsea Publishing, 1994. — 250 p.
- [4] **Kwon, Y. S.** Complexity of the circulant foliation over a graph / **A. D. Mednykh, I. A. Mednykh** // J. Algebr. Comb. —v. 53. —2020. —p. 115–129.
- [5] The State of the Art in Multilayer Network Visualization / **F. Mcgee, M. Ghoniem, G. Melançon, B. Otjacques, B. Pinaud.** // Comput. Graph. Forum. —v. 38, №6. —2019. —p. 125–149.
- [6] **Biggs, N. L.** Three remarkable graphs // Canad. J. Math. —v. 15, №2. —1973. —p. 397–411.
- [7] **Кельманс, А. К.** О числе деревьев графа I // Автоматика и телемеханика. —Т. 26, № 12. —1965. —с. 2194–2204.
- [8] **Кельманс, А. К.** О числе деревьев графа II // Автоматика и телемеханика. —Т. 27, № 2. —1966. —с. 56–65.
- [9] **Кельманс, А. К.** О свойствах характеристического многочлена графа // Кибернетику на службу коммунизму. —Т. 4, —1967. —с. 26–41.

- [10] **Kelmans, A. K.** A Certain Polynomial of a Graph and Graphs with an Extremal Number of Trees / **A. K. Kelmans, V. M. Chelnokov.** // J. Comb. Theory. –v. 16. –1974. –p. 197–214.
- [11] **Kirchhoff, G.** Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // Ann. Phys. Chem. –v. 148. –1847. –p. 497–508.
- [12] **Chebotarev, P.** Matrix forest theorems / P. Chebotarev, E. Shamis. // arXiv:math/0602575.
- [13] **Knill O.** Counting rooted forests in a network // arXiv:1307.3810.
- [14] **van Gijzen, M. B.** Spectral Analysis of the Discrete Helmholtz Operator Preconditioned with a Shifted Laplacian / **M. B. van Gijzen, Y.A. Erlangga, C. Vuik.** // SIAM J. Sci. Comput. –v. 29, №5. –2007. –p. 1942–1958.
- [15] **Boesch, F. T.** Spectral Analysis of the Discrete Helmholtz Operator Preconditioned with a Shifted Laplacian / **F. T. Boesch, H. Prodinge.** // Graphs Combin. –v. 2. –1986. –p. 191–200.
- [16] Yuanping Zhang Chebyshev polynomials and spanning tree formulas for circulant and related graphs / **Yuanping Zhang, Xuerong Yong, M. J. Golin.** // Discrete Math. –v. 298, Issue 1–3. –2005. –p. 334–364.
- [17] **Kwon, Y. S.** On Jacobian group and complexity of the generalized Petersen graph $GP(n, k)$ through Chebyshev polynomials / **Y. S. Kwon,**

- A. D. Mednykh, I. A. Mednykh.** // Linear Algebra Appl. –v. 529. –2017. –p. 355–373.
- [18] **Mednykh, I. A.** On Jacobian group and complexity of the I-graph $I(n, k, l)$ through Chebyshev polynomials // Arc Math. Contemp. –v. 15, №2. –2018. –p. 467–485.
- [19] **Bacher, R.** The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph / **R. Bacher, P. de la Harpe, T. Nagnibeda.** // Bull. Soc. Math. France. –v. 125, №2. –1997. –p. 167–198.
- [20] **Baker, M.** Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph / **M. Baker, S. Norine.** // Adv. Math. –v. 215, №2. –2007. –p. 766–788.
- [21] **Mednykh, A.D.** Cyclic coverings of graphs. Counting rooted spanning forests and trees, Kirchhoff index, and Jacobians / **A.D. Mednykh, Mednykh I.A.** // Russian Math. Surveys. –v. 78, №3. –2023. –p. 501–548.
- [22] **Mednykh, A.D.** Plans periodicity theorem for Jacobian of circulant graphs / **A.D. Mednykh, Mednykh I.A.** // Dokl. Math. –v. 103, №3. –2021. –p. 139–142.
- [23] **Звонкин, А. К.** Графы на поверхностях и их приложения / **А. К. Звонкин, С. К. Ландо.** — Москва: МЦНМО, 2010. —480с.
- [24] **Boesch, F.T.** Circulants and their connectivities / **F.T. Boesch, R. Tindell.** // J. Graph Theory. –v. 8. –1984. –p. 487–499.
- [25] **Conder, M.** On embeddings of circulant graphs / **M. Conder, R. Grande.** // Electron. J. Combin. –v. 22, №2. –2015.

- [26] **Monakhova, E. A.** A Survey on Undirected Circulant Graphs // Discret. Math. Algorithms Appl. –v. 4, №1. –2012.
- [27] **Saxena, N.** Parameters of integral circulant graphs and periodic quantum dynamics / **N. Saxena, S. Severini, I. Shparlinski.** // International Journal of Quantum Information. –v. 5. –2007. –p. 417–430.
- [28] On the metric dimension of circulant graphs / **M. Imran, A. Baig, S.A.U.H. Bokhary, I. Javaid.** // Appl. Math. Lett. –v. 25. –2012. –p. 320–325.
- [29] **Burkard, R. E.** Efficiently solvable special cases of bottleneck traveling salesman problems / **R.E Burkard, W. Sandholzer.** // Discrete Appl. Math. –v. 32. –1991. –p. 61–76.
- [30] **Heuberger, C.** On planarity and colorability of circulant graphs // J. Discrete Mathematics. –v. 268, Issue 1–3. –2003. –p. 153–169.
- [31] **Muzychuk, M.** A solution of the isomorphism problem for circulant graphs // Proc. London Math. Soc. –v.88, Issue 1. –2004. –p. 1–41.
- [32] **Sander, J.** Recent developments on the edge between number theory and graph theory / **J. Sander, T. Sander.** // From Arithmetic to Zeta-Functions: Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz. –2016, –p. 405–425.
- [33] **Boben, M.** I-graphs and the corresponding configurations / **M. Boben, T. Pisanski, A. Zitnik.** // J. Comb. Designs. –v. 13, №6. –2005. –p. 406–424.

- [34] **Horton, J. D.** Symmetric Y -graphs and H -graphs / **J. D. Horton, I. Z. Bouwer.** // J. Combin. Theory. –v. 53, Issue 1. –1991. –p. 114–129.
- [35] **Thinsz, D.** Properties of Discrete Laplacians: With application on Brain Networks: Thesis. –Stockholm: KTN Royal Institute of Technology, –2022. –42 p.
- [36] **Mohar, B.** The Laplacian spectrum of graphs // Graph theory, combinatorics, and applications. –v. 2. –1991. –p. 871–898.
- [37] **Harary, F.** Graph theory and electric networks // IRE Trans. Inf. Theory. –v. 6, №5. –1959. –p. 95–109.
- [38] **Cayley, A.** A Theorem on trees // Quart. J. Math. –v. 23. –1889. –p. 376–378.
- [39] **Sedláček, J.** Ungerichtete Graphen und ihre Gerüste // Beiträge zur Graphentheorie. –1968. –p. 143–146.
- [40] **Hilton, A. J. W.** Spanning trees and Fibonacci and Lucas numbers // Fibonacci Q. –v. 12, №3. –1974. –p. 259–262.
- [41] **Sedláček, J.** On the number of spanning trees of finite graphs // Časopis Pěst. Mat. –v. 94, Issue 2. –1969. –p. 217–221.
- [42] **Sedláček, J.** On the skeletons of a graph or digraph // Combinatorial Structures and their Applications. –1970. –p. 387–391.
- [43] **Shrock, R.** Spanning trees on graphs and lattices in d -dimensions / R. Shrock, Wu F.Y. // J. Phys. A. –v. 33. –2000. –p. 3881–3902.

- [44] **Boesch, F. T.** The number of spanning trees in a prism / **F. T. Boesch, Z. R. Bogdanowicz.** // Internat. J. Comput. Math. –v. 21, Issue 3–4. –1987. –p. 229–243.
- [45] **Sun, W.** Counting spanning trees in prism and anti-prism graphs / **W. Sun, S. Wang, J. Zhang.** // J. Appl. Anal. Comput. –v. 6, №1. –2016. –p. 65–75.
- [46] **Mason, J. C.** Chebyshev Polynomials / **C. J. Mason, D. C. Handscomb.** — New York: Chapman Hall, 2002. —356 p.
- [47] **Chebotarev, P.** Spanning forests and the golden ratio // Discrete Appl. Math. –v. 156, №5. –2008. –p. 813–821.
- [48] **Jin, Y.** Enumeration for spanning forests of complete bipartite graphs // Ars Combinatoria. –v. 70. –2004. –p. 135–138.
- [49] **Guttmann, A. J.** Spanning tree generating functions and Mahler measures / **A. J. Guttmann, M. D. Rogers.** // J. Phys. A. –v. 45, №49. –2012.
- [50] **Silver, D. S.** Graph complexity and Mahler measure / D. S. Silver, S. G. Williams. // arXiv:1701.06097
- [51] **Mahler, K.** On some inequalities for polynomials in several variables // J. London Math. Soc. –v. 37. –1962. –p. 341–344.
- [52] **Lehmer, D. H.** Factorization of certain cyclotomic functions // Ann. of Math. –v. 34, №3. –1933. –p. 461–479.

- [53] The many aspects of Mahler's measure. / **David Boyd, Doug Lind, Fernando Rodríguez-Villegas, Christopher Deninger.** // Report about the workshop the many aspects of Mahler measure. –BIRS, Banff. –2003.
- [54] **Bak, P.** Self-organized criticality / **P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld.** // Physical Review A. –v. 38. –1988. –p. 364–374.
- [55] **Dhar, D.** Self-organized critical state of sandpile automaton models // Phys. Rev. Lett. –v. 64. –1990. –p. 1613–1616.
- [56] **Le Borgne, Y.** On the identity of the sandpile group / **Y. Le Borgne, D. Rossin.** // Discrete Math. –v. 256. –2002. –p. 775–790.
- [57] **Biggs, N. L.** Chip-firing and the critical group of a graph // J. Algebraic Combin. –v. 9. –1999. –p. 25–45.
- [58] **Cori, R.** On the sandpile group of dual graphs / **R. Cori, D. Rossin.** // European J. Combin. –v. 21, Issue 4. –2000. –p. 447–459.
- [59] **Kalinin, N.** Tropical curves in sandpiles / **N. Kalinin, M. Shkolnikov.** // Comptes Rendus Mathematique, –v. 354, Issue 2. –2016. –p. 125–130.
- [60] **Lorenzini, D.** Smith normal form and Laplacians // J. Combin. Theory Ser. –v. 98, Issue 6. –2008. –p. 1271–1300.
- [61] **Jacobson, B.** Critical groups for complete multipartite graphs and Cartesian products of complete graphs / **B. Jacobson, A. Niedermaier, V. Reiner.** // Graph Theory. –v. 44, Issue 3. –2003. –p. 231–250.

- [62] **Prasolov, V. V.** Polynomials / **V. V. Prasolov.** — Berlin: Springer-Verlag, 2004. —45 p.
- [63] **Gerschgorin, S.** Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. // Bulletin de l'Academie des Sciences de l'URSS. №6. —1931. —p. 749–754.
- [64] **Chebotarev, P.** Forest matrices around the Laplacian matrix / **P. Chebotarev, R. Agaev.** // Linear Algebra Appl. —v. 356, Issue 1–3. —2002. —p. 253–274.
- [65] **Horn, R. A.** Matrix Analysis / **R. A. Horn, C. R. Johnson.** — Cambridge: Cambridge University Press, 1985. —643 p.
- [66] **Goel, G.** Critical groups of iterated cones / **G. Goel, D. Perkinson.** // Linear Algebra Appl. —v. 567. —2019. —p. 138–142.
- [67] **Abrosimov N. V.** Counting spanning trees in co-bordism of two circulant graphs / **G. A. Baigonakova, I. A. Mednykh.** // Sib. Elektron. Mat. Izv. —v. 15. —2018. —p. 1145–1157.

Работы автора по теме диссертации

- [68] **Grunwald, L. A.** The number of rooted forests in circulant graphs / **L. A. Grunwald, I. A. Mednykh.** // Ars Math. Contemp. —v. 22, №4. —2022.
- [69] **Grunwald, L. A.** Counting rooted spanning forests for circulant foliation over a graph / **L. A. Grunwald, Young Soo Kwon, I. A. Mednykh.** // Tohoku Math. J. —v. 74, №4. —2022. —p. 535–548.

- [70] Counting rooted spanning forests in cobordism of two circulant graphs
/ **N. V. Abrosimov, G. A. Baigonakova, L. A. Grunwald, I. A. Mednykh.** // Sib. Elektron. Mat. Izv. –v. 17. –2020. –p. 814–823.
- [71] **Grunwald, L. A.** Spectral Invariants of Graphs and Their Applications to
Combinatorics / **L. A. Grunwald, A. D. Mednykh, I. A. Mednykh.**
// H. Omsk Univ. –v. 28, №5. –2023. –p. 13–25.
- [72] **Grunwald, L. A.** On the Jacobian group of a cone over a circulant graph
/ **L. A. Grunwald, I. A. Mednykh.** // Mat. Zametki Sev. Vost. federal.
Univ. –v. 28, №2. –2021. –p. 88–101.