На правах рукописи

ЗАХАРОВА Юлия Викторовна

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ С АЛЬТЕРНАТИВАМИ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТ: ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СЛОЖНОСТЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Специальность
1.2.3 – Теоретическая информатика, кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Новосибирск – 2026

Работа выполнена в Омском филиале Федерального государственного бюджетного учреждении науки Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Официальные оппоненты:

Картак Вадим Михайлович

доктор физико-математических наук, доцент, Уфимский университет науки и технологий, заведующий кафедрой вычислительной техники и защиты информации.

Николаев Андрей Валерьевич

доктор физико-математических наук, доцент, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, заведующий кафедрой дискретного анализа.

Хамисов Олег Валерьевич

доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, главный научный сотрудник.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН».

Защита состоится 03 марта 2027 г. в 16 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета 24.1.074.04 при ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук» (ИМ СО РАН) по адресу: 630090, г. Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН и на сайте https://www.math.nsc.ru.

Автореферат разослан «____» ноября 2026 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. Ц. Ч.-Д. Батуева

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность и степень разработанности темы исследования. В настоящей диссертации исследуются задачи составления расписаний с альтернативами выполнения работ при учете ресурсных и структурных ограничений. Это широкий круг, как правило, NP-трудных задач комбинаторной оптимизации, которые возникают в компьютерных и производственных системах.

Современные компьютерные технологии позволяют не только решать сложные вычислительные задачи, но и порождают новые проблемы оптимального использования вычислительных ресурсов. Например, для выполнения трудоемких вычислений компьютеры могут как использовать несколько процессоров (ядер) одновременно, так и менять скорость вычислений. В многопроцессорных компьютерных системах возникают задачи теории расписаний, характеризующиеся зависимостью длительностей операций-работ от потребления ресурсов, возможностью параллельных вычислений и отношениями предшествования специального вида. Здесь учитываются максимальная допустимая температура, кэш память, потребление энергии, пропускная способность шины данных и другие. Выделяют системы с общей памятью, где допускаются прерывания и миграция операций между процессорами, а также системы с распределенной памятью, где имеются более значительные временные затраты на взаимодействие с памятью и ограничения на передачу данных, которые приводят к запретам (возможно частичным) на прерывания. Если процессоры параллельные, то работы могут выполняться на любых из них и задается количество требуемых процессоров. Такие работы называются распараллеливаемыми. В случае специализированных процессоров для работ указываются подмножества процессоров, которые могут использоваться. Такие работы называются многопроцессорными. Составление расписаний для многопроцессорных и распараллеливаемых работ имеет место на практике при тестировании и надежных вычислениях; в параллельных приложениях на видеокартах; компьютерных системах управления; приложениях в компьютерных устройствах, срок службы которых зависит от ограниченной эффективности батареи.

Задачи с энергетическим критерием и с ограничением на расход энер-

гии являются труднорешаемыми даже в простых практически значимых частных случаях [13, 18]. При исследовании вычислительной сложности таких задач актуальными являются подходы к построению полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности, методы доказательства гарантированных оценок точности и NP-трудности классов примеров, представленные в работах Брукера П., Гимади Э.Х., Дроздовского М., Кононова А.В., Лазарева А.А., Севастьянова С.В., Серваха В.В., Хачая М.Ю. и других.

Ряд работ авторов из различных стран посвящен построению оригинальных приближенных алгоритмов для составления расписаний однопроцессорных работ, где учитываются выпуклость функции расчета мгновенной мощности и загрузка процессоров, среди которых можно выделить работы Алберс С. [3], Бамписа Е. и Кононова А.В. [6], Герардса М.Е.Т. [18], Струсевича В.А. и Шакхлевич Н.В. [25]. При доказательствах гарантированных оценок точности предлагаются и выявляются сложные комбинаторные схемы и структурные свойства формируемых расписаний [3, 18]. В большинстве случаев рассматриваются оффлайн и онлайн задачи, где составляются расписания для независимых однопроцессорных работ с заданными моментами поступления и директивными сроками при минимизации расхода энергии, и с заданным общим доступным объемом энергии при минимизации временных критериев. Однако реальная практика предполагает также наличие связей по последовательности выполнения операций, совокупного эффекта от выполнения нескольких операций и учет характеристик системы (см. примеры в [13]). Специфика задач обуславливает необходимость разработки приближенных алгоритмов и метаэвристик, позволяющих быстро находить решения хорошего качества (см., например, [6, 7, 20, 22]).

Представляет интерес выявить те классы задач, где при подходящей выпуклой модели для нижней оценки целевой функции удастся сохранить те же гарантированные оценки точности алгоритмов жадного типа при учете потребления энергии работами, что имеют место в задачах без ресурсных ограничений.

В литературе также представлены результаты по исследованию задач составления расписаний в производственных системах с оптимизацией рас-

хода энергии на различных уровнях [16, 21, 24]. Предложены модели частично целочисленного программирования, конструктивные эвристики и метаэвристики. При исследовании и решении рассматриваемых структурно сложных задач важно учитывать полиэдральные характеристики этих задач и свойства решений. Такой анализ проводится в работах Бондаренко В.А., Золотых Н.Ю. и Шевченко В.Н., Колоколова А.А., Николаева А.В., Симанчева Р.Ю., Хамисова О.В.

В задачах составления расписаний с выпуклой функцией потребления ресурсов, характерных для промышленного производства [24], длительности работ зависят от потребляемого ресурса по правилу $p_j(R_j) = (W_j/R_j)^\kappa$, где $0 < \kappa \leq 1$ — константа; W_j — объём работы j; R_j — объём потребляемого ресурса работой j. Случай $\kappa = 1$ соответствует многим реальным государственным и промышленным операциям, а случай $\kappa = 0{,}5$ – проектированию схем СБИС, где для отдельной задачи произведение площади кремния (ресурса) на квадрат затраченного времени равно константе (рабочей нагрузке).

В диссертации автором исследуются задачи теории расписаний с многопроцессорными и распараллеливаемыми работами как с критерием минимизации расхода энергии, так и с классическими критериями при бюджетных ограничениях на расход энергии. Предлагаются методы доказательства труднорешаемости задач, оригинальные конструктивные алгоритмы с гарантированными оценками точности и подходы к построению оценок целевой функции, выявляются комбинаторные свойства допустимых расписаний.

Еще одно актуальное направление исследований представляют задачи составления расписаний с предписаниями и/или запретами работ, которые имеют приложения в компьютерных системах и производственных предприятиях, где запреты на выполнение работ в позициях машин возникают из-за технологических ограничений, фиксированных маршрутов и рабочих смен, что представлено в работах Ернста А.Т. [14], Фишера М. [15], Хачая М.Ю. [20] и Черных И.Д. [9]. Например, рассмотрим задачу составления расписаний с маршрутизацией [9]. Задан неориентированный взвешенный граф. Вершины соответствуют узлам транспортной сети. Работы размещены в узлах сети. Веса рёбер соответствуют временам перемещения

между узлами. Машина посещает узел не более одного раза. Работы выполняются машинами в узлах, где они размещены. Исследуются модели, в которых работы связаны отношениями предшествования, имеют несколько стадий и другие отношения/связи. Целью является минимизировать некоторый регулярный критерий. Такие задачи могут решаться в два этапа. Сначала отыскиваются маршруты машин, а затем составляется расписание выполнения работ в позициях маршрутов [8, 9]. Однако, когда маршруты машин фиксированы, то имеет место задача составления расписаний с запретами работ, определяемыми узлами, посещаемыми машинами в позициях маршрутов [8, 9, 15].

В то же время задачи составления расписаний с предписаниями работ играют важную роль в эволюционных алгоритмах (ЭА) [26, 27], где задача оптимальной рекомбинации решается в операторе кроссинговера (рекомбинации). Родительские решения обмениваются своими признаками при построении потомков в операторах кроссинговера [5, 26, 27, 28]. Для произвольного набора родительских решений задача оптимальной рекомбинации состоит в нахождении наилучшего возможного потомка, который может возникнуть в результате кроссинговера, где значение каждого компонента решения-потомка копируется как одно из значений этого компонента в родительских решениях. Такие операторы рекомбинации основаны на свойстве передачи генов [26]. Исследование задачи оптимальной рекомбинации в эволюционных алгоритмах представлено в работах Балаша Е., Ниехауса В., Еремеева А.В., Чикано Ф., Очоа Г., Витлей Д., Ягиура М., Ибараки Т. и других.

Ранее задачи составления расписаний с предписаниями или запретами элементов исследовались, например, Пяткиным А.В. в контексте задачи о раскраске графа со списками [23], Балашем Е. для задач булева программирования [5] и Сердюковым А.И. для задачи коммивояжера [1]. В настоящей диссертации проводится исследование алгоритмической сложности задач составления расписаний с предписаниями или запретами работ. Для каждой позиции в очередности выполнения на машине задано подмножество работ, которые здесь могут выполняться. Предлагается метод доказательства NP-трудности для указанных задач с предписаниями работ, основанный на сводимости специального случая задачи Разбиение. В

результате доказывается NP-трудность при различных регулярных критериях и дополнительных условиях на связи между работами в одностадийных и многостадийных системах. Строятся точные алгоритмы для случая мощности предписаний не превосходящей двух, показывается, что «почти все» индивидуальные задачи полиномиально разрешимы. Формулируются модели целочисленного линейного программирования и предлагается алгоритм переборного типа для общего случая, когда предписания работ могут иметь произвольную структуру и мощность.

Метаэвристики, в частности эволюционные алгоритмы, находят широкое применение при решении практических задач, позволяя получать решения требуемого качества за приемлемое время в случаях, когда классические методы оптимизации оказываются чрезмерно трудоемкими. Здесь применяются проблемно-ориентированные операторы кроссинговера и мутации (см., например, работы Блума К., Еремеева А.В., Картака В.М.), методы локального поиска с различными типами окрестностей (см., например, результаты исследований Кочетова Ю.А. и Младеновича Н.) и различные варианты настройки параметров эволюционных алгоритмов (см., например, подходы Еремеева А.В., Семенкина Е.С. и Сопова Е.А.). В контексте рассматриваемых в диссертации задач составления расписаний предлагаются адаптивные ЭА с оптимизированными операторами кроссинговера. Здесь необходимо отметить, что одним из перспективных направлений исследований в эволюционных вычислениях является анализ сложности и разработка эффективных алгоритмов решения задачи оптимальной рекомбинации в различных постановках [2, 5, 10, 11, 12, 30]. Важную роль играет учет основных принципов построения операторов и способ представления решений. Экспериментальные результаты показывают перспективность использования оптимизированных операторов в ЭА [2, 5, 10, 11, 12, 30]. В настоящей работе особое внимание уделяется построению оптимизированных операторов скрещивания для задач на перестановках и проводится систематический анализ их вычислительной сложности. Правильный выбор и реализация указанных операторов позволяют разработать высокоэффективные эвристики для исследуемых задач. Также экспериментальные исследования показывают перспективность использования нескольких операторов, действия которых настраиваются и адаптируются в процес-

се вычислений. Для обеспечения разнообразия в популяции и настройки параметров используются различные методы адаптации [17, 29].

Таким образом, исследование вычислительной сложности, комбинаторных свойств и разработка новых алгоритмов с установленными свойствами для задач составления расписаний с альтернативами выполнения работ при учете ресурсных ограничений и структурных связей, характерных для современных производственных и компьютерных систем, являются важными для практики задачами, требующими новых подходов в комбинаторной оптимизации.

Целью диссертации является построение новых математических моделей и точных полиномиальных алгоритмов оптимизации для актуальных задач составления расписаний с альтернативами выполнения работ, сложными технологическими связями и ресурсными ограничениями, возникающими на производстве и в компьютерных системах, либо доказательство труднорешаемости таких задач и разработка для NP-трудных задач приближенных алгоритмов с гарантированной оценкой точности.

Задачи исследования. Для достижения цели поставлены следующие задачи:

– анализ вычислительной сложности рассматриваемых задач и выделение практически значимых полиномиально разрешимых классов примеров;

– построение оценок целевых функций и их анализ;

– разработка приближенных алгоритмов с гарантированной оценкой точности, построение серий примеров, где полученные оценки достигаются;

– разработка эффективных алгоритмов приближенного решения, основанных на эволюционных вычислениях и оптимизированных операторах;

– реализация и экспериментальный анализ разработанных эволюционных алгоритмов.

Объектом исследования являются задачи составления расписаний с альтернативами выполнения работ при наличии ресурсных и структурных ограничений.

Предмет исследования – вычислительная сложность и точные и приближенные алгоритмы решения указанных задач.

Методология и методы исследования. В диссертации для исследования оптимизационных моделей использованы методы математического

программирования, теории вычислительной сложности, дискретной оптимизации и теории графов. При построении и исследовании алгоритмов использованы методы исследования операций, выпуклого анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии, теории вычислительной сложности; методы локального поиска и эволюционных вычислений. Также в диссертации применяются методы построения приближенных алгоритмов и анализа их точности, гибридные методы локального поиска и эволюционных вычислений, разработанные автором.

Научная новизна. Все представленные в диссертации результаты являются новыми:

– Метод доказательства NP-трудности для задач составления расписаний с учетом расхода энергии.

– Двухэтапные подходы к решению задач с учетом расхода энергии и распараллеливания работ, позволяющие построить новые полиномиальные приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности.

– Подходы к построению нижних оценок и отделяющих оракулов для задач с учетом расхода энергии и распараллеливания работ.

– Метод доказательства NP-трудности для задач составления расписаний с предписаниями работ малой мощности.

– Метод решения задач составления расписаний с предписаниями работ произвольной структуры.

– Адаптивные эволюционные алгоритмы с оптимизированными операторами скрещивания.

– Доказательство полиномиальной разрешимости индивидуальных задач оптимальной рекомбинации для «почти всех» пар родительских решений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит в основном теоретический характер. Полученные в ней результаты позволяют понять структуру решений рассматриваемых задач, вычислительную сложность и границы возможностей полиномиальных алгоритмов. Для большинства задач впервые установлена их вычислительная сложность. Для всех рассмотренных NP-трудных задач построены новые приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности.

Отметим, что все задачи, рассматриваемые в диссертации, имеют при-

ложения в области компьютерных технологий и производственных систем. Построенные алгоритмы, за исключением алгоритмов где используется метод эллипсоидов, имеют низкую трудоемкость и могут быть использованы для эффективного построения приближенных решений хорошего качества.

Разработанные алгоритмы для задач составления расписаний в многопроцессорных системах с учетом ресурсов и возможностью распараллеливания операций могут быть использованы при настройке и планировании работы приложений в вычислительных (компьютерных) онлайн системах и при организации работы на серверах в системах организаций для повышения эффективности.

Математические модели и методы, предложенные для задач составления расписаний с запретами и предписаниями работ, могут использоваться в производственных и логистических системах для повышения качества обслуживания и эффективного использования ресурсов при учете важных технологических ограничений и маршрутов транспортировки.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

• Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения» (2014, 2017);

• Всероссийская конференция «Проблемы оптимизации и экономические приложения» (2015);

• Международная азиатская школа-семинар «Проблемы оптимизации сложных систем» (2020);

• Международная конференция «Математика в современном мире» (2017);

• Международная школа-семинар «Проблемы оптимизации и их приложения (OPTA)» (2018);

• Международная конференция «Mathematical Optimization Theory and Operations Research (MOTOR)» (2019-2025);

• Международная конференция «Проблемы теоретической кибернетики» (2023);

• Международная конференция «Optimization and Applications» (2018, 2022-2024);

• Международная конференция «Прикладная математика и фундамен-

тальная информатика» (2023, 2025);

• Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование» (2020, 2022-2025);

• Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (2024);

• Международная конференция «Numerical Computations: Theory and Algorithms» (2017, 2023);

• Международная конференция «Mathematics of Artificial Intelligence» (2025, 2026);

• Всероссийская конференция с международным участием «Распределённые информационно-вычислительные ресурсы» (2022)

• Всероссийская конференция с международным участием «Параллельные вычислительные технологии» (2024-2025);

• Научный семинар «Математическое моделирование и дискретная оптимизация» (ОФ ИМ СО РАН);

• Научный семинар «Модели и алгоритмы для задач составления расписаний» (ОФ ИМ СО РАН);

• Научный семинар «Математические модели принятия решений» (ИМ СО РАН);

• Научный семинар «Дискретные экстремальные задачи» (ИМ СО РАН).

Личный вклад. Диссертационная работа представляет собой единый цикл исследований автора, объединенных не только предметом, но и методами исследований. В совместных работах соискателю принадлежат либо основные идеи анализа приближенных алгоритмов, включая доказательства основных лемм и теорем, либо идеи новых приближенных алгоритмов. Некоторые доказательства лемм и теорем выполнены в соавторстве при непосредственном участии соискателя. Конфликт интересов с соавторами отсутствует.

Основные положения, выносимые на защиту, включают совокупность результатов по разработке и анализу точных алгоритмов и приближенных алгоритмов с гарантированными оценками точности, эволюционных алгоритмов с оптимальной рекомбинацией для задач теории расписаний с альтернативами выполнения работ, где учитываются ограничения на ресурсы и возможность распараллеливания операций, а также предпи-

сания или запреты работ, результаты по вычислительной сложности для рассматриваемых задач, а именно с указанием пунктов паспорта специальности 1.2.3, которым они соответствуют:

– методы доказательства NP-трудности для задач составления расписаний с учетом распараллеливания работ и расхода энергии и задач теории расписаний с запретами работ (п. 3 – Теория сложности алгоритмов и вычислений) [36, 37, 39, 40, 42, 43, 44, 46];

– двухэтапный метод решения задач составления расписаний с учетом распараллеливания работ и расхода энергии, на основе которого построены точные алгоритмы и приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности для различных критериев и типов работ (п. 3 – Теория сложности алгоритмов и вычислений, п. 9 – Математическая теория исследования операций) [36, 37, 39, 40, 42, 43, 44, 46];

– комбинаторные свойства расписаний для задач с учетом распараллеливания работ и расхода энергии, которые позволили получить гарантированные оценки точности для конструктивных алгоритмов списочного и жадного типов и построить серии примеров, где эти оценки достигаются (п. 3 – Теория сложности алгоритмов и вычислений, п. 9 – Математическая теория исследования операций) [36, 37, 39, 40, 42, 43, 44, 46];

– методы построения нижних оценок на целевую функцию для задач составления расписаний с учетом расхода энергии (п. 8 – Математическое программирование) [36, 37, 39, 40, 42, 43, 44, 46];

– точный метод решения задач составления расписаний с запретами работ произвольной мощности (п. 3 – Теория сложности алгоритмов и вычислений, п. 9 – Математическая теория исследования операций) [31, 35, 44];

– доказательство NP-трудности задачи оптимальной рекомбинации для ряда задач составления расписаний на перестановках (п. 3 – Теория сложности алгоритмов и вычислений) [32, 33, 34, 38];

– эволюционный алгоритм с оптимальной рекомбинацией для задач на перестановках и его конкурентоспособность, которая показана экспериментально на ряде задач составления расписаний с регулярными временными критериями (п. 3 – Теория сложности алгоритмов и вычислений, п. 9 – Математическая теория исследования операций) [38, 41, 45].

Достоверность и публикации. Все выносимые на защиту результа-

ты достоверны и теоретически обоснованы. По теме диссертации опубликовано 48 работ, в том числе 26 статей: 16 – в журналах из списка ВАК или включенных в базы данных Scopus, Web of Science, ZBMath и 10 – в трудах конференций (Lecture Notes in Computer Science, Communications in Computer and Information Science).

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 посвящена построению энергетически эффективных расписаний для распараллеливаемых работ. Требуется составить расписание распараллеливаемых или многопроцессорных работ с учетом расхода энергии на m процессорах с возможностью настройки скоростей процессоров. Множество работ обозначается через $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$, а множество процессоров через $\mathcal{M} = \{1, \ldots, m\}$. Каждая работа $j \in \mathcal{J}$ характеризуется моментом поступления r_j, директивным сроком d_j. Кроме того, работа j имеет объем W_j, $j \in \mathcal{J}$. Рассматриваются жесткие работы (англ., rigid jobs, обозначение – $size_j$), гибкие работы (англ., moldable jobs, обозначение – any), мягкие работы (англ., malleable jobs, обозначение – var) и одномодальные многопроцессорные работы (англ., single mode jobs, обозначение – fix_j). Задача исследуется в различных постановках, когда прерывания и миграция запрещаются (системы с распределенной памятью) и когда допускаются (системы с общей памятью). Миграция предполагает возможность перемещения работы с одного процессора на другой.

Если процессор работает со скоростью s, то мгновенная мощность (потребление энергии в единицу времени) равна s^α. Минимизируется суммарное потребление энергии всеми процессорами. При построении расписания для работ необходимо определить интервалы выполнения, используемые процессоры и скорости. Обозначение задачи – $P|\beta_1, \beta_2, r_j, d_j|E$, где $\beta_1 \in \{size_j,\ any,\ var,\ fix_j\}$ задает тип работ, $\beta_2 \in \{\circ, pmtn, pmtn*\}$ определяет запрет прерываний выполнения работ, наличие прерываний с миграцией и наличие прерываний без миграции, соответственно. Обозначение «$r_j, d_j \uparrow\uparrow$» вместо «$r_j, d_j$» во втором поле будет указывать на согласованность моментов поступления и директивных сроков.

Показано, что большинство доказательств NP-трудности для задач составления расписаний с критерием минимизации максимального временного смещения $L_{\max}$ можно преобразовать в их аналоги с учетом расхода энергии и возможности варьирования скоростей процессоров.

В результате доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 Задача $P|size_j, pmtn, r_j, d_j|E$ является NP-трудной в обычном смысле, даже если все работы имеют общий момент поступления, общий директивный срок и идентичные объемы.

Теорема 2 Задача $P|fix_j, pmtn, r_j, d_j|E$ с $|fix_j| \leq 3$ является NP-трудной в сильном смысле, даже если все работы имеют общий момент поступления, общий директивный срок и идентичные объемы.

Классическим критерием в теории расписаний является минимизация длины расписания, и для широкого круга задач с этим критерием было предложено множество алгоритмов (см., например, [13]). Для задачи составления расписаний с минимизацией расхода энергии предлагается подход к вычислению нижней оценки на потребление энергии и предполагаемых длительностей работ с помощью решения вспомогательной задачи поиска максимального потока минимальной стоимости. Это позволяет свести задачу с возможностью варьирования скоростей к классической задаче минимизации длины расписания с фиксированными скоростями работ. В результате предложены новые сильно полиномиальные алгоритмы с гарантированными константными оценками точности для следующих случаев:

- случай без прерываний с согласованными директивными сроками, где каждая работа требует не более $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ процессоров:

  Теорема 3 Для задач $P|size_j \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil, pmtn*, r_j, d_j \uparrow\uparrow |E$ и $P|size_j \leq \lceil \frac{m}{2} \rceil, r_j, d_j \uparrow\uparrow |E$ можно построить $(3 - \varphi_m)^{\alpha-1}$-приближенное решение за время $O(n^4 + n \max\limits_{j \in \mathcal{J}} size_j)$.

- случай без прерываний с общим моментом поступления и/или директивным сроком:

  Теорема 10 Для задач $P|size_j, pmtn*, r_j = r, d_j = d|E$ и $P|size_j, r_j = r, d_j = d|E$ можно построить $\left(2 - \frac{1}{m}\right)^{\alpha-1}$-приближенное расписание за время $O(n^2 + n \max\limits_{j \in \mathcal{J}} size_j)$.

Теорема 11 Для задач $P|size_j, pmtn*, r_j = r, d_j|E$ и $P|size_j, pmtn*, r_j, d_j = d|E$ можно построить $(3 - \varphi_m)^{\alpha-1}$-приближенное расписание за время $O(n^4 + n \max\limits_{j \in \mathcal{J}} size_j)$.

- случай с прерываниями, согласованными директивными сроками, но без миграции:

  Теорема 4 Для задачи с прерываниями $P|size_j, pmtn*, r_j, d_j \uparrow\uparrow |E$ можно построить $(4 - \varphi_m)^{\alpha-1}$-приближенное расписание за время $O(n^4 + n \max\limits_{j \in \mathcal{J}} size_j)$.

- случай с миграцией:

  Теорема 5 Для задачи с миграцией $P|size_j, pmtn, r_j, d_j|E$ можно построить $\left(2 - \frac{1}{m}\right)^{\alpha-1}$-приближенное расписание за время $O(n^4 + n \max\limits_{j \in \mathcal{J}} size_j)$.

Также предлагается подход на основе идеи преобразования оптимального расписания для однопроцессорных работ в приближенное расписание для распараллеливаемых работ. Используя этот подход, разрабатывается приближенный алгоритм для задач без прерываний с согласованными директивными сроками и работами идентичного объема, для которых случай соответствующей задачи с однопроцессорными работами полиномиально разрешим.

Теорема 6 Для задач $P|size_j, pmtn*, r_j, d_j \uparrow\uparrow, W_j = W|E$ и $P|size_j, r_j, d_j \uparrow\uparrow, W_j = W|E$ можно построить $3^{\alpha-1}$-приближенное расписание за время $O(\min\{m, n\}n^2)$.

Более того, формулируется задача линейного программирования с конфигурациями работ и предлагается «почти точный» алгоритм для задачи с миграцией и прерываниями. Алгоритм основан на методе эллипсоидов. Он возвращает решение с аддитивной ошибкой $\varepsilon > 0$ и работает за время, полиномиальное от $1/\varepsilon$ и размера входа. Этот результат обобщает результат [6] для составления расписания однопроцессорных работ на распараллеливаемые и многопроцессорные работы в случае однородной компьютерной системы.

Теорема 7 Для задачи $Pm|size_j, pmtn, r_j, d_j|E$ допустимое расписание с потреблением энергии, не превосходящим $OPT + \varepsilon$, можно построить за

время, полиномиальное относительно размера входа индивидуальной задачи и $1/\varepsilon$.

Теорема 8 Для задачи $P|fix_j, pmtn, r_j, d_j|E$ с $|fix_j| = 2$ допустимое расписание с потреблением энергии, не превосходящим $OPT + \varepsilon$, можно построить за время, полиномиальное относительно размера входа индивидуальной задачи и $1/\varepsilon$.

Вторая глава посвящена исследованию задач составления расписаний с ограничением на потребление энергии.

Имеется множество работ $\mathcal{J} = \{1, \ldots, n\}$, которые должны быть выполнены на m процессорах, имеющих возможность работать с различной скоростью. Рассматриваются жесткие работы, гибкие работы, мягкие работы и одномодальные многопроцессорные работы, а также многостадийная система open-shop. Прерывания, миграция между процессорами и частичный порядок могут быть разрешены или запрещены.

Исследуется стандартная однородная модель в контексте настройки скоростей процессоров. Если процессор работает со скоростью s, то потребление энергии в единицу времени равно s^α, где $\alpha > 1$ – заданная константа. Предполагается, что доступно непрерывное множество скоростей процессоров из заданного диапазона. Общий объем работы W_j, $j \in \mathcal{J}$, может быть произвольным образом распределен между используемыми для ее выполнения процессорами. Требуется построить расписание (указав моменты начала и окончания выполнения работ и используемые ими процессоры), при котором минимизируется длина расписания или сумма моментов завершения работ, а суммарное потребление энергии не превосходит заданной величины на бюджет энергии E. Обозначение задачи – $P|\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ energy|\gamma$, где $\beta_1 \in \{size_j,\ any(\delta_j),\ var(\delta_j),\ fix_j\}$ задает тип работ (величина δ_j указывает верхнюю границу на степень распараллеливания), $\beta_2 \in \{\circ, pmtn, pmtn*\}$ отвечает за отсутствие или наличие прерываний; $\beta_3 \in \{\circ,\ prec\}$ определяет отсутствие или наличие частичного порядка между работами. Критерий оптимизации $\gamma \in \{C_{\max},\ \sum_j C_j\}$.

Для критерия минимизации длины расписания строятся приближенные алгоритмы, основанные на двух этапах. На первом этапе вычисляется нижняя оценка на целевую функцию, находятся длительности и порядок выполнения работ с использованием вспомогательной задачи выпуклого про-

граммирования, метода эллипсоидов или условий Каруша-Куна-Таккера. Затем на втором этапе исходная задача преобразуется в классическую задачу без учета расхода энергии и используются алгоритмы списочного типа с назначением числа процессоров для работ с целью построения расписаний с гарантированной константной оценкой точности. На основе таких алгоритмов для задачи минимизации длины расписания получены следующие результаты.

- Жёсткие работы без прерываний:

  Теорема 12 Для задачи $P|size_j, energy|C_{\max}$ можно построить $\left(2 - \frac{1}{m}\right)$-приближенное расписание за время, полиномиальное от размера входа индивидуальной задачи.

- Жёсткие работы с отношениями предшествования и без прерываний:

  Теорема 13 Для задачи $P|size_j, prec, energy|C_{\max}$ с $size_j \leq qm$, $0 < q < 1$, можно построить $\left(\frac{2-q}{1-q}\right)$-приближенное расписание за время, полиномиальное от размера входа индивидуальной задачи.

- Жёсткие работы с прерываниями и произвольными моментами поступления:

  Теорема 14 Для задачи $P|r_j, size_j, pmtn, energy|C_{\max}$ можно построить $\left(2 - \frac{1}{m}\right)$-приближенное расписание за время, полиномиальное от размера входа индивидуальной задачи.

- Одномодальные двухпроцессорные работы без прерываний:

  Теорема 15 Для задачи $P|fix_j, energy|C_{\max}$ с $|fix_j| = 2$ можно построить 2-приближенное расписание за время, полиномиальное от размера входа индивидуальной задачи.

- Мягкие работы:

  Теорема 30 Для задачи $P|var, \delta_j, energy|C_{\max}$ оптимальное расписание можно построить за полиномиальное время.

- Гибкие работы:

  Теорема 32 Для задачи $P|any, \delta_j, energy|C_{\max}$ можно построить $\left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$-приближенное расписание за полиномиальное время.

- Гибкие работы с частичным порядком:

  Теорема 33 Для задачи $P|any, \delta_j, prec, energy|C_{\max}$ можно построить $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$-приближенное расписание за полиномиальное время.

Также отдельно рассматривается задача с прерываниями и миграцией для жестких работ и одномодальных многопроцессорных работ. Сначала для случая дискретного набора скоростей процессоров разрабатываются «почти точные» алгоритмы на основе моделей линейного программирования с конфигурациями работ. Приближенный алгоритм для непрерывного множества скоростей процессоров и произвольных интенсивностей потребления энергии строится с помощью алгоритма для дискретного набора скоростей.

Теорема 16 Для задачи $P|size_j, pmtn, energy|C_{\max}$ расписание с потреблением энергии не более $E + \theta$ и длительностью не более $OPT + \varepsilon$ можно построить за время, полиномиальное от m, $\log 1/\varepsilon$, $1/\theta$ и размера входа индивидуальной задачи.

Теорема 17 Для задачи $P|fix_j, pmtn, energy|C_{\max}$ с $|fix_j| = 2$ расписание с потреблением энергии не более $E + \theta$ и длительностью не более $OPT + \varepsilon$ можно построить за время, полиномиальное от $\log 1/\varepsilon$, $1/\theta$ и размера входа индивидуальной задачи.

Разрабатываются двухэтапные приближенные или точные алгоритмы для критерия минимизации суммы моментов завершения. На первом этапе вычисляется нижняя оценка на суммарное время завершения выполнения работ, отыскивается последовательность и длительности работ с помощью решения вспомогательной задачи выпуклого программирования. Затем, на втором этапе, строится расписание с помощью алгоритма списочного типа, где всякий раз, когда подмножество процессоров освобождается, алгоритм добавляет в расписание первую работу из списка, которая требует не больше процессоров, чем доступно. В случае многопроцессорных работ дополнительно осуществляется декомпозиция задачи на основе подмножеств совместно используемых процессоров. В результате доказаны следующие теоремы.

- Жесткие работы:

  Теорема 19 Для задачи $P|size_j \leq \frac{m}{2}, energy| \sum C_j$ можно построить

2-приближенное расписание за полиномиальное время при условии, что неубывающему порядку объемов W_j соответствует неубывающий порядок размеров $size_j$.

Теорема 20 Для задачи $P|size_j, energy|\sum C_j$ можно построить 2-приближенное расписание за полиномиальное время при условии, что неубывающему порядку объемов $V_j = \frac{W_j}{size_j}$ соответствует неубывающий порядок размеров $size_j$.

Теорема 21 Для задачи $P2|size_j, energy|\sum C_j$ можно построить 2-приближенное расписание за время $O(n\log n)$.

- Гибкие работы:

  Теорема 22 Для задачи $P|any, \delta_j, energy|\sum C_j$ можно построить 2-приближенное расписание за полиномиальное время в случае, когда упорядочение работ по неубыванию объемов W_j соответствует их упорядочению по неубыванию границ на степень распараллеливания δ_j.

- Ограниченное число специализированных процессоров:

  Теорема 24 Для задачи $P2|fix_j, energy|\sum C_j$ можно построить $2^{2\alpha-1/\alpha-1}$-приближенное расписание за полиномиальное время.

  Теорема 25 Для задачи $P2|fix_j, pmtn, energy|\sum C_j$ можно построить $2^{\alpha/\alpha-1}$-приближенное расписание за полиномиальное время.

- Однопроцессорный случай и полностью распараллеливаемые работы:

  Теорема 26 Оптимальное расписание для задачи $1|energy|\sum C_j$ можно найти за полиномиальное время.

  Теорема 27 Оптимальное решение для задачи составления расписаний $P|var, \delta_j = m, energy|\sum C_j$ можно найти за полиномиальное время.

- Несовместные работы:

  Теорема 28 Задача $P|fix_j, energy|\sum C_j$ полиномиально разрешима в случае, когда $fix_j \cap fix_i \neq \emptyset$ для всех $i \neq j,\ i, j \in \mathcal{J}$.

  Теорема 29 Задача $P|size_j, energy|\sum C_j$ полиномиально разрешима в случае, когда $size_j > \frac{m}{2}$ для всех $j \in \mathcal{J}$.

Установлена вычислительная сложность рассматриваемых задач, где либо показана полиномиальная разрешимость, либо доказана NP-трудность.

Также исследуется вычислительная сложность и строятся алгоритмы с гарантированной оценкой точности для различных вариантов задачи open-shop с учетом расхода энергии (при обозначении задачи в первом поле указывается буква «O»). Предлагаемые методы решения позволяют обобщить известные результаты для классической задачи open-shop без учета ресурсных ограничений с критерием минимизации длины расписания на случай учета расхода энергии и получить новые результаты.

Двухэтапный подход (вычисляются скорости работ с учетом ограничения на расход энергии и строится расписание для фиксированных длительностей, на котором достигается нижняя оценка на длину расписания) позволяет показать, что:

– задача $O3|energy|C_{\max}$ является NP-трудной;

– задача $O|pmtn, energy|C_{\max}$ является полиномиально разрешимой;

– задача $O2|energy|C_{\max}$ является полиномиально разрешимой.

На основе модели линейного программирования с конфигурациями работ выделяется полиномиально разрешимый случай задачи с прерываниями $O|discr,\ pmtn,\ energy|C_{\max}$ при дискретном множестве скоростей (используется обозначение «$discr$» во втором поле).

Также доказана полиномиальная разрешимость задачи open-shop с не более чем тремя стадиями и многопроцессорными операциями. Здесь нижняя оценка на длину расписания строится через модель выпуклого программирования специального вида. Далее осуществляется переход к полиномиально разрешимой задаче с фиксированными длительностями работ без учета расхода энергии.

В третьей главе рассматривается класс задач составления расписаний и маршрутизации с запретами выполнения работ на определенных этапах в одностадийных и многостадийных системах.

Исследуется задача составления расписаний на перестановках с запретами работ в следующей постановке. Пусть $\mathcal{J}$, $|\mathcal{J}| = n$, – множество работ, а $\mathcal{M}$, $|\mathcal{M}| = m$, – множество машин. Анализируются одностадийные системы, где каждая работа состоит из одной операции, и многостадийные системы типа flow-shop, job-shop и open-shop, где каждая работа состоит из

нескольких операций. Обозначим через p_{ij} длительность (время обработки) операции i работы j. Для каждой машины $l \in \mathcal{M}$ задано множество позиций $N_l = \{1, \ldots, n_l\}$, в которые могут быть размещены работы (или их операции). Также задана система подмножеств работ $X = \{X^{i,l}\}_{i \in \mathcal{M},\ l \in N_l}$. $X^{i,l}$ – это подмножество работ (операций), которые могут выполняться в позиции $i \in N_l$ машины $l \in \mathcal{M}$. В результате имеем запреты на выполнение работ в некоторых позициях машин. Цель – назначить работы (или их операции) в позиции машин в соответствии с системой подмножеств работ X так, чтобы полиномиально вычислимый критерий принимал минимальное значение. Такие задачи составления расписаний с дополнительными ограничениями на выполнение работ будем называть задачами с запретами [1] или задачами с предписаниями. Задачи имеют приложения в компьютерных системах и производственных предприятиях, где запреты на выполнение работ в позициях машин возникают из-за технологических ограничений, фиксированных маршрутов [9, 15] и рабочих смен [14]. В то же время такие задачи играют важную роль в эволюционных алгоритмах, где в операторе кроссинговера решается задача оптимальной рекомбинации [5, 26, 28].

Результаты данной главы позволяют получить новые свойства задач составления расписаний с запретами работ для различных критериев и ограничений. Эти свойства гарантируют NP-трудность в худшем случае и полиномиальную разрешимость в «почти всех» случаях для практически значимых примеров с системами предписаний работ, имеющими мощность не превосходящую двух. Предложен алгоритм решения для произвольных систем предписаний работ и новые модели частичного целочисленного линейного программирования, учитывающие специфику запретов выполнения работ в позициях перестановок машин и установленную связь с задачей перебора совершенных паросочетаний в двудольных графах.

Доказана NP-трудность следующих задач в случае наличия предписаний работ мощности не больше двух:
$1||\gamma,\ \gamma \in \{\sum_j w_j U_j,\ \sum_j w_j T_j\ \}$;
$1|r_j|\gamma,\ \gamma \in \{L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j,\ \sum_j C_j\}$;
$1|C_j \le d_j|\sum_j w_j C_j$;
$1|l_{ij}|C_{\max}$;

$2||\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max},\ L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j\}$;
$J2||\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max},\ L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j\}$;
$F2||\gamma,\ \gamma \in \{L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j,\ \sum_j C_j\}$;
$F3||C_{\max}$;
$F3|Miss-Oper|\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max},\ L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j\}$;
$O2|Miss-Oper|\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max},\ L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j,\ \sum_j C_j\}$;
$O3||\gamma,\ \gamma \in \{C_{\max},\ L_{\max},\ \sum_j U_j,\ \sum_j T_j\}$.

В четвертой главе исследуется теоретически и экспериментально задача оптимальной рекомбинации, возникающая в эволюционных алгоритмах для задач составления расписаний, и показывается целесообразность ее использования наряду с механизмами перезапуска и адаптации.

Задача оптимальной рекомбинации (ЗОР) для задачи на перестановках формулируется следующим образом. Даны два родительских решения, заданных перестановками $\pi^1 = (\pi^1_1, \ldots, \pi^1_n)$ и $\pi^2 = (\pi^2_1, \ldots, \pi^2_n)$. Требуется найти перестановку π' такую, что:

(I) $\pi'_i = \pi^1_i$ или $\pi'_i = \pi^2_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$;

(II) π' имеет оптимальное значение целевой функции среди всех перестановок, удовлетворяющих условию (I).

Адаптивный эволюционный алгоритм с оптимальной рекомбинацией апробируется на классических NP-трудных задачах составления расписаний и маршрутизации (минимизация суммарного взвешенного временного запаздывания на одной машине, задача коммивояжера, составление расписаний выполнения заказов клиентов), где имеется ряд различных известных метаэвристик для сравнения, и на задачах первых двух глав с учетом расхода энергии в виде ограничения или критерия. Алгоритмическая сложность ЗОР исследуется на основе результатов или методов третьей главы для модификаций указанных задач составления расписаний с предписаниями работ в позициях машин (процессоров). Показана целесообразность использования оптимальной рекомбинации и конкурентоспособность эволюционных алгоритмов с ее применением в вычислительном эксперименте на тестовых примерах известных библиотек.

Также применяются механизмы локальной оптимизации при построении начальной популяции. Баланс между локальным поиском и эволюционным поиском настраивается с помощью механизмов перезапуска. ЗОР апробируется в составе популяционного алгоритма локального поиска, где окрестность определяется на базе произвольного подмножества решений как рекомбинация произвольного набора родительских решений. Результаты третьей главы свидетельствуют о труднорешаемости оптимальной рекомбинации для исследуемых задач и приводят к необходимости использования алгоритмов приближенного решения, в том числе усеченных версий операторов скрещивания, и адаптивной настройки операторов.

В **заключении** представлены **основные результаты** диссертации.

1. Предложен двухэтапный метод решения задачи составления энергетически эффективных расписаний с распараллеливаемыми и многопроцессорными работами. На первом этапе вычисляется нижняя оценка целевой функции и оцениваются характеристики работ. На втором этапе реализуется переход к задаче с фиксированными длительностями работ и строится допустимое расписание с гарантированной оценкой точности. Построены серии примеров, на которых оценки точности достигаются. Предложен метод доказательства NP-трудности на основе тех же принципов, что и двухэтапный метод решения.

2. Предложены методы построения нижних оценок на потребление энергии в задачах составления расписаний с распараллеливаемыми и многопроцессорными работами, которые основаны:
   – на сведении релаксации исходной задачи к специального вида задаче о максимальном потоке минимальной стоимости;
   – на представлении исходной задачи как задачи линейного программирования с экспоненциальным числом переменных и полиномиальным числом ограничений и решении ее методом эллипсоидов с использованием полиномиального оракула отсечения.

3. Впервые исследованы вопросы труднорешаемости задачи теории расписаний с многопроцессорными и распараллеливаемыми работами с классическими критериями при бюджетных ограничениях на расход

энергии, выделены полиномиально разрешимые и NP-трудные частные случаи.

4. Для задач с ограничением на расход энергии предложены подходы к построению нижних оценок на целевую функцию, которые основаны:
   – на представлении исходной задачи как задачи выпуклого программирования и решении ее с использованием условий Каруша-Куна-Таккера;
   – на представлении исходной задачи как задачи линейного программирования с экспоненциальным числом переменных и полиномиальным числом ограничений и решении ее методом эллипсоидов с использованием полиномиального оракула отсечения.

   При построении допустимых решений применяются либо жадные алгоритмы, либо методы декомпозиции.

   Указанные результаты являются первыми приближенными алгоритмами с гарантированными оценками точности для многопроцессорных и распараллеливаемых работ с учетом расхода энергии и обобщают известные результаты для однопроцессорных работ.

5. Предложен метод доказательства NP-трудности для задач составления расписаний с запретами работ.

6. Разработан точный метод решения для класса задач составления расписаний с предписаниями работ мощности не превосходящей 2, трудоемкость которого полиномиальна для «почти всех» систем предписаний. На основе этого подхода предложены модели целочисленного линейного программирования с меньшим числом переменных, чем дает классический подход. Метод основан на переборе совершенных паросочетаний в специальном двудольном графе и обобщен на случай предписаний произвольной мощности.

7. Предложены эволюционные алгоритмы с оптимизированными операторами, которые показывают конкурентоспособные результаты на тестовых примерах известных библиотек. Исследована вычислительная сложность задачи оптимальной рекомбинации.

8. Экспериментально показана перспективность использования оптимальной рекомбинации, а также ее статистически значимое превосходство над рандомизированными аналогами в составе эволюционных алгоритмов.

9. Разработаны стратегии управления популяцией при использовании оптимизированных операторов. Построены схемы алгоритма локального поиска с применением оптимальной рекомбинации.

Автор выражает благодарность Еремееву Антону Валентиновичу и Кононову Александру Вениаминовичу за научное сотрудничество и полезные советы при работе над материалом диссертации.

Список литературы

[1] Сердюков А. И. О задаче коммивояжёра при наличии запретов // Управляемые системы. — 1978. — Вып. 17. — С. 80–86.

[2] Aggarwal C. C., Orlin J. B., Tai R. P. An optimized crossover for maximum independent set // Operations Research. — 1997. — Vol. 45. — P. 225–234.

[3] Albers S., Muller F., Schmelzer S. Speed scaling on parallel processors // Algorithmica. — 2014. — Vol. 68, no. 2. — P. 404–425.

[4] Arkhipov D., Battaia O., Lazarev A. A. An efficient pseudo-polynomial algorithm for finding a lower bound on the makespan for the Resource Constrained Project Scheduling Problem // European Journal of Operational Research. — 2018. — Vol. 275, no. 1. — P. 35–44.

[5] Balas E., Niehaus W. Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // Journal of Heuristics. — 1998. — Vol. 4, no. 2. — P. 107–122.

[6] Bampis E., Kononov A., Letsios D., Lucarelli G., Sviridenko M. Energy-efficient scheduling and routing via randomized rounding // Journal of Scheduling. — 2018. — Vol. 21. — P. 35–51.

[7] Bansal N., Bunde D. P., Chan H. L., Pruhs K. Average Rate Speed Scaling // LATIN 2008: Theoretical Informatics / ed. by Laber E. S., Bornstein C., Nogueira L. T., Faria L. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2008. — P. 240–251. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 4957).

[8] Chernykh I., Kononov A., Sevastyanov S. Efficient approximation algorithms for the routing open shop problem // Computers & Operations Research. — 2013. — Vol. 40, no. 3. — P. 841–847.

[9] Chernykh I. Routing open shop with unrelated travel times // Discrete Optimization and Operations Research / ed. by Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. — Cham : Springer, 2016. — P. 272–283. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 9869).

[10] Chicano F., Ochoa G., Whitley D., Tinos R. Quasi-Optimal Recombination Operator // Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization / ed. by Liefooghe A., López-Ibáñez M. — Cham : Springer, 2019. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 11452).

[11] Chicano F., Ochoa G., Whitley D., Tinos R. Dynastic Potential Crossover Operator // Evolutionary Computation. — 2021. — Vol. 29, no. 1. — P. 1–35.

[12] Cook W., Seymour P. Tour merging via branch-decomposition // INFORMS Journal on Computing. — 2003. — Vol. 15, no. 2. — P. 233–248.

[13] Drozdowski M. Scheduling for Parallel Processing. — London : Springer, 2009. — 306 p.

[14] Ernst A. T., Jiang H., Krishnamoorthy M., Sier D. Staff scheduling and rostering: a review of applications, methods and models // European Journal of Operational Research. — 2004. — Vol. 153, no. 1. — P. 3–27.

[15] Fisher M. Chapter 1 Vehicle routing // Network Routing / ed. by Ball M. O., Magnanti T. L., Monma C. L., Nemhauser G. L. — Amsterdam : Elsevier, 1995. — Vol. 8. — P. 1–33. — (Handbooks in Operations Research and Management Science).

[16] Gao M., He K., Li L., Wang Q., Liu C. A review on energy consumption, energy efficiency and energy saving of metal forming processes from different hierarchies // Processes. — 2019. — Vol. 7, no. 6. — P. 357–381.

[17] Gendreau M., Potvin J.-Y. Handbook of Metaheuristics. — 2nd ed. — New York : Springer, 2010. — 648 p.

[18] Gerards M. E. T., Hurink J. L., Holzenspies P. K. F. A survey of offline algorithms for energy minimization under deadline constraints // Journal of Scheduling. — 2016. — Vol. 19. — P. 3–19.

[19] Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. Geometric Algorithms and Combinatorial Optimizations. — 2nd corrected ed. — Berlin : Springer-Verlag, 1993. — 362 p.

[20] Khachay M. Yu., Neznakhina E. D., Ryzhenko K. V. Constant-Factor Approximation Algorithms for a Series of Combinatorial Routing Problems Based on the Reduction to the Asymmetric Traveling Salesman Problem // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2022. — Vol. 319, suppl. 1. — P. S140–S155.

[21] Mouzon G., Yildirim M. B., Twomey J. Operational methods for minimization of energy consumption of manufacturing equipment // International Journal of Production Research. — 2007. — Vol. 45, no. 18–19. — P. 4247–4271.

[22] Pruhs K., Sgall J., Torng E. Online scheduling // Handbook of Scheduling: Algorithms, Models, and Performance Analysis / ed. by Leung J. Y.-T. — Boca Raton : CRC Press, 2004. — Ch. 15.

[23] Pyatkin A. V. On list incidentor coloring of a multigraph of degree 3 // Journal of Applied and Industrial Mathematics. — 2008. — Vol. 2, no. 4. — P. 560–565.

[24] Shabtay D., Kaspi M. Parallel machine scheduling with a convex resource consumption function // European Journal of Operational Research. — 2006. — Vol. 173, no. 1. — P. 92–107.

[25] Shioura A., Shakhlevich N. V., Strusevich V. A. Machine Speed Scaling by Adapting Methods for Convex Optimization with Submodular Constraints // INFORMS Journal on Computing. — 2017. — Vol. 29, no. 4. — P. 724–736.

[26] Radcliffe N. J. The algebra of genetic algorithms // Annals of Mathematics and Artificial Intelligence. — 1994. — Vol. 10, no. 4. — P. 339–384.

[27] Reeves C. R. Genetic algorithms for the operations researcher // INFORMS Journal on Computing. – 1997. – Vol. 9, no. 3. – P. 231–250.

[28] Yagiura M., Ibaraki T. The use of dynamic programming in genetic algorithms for permutation problems // European Journal of Operational Research. — 1996. — Vol. 92, no. 2. — P. 387–401.

[29] Vakhnin A., Sopov E. A Novel Self-Adaptive Cooperative Coevolution Algorithm for Solving Continuous Large-Scale Global Optimization Problems // Algorithms. — 2022. — Vol. 15, no. 12.

[30] Varadarajan S., Whitley D. The massively parallel mixing genetic algorithm for the traveling salesman problem // Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference (GECCO-19). — New York : ACM, 2019. — P. 872–879.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные публикации в журналах из перечня ВАК и приравненных к ним:

[31] Еремеев А. В., Коваленко Ю. В. О задаче составления расписаний с группировкой машин по технологиям // Дискретный анализ и исследование операций. — 2011. — Т. 18, № 5. — С. 54–79.

[32] Еремеев А. В., Коваленко Ю. В. О сложности оптимальной рекомбинации для одной задачи составления расписаний с переналадками // Дискретный анализ и исследование операций. — 2012. — Т. 19, № 3. — С. 13–26.

[33] Eremeev A. V., Kovalenko J. V. Optimal recombination in genetic algorithms for combinatorial optimization problems: Part II // Yugoslav Journal of Operations Research. — 2014. — Vol. 24, no. 2. — P. 165–186. — DOI: 10.2298/YJOR131030041E.

[34] Коваленко Ю. В. О сложности оптимальной рекомбинации для задач составления расписаний в многостадийной системе поточного типа // Дискретный анализ и исследование операций. — 2016. — Т. 23, № 2. — С. 41–62. — DOI: 10.1134/S1990478916020071.

[35] Eremeev A., Kovalenko Yu. On solving travelling salesman problem with vertex requisitions // Yugoslav Journal of Operations Research. — 2017. — Vol. 27, no. 4. — P. 415–426. — DOI: 10.1134/S1990478916020071.

[36] Kononov A., Kovalenko Y. Approximate schedules for non-migratory parallel jobs in speed-scaled multiprocessor systems // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Vol. 16. — P. 249–257. — DOI: 10.33048/semi.2019.16.016.

[37] Kononov A., Kovalenko Y. Approximation algorithms for energy-efficient scheduling of parallel jobs // Journal of Scheduling. — 2020. — Vol. 23. — P. 693–709. — DOI: 10.1007/s10951-020-00653-8.

[38] Eremeev A. V., Kovalenko Y. V. A memetic algorithm with optimal recombination for the asymmetric travelling salesman problem // Memetic Computing. — 2020. — Vol. 12, no. 1. — P. 23–36. — DOI: 10.1007/s12293-019-00291-4.

[39] Kononov A., Zakharova Y. Speed scaling scheduling of multiprocessor jobs with energy constraint and makespan criterion // Journal of Global Optimization. — 2022. — Vol. 83, no. 3. — P. 539–564. — DOI: 10.1007/s10898-021-01115-x.

[40] Kononov A., Zakharova Y. Minimizing makespan for parallelizable jobs with energy constraint // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2022. — Vol. 19, no. 2. — P. 586–600. — DOI: 10.33048/semi.2022.19.049.

[41] Blum C., Eremeev A., Zakharova Y. Hybridizations of evolutionary algorithms with Large Neighborhood Search // Computer Science Review. — 2022. — Vol. 46. — 22 p. — DOI: 10.1016/j.cosrev.2022.100512.

[42] Kononov A., Zakharova Y. Speed Scaling Scheduling of Multiprocessor Jobs with Energy Constraint and Total Completion Time Criterion // International Journal of Artificial Intelligence. — 2023. — Vol. 21, no. 2. — P. 109–129.

[43] Захарова Ю. В. Приближенные алгоритмы для вариантов задачи open shop с учетом расхода энергии // Труды Института математики и механики УрО РАН. — 2024. — Т. 30, № 4. — С. 117–133. — DOI: 10.21538/0134-4889-2024-30-4-117-133.

[44] Zakharova Yu. Computational complexity and exact techniques of scheduling problems with job requisitions // Journal of Scheduling. — 2025. – Vol. 29. – P. 375–392. — DOI: 10.1007/s10951-025-00840-5.

[45] Zakharova Yu., Sakhno M. Complexity and heuristic algorithms for speed scaling scheduling of parallel jobs with energy constraint // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2025. — Vol. 457. — DOI: 10.1016/j.cam.2024.116254.

[46] Захарова Ю. В., Евтина А. О. Конструктивные алгоритмы для задачи составления расписаний на двух процессорах с критерием максимального временного смещения при учёте распараллеливания и расхода энергии // Прикладная дискретная математика. — 2025. — № 67. — С. 118–128. — DOI: 10.17223/20710410/67/7.

Научные публикации в трудах конференций (Scopus, Web of Science):

[47] Kononov A., Kovalenko Y. On speed scaling scheduling of parallel jobs with preemption // Discrete Optimization and Operations Research / ed. by Kochetov Y., Khachay M., Beresnev V., Nurminski E., Pardalos P. — Cham : Springer, 2016. — P. 309–321. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 9869). — DOI: 10.1007/978-3-319-44914-2_25.

[48] Eremeev A. V., Kovalenko J. V. Experimental evaluation of two approaches to optimal recombination for permutation problems // Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization / ed. by Chicano F., Villagra M., Blesa M. J. — Cham : Springer, 2016. — P. 138–153. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 9595). — DOI: 10.1007/978-3-319-30698-8_10.

[49] Kononov A., Kovalenko Y. An approximation algorithm for preemptive speed scaling scheduling of parallel jobs with migration // Learning and Intelligent Optimization / ed. by Battiti R., Kvasov D. E., Sergeyev Y. D. — Cham : Springer, 2017. — P. 351–357. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 10556). — DOI: 10.1007/978-3-319-69404-7_30.

[50] Eremeev A. V., Kovalenko Y. V. Genetic algorithm with optimal recombination for the asymmetric travelling salesman problem // Large-Scale Scientific Computing / ed. by Lirkov I., Margenov S. — Cham : Springer, 2017. — P. 341–349. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 10665). — DOI: 10.1007/978-3-319-73441-5_36.

[51] Zakharov A. O., Kovalenko Y. V. Pareto-based hybrid algorithms for the bicriteria asymmetric travelling salesman problem // Mathematical Optimization Theory and Operations Research / ed. by Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. — Cham : Springer, 2019. — P. 358–373. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 11548). — DOI: 10.1007/978-3-030-22629-9_25.

[52] Kononov A., Kovalenko Y. Makespan minimization for parallel jobs with energy constraint // Mathematical Optimization Theory and Operations Research / ed. by Kononov A., Khachay M., Kochetov Y., Pardalos P. — Cham : Springer, 2020. — P. 289–300. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 12095). — DOI: 10.1007/978-3-030-49988-4_20.

[53] Kononov A., Kovalenko Y. Minimizing total completion time in multiprocessor job systems with energy constraint // Mathematical Optimization Theory and Operations Research / ed. by Pardalos P., Khachay M., Kazakov A. — Cham : Springer, 2021. — P. 267–279. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 12755). — DOI: 10.1007/978-3-030-77876-7_18.

[54] Zakharova Yu. Hybrid evolutionary algorithm with optimized operators for total weighted tardiness problem // Mathematical Optimization Theory and Operations Research / ed. by Khachay M., Kochetov Y., Eremeev A., Khamisov O., Rettieva A. — Cham : Springer, 2023. — P. 224–238. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 13930). — DOI: 10.1007/978-3-031-35305-5_15.

[55] Zakharova Y. V., Zakharov A. O. Integer programming models and metaheuristics for customer order scheduling // Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends / ed. by Strekalovsky A., Kochetov Y., Eremeev A., Orlov M. — Cham : Springer, 2024. — P. 276–290. — (Communications in Computer and Information Science ; vol. 2239). — DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9_19.

[56] Zakharova Yu. Population local search for single processor energy efficient scheduling problem // Numerical Computations: Theory and Algorithms / ed. by Sergeyev Y. D., Kvasov D. E., Astorino A. — Cham : Springer, 2025. — P. 400–408. — (Lecture Notes in Computer Science ; vol. 14476). — DOI: 10.1007/978-3-031-81241-5_35.