Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Алтайский государственный университет»

На правах рукописи

Клепиков Павел Николаевич

Локально однородные (псевдо)римановы многообразия с ограничениями на тензор Схоутена–Вейля

Специальность 1.1.3 —
«Геометрия и топология»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Родионов Евгений Дмитриевич

Барнаул — 2021

Оглавление

Введение

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности. Исследованию тензорных полей на (псевдо)римановых многообразиях посвящены работы многих математиков, что нашло отражение в обзорах [1—3] и других работах. Особое место в этих исследованиях занимают инвариантные тензорные поля на локально однородных пространствах. К числу многообразий с ограничениями на тензорные поля относятся такие многообразия как локально однородные пространства, многообразия Эйнштейна, многообразия с метрикой солитона Риччи, эйнштеново-подобные многообразия, конформно плоские многообразия и ряд других. Так например, эйнштеново-подобные многообразия в смысле А. Грея [4] состоят из трех типов многообразий, два из которых хорошо известны и являются многообразия с условиями Киллинга (тип $\mathcal{A}$) или Кодацци (тип $\mathcal{B}$) на тензор Риччи, а третий тип мало исследован. Заметим, что локально однородное (псевдо)риманово многообразие придлежит типу $\mathcal{B}$ эйнштеново-подобных многообразий тогда и только тогда, когда его тензор Схоутена–Вейля равен нулю. Отметим также что, тензор Схоутена–Вейля представляет собой дивергенцию тензора Вейля (с точностью до константы), если размерность многообразия больше трех (см., например, обзор [1]).

Одним из обобщений многообразий Эйнштейна являются солитоны Риччи, рассмотренные Р. Гамильтоном в работе [5]. С другой стороны, солитоны Риччи являются самоподобными решениями уравнения потока Риччи. В общем случае задача изучения солитонов Риччи является достаточно сложной, поэтому предполагаются некоторые ограничения на размерность многообразия, на тип векторного поля, входящего в уравнение солитона Риччи, на строение многообразия и другие. Однородные солитоны Риччи исследовались в работах многих математиков, но классификация однородных солитонов Риччи известна лишь в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [3; 6]). Одним из важных инструментов при исследовании однородных солитонов Риччи являются алгебраические солитоны Риччи на группах Ли, которые впервые были рассмотрены Х. Лауре. Им же было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородным солитоном Риччи (см. [7]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [8]). Обратное утверждение верно лишь в случае римановой метрики и при некоторых дополнительных ограничениях (см. [9]).

Однородные солитоны Риччи на метрических группах Ли (т.е. на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой) с нулевым тензором Схоутена–Вейля ранее изучались лишь в случае малых размерностей и при наличии дополнительных ограничений. Так, например, в работе [10] исследовались левоинвариантные псевдоримановы метрики солитонов Риччи на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Вейля. Однако, в неоднородном случае исследование солитонов Риччи на конформно плоских многообразиях является более обширным (см., например, [11—13]).

Поскольку многообразия с нулевым тензором Схоутена–Вейля и солитоны Риччи представляют собой обобщение многообразий Эйнштейна, то представляет интерес изучение многообразий, которые принадлежат сразу к двум данным классам.

Другим важным классом многообразий являются локально однородные (псевдо)римановы пространства с нулевым тензором Схоутена–Вейля, в который входят: локально симметрические пространства, конформно плоские многообразия, многообразия Эйнштейна, многообразия с параллельным тензором Риччи, их прямые произведения и другие многообразия [1]. Данные многообразия лучше всего исследованы в случае локально однородных многообразий размерности меньше четырех [14].

В четырехмерном случае классификация эйнштейново подобных метрик локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии была получена в работе [15]. В случае четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой О. П. Гладунова и В. В. Славский [16], Д. С. Воронов и Е. Д. Родионов [17] получили классификации четырехмерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой и гармоническим тензором Вейля в унимодулярном и неунимодулярном случаях соответственно.

Отметим, что в случае четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой класс многообразий с тривиальным тензором Схоутена–Вейля классифицирован не полностью. Так, например, Дж. Кальварузо и А. Заем в работе [18] классифицировали группы Ли с тривиальным тензором Вейля, а в работах [19; 20] те же авторы получили классификацию метрик Эйнштейна и Риччи-параллельные метрики на четырехмерных псевдоримановых группах Ли. Кроме того, в работе [21] А. Заем получил классификацию четырехмерных групп Ли с лоренцевой метрикой, которые являются эйнштейново-подобными многообразиями типов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. В более высокой размерности не существует общей классификации локально однородных (псевдо)римановых многообразий с тривиальным тензором Схоутена–Вейля.

Для завершения классификации четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля остается классифицировать четырехмерные группы Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и нулевым тензором Схоутена–Вейля, которые не являются конформно плоскими и имеют не параллельный тензор Риччи.

Псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля естественным образом возникают при изучении локально конформно однородных (псевдо)римановых пространств [22; 23], которые тесно связаны с конформно-киллинговыми векторными полями. Ранее данные многообразия в случае трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой изучались в работах [24; 25]. В них была получена полная классификация трехмерных групп Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, тензор Схоутена–Вейля которых является изотропным. Кроме того, в работах [26—28] была получена классификация четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Вейля.

Таким образом представляет интерес изучение четырехмерных локально однородных многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля.

Целью данной работы является исследование локально однородных (псевдо)римановых многообразий с ограничениями на тензор Схоутена–Вейля.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Получить теоремы о строении оператора Риччи группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи и нулевым тензором Схоутена–Вейля. Как следсвие получить структурные теоремы о строении метрической алгебры Ли конформно плоской группы Ли с метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи.
2. Классифицировать четырехмерные группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и нулевым тензором Схоутена–Вейля.

3. Получить классификацию четырехмерных локальных однородных псевдоримановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и вносят существенный вклад в теорию однородных (псевдо)римановых многообразий, теорию метрических групп и алгебр Ли, теорию солитонов Риччи.

Так, например, доказано, что на группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи и нулевым тензором Схоутена–Вейля оператор Риччи может иметь лишь нулевые собственные значения, причем размеры жордановых клеток в нормальной форме матрицы оператора Риччи не превышают двух (теорема 1.9). Более того, показано, что в конформно плоском случае, оператор Риччи обязан иметь тип Сегре $\{(1\ldots 1\,2)\}$ (теорема 1.11). С применением обобщённых алгебр Гейзенберга, построены примеры конформно плоских нетривиальных алгебраических солитонов Риччи на метрических группах Ли произвольной размерности.

Классификация четырехмерных групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой и нулевым тензором Схоутена–Вейля, полученная в данной работе (теоремы 2.4–2.9), вместе с результатами работ [15—20] завершает классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля.

Теорема 3.19 о классификации четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля продолжает исследования, начатые в трехмерном случае в работах [24; 25] и в четырехмерном случае в работах [27; 28].

Теоретическая и практическая значимость. Результаты диссертации имеют теоретическое значение и могут быть использованы специалистами в области геометрии и топологии, в теории однородных (псевдо)римановых многообразий, теории солитонов Риччи и эйнштейново-подобных многообразий в смысле А. Грея, при исследовании инвариантных тензорных полей на многообразиях. Кроме того, результаты диссертации могут быть использованы при подготовке спецкурсов по геометрии, теории однородных (псевдо)римановых многообразий. Разработанные методы могут быть использованы при изучении различных многообразий малой размерности: многообразий Эйнштейна, многообразий с метрикой солитона Риччи, эйнштейново-подобных многообразий и других.

Методология и методы исследования. Результаты диссертация получены с применением методов геометрии, теории групп и алгебр Ли, (псевдо)римановой геометрии, теории солитонов Риччи, тензорного анализа.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Теорема о строении оператора Риччи на группах Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи и нулевым тензором Схоутена–Вейля. Теоремы о строении метрической алгебры Ли конформно плоской группы Ли с метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи.
2. Классификация четырехмерных группы Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками и нулевым тензором Схоутена–Вейля, которые не являются конформно плоскими и имеют не параллельный тензор Риччи.
3. Классификация четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля.

Достоверность изложенных в работе результатов подтверждается использованием широко известных методов современной геометрии, локально однородной (псевдо)римановой геометрии, а также положительной оценкой на научных конференциях и семинарах.

Апробация работы. Основные положения и результаты диссертационной работы представлялись на 22 конференциях и научных школах. Среди них 15 международных:

1–3. Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования (Барнаул, 2014, 2015, 2017);

4–7. Дни геометрии в Новосибирске (Новосибирск, 2015–2017, 2019);

8. Геометрический анализ и теория управления (Новосибирск, 2016);
9. Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летия Института математики им. С.Л.Соболева (Новосибирск, 2017);
10. Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и техники (Барнаул, 2018);
11. Spring School on Geometry and Topology (Чехия, Градец Кралове, 2018);

12. Summer School on Geometry and Topology (Чехия, Градец Кралове, 2019);
13. Dynamics in Siberia — 2021 (Новосибирск, 2021);
14. Primorie Mathematical Fair (Владивосток, 2021);
15. International conference on Geometry in the Large dedicated to the 90th birthday of Victor Toponogov (Санкт-Петербург, 2021);

и 7 всероссийских:

16. Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники (Барнаул, 2015);

17–22. Математики — Алтайскому краю (Барнаул, 2015–2020).

Кроме того, результаты диссертации докладывались на семинаре отдела анализа и геометрии (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, руководитель: академик РАН Ю. Г. Решетняк) на семинаре «Геометрия, топология, и их приложения» (Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, руководитель: академик РАН И. А. Тайманов), на краевом семинаре по геометрии и математическому моделированию (АлтГУ, руководитель: д.ф.-м.н., проф. Е. Д. Родионов).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 18 печатных изданиях, 10 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 4 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus, 7 — в тезисах докладов и в материалах конференций различного уровня, 1 — в других изданиях. Работы [A2; A7; A8; A15—A17] написаны автором совместно с Е. Д. Родионовым, работа [A5] — с Д. Н. Оскорбиным, работа [A9] — с С. В. Клепиковой, К. О. Кизбикеновым и И. В. Эрнстом, работа [A12] — с О. П. Хромовой и Е. Д. Родионовым, работа [A13] — с О. П. Хромовой и С. В. Клепиковой, работа [A14] — с О. П. Хромовой. Вклад соавторов в эти работы равен и неделим.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и одного приложения. Диссертационная работа разбита на главы, которые подразделяются на параграфы. Все теоремы имеют двойную нумерацию: номер главы, номер утверждения в текущей главе. Полный объём диссертации составляет 143 страницы, включая 5 таблиц. Список литературы содержит 44 наименования.

Глава 1. Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля

Результаты данной главы опубликованы в работах [A2; A3; A5; A7; A8; A10; A11].

1.1 Группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой

Определение 1.1. (Псевдо)риманово многообразие M называется *однородным (псевдо)римановым многообразием*, если группа изометрий $\mathrm{Isom}(M)$ действует транзитивно на M.

Многие примеры однородных (псевдо)римановых многообразий возникают как группы Ли, снабженные метрикой, инвариантной относительно левых сдвигов — такая метрика называется *левоинвариантной*.

Определение 1.2. *Метрической алгеброй Ли* называется пара $(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle)$, где $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, а $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{g}$.

Произвольная левоинвариантная (псевдо)риманова метрика g на группе Ли G определяет скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G, и наоборот, каждое скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику g на группе G. Поэтому далее используется отождествление $\langle\cdot,\cdot\rangle = g$.

Пусть (M,g) — n-мерное ($n \geqslant 3$) (псевдо)риманово многообразие со связностью Леви-Чивита ∇.

Определение 1.3. Тензор $R(X,Y)V = \nabla_Y\nabla_X V - \nabla_X\nabla_Y V + \nabla_{[X,Y]}V$, где X, Y, V — произвольные векторные поля на M, называется *тензором кривизны Римана.*

Вслед за тензором Римана, определим тензор Риччи r, оператор Риччи ρ, скалярную кривизну s, тензор одномерной кривизны A (также известный как тензор Схоутена), оператор одномерной кривизны $\mathcal{A}$, тензор Вейля W и тензор Схоутена–Вейля SW следующими равенствами

$$
\begin{gathered}
r(X,Y) = \operatorname{tr}(V \longrightarrow R(X,V)Y),\\
g(\rho(X),Y) = r(X,Y),\\
s = \operatorname{tr}(\rho),\\
A = \frac{1}{n-2}\left(r - \frac{sg}{2\,(n-1)}\right),\\
g\left(\mathcal{A}\left(X\right),Y\right) = A\left(X,Y\right),\\
W\left(X,Y\right)Z = R\left(X,Y\right)Z + \left(\mathcal{A}(X)\wedge Y\right)Z + \left(X \wedge \mathcal{A}(Y)\right)Z,\\
SW\left(X,Y,Z\right) = \nabla_Z A\left(X,Y\right) - \nabla_Y A\left(X,Z\right),
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

где $(X \wedge Y)\,Z = \langle Y,Z\rangle\,X - \langle X,Z\rangle\,Y$.

Определение 1.4. Две метрические алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ называются *изометричными*, если существует изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ (псевдо)евклидовых пространств, который (будучи продолжен до изоморфизма тензорных алгебр) переводит тензор кривизны Римана и его ковариантные производные в алгебре $\mathfrak{g}$ в соответствующие тензоры алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$.

Замечание 1.1. *Из результатов работы [29] следует, что две метрические алгебры Ли изометричны тогда и только тогда, когда соответствующие им группы Ли локально изометричны как (псевдо)римановы многообразия.*

Определение 1.5. Пусть G — метрическая группа Ли. Будем говорить, что группа Ли G является конформно плоской, если

- $SW = 0$, при $\dim G = 3$ (для трехмерного многообразия тензор Вейля W всегда тривиален);
- $W = 0$, при $\dim G \geqslant 4$.

Замечание 1.2. *Отметим, что условие $W = 0$ при $\dim G \geqslant 4$ влечет за собой выполнение условия $SW = 0$ [1]. А значит, для конформно плоской группы Ли имеем*

$$
\begin{gathered}
R\left(X,Y\right)Z = -\left(\mathcal{A}X \wedge Y\right)Z - \left(X \wedge \mathcal{A}Y\right)Z,\\
\nabla_Z A\left(X,Y\right) = \nabla_Y A\left(X,Z\right).
\end{gathered}
\tag{1.2}
$$

1.2 Солитоны Риччи на метрических группах Ли

Определение 1.6. Полное (псевдо)риманово многообразие (M,g) называется *эйнштейновым многообразием*, если тензор Риччи r удовлетворяет уравнению Эйнштейна:

$$r = \Lambda \cdot g \tag{1.3}$$

для некоторой константы $\Lambda \in \mathbb{R}$.

Однородные эйнштейновы многообразия изучены в работах многих математиков (см., например, обзоры [1; 30]). Важным обобщением эйнштейновых метрик являются солитоны Риччи, которые были впервые рассмотрены Р. Гамильтоном в работе [5].

Определение 1.7. Полное (псевдо)риманово многообразие (M,g) называется *солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$r = \Lambda \cdot g + L_X g, \tag{1.4}$$

где r — тензор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, $L_X g$ — производная Ли метрики g по направлению полного дифференцируемого векторного поля X.
Если $M = G/H$ — однородное пространство с однородной (псевдо)римановой метрикой g, тогда $(G/H,g)$ — *однородный солитон Риччи.*

Солитоны Риччи естественным образом связаны с решениями уравнения потока Риччи [5]. Метрика g_0 — метрика солитона Риччи тогда и только тогда, когда $g(t) = \sigma(t)\psi_t^*(g_0)$ — решение уравнения потока Риччи:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -2r(g), \quad g(0) = g_0,$$

где $r(g)$ — тензор Риччи метрики g, $\sigma(t)$ — гладкая функция, ψ_t — однопараметрическое семейство диффеоморфизмов на многообразии, причем $\sigma(0) = 1$ и $\psi_0 = id_{M^n}$.

С другой стороны, солитоны Риччи связаны с многообразиями Эйнштейна. Если (M,g) — солитон Риччи с некоторым киллинговым полем X (т.е. $L_X g = 0$), то уравнения (1.3) и (1.4) совпадают, а метрика g является метрикой Эйнштейна.

Солитоны Риччи исследованы в работах многих математиков (см., например, обзор [3]). Классификация однородных солитонов Риччи известна только в малых размерностях и не является исчерпывающей (см. [6]).

Определение 1.8. Солитон Риччи называется *растягивающимся*, если $\Lambda < 0$; *устойчивым*, если $\Lambda = 0$; *стягивающимся*, если $\Lambda > 0$. Также назовем солитон Риччи *тривиальным*, если он изометричен многообразию Эйнштейна или прямому произведению эйнштейнового многообразия и (псевдо)евклидова пространства.

Если однородный солитон устойчив, то тензор Риччи тривиален (см. подробнее в [31]) и по теореме Алексеевского–Кимельфельда многообразие является плоским (см. [32]). В случае стягивающегося однородного солитона из работ [5; 33] вытекает, что он изометричен произведению компактного однородного эйнштейнова многообразия и евклидова пространства. Если однородный солитон растягивающийся, то M некомпактно (см. [34]). Известные нетривиальные растягивающиеся однородные солитоны изометричны солвсолитонам.

Растягивающиеся солвсолитоны рассмотрены в работе Х. Лауре [35], и их изучение сводится к нахождению алгебраических солитонов.

Определение 1.9. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g называется *алгебраическим солитоном Риччи*, если выполняется

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + D. \tag{1.5}$$

где ρ — оператор Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$ — константа, Id — тождественный оператор, D — некоторое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Было доказано, что каждый алгебраический солитон Риччи на группе Ли с левоинвариантной римановой метрикой является однородными солитонами Риччи (см. [7]). Позднее этот результат был обобщен К. Онда на случай групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой (см. [8]).

Исследованию алгебраических солитонов Риччи посвящены работы [9; 31; 36]. Классификация четырехмерных алгебраических солвсолитонов, с точностью до эквивариантной изометрии, приведена Х. Лауре в работе [35].

Определение 1.10. Группа Ли G с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой g и метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ называется *полуалгебраическим солитоном Риччи*, если метрика g удовлетворяет уравнению:

$$\rho = \Lambda \cdot \mathrm{Id} + \frac{1}{2}\left(D + D'\right),$$

где ρ — матрица оператора Риччи, $\Lambda \in \mathbb{R}$, Id — единичная матрица, D — матрица некоторого оператора дифференцирования алгебры $\mathfrak{g}$, D' — матрица оператора, сопряженного оператору D относительно метрики g.

М. Яблонский изучал связь между алгебраическими и полуалгебраическими солитонами Риччи. В частности, им была доказана следующая

Теорема 1.3 ([9]). *Если группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой g является полуалгебраическим солитоном Риччи, то (G,g) — алгебраический солитон Риччи.*

Отметим, что в случае групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой данная теорема не выполняется (см. [37]).

1.3 Алгебраические солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и нулевым тензором Схоутена–Вейля

В данном разделе мы докажем свойства алгебраических солитонов Риччи на группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля.

Лемма 1.4. *Пусть (G,g) — алгебраический солитон Риччи. Тогда тензор Схоутена–Вейля SW тривиален, если и только если*

$$\nabla_{DX} Y = 0 \quad \forall X,Y \in \mathfrak{g}. \tag{1.6}$$

Доказательство. По определению тензора Схоутена–Вейля, с учетом постоянства скалярной кривизны, имеем:

$$SW\left(X,Y,Z\right) = \frac{1}{n-2}\left(\nabla_Z r\left(X,Y\right) - \nabla_Y r\left(X,Z\right)\right).$$

Тензор Риччи, в силу равенств (1.1) и (1.5), выражается через скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и дифференцирование D, значит

$$SW\,(X,Y,Z) = -\frac{1}{n-2}\big(\langle \Lambda\nabla_Z X + D\nabla_Z X, Y\rangle + \langle \Lambda X + DX, \nabla_Z Y\rangle -$$
$$-\langle \Lambda\nabla_Y X + D\nabla_Y X, Z\rangle - \langle \Lambda X + DX, \nabla_Y Z\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{n-2}\big(\langle D\nabla_Z X, Y\rangle - \langle D\nabla_Y X, Z\rangle + \langle DX, [Z,Y]\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{n-2}\big(\langle X, \nabla_Y DZ - \nabla_Z DY\rangle + \langle X, [DZ, Y] + [Z, DY]\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{n-2}\big(\langle X, \nabla_Y DZ - \nabla_Z DY + \nabla_{DZ} Y - \nabla_Y DZ + \nabla_Z DY - \nabla_{DY} Z\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{n-2}\big(\langle X, \nabla_{DZ} Y\rangle - \langle X, \nabla_{DY} Z\rangle\big).$$

Используя данное равенство и тождество Кошуля [1], получим

$$SW\,(X,Y,Z) = -\frac{1}{2(n-2)}\big(\langle [DZ,Y],X\rangle - \langle [Y,X],DZ\rangle - \langle [DZ,X],Y\rangle -$$
$$-\langle [DY,Z],X\rangle + \langle [Z,X],DY\rangle + \langle [DY,X],Z\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{2(n-2)}\big(\langle X, [DZ,Y] + [Z,DY]\rangle + \langle Y, D[Z,X] - [DZ,X]\rangle +$$
$$+\langle Z, [DY,X] - D[Y,X]\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{2(n-2)}\big(\langle Z, [DX,Y]\rangle - \langle DX, [Y,Z]\rangle - \langle Y, [DX,Z]\rangle\big) =$$
$$= -\frac{1}{n-2}\langle \nabla_{DX} Y, Z\rangle,$$

откуда, в силу невырожденности скалярного произведения, получим требуемое.

□

Лемма 1.5. *Для произвольных векторов X, Y и Z из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ выполняются следующие равенства*

1. $R\,(DX,Y)\,Z + R\,(X,DY)\,Z = 0$;
2. $R\,(X,Y)\,DZ + DR\,(X,Y)\,Z = 0$;
3. $R\,(DX,DY)\,Z = 0$;
4. $R\,(X,DY)\,DZ = R\,(X,DZ)\,DY$.

Доказательство. Пусть X, Y и Z — произвольные векторы из алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим следующее выражение

$$R(DX,Y)Z + R(X,DY)Z =$$
$$= [\nabla_Y, \nabla_{DX}]Z + \nabla_{[DX,Y]}Z + [\nabla_{DY}, \nabla_X]Z + \nabla_{[X,DY]}Z =$$

Первое и третье слагаемые равны нулю в силу (1.6). Далее имеем

$$= \nabla_{[DX,Y]}Z + \nabla_{[X,DY]}Z = \nabla_{D[X,Y]}Z \overset{(1.6)}{=} 0,$$

что доказывает пункт 1 данной леммы.

Для доказательства пункта 2 рассмотрим

$$\langle R(X,Y)DZ + DR(X,Y)Z, V\rangle = \langle R(X,Y)DZ, V\rangle + \langle DR(X,Y)Z, V\rangle =$$
$$= \langle R(X,Y)DZ, V\rangle + \langle R(X,Y)Z, DV\rangle =$$
$$= \langle R(DZ,V)X, Y\rangle + \langle R(Z,DV)X, Y\rangle =$$
$$= \langle R(DZ,V)X + R(Z,DV)X, Y\rangle = 0,$$

откуда, в силу произвольного выбора вектора V, получаем требуемое.

По определению тензора кривизны имеем

$$R(DX,DY)Z = [\nabla_{DY}, \nabla_{DX}]Z + \nabla_{[DX,DY]}Z =$$
$$= [\nabla_{DY}, \nabla_{DX}]Z + \nabla_{(\nabla_{DX}DY - \nabla_{DY}DX)}Z.$$

Все слагаемые равны нулю из-за (1.6), что доказывает пункт 3 данной леммы.

Рассмотрим алгебраическое тождество Бьянки:

$$R(X,DY)DZ + R(DY,DZ)X + R(DZ,X)DY = 0.$$

Второе слагаемое равно нулю в силу пункта 3 данной леммы, оставшиеся два слагаемых дают пункт 4 леммы. $\square$

Пусть $D\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Ker} D$ — образ и ядро оператора D соответственно. Тогда имеет место

Лемма 1.6. *В вышеприведенных обозначениях верно*

1. $D\mathfrak{g}$ *— абелева подалгебра алгебры* $\mathfrak{g}$*;*
2. $\operatorname{Ker} D$ *— подалгебра алгебры* $\mathfrak{g}$*;*
3. $[\operatorname{Ker} D, D\mathfrak{g}] \subseteq D\mathfrak{g}$*;*
4. *Если* $D^2 = 0$*, то* $[D\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subseteq \operatorname{Ker} D$*.*

Доказательство. Пусть DX и DY — произвольные векторы из $D\mathfrak{g}$, тогда

$$[DX,DY] = \nabla_{DX}DY - \nabla_{DY}DX = 0$$

в силу (1.6), следовательно $D\mathfrak{g}$ — абелева подалгебра.

Пусть X и Y — произвольные векторы из $\operatorname{Ker} D$, т.е. $DX = 0$ и $DY = 0$, тогда

$$D[X,Y] = [DX,Y] + [X,DY] = 0,$$

а следовательно $[X,Y] \in \operatorname{Ker} D$.

Пусть DX и Y — произвольные векторы из $D\mathfrak{g}$ и $\operatorname{Ker} D$ соответственно, тогда

$$[DX,Y] = D[X,Y] - [X, DY] = D[X,Y] \in D\mathfrak{g}.$$

Пусть DX и Y — произвольные векторы из $D\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$ соответственно и $D^2 = 0$, тогда

$$D[DX,Y] = [D^2X,Y] + [DX,DY] = 0,$$

а следовательно $[DX,Y] \in \operatorname{Ker} D$. □

Лемма 1.7. *Если оператор D диагонализируем и имеет только два собственных значения — 0 и $-\Lambda$, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид полупрямой суммы $D\mathfrak{g} \rtimes \operatorname{Ker} D$ и изометрична прямой сумме $\tilde{\mathfrak{g}} = D\mathfrak{g} \oplus \operatorname{Ker} D$.*

Доказательство. Заметим, что, если оператор D диагонализируем с собственными значениями 0 и $-\Lambda$, то по лемме 1.6 имеем: $D\mathfrak{g}$ — абелев идеал, $\operatorname{Ker} D$ — подалгебра, $\langle D\mathfrak{g}, \operatorname{Ker} D\rangle = 0$ и $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g} + \operatorname{Ker} D$ как векторное пространство. Значит $\mathfrak{g} = D\mathfrak{g} \rtimes \operatorname{Ker} D$. Для доказательства изометричности нам необходимо показать, что тензор кривизны и все его ковариантные производные совпадают как у полупрямой суммы, так и у прямой. Для этого рассмотрим тензор

$$R\,(X,Y,Z;U_1,\ldots,U_k) = \nabla_{U_1}\ldots\nabla_{U_k}R\,(X,Y)\,Z.$$

Заметим, что если хотя бы один вектор из набора X, Y, Z, U_1, $\ldots$,U_k принадлежит $D\mathfrak{g}$, то $R\,(X,Y,Z;U_1,\ldots,U_k) = 0$ в силу (1.6), симметрий тензора кривизны и того, что $D\mathfrak{g}$ — идеал. Кроме того $\nabla_X Y \in \operatorname{Ker} D$ при $X,Y \in \operatorname{Ker} D$ в силу тождества Кошуля и вышеприведенных соотношений на скобку Ли и скалярное произведение, а значит, $R\,(X,Y)\,Z \in \operatorname{Ker} D$; более того, данное выражение определяется только коммутаторами в подалгебре $\operatorname{Ker} D$ и скалярным произведением.

Пусть векторы X, Y, Z, U_1, …, U_k принадлежат подалгебре $\operatorname{Ker} D$. Применим индукцию по k:

$$R(X,Y,Z;U_1,\ldots,U_k) = \nabla_{U_1}\ldots\nabla_{U_k}R(X,Y)\,Z = \nabla_{U_1}R(X,Y,Z;U_2,\ldots,U_k) =$$
$$= -R(\nabla_{U_1}X,Y,Z;U_2,\ldots,U_k) - R(X,\nabla_{U_1}Y,Z;U_2,\ldots,U_k) -$$
$$- R(X,Y,\nabla_{U_1}Z;U_2,\ldots,U_k) -$$
$$- R(X,Y,Z;\nabla_{U_1}U_2,\ldots,U_k) - \ldots - R(X,Y,Z;U_2,\ldots,\nabla_{U_1}U_k)\,.$$

Следовательно, $R(X,Y,Z;U_1,\ldots,U_k)$ принадлежит ядру оператора D и определяется только скобкой Ли в подалгебре $\operatorname{Ker} D$ и скалярным произведением (база индукции $k = 0$ показана выше), а значит тензор кривизны и все его ковариантные производные совпадают как у полупрямой суммы, так и у прямой. $\square$

Лемма 1.8. *Для произвольного вектора X из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ верно*

$$D^2X = -\Lambda DX.$$

Доказательство.

$$\langle \rho(X)\,, DY\rangle = r(X,DY) = \operatorname{tr}(V \to R(X,V)\,DY) \overset{\text{л. 1.5.(2)}}{=}$$
$$= \operatorname{tr}(DV \to R(X,DV)\,DY) \overset{\text{л. 1.5.(4)}}{=} \operatorname{tr}(DV \to R(X,DY)\,DV) = 0,$$

т.к. оператор кривизны является кососопряженным. Далее, с использованием уравнения алгебраического солитона Риччи (1.5), получаем требуемое. $\square$

В случае групп Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой существуют различные возможные формы оператора Риччи, которые называются *типами Сегре* и представляют собой список размеров жордановых клеток в жордановой нормальной форме матрицы оператора Риччи. Так, например, запись “оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(11)2\}$” означает, что оператор Риччи имеет два действительных различных собственных значения, оба имеют алгебраическую кратность два, но первому из них соответствует двумерное собственное подпространство, а второму — одномерное. Круглые скобки группируют блоки, соответствующие одному и тому же собственному значению.

Теорема 1.9. *Пусть (G,g) — группа Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи и тензор*

Схоутена–Вейля SW тривиален, тогда $\Lambda = 0$ и оператор D (как и оператор Риччи ρ) имеет тип Сегре $\{(1\ldots 1\,2\ldots 2)\}$ с единственным собственным значением равным нулю, причем количество двоек в типе Сегре обязательно ненулевое.

Доказательство. Предположим, что оператор D имеет два комплексно-сопряженных собственных значения $\alpha \pm i\beta$, где $\beta \neq 0$, и соответствующие собственные векторы $U \pm iV$, тогда

$$DV = \alpha V + \beta U,$$
$$D^2 V = 2\alpha\beta U + \left(\alpha^2 - \beta^2\right) V.$$

По лемме 1.8 получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -2\Lambda\alpha, \\ 2\alpha\beta = -\Lambda\beta, \end{cases}$$

откуда следует $\alpha^2 + \beta^2 = 0$, что противоречит условию $\beta \neq 0$. Значит оператор D не может иметь комплексно-сопряженных собственных значений.

Пусть λ — некоторое действительное собственное значение оператора D, X — соответствующий собственный вектор. Тогда из леммы 1.8 следует

$$\lambda^2 X = -\Lambda\lambda X,$$

это означает, что оператор D может иметь собственные значения равные либо $-\Lambda$, либо 0.

Пусть собственное значение $-\Lambda$ имеет кратность k:

$$DX_i = -\Lambda X_i + X_{i-1}, \quad i = \overline{1,k}, \quad X_0 = X_{-1} = \ldots = 0,$$
$$D^2 X_i = \Lambda^2 X_i - 2\Lambda X_{i-1} + X_{i-2}.$$

По лемме 1.8 получим

$$-\Lambda X_{i-1} + X_{i-2} = 0,$$

а значит, если $\Lambda \neq 0$, то собственное значение $-\Lambda$ имеет кратность не более 1; если $\Lambda = 0$, то собственное значение $-\Lambda$ имеет кратность не более 2.

Пусть собственное значение 0 имеет кратность k:

$$DX_i = X_{i-1}, \quad i = \overline{1,k}, \quad X_0 = X_{-1} = \ldots = 0,$$

$$D^2 X_i = X_{i-2}.$$

По лемме 1.8 получим

$$\Lambda X_{i-1} + X_{i-2} = 0,$$

а значит, если $\Lambda \neq 0$, то собственное значение 0 имеет кратность не более 1; если $\Lambda = 0$, то собственное значение 0 имеет кратность не более 2.

Для доказательства теоремы осталось заметить, что при $\Lambda \neq 0$ оператор D диагонализируем (то есть имеет тип Сегре $\{(1 \dots 1)\}$), так как все собственные значения имеют кратность не более одного, и по лемме 1.7 алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изометрична прямой сумме $D\mathfrak{g} \oplus \operatorname{Ker} D$, а соответствующая группа Ли локально изометрична прямому произведению $\mathbb{R}^k \otimes \mathcal{N}^{n-k}$ (псевдо)евклидова пространства и эйнштейнового многообразия, а следовательно алгебраический солитон Риччи является тривиальным. □

Следствие 1.10. *Пусть (G,g) — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой алгебраического солитона Риччи. Если тензор Схоутена–Вейля SW равен нулю, то алгебраический солитон Риччи является тривиальным.*

Доказательство. В случае римановой метрики оператор Риччи всегда является диагонализируемым, т.е. имеет тип Сегре $\{1 \dots 1\}$, что противоречит теореме 1.9. □

1.4 Алгебраические солитоны Риччи на конформно плоских группах Ли

В данном параграфе, с помощью результатов предыдущего параграфа, при более сильном предположении, что алгебраический солитон Риччи является конформно плоским, мы получим некоторые результаты о строении соответствующей метрической алгебры Ли. Благодаря следствию 1.10, далее мы будем рассматривать только собственно псевдориманову метрику.

Теорема 1.11. *Пусть G — конформно плоская метрическая группа Ли с метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи. Тогда $\Lambda = 0$ и* *оператор D (как и оператор Риччи ρ) имеет тип Сегре $\{(1 \dots 1\, 2)\}$ с единственным собственным значением, равным нулю.*

Доказательство. Пусть X и Y — произвольные векторы из алгебры Ли группы G. Рассмотрим следующее выражение

$$
\begin{aligned}
R(DX,Y)X + R(X,DY)X &= -(ADX \wedge Y)X - (DX \wedge AY)X \\
&- (AX \wedge DY)X - (X \wedge ADY)X = -\frac{2}{n-2}(DX \wedge DY)X = \\
&= -\frac{2}{n-2}\left(\langle DY,X\rangle DX - \langle DX,X\rangle DY\right).
\end{aligned}
$$

Если $X,Y \notin \operatorname{Ker} D$ и DX, DY — линейно независимы, то $\langle DY,X\rangle = 0$ и $\langle DX,X\rangle \neq 0$. Тогда $R(DX,Y)X + R(X,DY)X \neq 0$ — противоречие с пунктом 1 леммы 1.5. Следовательно векторы DX и DY не могут быть линейно независимыми, т.е. $\dim D\mathfrak{g} = 1$, и оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(1 \dots 1\, 2)\}$. □

Так как, по теореме 1.11, константа Λ равна нулю и оператор D имеет тип Сегре $\{(1 \dots 1\, 2)\}$ с единственным собственным значением равным нулю, то в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует базис $\{e_1, \dots, e_n\}$, в котором матрицы оператора D, оператора Риччи ρ и метрического тензора g имеют следующий блочный вид (см. [38]):

$$
D = \rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} E^{\pm} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.7}
$$

где размеры блоков на главной диагонали равны $(n-2) \times (n-2)$, 1×1, 1×1 соответственно, $E^{\pm}$ — диагональная матрица с элементами ± 1 на диагонали, $\varepsilon_0 = \pm 1$.

Введем следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_{n-2}\}, \\
A_2 &= \operatorname{span}\{e_{n-1}\}, \\
B_2 &= \operatorname{span}\{e_n\},
\end{aligned}
$$

тогда $D\mathfrak{g} = A_2$, $\operatorname{Ker} D = A_1 + A_2$.

Из вида оператора Риччи и метрического тензора с использованием (1.2) получаем, что для любых векторов X и Y из алгебры Ли выполняется

$$
R(\rho X, Y) = 0,
$$

откуда следует, что оператор кривизны и оператор Риччи коммутируют, а значит, мы можем применить результаты работы [39, параграф 5] вместе с леммами 1.4 и 1.6.

Предложение 1.12. *В вышеприведенных обозначениях выполняются следующие коммутационные соотношения*

$$[A_1,A_1] \subseteq A_1 + A_2, \qquad [A_1,A_2] = 0, \qquad [A_1,B_2] \subseteq A_1 + A_2,$$
$$[A_2,A_2] = 0, \qquad [A_2,B_2] \subseteq A_2, \qquad [B_2,B_2] = 0.$$

Кроме того, ковариантная производная удовлетворяет следующим условиям

$\nabla_X Y$		Y: A_1	A_2	B_2
X	A_1	$A_1 + A_2$	0	A_1
	A_2	0	0	0
	B_2	$A_1 + A_2$	A_2	$A_1 + B_2$

Более того, тензор Риччи и все его ковариантные производные определяются двумя параметрами: $\varepsilon_0 = \langle e_{n-1},e_n\rangle = \pm 1$ *и* $c^{n-1}_{n-1\,n}$*:* $[e_{n-1},e_n] = c^{n-1}_{n-1\,n} e_{n-1}$*, причем можно считать, что* $c^{n-1}_{n-1\,n} \geqslant 0$*.*

Доказательство. Условия на скобку Ли и ковариантную производную следуют из лемм 1.4 и 1.6 из работы [39]. Из вида оператора Риччи и метрического тензора (1.7), а также из таблицы для ковариантной производной, следует, что

$$\nabla_{e_{k_1}} \ldots \nabla_{e_{k_m}} r\,(e_i,e_j) = 0,$$

если хотя бы один из индексов k_1, $\ldots k_m$, i, j не равен n.

Рассмотрим следующее выражение, полученное из тождества Кошуля

$$\varepsilon_0 \Gamma^n_{nn} = \langle \nabla_{e_n} e_n, e_{n-1}\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle [e_n,e_n]\,,e_{n-1}\rangle - \langle [e_n,e_{n-1}]\,,e_n\rangle - \langle [e_n,e_{n-1}]\,,e_n\rangle\right) =$$
$$= \langle [e_{n-1},e_n]\,,e_n\rangle = \varepsilon_0 c^n_{n-1\,n},$$

откуда $\Gamma^n_{nn} = c^n_{n-1\,n}$.

Далее докажем по индукции, что

$$\underbrace{\nabla_{e_n} \ldots \nabla_{e_n}}_{m \text{ раз}} r\,(e_n,e_n) = (-1)^m\,(m+1)!\,\varepsilon_0\,(c^n_{n-1\,n})^m\,, \quad m \geqslant 0.$$

База $m=0$:

$$r\left(e_n,e_n\right)=\left\langle \rho\left(e_n\right),e_n\right\rangle=\left\langle e_{n-1},e_n\right\rangle=\varepsilon_0.$$

Шаг:

$$\underbrace{\nabla_{e_n}\ldots\nabla_{e_n}}_{m+1\text{ раз}}r\left(e_n,e_n\right)=$$

$$=\overbrace{-\nabla_{\nabla_{e_n}e_n}\underbrace{\nabla_{e_n}\ldots\nabla_{e_n}}_{m-1\text{ раз}}r\left(e_n,e_n\right)-\ldots-\underbrace{\nabla_{e_n}\ldots\nabla_{e_n}}_{m-1\text{ раз}}\nabla_{\nabla_{e_n}e_n}r\left(e_n,e_n\right)}^{m\text{ слагаемых}}-$$

$$-\underbrace{\nabla_{e_n}\ldots\nabla_{e_n}}_{m\text{ раз}}r\left(\nabla_{e_n}e_n,e_n\right)-\underbrace{\nabla_{e_n}\ldots\nabla_{e_n}}_{m\text{ раз}}r\left(e_n,\nabla_{e_n}e_n\right)=$$

$$=-\left(m+2\right)\Gamma^n_{nn}\underbrace{\nabla_{e_n}\ldots\nabla_{e_n}}_{m\text{ раз}}r\left(e_n,e_n\right)=$$

$$=-\left(m+2\right)\Gamma^n_{nn}\left(\left(-1\right)^m\left(m+1\right)!\,\varepsilon_0\left(c^n_{n-1\,n}\right)^m\right)=$$

$$=\left(-1\right)^{m+1}\left(m+2\right)!\,\varepsilon_0\left(c^n_{n-1\,n}\right)^{m+1}.$$

В заключении доказательства отметим, что, если это необходимо, можно произвести следующую замему базиса

$$e'_i=e_i\text{ при }i\leqslant n-2;\quad e'_{n-1}=-e_{n-1};\quad e'_n=-e_n.$$

Данная замена базиса не изменит вид оператора Риччи и метрического тензора, а структурная константа $c^{n-1}_{n-1\,n}$ поменяет знак. □

Так как в конформно плоском случае вся кривизна многообразия полностью определяется тензором Риччи и его ковариантными производными, то справедлива теорема 1.13 (смотри также замечания 1.14 и 1.15).

Теорема 1.13. *Если зафиксировать сигнатуру псевдоримановой метрики, а также действительное число* $c^n_{n-1\,n}\geqslant 0$, *то существует не более двух конформно плоских метрических алгебр Ли (с точностью до изометрии), которые являются нетривиальными алгебраическими солитонами Риччи; причем одна из них имеет неотрицательную кривизну Риччи, а вторая — неположительную.*

Замечание 1.14. *Мы можем гарантировать существование вышеописанных метрических алгебр Ли (со скалярным произведением произвольной псевдоримановой сигнатуры и произвольной размерности больше либо равной* *трем) для любого значения $c^n_{n-1\,n}$ только для случая неположительной кривизны Риччи (т.е. при $\varepsilon_0 = -1$); существование метрической алгебры Ли с неотрицательной кривизной Риччи гарантируется только при выполнении неравенства $\left(c^n_{n-1\,n}\right)^2 (n-2) - 4\varepsilon_0 \geqslant 0$ (примеры таких метрических алгебр Ли смотри ниже).*

Замечание 1.15. *Отметим, что выбранный выше базис однозначно фиксирует значение структурной константы $c^n_{n-1\,n} \geqslant 0$, т.к. невозможно произвести замену базиса в алгебре Ли так, чтобы оператор Риччи и метрический тензор и в новом базисе имели вид (1.7), а структурная константа $c^n_{n-1\,n} \geqslant 0$ изменилась. Как было показано в предложении 1.12, структурная константа $c^n_{n-1\,n} \geqslant 0$ определяет вид ковариантных производных тензора Риччи. Следовательно, две метрические алгебры Ли с различными константами $c^n_{n-1\,n} \geqslant 0$ не изометричны.*

Также отметим, что из предложения 1.12 следует, что группа Ли, алгебра Ли которой описана в предыдущей теореме, является многообразием Уокера (см. [40]) с левоинвариантным параллельным изотропным одномерным распределением $D\mathfrak{g}$.

Изложение данного раздела мы закончим несколькими примерами нетривиальных алгебраических солитонов Риччи на конформно плоских метрических группах Ли.

Пример 1.16. Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathfrak{g}_1 = \mathbb{R}^{n-1} \rtimes \mathbb{R}$ размерности $n \geqslant 3$, ненулевые скобки Ли которой задаются равенствами

$$[e_i,e_n] = \beta e_i,\ i \leqslant n-2, \quad [e_{n-1},e_n] = \alpha e_{n-1},$$

где $\beta = \frac{\alpha(n-2)+\sqrt{(n-2)(\alpha^2(n-2)-4\varepsilon_0)}}{2(n-2)}$ и $\alpha^2(n-2) - 4\varepsilon_0 \geqslant 0$. Ненулевые скалярные произведения задаются следующими равенствами

$$\langle e_i,e_i\rangle = \varepsilon_i,\ i \leqslant n-2, \quad \langle e_{n-1},e_n\rangle = \varepsilon_0,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. Данная метрическая алгебра Ли является разрешимой, она локально симметрична только при $\alpha = 0$. В зависимости от значения параметров ε_i метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_1$ может иметь скалярное произведение любой сигнатуры (кроме собственно римановой), а также иметь как неположительную, так и неотрицательную кривизну Риччи. Как было указано в замечании 1.14, любой нетривиальный конформно плоский алгебраический солитон Риччи, имеющий неположительную кривизну Риччи, изометричен алгебре $\mathfrak{g}_1$.

Пример 1.17. Рассмотрим метрическую алгебру Ли $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_{2m+1} \rtimes \mathbb{R}$ ($\mathfrak{h}_{2m+1}$ — $(2m+1)$-мерная обобщенная алгебра Гейзенберга) четной размерности $n = 2m+2$ ($n \geqslant 4$), ненулевые скобки Ли которой задаются равенствами

$$[e_i, e_{m+i}] = \beta e_{n-1},\ i \leqslant m, \quad [e_j, e_n] = \frac{1}{2}\alpha e_j,\ j \leqslant n-2, \quad [e_{n-1}, e_n] = \alpha e_{n-1},$$

где $\beta = \frac{\sqrt{(n-2)(4-\alpha^2(n-2))}}{n-2}$ и $4-\alpha^2(n-2) \geqslant 0$. Ненулевые скалярные произведения задаются следующими равенствами

$$\langle e_i, e_i \rangle = \langle e_{m+i}, e_{m+i} \rangle = \varepsilon_i,\ i \leqslant m, \quad \langle e_{n-1}, e_n \rangle = 1,$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$. В зависимости от значения параметров ε_i метрическая алгебра Ли $\mathfrak{g}_2$ может иметь скалярное произведение с сигнатурой, содержащей любое нечетное количество минусов. Кривизна Риччи метрической алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$ всегда неотрицательна.

Глава 2. Четырехмерные метрические группы Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля

Результаты данной главы опубликованы в работах [A1; A4; A6; A12–A17].

2.1 Вычисление компонент инвариантных тензорных полей на метрических группах Ли

Далее приведем алгоритм, позволяющий вычислять компоненты тензора Схоутена–Вейля SW групп Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Все вычисления будем проводить в соответствующей метрической алгебре Ли.

Зафиксируем некоторый базис $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ в $\mathfrak{g}$. Входными параметрами алгоритма являются структурные константы C_{ij}^k алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (которые определяются разложением скобки Ли по базису $[e_i,e_j] = C_{ij}^k e_k$) и метрический тензор $g_{ij} = \langle e_i,e_j\rangle$ метрической алгебры Ли.

1. Вычисляем символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{ij}^t = \frac{1}{2}\left(C_{ij}^t - C_{jk}^l g_{li} g^{kt} + C_{ki}^l g_{lj} g^{kt}\right).$$

2. Определяем компоненты тензора кривизны:

$$R_{ijkt} = C_{ij}^m \Gamma_{mk}^l g_{lt} - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^l g_{lt} + \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^l g_{lt}.$$

3. Вычисляем компоненты тензора Риччи с помощью свёртки тензора кривизны с метрическим тензором:

$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}.$$

4. Вычисляем скалярную кривизну:

$$s = r_{ik} g^{ik}.$$

5. Определяем компоненты тензора одномерной кривизны:

$$A_{ij} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij} - \frac{s g_{ij}}{2\,(n-1)}\right).$$

6. Вычисляем ковариантные производные тензора одномерной кривизны:

$$A_{ij;k} = -A_{mj}\Gamma^s_{mi} - A_{im}\Gamma^m_{kj}.$$

7. Компоненты тензора Схоутена–Вейля определяем с помощью формулы:

$$SW_{ijk} = A_{ij;k} - A_{ik;j}.$$

Данные формулы являются общеизвестными и приводятся, например, в [24; 41; 42].

Заметим, что, если скалярная кривизна является константой (что верно, например, в случае метрических групп Ли), то следующие условия эквивалентны

$$SW = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla_Z r(X,Y) = \nabla_Y r(X,Z). \tag{2.1}$$

Таким образом, при решении уравнения $SW = 0$ можно опустить несколько шагов алгоритма:

1. Вычисляем символы Кристоффеля:

$$\Gamma^t_{ij} = \frac{1}{2}\left(C^t_{ij} - C^l_{jk}g_{li}g^{kt} + C^l_{ki}g_{lj}g^{kt}\right).$$

2. Определяем компоненты тензора кривизны:

$$R_{ijkt} = C^m_{ij}\Gamma^l_{mk}g_{lt} - \Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}g_{lt} + \Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}g_{lt}.$$

3. Вычисляем компоненты тензора Риччи с помощью свёртки тензора кривизны с метрическим тензором:

$$r_{ik} = R_{ijkt}g^{jt}.$$

4. Вычисляем ковариантные производные тензора Риччи:

$$r_{ij;k} = -r_{mj}\Gamma^s_{mi} - r_{im}\Gamma^m_{kj}.$$

5. Записываем систему уравнений (2.1):

$$r_{ij;k} - r_{ik;j} = 0.$$

2.2 Нулевой тензор Схоутена–Вейля на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой

В данном разделе мы рассмотрим левоинвариантные псевдоримановы метрики на группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, которые не являются ни конформно плоскими, ни Риччи параллельными. Ранее Дж. Кальварузо и А. Заем классифицировали левоинвариантные псевдоримановы метрики Эйнштейна, конформно плоские метрики и метрики с параллельным тензором Риччи на четырехмерных группах Ли (см. [18—20]).

Далее будем использовать удобные базисы в метрической алгебре Ли, в которых оператор Риччи, тензор Риччи и метрический тензор имеют удобный вид. Такие базисы были построены в работе [38] для произвольного самосопряженного оператора (коим является оператор Риччи) в (псевдо)евклидовом пространстве.

Теорема 2.1 ([38]). *Пусть* $(\mathfrak{g},g)$ *— четырехмерная алгебра Ли. Тогда в ней существует базис* $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ *такой, что, в зависимости от типа Сегре оператора Риччи, матрицы тензора Риччи и метрического тензора имеют вид, приведённый в табл. 1. В данной таблице использованы обозначения:* $\varepsilon_i = \pm 1$*;* ρ_i*,* α*,* α_i*,* $\beta \neq 0$*,* $\beta_i \neq 0$ *— произвольные действительные числа.*

Таблица 1 — Вид матриц тензора Риччи и метрического тензора в базисе, в зависимости от типа Сегре оператора Риччи

Тип Сегре	Матрица тензора Риччи r	Матрица метрического тензора g
$\{1111\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$
$\{11(11)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$
$\{(11)(11)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. 1

Тип Сегре	Матрица тензора Риччи r	Матрица метрического тензора g
$\{1(111)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$
$\{(1111)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}$
$\{112\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$
$\{1(12)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$
$\{(11)2\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$
$\{(112)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$
$\{22\}$	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$
$\{(22)\}$	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$
$\{13\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Продолжение табл. 1

Тип Сегре	Матрица тензора Риччи r	Матрица метрического тензора g
$\{(13)\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 & \varepsilon_2 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\{4\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\{111\bar{1}\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\alpha & \varepsilon_3\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\beta & -\varepsilon_3\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$
$\{(11)1\bar{1}\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\alpha & \varepsilon_3\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\beta & -\varepsilon_3\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}$
$\{21\bar{1}\}$	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha & \varepsilon_2\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta & -\varepsilon_2\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$
$\{2\bar{2}\}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha \\ \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\{1\bar{1}1\bar{1}\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\alpha_1 & \varepsilon_1\beta_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta_1 & -\varepsilon_1\alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha_2 & \varepsilon_2\beta_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta_2 & -\varepsilon_2\alpha_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$
$\{(1\bar{1}1\bar{1})\}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha & \varepsilon_2\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta & -\varepsilon_2\alpha \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$

При описании изоморфизмов метрических алгебр Ли матрицы перехода, сохраняющие вид метрического тензора g (возможно с точностью до переобозначения параметров), мы будем назвать *g-ортогональными*. Например, пусть

$$g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица O является g-ортогональной, поскольку матрица

$$O^T g O = \begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

совпадает с g с точностью до переобозначения $\varepsilon_1 \leftrightarrow \varepsilon_2$. Использование подобных матриц перехода допустимо, поскольку далее нас будет интересовать являются ли некоторые классы метрических алгебр Ли подклассами других; при этом далее мы не будем выделять конкретные пары изоморфных метрических алгебр Ли.

Структура данного раздела такова: в теореме 2.2 мы покажем, что оператор Риччи четырехмерной метрической группы Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, которая не является ни конформно плоской ни Риччи параллельной, может иметь лишь 5 из 20 возможных типов Сегре. Далее, теоремы 2.4–2.8 посвящены получению классификации метрических алгебр Ли таких групп Ли с точностью до изоморфизма. Табл. 2, в которой приведены полученные метрические алгебры Ли, расположена после теоремы 2.8. В теореме 2.9 показано, что полученные метрические алгебры Ли попарно неизоморфны.

Теорема 2.2. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной. Тогда для оператора Риччи ρ возможны только следующие типы Сегре:* $\{1(12)\}$, $\{(11)2\}$, $\{(112)\}$, $\{11 1\bar{1}\}$, $\{(22)\}$.

Доказательство. По очереди разберем типы Сегре из табл. 1.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1111\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и

тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_4\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{13}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{23}^2\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{14}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_4)=0,\quad C_{24}^2\varepsilon_2(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{13}^3\varepsilon_3(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{14}^4\varepsilon_4(\rho_1-\rho_4)=0,\\
C_{23}^3\varepsilon_3(\rho_2-\rho_3)=0,\quad C_{24}^4\varepsilon_4(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{34}^3\varepsilon_3(\rho_3-\rho_4)=0,\quad C_{34}^4\varepsilon_4(\rho_3-\rho_4)=0,\\
C_{23}^1(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\varepsilon_1+\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{24}^1(2\rho_1-\rho_2-\rho_4)\varepsilon_1+\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{34}^1(2\rho_1-\rho_3-\rho_4)\varepsilon_1+\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3\right)(\rho_3-\rho_4)=0,\\
C_{13}^2(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\varepsilon_2+\left(C_{12}^3\varepsilon_3-C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{14}^2(\rho_1-2\rho_2+\rho_4)\varepsilon_2+\left(C_{12}^4\varepsilon_4-C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_4)=0,\\
C_{34}^2(2\rho_2-\rho_3-\rho_4)\varepsilon_2+\left(C_{23}^4\varepsilon_4+C_{24}^3\varepsilon_3\right)(\rho_3-\rho_4)=0,\\
C_{12}^3(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\varepsilon_3+\left(C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{14}^3(\rho_1-2\rho_3+\rho_4)\varepsilon_3+\left(C_{13}^4\varepsilon_4-C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_4)=0,\\
C_{24}^3(\rho_2-2\rho_3+\rho_4)\varepsilon_3+\left(C_{23}^4\varepsilon_4-C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_4)=0,\\
C_{12}^4(\rho_1+\rho_2-2\rho_4)\varepsilon_4+\left(C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{13}^4(\rho_1+\rho_3-2\rho_4)\varepsilon_4+\left(C_{14}^3\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{23}^4(\rho_2+\rho_3-2\rho_4)\varepsilon_4+\left(C_{24}^3\varepsilon_3+C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} \frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)^2(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_2\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_4-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_4)}{\varepsilon_1\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2} \end{pmatrix}$$

Пусть данный тензор Риччи имеет вид (2.2), тогда должна выполняться система уравнений

$$\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)^2(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_2\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3} = \varepsilon_1\rho_1,$$
$$\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_4-\rho_1)^2(\rho_2-\rho_4)}{\varepsilon_1\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)^3} = \varepsilon_2\rho_2,$$
$$0 = \varepsilon_3\rho_3,$$
$$\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_4)(\rho_4-\rho_1)}{\varepsilon_1\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^2} = \varepsilon_4\rho_4,$$

равносильная следующей системе

$$\rho_3 = 0,$$
$$\left(C_{12}^4\right)^2 = -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4\rho_4(\rho_1-\rho_2)^2}{2(\rho_2-\rho_4)(\rho_1-\rho_4)},$$
$$\rho_4 = -\rho_1-\rho_2,$$
$$\frac{\rho_1^2+\rho_1\rho_2+\rho_2^2}{\rho_1-\rho_2} = 0,$$

но последнее уравнение неразрешимо в действительных числах. Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{1111\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(11)(11)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные друг другу действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{23}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{14}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{24}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{12}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{12}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{13}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{14}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
C_{23}^3 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{24}^4 \varepsilon_4 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{12}^3 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{12}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{12}^3 \varepsilon_3 - C_{13}^2 \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{12}^4 \varepsilon_4 - C_{14}^2 \varepsilon_2 - C_{24}^1 \varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{13}^4 \varepsilon_4 + C_{14}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(C_{23}^4 \varepsilon_4 + C_{24}^3 \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2\right)(\rho_1 - \rho_2) = 0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{11(11)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$
r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4\rho_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_4 \end{pmatrix}, \tag{2.3}
$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{13}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{23}^2\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{14}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{24}^2\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{13}^3\varepsilon_3(\rho_1-\rho_3)=0,\quad C_{14}^4\varepsilon_4(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{23}^3\varepsilon_3(\rho_2-\rho_3)=0,\quad C_{24}^4\varepsilon_4(\rho_2-\rho_3)=0,\\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3-C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
\left(C_{23}^4\varepsilon_4+C_{24}^3\varepsilon_3-C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
\left(C_{23}^4\varepsilon_4+C_{24}^3\varepsilon_3+C_{34}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{23}^1(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\varepsilon_1+\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{24}^1(2\rho_1-\rho_2-\rho_3)\varepsilon_1+\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2\right)(\rho_2-\rho_3)=0,\\
C_{13}^2(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\varepsilon_2+\left(C_{12}^3\varepsilon_3-C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{14}^2(\rho_1-2\rho_2+\rho_3)\varepsilon_2+\left(C_{12}^4\varepsilon_4-C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_3)=0,\\
C_{12}^3(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\varepsilon_3+\left(C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{12}^4(\rho_1+\rho_2-2\rho_3)\varepsilon_4+\left(C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r=\begin{pmatrix}
-\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_2-\rho_3)^2(\rho_1-\rho_3)}{\varepsilon_4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_1-\rho_3)^2(\rho_2-\rho_3)}{\varepsilon_4\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)^3} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{2\left(C_{12}^4\right)^2(\rho_1-\rho_3)(\rho_2-\rho_3)}{\varepsilon_2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)^2}
\end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (2.3). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{11(11)\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1(111)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и

тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2\rho_2&0&0\\0&0&\varepsilon_3\rho_2&0\\0&0&0&\varepsilon_4\rho_2\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&\varepsilon_3&0\\0&0&0&\varepsilon_4\end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{13}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{23}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{14}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{24}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2)=0,\quad C_{13}^3\varepsilon_3(\rho_1-\rho_2)=0,\\
C_{14}^4\varepsilon_4(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2-C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2-C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{12}^3\varepsilon_3+C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3-C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{12}^4\varepsilon_4+C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0,\\
\left(C_{13}^4\varepsilon_4+C_{14}^3\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2)=0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи.

Если оператор Риччи имеет тип Сегре $\{(1111)\}$, то тензор Риччи пропорционален метрическому тензору, и метрическая группа Ли является многообразием Эйнштейна, а значит имеет параллельный тензор Риччи.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{112\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2\rho_2&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\rho_3\\0&0&\varepsilon_3\rho_3&\varepsilon_3\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&\varepsilon_2&0&0\\0&0&0&\varepsilon_3\\0&0&\varepsilon_3&0\end{pmatrix},\tag{2.4}$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 — попарно неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{34}^4 \varepsilon_3 = 0, \\
C_{12}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{13}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) = 0, \\
C_{12}^2 \varepsilon_2 (\rho_1 - \rho_2) = 0, \quad C_{23}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
C_{13}^4 \varepsilon_3 (\rho_1 - \rho_3) = 0, \quad C_{23}^4 \varepsilon_3 (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
\left(C_{14}^1 (\rho_1 - \rho_3) - C_{13}^1\right) \varepsilon_1 = 0, \quad C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) - C_{13}^4 \varepsilon_3 = 0, \\
\left(C_{24}^2 (\rho_2 - \rho_3) - C_{23}^2\right) \varepsilon_2 = 0, \quad C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) - C_{23}^4 \varepsilon_3 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1\right) (\rho_1 - \rho_3) = 0, \\
\left(\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2\right) (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
\left(2 (\rho_3 - \rho_1) C_{14}^3 - C_{13}^3 + 3 C_{14}^4\right) \varepsilon_3 + C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0, \\
\left(2 (\rho_3 - \rho_2) C_{24}^3 - C_{23}^3 + 3 C_{24}^4\right) \varepsilon_3 + C_{34}^2 \varepsilon_2 = 0, \\
C_{23}^1 (2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) \varepsilon_1 + \left(C_{12}^4 \varepsilon_3 + C_{13}^2 \varepsilon_2\right) (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
C_{13}^2 (\rho_1 - 2\rho_2 + \rho_3) \varepsilon_2 + \left(C_{12}^4 \varepsilon_3 - C_{23}^1 \varepsilon_1\right) (\rho_1 - \rho_3) = 0, \\
C_{12}^4 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_3) \varepsilon_3 + \left(C_{13}^2 \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1\right) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left((2\rho_3 - \rho_1 - \rho_2) C_{12}^3 + 2 C_{12}^4\right) \varepsilon_3 - \left(C_{14}^2 \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1\right) (\rho_1 - \rho_2) = 0, \\
\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right) \rho_3 - \left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right) \rho_1 + 2 C_{13}^4\right) \varepsilon_3 - C_{34}^1 \varepsilon_1 (\rho_1 - \rho_3) = 0, \\
\left(\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right) \rho_3 - \left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right) \rho_2 + 2 C_{23}^4\right) \varepsilon_3 - C_{34}^2 \varepsilon_2 (\rho_2 - \rho_3) = 0, \\
\left((2\rho_1 - \rho_2 - \rho_3) C_{24}^1 - C_{23}^1\right) \varepsilon_1 + \left(\rho_2 C_{14}^2 - \rho_3 C_{14}^2 - C_{13}^2\right) \varepsilon_2 + \\
+ \left(\rho_2 C_{12}^3 - \rho_3 C_{12}^3 - C_{12}^4\right) \varepsilon_3 = 0, \\
\left((2\rho_2 - \rho_1 - \rho_3) C_{14}^2 - C_{13}^2\right) \varepsilon_2 + \left(\rho_1 C_{24}^1 - \rho_3 C_{24}^1 - C_{23}^1\right) \varepsilon_1 - \\
- \left(\rho_1 C_{12}^3 - \rho_3 C_{12}^3 - C_{12}^4\right) \varepsilon_3 = 0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$
r = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{2\varepsilon_2 \varepsilon_1 \left(C_{12}^3\right)^2 (\rho_1 - \rho_3)(\rho_2 - \rho_3)}{(\rho_1 - \rho_2)^2}
\end{pmatrix}
$$

что противоречит виду тензора Риччи (2.4). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{112\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{22\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^2\varepsilon_1 = 0, \quad C_{34}^4\varepsilon_2 = 0, \\
C_{13}^2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) = 0, \quad C_{13}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
\left((\rho_1-\rho_2)C_{14}^2 - C_{13}^2\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left((\rho_1-\rho_2)C_{23}^4 + C_{13}^4\right)\varepsilon_2 = 0, \\
C_{34}^2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) - C_{13}^4\varepsilon_2 = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2) - C_{13}^2\varepsilon_1 = 0, \\
\left((\rho_1-\rho_2)C_{34}^1 + C_{34}^2\right)\varepsilon_1 - C_{23}^4\varepsilon_2 = 0, \\
\left((\rho_2-\rho_1)C_{12}^3 + C_{12}^4\right)\varepsilon_2 + C_{14}^2\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^1 + C_{23}^2\right)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2\right)(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{23}^1 - C_{13}^1 + 3C_{23}^2\right)\varepsilon_1 - C_{12}^4\varepsilon_2 = 0, \\
\left(2(\rho_2-\rho_1)C_{14}^3 - C_{13}^3 + 3C_{14}^4\right)\varepsilon_2 + C_{34}^2\varepsilon_1 = 0, \\
\left(2(\rho_1-\rho_2)C_{24}^1 - C_{14}^1 - 2C_{23}^1 + 3C_{24}^2\right)\varepsilon_1 - C_{12}^3\varepsilon_2 = 0, \\
\left(2(\rho_2-\rho_1)C_{24}^3 - 2C_{14}^3 - C_{23}^3 + 3C_{24}^4\right)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^1 + C_{23}^2\right)\rho_1 - \left(C_{13}^1 + C_{23}^2\right)\rho_2 + 2C_{13}^2\right)\varepsilon_1 - C_{12}^4\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\rho_2 - \left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\rho_1 + 2C_{13}^4\right)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
\left(\left(C_{14}^1 + C_{24}^2\right)\rho_1 - \left(C_{14}^1 + C_{24}^2\right)\rho_2 - C_{13}^1 - C_{23}^2\right)\varepsilon_1 + \\
+\varepsilon_2\left(\rho_1 C_{12}^3 - \rho_2 C_{12}^3 - C_{12}^4\right) = 0, \\
\left(\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right)\rho_2 - \left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right)\rho_1 - C_{13}^3 - C_{14}^4\right)\varepsilon_2 + \\
+\varepsilon_1\left(\rho_1 C_{34}^1 - \rho_2 C_{34}^1 + C_{34}^2\right) = 0,
\end{gathered}$$

$$\left(\left(C_{14}^{1}+C_{24}^{2}\right)\rho_1-\left(C_{14}^{1}+C_{24}^{2}\right)\rho_2-C_{13}^{1}+2C_{14}^{2}-C_{23}^{2}\right)\varepsilon_1-$$
$$-\left(\rho_1 C_{12}^{3}-\rho_2 C_{12}^{3}-C_{12}^{4}\right)\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(C_{23}^{3}+C_{24}^{4}\right)\rho_2-\left(C_{23}^{3}+C_{24}^{4}\right)\rho_1-C_{13}^{3}-C_{14}^{4}+2C_{23}^{4}\right)\varepsilon_2-$$
$$-\left(\rho_1 C_{34}^{1}-\rho_2 C_{34}^{1}+C_{34}^{2}\right)\varepsilon_1=0.$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (2.5). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена-Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{22\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{13\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2\\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0\end{pmatrix},\tag{2.6}$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$C_{23}^{4}\varepsilon_2=0,\quad C_{23}^{3}\varepsilon_2=0,$$
$$C_{23}^{4}\varepsilon_2=0,\quad C_{24}^{4}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(C_{23}^{3}+C_{24}^{4}\right)\varepsilon_2=0,\quad \left(C_{24}^{2}-2C_{34}^{3}\right)\varepsilon_2=0,$$
$$C_{12}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\quad C_{12}^{4}\varepsilon_2\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$\left(C_{23}^{2}-C_{34}^{4}-3C_{24}^{3}\right)\varepsilon_2=0,\quad \left(C_{24}^{3}+C_{23}^{2}-3C_{34}^{4}\right)\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{13}^{1}-C_{12}^{1}\right)\varepsilon_1=0,\quad \left(\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{14}^{1}-C_{13}^{1}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$C_{23}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)-C_{12}^{4}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(C_{12}^{3}+C_{13}^{4}\right)\varepsilon_2-C_{23}^{1}\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$\left(2\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{24}^{1}-C_{23}^{1}\right)\varepsilon_1-\left(C_{12}^{3}+C_{13}^{4}\right)\varepsilon_2=0,$$
$$\left(2\left(\rho_2-\rho_1\right)C_{13}^{3}-C_{12}^{3}+3C_{13}^{4}\right)\varepsilon_2+C_{23}^{1}\varepsilon_1=0,$$
$$\left(2\left(\rho_2-\rho_1\right)C_{14}^{2}-C_{13}^{2}+3C_{14}^{3}\right)\varepsilon_2+C_{34}^{1}\varepsilon_1=0,$$
$$\left(2\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{34}^{1}-C_{24}^{1}\right)\varepsilon_1+\left(C_{12}^{2}-2C_{13}^{3}+C_{14}^{4}\right)\varepsilon_2=0,$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(C_{12}^{3}+C_{13}^{4}\right)\rho_2-\left(C_{12}^{3}+C_{13}^{4}\right)\rho_1+2C_{12}^{4}\right)\varepsilon_2-C_{23}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
&\left(\left(C_{13}^{2}+C_{14}^{3}\right)\rho_2-\left(C_{13}^{2}+C_{14}^{3}\right)\rho_1+2C_{14}^{4}\right)\varepsilon_2+C_{34}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
&\left(\left(C_{12}^{2}+C_{14}^{4}\right)\rho_2-\left(C_{12}^{2}+C_{14}^{4}\right)\rho_1+2C_{12}^{3}\right)\varepsilon_2-C_{24}^{1}\varepsilon_1\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,\\
&\left(\left(C_{12}^{2}+C_{14}^{4}\right)\rho_2-\left(C_{12}^{2}+C_{14}^{4}\right)\rho_1+C_{12}^{3}-C_{13}^{4}\right)\varepsilon_2+\\
&\qquad\qquad\qquad+\left(\rho_1C_{24}^{1}-\rho_2C_{24}^{1}-C_{23}^{1}\right)\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{13}^{2}+C_{14}^{3}\right)\rho_2-\left(C_{13}^{2}+C_{14}^{3}\right)\rho_1-C_{12}^{2}+2C_{13}^{3}+C_{14}^{4}\right)\varepsilon_2-\\
&\qquad\qquad\qquad-\left(\rho_1C_{34}^{1}-\rho_2C_{34}^{1}-C_{24}^{1}\right)\varepsilon_1=0.
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$
r=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&\left(C_{34}^{3}\right)^2\end{pmatrix}
$$

что противоречит виду тензора Риччи (2.6). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{13\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(13)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$
r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\rho_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\rho_1\\0&0&\varepsilon_2\rho_1&\varepsilon_2\\0&\varepsilon_2\rho_1&\varepsilon_2&0\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0&0&0\\0&0&0&\varepsilon_2\\0&0&\varepsilon_2&0\\0&\varepsilon_2&0&0\end{pmatrix},
$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{12}^1 \varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^3 \varepsilon_2 = 0,\\
C_{12}^4 \varepsilon_2 = 0, \quad C_{13}^1 \varepsilon_1 = 0,\\
C_{23}^3 \varepsilon_2 = 0, \quad C_{23}^4 \varepsilon_2 = 0,\\
C_{14}^4 \varepsilon_2 = 0, \quad C_{24}^4 \varepsilon_2 = 0,\\
\left(C_{23}^3 + C_{24}^4\right) \varepsilon_2 = 0, \quad \left(C_{24}^2 - 2C_{34}^3\right) \varepsilon_2 = 0,\\
\left(C_{24}^3 + C_{23}^2 - 3C_{34}^4\right) \varepsilon_2 = 0, \quad \left(C_{23}^2 - C_{34}^4 - 3C_{24}^3\right) \varepsilon_2 = 0,\\
\left(C_{12}^3 + C_{13}^4\right) \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^3 - C_{13}^4\right) \varepsilon_2 - C_{23}^1 \varepsilon_1 = 0,\\
\left(3C_{13}^4 - C_{12}^3\right) \varepsilon_2 + C_{23}^1 \varepsilon_1 = 0, \quad \left(3C_{14}^3 - C_{13}^2\right) \varepsilon_2 + C_{34}^1 \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{12}^2 - 2C_{13}^3 + C_{14}^4\right) \varepsilon_2 - C_{24}^1 \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{12}^2 - 2C_{13}^3 - C_{14}^4\right) \varepsilon_2 + C_{24}^1 \varepsilon_1 = 0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана быть конформно плоской.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{4\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$
r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 \\ 0 & \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 \\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.7}
$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{12}^3 \varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4 \varepsilon_1 = 0,\\
C_{13}^4 \varepsilon_1 = 0, \quad C_{14}^3 \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{23}^2 - C_{34}^4\right) \varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^3 + C_{13}^4\right) \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{12}^2 + C_{14}^4\right) \varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{13}^2 - 2C_{23}^3\right) \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{24}^1 - 2C_{34}^2\right) \varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^2 + C_{13}^3 + C_{23}^4\right) \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{13}^3 + C_{12}^2 - 3C_{23}^4\right) \varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{12}^2 - C_{23}^4 - 3C_{13}^3\right) \varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{23}^1 + C_{24}^2 - 3C_{34}^3\right) \varepsilon_1 = 0, \quad \left(C_{13}^1 - C_{34}^4 - 3C_{14}^2\right) \varepsilon_1 = 0,
\end{gathered}
$$

$$\left(C_{14}^3 + C_{12}^1 - C_{24}^4 - 2C_{13}^2\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{12}^2 - C_{23}^4 - C_{13}^3 + 2C_{14}^4\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{14}^2 + C_{13}^1 - C_{34}^4 - 2C_{24}^3\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{14}^3 + C_{24}^4 - C_{12}^1 + 2C_{13}^2\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{14}^3 + C_{12}^1 - 3C_{24}^4 + 2C_{23}^3\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{23}^1 - C_{34}^3 - 3C_{24}^2 + 2C_{14}^1\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left(C_{34}^4 + C_{14}^2 + C_{13}^1 - 2C_{24}^3 - 2C_{23}^2\right)\varepsilon_1 = 0.$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что тензор Риччи имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(C_{24}^2\right)^2 + 3C_{24}^2 C_{34}^3 - 6\left(C_{34}^3\right)^2 \end{pmatrix}$$

что противоречит виду тензора Риччи (2.7). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{4\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(11)1\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\alpha & \varepsilon_3\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\beta & -\varepsilon_3\alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где $\rho_1, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$C_{34}^4 \beta \varepsilon_3 = 0, \quad C_{34}^3 \beta \varepsilon_3 = 0,$$
$$\left((\rho_1 - \alpha) C_{13}^1 + \beta C_{14}^1\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left((\alpha - \rho_1) C_{14}^1 + \beta C_{13}^1\right)\varepsilon_1 = 0,$$
$$\left((\rho_1 - \alpha) C_{23}^2 + \beta C_{24}^2\right)\varepsilon_2 = 0, \quad \left((\alpha - \rho_1) C_{24}^2 + \beta C_{23}^2\right)\varepsilon_2 = 0,$$
$$\left((\alpha - \rho_1) C_{12}^3 + \beta C_{12}^4\right)\varepsilon_3 = 0, \quad \left((\rho_1 - \alpha) C_{12}^4 + \beta C_{12}^3\right)\varepsilon_3 = 0,$$

$$C^1_{34}\varepsilon_1(\rho_1-\alpha)-\beta\varepsilon_3\left(C^3_{13}-C^4_{14}\right)=0,$$
$$C^2_{34}\varepsilon_2(\rho_1-\alpha)-\beta\varepsilon_3\left(C^3_{23}-C^4_{24}\right)=0,$$
$$\left(\left(3C^4_{13}+C^3_{14}\right)\beta-2(\rho_1-\alpha)C^3_{13}\right)\varepsilon_3+\beta C^1_{34}\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(3C^4_{23}+C^3_{24}\right)\beta-2(\rho_1-\alpha)C^3_{23}\right)\varepsilon_3+\beta C^2_{34}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(C^4_{13}+3C^3_{14}\right)\beta+2C^4_{14}(\rho_1-\alpha)\right)\varepsilon_3+\beta C^1_{34}\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C^4_{23}+3C^3_{24}\right)\beta+2C^4_{24}(\rho_1-\alpha)\right)\varepsilon_3+\beta C^2_{34}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(C^3_{14}-C^4_{13}\right)\alpha+\left(C^4_{13}-C^3_{14}\right)\rho_1+2\beta C^4_{14}\right)\varepsilon_3+C^1_{34}\varepsilon_1(\rho_1-\alpha)=0,$$
$$\left(\left(C^3_{24}-C^4_{23}\right)\alpha+\left(C^4_{23}-C^3_{24}\right)\rho_1+2\beta C^4_{24}\right)\varepsilon_3+C^2_{34}\varepsilon_2(\rho_1-\alpha)=0,$$
$$\left(\left(C^3_{14}-C^4_{13}\right)\alpha+\left(C^4_{13}-C^3_{14}\right)\rho_1+2\beta C^3_{13}\right)\varepsilon_3-C^1_{34}\varepsilon_1(\rho_1-\alpha)=0,$$
$$\left(\left(C^3_{24}-C^4_{23}\right)\alpha+\left(C^4_{23}-C^3_{24}\right)\rho_1+2\beta C^3_{23}\right)\varepsilon_3-C^2_{34}\varepsilon_2(\rho_1-\alpha)=0,$$
$$\left(\alpha C^1_{23}-\beta C^1_{24}-\rho_1C^1_{23}\right)\varepsilon_1+\left(\alpha C^2_{13}-\beta C^2_{14}-\rho_1C^2_{13}\right)\varepsilon_2+ \\ +\left(\alpha C^3_{12}+\beta C^4_{12}-\rho_1C^3_{12}\right)\varepsilon_3=0,$$
$$\left(\alpha C^1_{24}+\beta C^1_{23}-\rho_1C^1_{24}\right)\varepsilon_1+\left(\alpha C^2_{14}+\beta C^2_{13}-\rho_1C^2_{14}\right)\varepsilon_2- \\ -\left(\alpha C^4_{12}-\beta C^3_{12}-\rho_1C^4_{12}\right)\varepsilon_3=0,$$
$$\left(\alpha C^1_{23}-\beta C^1_{24}-\rho_1C^1_{23}\right)\varepsilon_1+\left(\alpha C^2_{13}-\beta C^2_{14}-\rho_1C^2_{13}\right)\varepsilon_2- \\ -\left(\alpha C^3_{12}+\beta C^4_{12}-\rho_1C^3_{12}\right)\varepsilon_3=0,$$
$$\left(\alpha C^1_{24}+\beta C^1_{23}-\rho_1C^1_{24}\right)\varepsilon_1+\left(\alpha C^2_{14}+\beta C^2_{13}-\rho_1C^2_{14}\right)\varepsilon_2+ \\ +\left(\alpha C^4_{12}-\beta C^3_{12}-\rho_1C^4_{12}\right)\varepsilon_3=0.$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (2.8). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(11)1\overline{1}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{21\overline{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1\rho_1&0&0\\ \varepsilon_1\rho_1&\varepsilon_1&0&0\\ 0&0&\varepsilon_2\alpha&\varepsilon_2\beta\\ 0&0&\varepsilon_2\beta&-\varepsilon_2\alpha\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0&\varepsilon_1&0&0\\ \varepsilon_1&0&0&0\\ 0&0&\varepsilon_2&0\\ 0&0&0&-\varepsilon_2\end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где $\rho_1,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$
\begin{gathered}
C_{12}^2\varepsilon_1 = 0,\\
C_{34}^3\beta\varepsilon_2 = 0, \quad C_{34}^4\beta\varepsilon_2 = 0,\\
\left((\rho_1-\alpha)\,C_{13}^2+\beta C_{14}^2\right)\varepsilon_1 = 0, \quad \left((\alpha-\rho_1)\,C_{14}^2+\beta C_{13}^2\right)\varepsilon_1 = 0,\\
C_{34}^2\,(\rho_1-\alpha)\,\varepsilon_1-\beta\varepsilon_2\left(C_{13}^3-C_{14}^4\right) = 0,\\
\left((\alpha-\rho_1)\,C_{12}^3+\beta C_{12}^4\right)\varepsilon_2+C_{13}^2\varepsilon_1 = 0,\\
\left((\rho_1-\alpha)\,C_{12}^4+\beta C_{12}^3\right)\varepsilon_2+C_{14}^2\varepsilon_1 = 0,\\
\left(C_{34}^1\,(\rho_1-\alpha)+C_{34}^2\right)\varepsilon_1-\beta\varepsilon_2\left(C_{23}^3-C_{24}^4\right) = 0,\\
\left(\left(3C_{13}^4+C_{14}^3\right)\beta-2C_{13}^3\,(\rho_1-\alpha)\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^2\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^4+3C_{14}^3\right)\beta+2C_{14}^4\,(\rho_1-\alpha)\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^2\varepsilon_1 = 0,\\
\left(2\,(\rho_1-\alpha)\,C_{23}^1+2\beta C_{24}^1-C_{13}^1+3C_{23}^2\right)\varepsilon_1-C_{12}^3\varepsilon_2 = 0,\\
\left(2\,(\rho_1-\alpha)\,C_{24}^1-2\beta C_{23}^1-C_{14}^1+3C_{24}^2\right)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2 = 0,\\
\left(\left(3C_{23}^4+C_{24}^3\right)\beta+2\,(\alpha-\rho_1)\,C_{23}^3-2C_{13}^3\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{23}^4+3C_{24}^3\right)\beta+2\,(\rho_1-\alpha)\,C_{24}^4+2C_{14}^4\right)\varepsilon_2+\beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\rho_1+2\beta C_{14}^4\right)\varepsilon_2+C_{34}^2\,(\rho_1-\alpha)\,\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\rho_1+2\beta C_{13}^3\right)\varepsilon_2-C_{34}^2\,(\rho_1-\alpha)\,\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\rho_1-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\alpha+\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\beta\right)\varepsilon_1-\\
-\left(\alpha C_{12}^3+\beta C_{12}^4-\rho_1 C_{12}^3\right)\varepsilon_2 = 0,\\
\left(\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_1-\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\alpha-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\beta\right)\varepsilon_1+\\
+\left(\alpha C_{12}^4-\beta C_{12}^3-\rho_1 C_{12}^4\right)\varepsilon_2 = 0,\\
\left(\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha+\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\rho_1+2\beta C_{24}^4+C_{13}^4-C_{14}^3\right)\varepsilon_2-\\
-\left(\alpha C_{34}^1-\rho_1 C_{34}^1-C_{34}^2\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha+\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\rho_1+2\beta C_{23}^3+C_{13}^4-C_{14}^3\right)\varepsilon_2+\\
+\left(\alpha C_{34}^1-\rho_1 C_{34}^1-C_{34}^2\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\rho_1-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\alpha+\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\beta+2C_{13}^2\right)\varepsilon_1+\\
+\left(\alpha C_{12}^3+\beta C_{12}^4-\rho_1 C_{12}^3\right)\varepsilon_2 = 0,\\
\left(\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\rho_1-\left(C_{14}^1+C_{24}^2\right)\alpha-\left(C_{13}^1+C_{23}^2\right)\beta+2C_{14}^2\right)\varepsilon_1-\\
-\left(\alpha C_{12}^4-\beta C_{12}^3-\rho_1 C_{12}^4\right)\varepsilon_2 = 0.
\end{gathered}
$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (2.9). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{21\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{2\bar{2}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha \\ \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.10}$$

где $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^3\beta\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4\beta\varepsilon_1 = 0, \\
\left(C_{13}^4 - C_{23}^3 + C_{12}^1 + 2C_{14}^3\right)\beta\varepsilon_1 = 0, \\
\left(C_{12}^2 + C_{14}^4 - C_{24}^3 - 2C_{23}^4\right)\beta\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{12}^2 + C_{13}^3 - C_{23}^4\right)\beta + C_{12}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{12}^1 + C_{14}^3 - C_{24}^4\right)\beta - C_{12}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(C_{12}^2 + C_{14}^4 + 3C_{24}^3 + 2C_{23}^4\right)\beta\varepsilon_1 = 0, \\
\left(C_{12}^1 - C_{23}^3 - 3C_{13}^4 - 2C_{14}^3\right)\beta\varepsilon_1 = 0, \\
\left(4\beta C_{34}^2 + C_{13}^2 - C_{14}^1 + 2C_{23}^1 + 3C_{34}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(4\beta C_{34}^1 - C_{23}^2 + C_{24}^1 + 2C_{14}^2 - 3C_{34}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{12}^2 - C_{14}^4 + C_{24}^3 + 2C_{13}^3\right)\beta + 2C_{12}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{12}^1 - C_{13}^4 + C_{23}^3 - 2C_{24}^4\right)\beta - 2C_{12}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{12}^2 + C_{24}^3 + 3C_{14}^4 - 2C_{13}^3\right)\beta - 2C_{12}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{12}^1 - C_{13}^4 - 3C_{23}^3 + 2C_{24}^4\right)\beta + 2C_{12}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{23}^2 - C_{34}^4 + 3C_{24}^1 + 2C_{14}^2\right)\beta - 4C_{24}^4\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(\left(C_{14}^1 + C_{34}^3 + 3C_{13}^2 + 2C_{23}^1\right)\beta + 4C_{13}^3\right)\varepsilon_1 = 0, \\
\left(2\left(C_{13}^1 - C_{14}^2 - C_{34}^4\right)\beta + C_{12}^1 - C_{13}^4 - C_{23}^3\right)\varepsilon_1 = 0,
\end{gathered}$$

$$\left(2\left(C_{23}^{1}-C_{24}^{2}-C_{34}^{3}\right)\beta-C_{12}^{2}-C_{14}^{4}-C_{24}^{3}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C_{13}^{2}-C_{14}^{1}+2C_{24}^{2}+C_{34}^{3}\right)\beta-2C_{23}^{4}+2C_{24}^{3}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C_{24}^{1}-C_{23}^{2}+2C_{13}^{1}-C_{34}^{4}\right)\beta-2C_{13}^{4}+2C_{14}^{3}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C_{13}^{2}+3C_{14}^{1}-2C_{24}^{2}+C_{34}^{3}\right)\beta+C_{12}^{2}-3C_{14}^{4}+C_{24}^{3}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C_{34}^{4}-3C_{23}^{2}+2C_{13}^{1}-C_{24}^{1}\right)\beta-C_{12}^{1}-3C_{23}^{3}+C_{13}^{4}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C_{13}^{2}-C_{14}^{1}+2C_{23}^{1}-C_{34}^{3}\right)\beta-C_{12}^{2}-C_{14}^{4}-2C_{23}^{4}+C_{24}^{3}\right)\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\left(C_{34}^{4}-C_{23}^{2}+2C_{14}^{2}+C_{24}^{1}\right)\beta-C_{12}^{1}-C_{13}^{4}+2C_{14}^{3}+C_{23}^{3}\right)\varepsilon_1=0.$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (2.10). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{2\bar{2}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\alpha_1 & \varepsilon_1\beta_1 & 0 & 0\\ \varepsilon_1\beta_1 & -\varepsilon_1\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha_2 & \varepsilon_2\beta_2\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta_2 & -\varepsilon_2\alpha_2\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}\varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2\end{pmatrix},\tag{2.11}$$

где $\alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_i=\pm1$, $\beta_i\neq0$, $(\alpha_1-\alpha_2)^2+(\beta_1-\beta_2)^2\neq0$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$C_{12}^{2}\beta_1\varepsilon_1=0,\quad C_{12}^{1}\beta_1\varepsilon_1=0,$$
$$C_{34}^{4}\beta_2\varepsilon_2=0,\quad C_{34}^{3}\beta_2\varepsilon_2=0,$$
$$\left((\alpha_1-\alpha_2)C_{34}^{1}+\beta_1C_{34}^{2}\right)\varepsilon_1-\varepsilon_2\beta_2\left(C_{13}^{3}-C_{14}^{4}\right)=0,$$
$$\left((\alpha_2-\alpha_1)C_{34}^{2}+\beta_1C_{34}^{1}\right)\varepsilon_1-\varepsilon_2\beta_2\left(C_{23}^{3}-C_{24}^{4}\right)=0,$$
$$\left((\alpha_2-\alpha_1)C_{12}^{3}+\beta_2C_{12}^{4}\right)\varepsilon_2+\beta_1\varepsilon_1\left(C_{13}^{1}-C_{23}^{2}\right)=0,$$
$$\left((\alpha_1-\alpha_2)C_{12}^{4}+\beta_2C_{12}^{3}\right)\varepsilon_2+\beta_1\varepsilon_1\left(C_{14}^{1}-C_{24}^{2}\right)=0,$$
$$\left(\left(3C_{13}^{2}+C_{23}^{1}\right)\beta_1+2(\alpha_1-\alpha_2)C_{13}^{1}+2\beta_2C_{14}^{1}\right)\varepsilon_1-\beta_1C_{12}^{3}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(3C_{14}^{2}+C_{24}^{1}\right)\beta_1+2(\alpha_1-\alpha_2)C_{14}^{1}-2\beta_2C_{13}^{1}\right)\varepsilon_1+\beta_1C_{12}^{4}\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\left(C_{13}^{2}+3C_{23}^{1}\right)\beta_1+2(\alpha_2-\alpha_1)C_{23}^{2}-2\beta_2C_{24}^{2}\right)\varepsilon_1-\beta_1C_{12}^{3}\varepsilon_2=0,$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(C_{14}^2+3C_{24}^1\right)\beta_1+2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)C_{24}^2+2\beta_2C_{23}^2\right)\varepsilon_1+\beta_1C_{12}^4\varepsilon_2=0,\\
&\left(\left(3C_{13}^4+C_{14}^3\right)\beta_2+2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)C_{13}^3+2\beta_1C_{23}^3\right)\varepsilon_2+\beta_2C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(3C_{23}^4+C_{24}^3\right)\beta_2+2\left(\alpha_2-\alpha_1\right)C_{23}^3-2\beta_1C_{13}^3\right)\varepsilon_2-\beta_2C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{13}^4+3C_{14}^3\right)\beta_2+2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)C_{14}^4-2\beta_1C_{24}^4\right)\varepsilon_2+\beta_2C_{34}^1\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{23}^4+3C_{24}^3\right)\beta_2+2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)C_{24}^4+2\beta_1C_{14}^4\right)\varepsilon_2-\beta_2C_{34}^2\varepsilon_1=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\left(C_{23}^1-C_{13}^2\right)\alpha_1+\left(C_{13}^2-C_{23}^1\right)\alpha_2+\left(C_{24}^1-C_{14}^2\right)\beta_2+2\beta_1C_{23}^2\right)\varepsilon_1+\\
&\qquad\qquad+\left(\alpha_1C_{12}^3-\alpha_2C_{12}^3-\beta_2C_{12}^4\right)\varepsilon_2=0,\\
&\left(\left(C_{24}^1-C_{14}^2\right)\alpha_1+\left(C_{14}^2-C_{24}^1\right)\alpha_2+\left(C_{13}^2-C_{23}^1\right)\beta_2+2\beta_1C_{24}^2\right)\varepsilon_1-\\
&\qquad\qquad-\left(\alpha_1C_{12}^4-\alpha_2C_{12}^4+\beta_2C_{12}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
&\left(\left(C_{23}^1-C_{13}^2\right)\alpha_1+\left(C_{13}^2-C_{23}^1\right)\alpha_2+\left(C_{24}^1-C_{14}^2\right)\beta_2+2\beta_1C_{13}^1\right)\varepsilon_1-\\
&\qquad\qquad-\left(\alpha_1C_{12}^3-\alpha_2C_{12}^3-\beta_2C_{12}^4\right)\varepsilon_2=0,\\
&\left(\left(C_{24}^1-C_{14}^2\right)\alpha_1+\left(C_{14}^2-C_{24}^1\right)\alpha_2+\left(C_{13}^2-C_{23}^1\right)\beta_2+2\beta_1C_{14}^1\right)\varepsilon_1+\\
&\qquad\qquad+\left(\alpha_1C_{12}^4-\alpha_2C_{12}^4+\beta_2C_{12}^3\right)\varepsilon_2=0,\\
&\left(\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\alpha_1+\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha_2+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\beta_1+2\beta_2C_{14}^4\right)\varepsilon_2+\\
&\qquad\qquad+\left(\alpha_1C_{34}^1-\alpha_2C_{34}^1+\beta_1C_{34}^2\right)\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\alpha_1+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha_2+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\beta_1+2\beta_2C_{24}^4\right)\varepsilon_2-\\
&\qquad\qquad-\left(\alpha_1C_{34}^2-\alpha_2C_{34}^2-\beta_1C_{34}^1\right)\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\alpha_1+\left(C_{14}^3-C_{13}^4\right)\alpha_2+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\beta_1+2\beta_2C_{13}^3\right)\varepsilon_2-\\
&\qquad\qquad-\left(\alpha_1C_{34}^1-\alpha_2C_{34}^1+\beta_1C_{34}^2\right)\varepsilon_1=0,\\
&\left(\left(C_{23}^4-C_{24}^3\right)\alpha_1+\left(C_{24}^3-C_{23}^4\right)\alpha_2+\left(C_{13}^4-C_{14}^3\right)\beta_1+2\beta_2C_{23}^3\right)\varepsilon_2+\\
&\qquad\qquad+\left(\alpha_1C_{34}^2-\alpha_2C_{34}^2-\beta_1C_{34}^1\right)\varepsilon_1=0.
\end{aligned}
$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получаем, что данная метрическая алгебра Ли обязана быть Риччи плоской, что противоречит виду тензора Риччи (2.11). Следовательно, не существует четырехмерных метрических групп Ли с тривиальным тензором Схоутена–Вейля, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{1\bar{1}1\bar{1}\}$.

Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(1\bar{1}1\bar{1})\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и

тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\alpha & \varepsilon_1\beta & 0 & 0 \\ \varepsilon_1\beta & -\varepsilon_1\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\alpha & \varepsilon_2\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_2\beta & -\varepsilon_2\alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

где $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, $\beta \neq 0$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^2\beta\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^1\beta\varepsilon_1 = 0, \\
C_{34}^4\beta\varepsilon_2 = 0, \quad C_{34}^3\beta\varepsilon_2 = 0, \\
\left(\left(C_{13}^3 - C_{14}^4\right)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta = 0, \quad \left(\left(C_{23}^3 - C_{24}^4\right)\varepsilon_2 - C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{13}^1 - C_{23}^2\right)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta = 0, \quad \left(\left(C_{14}^1 - C_{24}^2\right)\varepsilon_1 + C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{14}^2 - C_{24}^1 - 2C_{23}^2\right)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{23}^1 - C_{13}^2 - 2C_{24}^2\right)\varepsilon_1 + C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{24}^1 - C_{14}^2 + 2C_{13}^1\right)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{13}^2 - C_{23}^1 + 2C_{14}^1\right)\varepsilon_1 + C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{13}^4 - C_{14}^3 + 2C_{24}^4\right)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{13}^4 - C_{14}^3 + 2C_{23}^3\right)\varepsilon_2 - C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{24}^3 - C_{23}^4 + 2C_{13}^3\right)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{23}^1 + 2C_{14}^1 + 3C_{13}^2\right)\varepsilon_1 - C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{24}^1 - 2C_{13}^1 + 3C_{14}^2\right)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{13}^2 - 2C_{24}^2 + 3C_{23}^1\right)\varepsilon_1 - C_{12}^3\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{14}^2 + 2C_{23}^2 + 3C_{24}^1\right)\varepsilon_1 + C_{12}^4\varepsilon_2\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{13}^4 - 2C_{24}^4 + 3C_{14}^3\right)\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{23}^4 + 2C_{14}^4 + 3C_{24}^3\right)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(\left(C_{24}^3 - 2C_{13}^3 + 3C_{23}^4\right)\varepsilon_2 - C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(2C_{14}^4\varepsilon_2 - C_{23}^4\varepsilon_2 + C_{24}^3\varepsilon_2 + C_{34}^2\varepsilon_1\right)\beta = 0, \\
\left(3C_{13}^4\varepsilon_2 + C_{14}^3\varepsilon_2 + 2C_{23}^3\varepsilon_2 + C_{34}^1\varepsilon_1\right)\beta = 0.
\end{gathered}$$

Решая систему уравнений (2.1) относительно структурных констант алгебры Ли, получаем, что данная метрическая группа Ли обязана иметь параллельный тензор Риччи. □

Из теоремы 2.2 немедленно получаем

Следствие 2.3. *Если четырехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой имеет нулевой тензор Схоутена–Вейля, то метрика является либо конформно плоской, либо Риччи параллельной.*

Доказательство. Оператор Риччи четырехмерной группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой может иметь только тип Сегре $\{1111\}$ и соответствующие вырожденные типы, что противоречит теореме 2.2. □

Теорема 2.4. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{1(12)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в табл. 2.*

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{1(12)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
C_{23}^2\varepsilon_2 = 0,\ \ & C_{23}^4\varepsilon_3 = 0,\\
C_{34}^4\varepsilon_3 = 0,\ \ & C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
C_{13}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) = 0,\ \ & C_{23}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2) = 0,\ \ & C_{13}^4\varepsilon_3(\rho_1-\rho_2) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
\left((\rho_1-\rho_2)C_{14}^1 - C_{13}^1\right)\varepsilon_1 = 0,\\
\left(3C_{24}^4 - C_{23}^3\right)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
(\rho_1-\rho_2)C_{34}^1\varepsilon_1 - C_{13}^4\varepsilon_3 = 0,\\
(\rho_1-\rho_2)\left(\left(C_{13}^3 + C_{14}^4\right)\varepsilon_3 - C_{34}^1\varepsilon_1\right) = 0,\\
\left(C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
\left(C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1\right)(\rho_1-\rho_2) = 0,
\end{gathered}$$

$$\left(2\left(\rho_2-\rho_1\right)C_{14}^3-C_{13}^3+3C_{14}^4\right)\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1=0,$$
$$\left(2\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{24}^1-C_{23}^1\right)\varepsilon_1-C_{12}^4\varepsilon_3-C_{13}^2\varepsilon_2=0,$$
$$\left(\rho_2C_{12}^3-\rho_1C_{12}^3+2C_{12}^4\right)\varepsilon_3-\left(C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)=0,$$
$$\left(\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\rho_2-\left(C_{13}^3+C_{14}^4\right)\rho_1+2C_{13}^4\right)\varepsilon_3-\left(\rho_1-\rho_2\right)C_{34}^1\varepsilon_1=0,$$
$$\left(\rho_1C_{24}^1-\rho_2C_{24}^1-C_{23}^1\right)\varepsilon_1+\left(\rho_2C_{14}^2-\rho_1C_{14}^2-C_{13}^2\right)\varepsilon_2-$$
$$-\left(\rho_1C_{12}^3-\rho_2C_{12}^3-C_{12}^4\right)\varepsilon_3=0.$$

Решая данную систему получим, что

$$[e_1,e_2]=C_{12}^3e_3+\frac{1}{2}\left(\varepsilon_3C_{14}^2\varepsilon_2+C_{12}^3\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)e_4,$$
$$[e_1,e_3]=-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_2C_{12}^3\varepsilon_3+C_{14}^2\right)\left(\rho_1-\rho_2\right)e_2-\frac{1}{2}C_{14}^3\left(\rho_1-\rho_2\right)e_3,$$
$$[e_2,e_3]=C_{23}^3e_3,$$
$$[e_1,e_4]=C_{14}^2e_2+C_{14}^3e_3+\frac{1}{2}C_{14}^3\left(\rho_1-\rho_2\right)e_4,$$
$$[e_2,e_4]=C_{24}^2e_2+C_{24}^3e_3+C_{24}^4e_4,$$
$$[e_3,e_4]=\varepsilon_2\varepsilon_3\left(C_{23}^3-3C_{24}^4\right)e_2+C_{34}^3e_3.$$

Далее, накладывая условие выполнения тождества Якоби и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные решения, получаем однопараметрическую метрическую алгебру Ли:

$$[e_2,e_3]=3\alpha_1e_3,\quad [e_2,e_4]=-\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3+\alpha_1e_4,\quad \alpha_1\neq 0;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

Отметим, что заменой базиса с g-ортогональной матрицей перехода вида

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\operatorname{sign}(\alpha_1)&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

параметр α_1 можно сделать положительным. □

Теорема 2.5. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(11)2\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в табл. 2.*

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(11)2\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где ρ_1, ρ_2 — неравные действительные числа, и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
C^4_{34}\varepsilon_3 = 0, &\quad C^1_{13}(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
C^2_{23}(\rho_1-\rho_2) = 0, &\quad C^4_{12}(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
C^4_{13}(\rho_1-\rho_2) = 0, &\quad C^4_{23}(\rho_1-\rho_2) = 0, \\
C^1_{14}(\rho_1-\rho_2) - C^1_{13} = 0, &\quad C^2_{24}(\rho_1-\rho_2) - C^2_{23} = 0, \\
C^3_{12}(\rho_1-\rho_2) - C^4_{12} = 0, &\quad C^1_{34}(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_1 - C^4_{13}\varepsilon_3 = 0, \\
C^2_{34}(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_2 - C^4_{23}\varepsilon_3 = 0, &\quad C^4_{12}\varepsilon_3 + C^2_{13}\varepsilon_2 + C^1_{23}\varepsilon_1 = 0, \\
C^4_{12}\varepsilon_3 - C^2_{13}\varepsilon_2 - C^1_{23}\varepsilon_1 = 0, &\quad \left(C^3_{13} + C^4_{14}\right)\varepsilon_3 - C^1_{34}\varepsilon_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\left(C^3_{23} + C^4_{24}\right)\varepsilon_3 - C^2_{34}\varepsilon_2 = 0,$$

$$\left(2(\rho_1-\rho_2)C^3_{14} + C^3_{13} - 3C^4_{14}\right)\varepsilon_3 - C^1_{34}\varepsilon_1 = 0,$$

$$\left(2(\rho_1-\rho_2)C^3_{24} + C^3_{23} - 3C^4_{24}\right)\varepsilon_3 - C^2_{34}\varepsilon_2 = 0,$$

$$\left(\left(C^3_{13} + C^4_{14}\right)\rho_1 - \left(C^3_{13} + C^4_{14}\right)\rho_2 - 2C^4_{13}\right)\varepsilon_3 + C^1_{34}(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_1 = 0,$$

$$\left(\left(C^3_{23} + C^4_{24}\right)\rho_1 - \left(C^3_{23} + C^4_{24}\right)\rho_2 - 2C^4_{23}\right)\varepsilon_3 + C^2_{34}(\rho_1-\rho_2)\varepsilon_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\left(\rho_1 C^1_{24} - \rho_2 C^1_{24} - C^1_{23}\right)\varepsilon_1 + &\left(\rho_1 C^2_{14} - \rho_2 C^2_{14} - C^2_{13}\right)\varepsilon_2 + \\
&+ \left(\rho_1 C^3_{12} - \rho_2 C^3_{12} - C^4_{12}\right)\varepsilon_3 = 0, \\
\left(\rho_1 C^1_{24} - \rho_2 C^1_{24} - C^1_{23}\right)\varepsilon_1 + &\left(\rho_1 C^2_{14} - \rho_2 C^2_{14} - C^2_{13}\right)\varepsilon_2 - \\
&- \left(\rho_1 C^3_{12} - \rho_2 C^3_{12} - C^4_{12}\right)\varepsilon_3 = 0.
\end{aligned}$$

Решая данную систему получим, что

$$[e_1,e_2] = C^1_{12}e_1 + C^2_{12}e_2, \quad [e_1,e_3] = -\frac{1}{2}\rho_1 C^3_{14}e_3,$$

$$[e_2,e_3] = -\frac{1}{2}\rho_1 C^3_{24}e_3, \quad [e_1,e_4] = C^3_{14}e_3 + \frac{1}{2}\rho_1 C^3_{14}e_4,$$

$$[e_2,e_4] = C^3_{24}e_3 + \frac{1}{2}\rho_1 C^3_{24}e_4.$$

Тождество Якоби и вид тензора Риччи в данной алгебре Ли накладывают следующие ограничения:

$$C^1_{12}C^3_{14}+C^2_{12}C^3_{24}=0,\quad \rho_1=-\varepsilon_2\left(C^1_{12}\right)^2-\varepsilon_1\left(C^2_{12}\right)^2,$$
$$\rho_1\left(\left(C^3_{14}\right)^2\varepsilon_1+\left(C^3_{24}\right)^2\varepsilon_2\right)-C^1_{12}C^3_{24}\varepsilon_2+C^2_{12}C^3_{14}\varepsilon_1+1=0,$$
$$\left(C^3_{14}\right)^2+\left(C^3_{24}\right)^2\neq 0.$$

Рассмотрим замены базиса в данной алгебре Ли с матрицами следующего вида

$$M=\left\{\begin{pmatrix} f(\varphi) & -\varepsilon_1\varepsilon_2 h(\varphi) & 0 & 0\\ h(\varphi) & f(\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pm1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \pm1\end{pmatrix}\right\},\text{ где}$$

$$f(\varphi)=\begin{cases}\cos(\varphi), & \varepsilon_2=\varepsilon_1,\\ \operatorname{ch}(\varphi), & \varepsilon_2=-\varepsilon_1;\end{cases}\qquad h(\varphi)=\begin{cases}\sin(\varphi), & \varepsilon_2=\varepsilon_1,\\ \operatorname{sh}(\varphi), & \varepsilon_2=-\varepsilon_1.\end{cases}$$

Такие замены базиса не изменяют метрический тензор и тензор Риччи. При преобразовании базиса следующие структурные константы будут иметь вид

$$\left(C^3_{14}\right)'=C^3_{14}f(\varphi)-C^3_{24}h(\varphi),\quad \left(C^3_{24}\right)'=C^3_{24}f(\varphi)-\varepsilon_1\varepsilon_2C^3_{14}h(\varphi).$$

Т.к. случай $C^3_{14}=\pm C^3_{24}$ ведет к противоречию с видом тензора Риччи, и с учетом того, что C^3_{14} и C^3_{24} одновременно не зануляются, мы всегда можем выбрать угол φ так, чтобы либо $\left(C^3_{14}\right)'=0$, либо $\left(C^3_{24}\right)'=0$. Таким образом, получим два решения:

$$[e_1,e_2]=\frac{\delta_1\sqrt{5}-\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_1,\ [e_2,e_3]=\frac{3\varepsilon_2-\delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1}e_3,\ [e_2,e_4]=\alpha_1e_3+\frac{\delta_1\sqrt{5}-3\varepsilon_2}{4\alpha_1}e_4,$$
$$\delta_1=\pm1,\ \alpha_1\neq 0;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1;$$

и

$$[e_1,e_2]=\frac{\delta_1\sqrt{5}+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_2,\ [e_1,e_3]=\frac{3\varepsilon_1+\delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1}e_3,\ [e_1,e_4]=\alpha_1e_3-\frac{\delta_1\sqrt{5}+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4,$$
$$\delta_1=\pm1,\ \alpha_1\neq 0;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1.$$

Однако, замена базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит первое решение во второе. Кроме того, заменой базиса с g-ортогональной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

параметр α_1 можно сделать положительным. Таким образом, решением является единственное однопараметрическое семейство метрических алгебр Ли. $\square$

Теорема 2.6. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в табл. 2.*

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\rho_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} C_{13}^1\varepsilon_1 = 0, \quad C_{13}^4\varepsilon_3 = 0, \\ C_{23}^2\varepsilon_2 = 0, \quad C_{23}^4\varepsilon_3 = 0, \\ C_{12}^4\varepsilon_3 = 0, \quad C_{34}^4\varepsilon_3 = 0, \\ (3C_{14}^4 - C_{13}^3)\varepsilon_3 + C_{34}^1\varepsilon_1 = 0, \quad (3C_{24}^4 - C_{23}^3)\varepsilon_3 + C_{34}^2\varepsilon_2 = 0, \\ C_{12}^4\varepsilon_3 + C_{13}^2\varepsilon_2 + C_{23}^1\varepsilon_1 = 0, \quad C_{12}^4\varepsilon_3 - C_{13}^2\varepsilon_2 - C_{23}^1\varepsilon_1 = 0. \end{gathered}$$

Решая данную систему получим, что

$$
\begin{gathered}
[e_1,e_2]=C_{12}^1e_1+C_{12}^2e_2+C_{12}^3e_3,\\
[e_1,e_3]=C_{13}^3e_3,\quad [e_2,e_3]=C_{23}^3e_3,\\
[e_1,e_4]=C_{14}^1e_1+C_{14}^2e_2+C_{14}^3e_3,\\
[e_2,e_4]=C_{24}^1e_1+C_{24}^2e_2+C_{24}^3e_3,\\
[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3C_{13}^3e_1+\varepsilon_2\varepsilon_3C_{23}^3e_2+C_{34}^3e_3,
\end{gathered}
$$

Далее, накладывая условие выполнения тождества Якоби и отбрасывая конформно плоские и Риччи параллельные решения, получаем следующие решения:

(a)

$$
\begin{gathered}
[e_1,e_2]=-\alpha_1\delta_1e_1+\alpha_1e_2,\quad [e_1,e_3]=\alpha_1e_3,\quad [e_2,e_3]=\delta_1\alpha_1e_3,\\
[e_1,e_4]=-\alpha_2\delta_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3,\quad [e_2,e_4]=-\alpha_4\delta_1e_1+\alpha_4e_2+\alpha_5e_3,\\
[e_3,e_4]=\alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1e_1-\delta_1\alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1e_2-\\
-\frac{4\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3-4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3-2\alpha_2\alpha_4\delta_1+\alpha_2^2+\alpha_4^2+2\varepsilon_3}{2(\alpha_2\delta_1-\alpha_4)}e_3,\\
4\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3-4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3-2\alpha_2\alpha_4\delta_1+\alpha_2^2+\alpha_4^2+2\varepsilon_3\neq0,\\
\alpha_2\delta_1-\alpha_4\neq0,\\
4\alpha_1\alpha_2\alpha_3\delta_1\varepsilon_3-4\alpha_1\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3+\alpha_2^3\delta_1\varepsilon_1-\alpha_2\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_1-4\alpha_1\alpha_2\alpha_5\varepsilon_3+\\
+4\alpha_1\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3-\alpha_2^2\alpha_4\varepsilon_1+2\alpha_2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3+\alpha_4^3\varepsilon_1+2\alpha_4\varepsilon_1\varepsilon_3\neq0,\\
\delta_1=\pm1;\\
\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=-\varepsilon_1,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm1.
\end{gathered}
$$

(b)

$$
\begin{gathered}
[e_1,e_2]=\alpha_1\delta_1e_2+\alpha_1e_1+\alpha_2e_3,\\
[e_1,e_4]=-\frac{\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1\alpha_3+2\varepsilon_1)}{2\alpha_1}e_3,\\
[e_2,e_4]=\alpha_3e_3,\quad [e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_3+2)}{2\alpha_2}e_3,\\
\alpha_1\neq0,\quad \alpha_2\neq0,\\
4\alpha_1\alpha_3\varepsilon_3+\alpha_2^2\varepsilon_1+2\varepsilon_1\varepsilon_3\neq0,\quad \alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq0,
\end{gathered}
$$

$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c)

$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_3\delta_1 e_3 + \alpha_4 e_1 + \alpha_5 e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_5^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_1+\alpha_5)} e_3,$$
$$\alpha_1 + \alpha_5 \neq 0,$$
$$4\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1 + \alpha_1\alpha_2^2\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4\varepsilon_1 - 3\alpha_1\alpha_4^2\varepsilon_2 - 4\alpha_1\alpha_5^2\varepsilon_1 + 3\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_2 +$$
$$+2\alpha_2\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_4^2\alpha_5\varepsilon_2 - 2\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_1^2\alpha_2\varepsilon_2 - 2\alpha_1^2\alpha_4\varepsilon_1 - 4\alpha_1\alpha_2\alpha_5\varepsilon_2 - 4\alpha_1\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1 + \alpha_2^3\varepsilon_1 + 3\alpha_2^2\alpha_4\varepsilon_2 +$$
$$+3\alpha_2\alpha_4^2\varepsilon_1 - 2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_2 + \alpha_4^3\varepsilon_2 + 2\alpha_4\alpha_5^2\varepsilon_1 + 2\alpha_2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\alpha_4\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2\alpha_4 + 2\alpha_5^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d)

$$[e_1,e_4] = -\frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\, e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1 + \frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\, e_2 + \delta_1\alpha_2 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\varepsilon_2\alpha_3^2 - \varepsilon_2\alpha_1^2 - \delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\varepsilon_1\alpha_4 \neq 0,$$
$$\alpha_4\alpha_1\varepsilon_2 - \alpha_1\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\varepsilon_2 +$$
$$+ \delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\alpha_3\varepsilon_1 + \alpha_4\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\alpha_4 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Уменьшим количество параметров в полученных решениях. Если $\alpha_1 \neq 0$, то замена базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\varepsilon_3 & B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2-B^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B = -2\delta_1\varepsilon_1(&\alpha_2^4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\delta_1\varepsilon_3 - 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3\delta_1\varepsilon_3 - \alpha_4^4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - \\ &-2\alpha_2^3\alpha_4\alpha_5\varepsilon_3 + 6\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_4^3\alpha_5\varepsilon_3 + 2\alpha_3\alpha_4^4\varepsilon_3 - 2\alpha_2^2\alpha_5\delta_1 - \\ &-2\alpha_4^2\alpha_5\delta_1 + 4\alpha_2\alpha_4\alpha_5)/ \\ &/((\alpha_2\delta_1-\alpha_4)(\alpha_2^4+6\alpha_2^2\alpha_4^2+\alpha_4^4-4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1-4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1-4)), \end{aligned}$$

$$A = \frac{(\alpha_2\delta_1-\alpha_4)(\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1\alpha_3)}{(\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_3-2\alpha_2\alpha_4\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3+\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3-4\alpha_1\alpha_5\delta_1+4\alpha_1\alpha_3+2\varepsilon_1)\alpha_1},$$

зануляет параметры α_2 и α_3 в решении (a). Если же $\alpha_1 = 0$, то замена базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\varepsilon_3 & B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2-B^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} B = -2\varepsilon_1(&6\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_4^3\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 + 2\alpha_3\alpha_4^4\delta_1\varepsilon_3 + \alpha_2^4\alpha_5\varepsilon_3 - \\ &-2\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 - 6\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3\varepsilon_3 - \alpha_4^4\alpha_5\varepsilon_3 + 4\alpha_2\alpha_4\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_2^2\alpha_5 - 2\alpha_4^2\alpha_5)/ \\ &/((\alpha_2\delta_1-\alpha_4)(\alpha_2^4+6\alpha_2^2\alpha_4^2+\alpha_4^4-4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1-4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1-4)), \\ A = -2\varepsilon_1(&\alpha_2^3\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 + 4\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5\delta_1\varepsilon_3 - \alpha_2\alpha_3\alpha_4^2\delta_1\varepsilon_3 - 2\alpha_2^3\alpha_5\varepsilon_3 - \alpha_2^2\alpha_3\alpha_4\varepsilon_3 - \\ &-2\alpha_2\alpha_4^2\alpha_5\varepsilon_3 + \alpha_3\alpha_4^3\varepsilon_3 + 2\alpha_2\alpha_3\delta_1 - 2\alpha_3\alpha_4)/ \\ &/(\alpha_2^4+6\alpha_2^2\alpha_4^2+\alpha_4^4-4\alpha_2^3\alpha_4\delta_1-4\alpha_2\alpha_4^3\delta_1-4), \end{aligned}$$

обнулит параметры α_3 и α_5. Заметим, что все знаменатели не равны нулю в силу ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (b) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1\alpha_3\delta_1-2\alpha_1\alpha_3+2\delta_1\varepsilon_1}{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1\alpha_3\delta_1+2\alpha_1\alpha_3+2\delta_1\varepsilon_1}\right)$; либо с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1\alpha_3\delta_1-2\alpha_1\alpha_3+2\delta_1\varepsilon_1}{\alpha_2^2\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3+2\alpha_1\alpha_3\delta_1+2\alpha_1\alpha_3+2\delta_1\varepsilon_1}\right)$. Данные замены занулят параметр α_3. Заметим, что одна из данных замен всегда возможна из-за ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (c), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & -\cos(\varphi) & 0 & B \\ -\sin(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \cos(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & -\frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -\frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\sin(\varphi)\delta_1+\cos(\varphi))}{\cos^2(\varphi)\alpha_4+\cos^2(\varphi)\alpha_2+\sin(\varphi)\cos(\varphi)\alpha_5-\sin(\varphi)\cos(\varphi)\alpha_1-\alpha_4},$$
$$\varphi = -\arctan((2\alpha_1\alpha_2\delta_1+2\alpha_2\alpha_5\delta_1+2\alpha_1^2-2\alpha_1\alpha_5+\alpha_2^2+2\alpha_2\alpha_4+\alpha_4^2+2\varepsilon_3)/$$
$$/(\alpha_2^2\delta_1-2\alpha_1\alpha_5\delta_1+2\alpha_2\alpha_4\delta_1+\alpha_4^2\delta_1+2\alpha_5^2\delta_1+2\alpha_1\alpha_4+2\alpha_4\alpha_5+2\delta_1\varepsilon_3));$$

если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & B \\ \mathrm{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \mathrm{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\mathrm{ch}(\varphi)-\mathrm{sh}(\varphi)\delta_1)}{\mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_4-\mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_2+\mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi)\alpha_5-\mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi)\alpha_1-\alpha_4},$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\ln((2\alpha_1\alpha_2\delta_1-2\alpha_1\alpha_5\delta_1-\alpha_2^2\delta_1+2\alpha_2\alpha_4\delta_1+2\alpha_2\alpha_5\delta_1-\alpha_4^2\delta_1+2\alpha_5^2\delta_1+$$
$$+2\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_4-2\alpha_1\alpha_5-\alpha_2^2+2\alpha_2\alpha_4-\alpha_4^2+2\alpha_4\alpha_5+2\delta_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3)/$$
$$/(-2\alpha_1\alpha_2\delta_1-2\alpha_1\alpha_5\delta_1-\alpha_2^2\delta_1+2\alpha_2\alpha_4\delta_1-2\alpha_2\alpha_5\delta_1-\alpha_4^2\delta_1+2\alpha_5^2\delta_1-$$
$$-2\alpha_1^2+2\alpha_1\alpha_4+2\alpha_1\alpha_5+\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_4+\alpha_4^2+2\alpha_4\alpha_5+2\delta_1\varepsilon_3-2\varepsilon_3));$$

или

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sh}(\varphi) & \mathrm{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \mathrm{ch}(\varphi) & \mathrm{sh}(\varphi) & 0 & B \\ \mathrm{ch}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & \mathrm{sh}(\varphi)B\varepsilon_1\varepsilon_3 & 1 & \frac{1}{2}B^2\varepsilon_1\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$B = \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1(\mathrm{sh}(\varphi) - \mathrm{ch}(\varphi)\delta_1)}{\alpha_5\,\mathrm{ch}(\varphi)\,\mathrm{sh}(\varphi) - \alpha_1\,\mathrm{sh}(\varphi)\,\mathrm{ch}(\varphi) - \alpha_2\,\mathrm{ch}^2(\varphi) + \mathrm{ch}^2(\varphi)\alpha_4 + \alpha_2},$$

$$\begin{aligned}\varphi = \frac{1}{2}\ln(-(&2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 + \\ &+2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 - 2\alpha_1\alpha_5 - \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha_4 - \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3)/ \\ &/(-2\alpha_1\alpha_2\delta_1 - 2\alpha_1\alpha_5\delta_1 - \alpha_2^2\delta_1 + 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 - 2\alpha_2\alpha_5\delta_1 - \alpha_4^2\delta_1 + 2\alpha_5^2\delta_1 - \\ &-2\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_4 + 2\alpha_1\alpha_5 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4 + \alpha_4^2 + 2\alpha_4\alpha_5 + 2\delta_1\varepsilon_3 - 2\varepsilon_3)).\end{aligned}$$

Вышеприведенные замены обнулят параметр α_3. Но они невозможны в следующих случаях: $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\alpha_9 = -\alpha_7$; либо $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ и $\alpha_8 = -\frac{2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}$, где $\alpha_1 = (\alpha_6 + \alpha_7)\delta_1$, $\alpha_5 = (\alpha_6 - \alpha_7)\delta_1$, $\alpha_2 = \alpha_8 + \alpha_9$, $\alpha_4 = \alpha_8 - \alpha_9$.

Для решения (d) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ -A\varepsilon_1\delta_2\varepsilon_3 & -B\varepsilon_2\delta_2\varepsilon_3 & \delta_2 & -\frac{1}{2}(A^2\varepsilon_1 + B^2\varepsilon_2)\delta_2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -\frac{2\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2\left(\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,\delta_1\delta_2 + 2\alpha_4\delta_1 + 2\alpha_3\right)}{\alpha_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 4\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1},$$

$$A = \frac{2\alpha_2(\delta_2\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3} - 2\delta_1\alpha_1 - 2\alpha_4)}{\alpha_1^2\varepsilon_2\varepsilon_3 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_3^2\varepsilon_2\varepsilon_3 + 4\alpha_4^2\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1},$$

что обнулит параметр α_2, а параметр δ_2 сделает равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$[e_1,e_2] = -\alpha_1\delta_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_1,e_3] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_3] = \delta_1\alpha_1 e_3,$$

$$[e_2,e_4] = -\alpha_4\delta_1 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3,$$

$$[e_3,e_4] = \alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1 e_1 - \delta_1\alpha_1\varepsilon_3\varepsilon_1 e_2 - \frac{4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3}{2\alpha_4}e_3,$$

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_4 \neq 0,$$
$$\alpha_4^2\varepsilon_3 - 4\alpha_1\alpha_5\delta_1\varepsilon_1 + 2 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(a.2)

$$[e_1,e_4] = -\alpha_2\delta_1 e_1 + \alpha_2 e_2,$$
$$[e_2,e_4] = -\alpha_4\delta_1 e_1 + \alpha_4 e_2,$$
$$[e_3,e_4] = -\frac{\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_4\delta_1 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2(\alpha_2\delta_1 - \alpha_4)}e_3,$$
$$\alpha_2\delta_1 - \alpha_4 \neq 0,$$
$$(\alpha_2 - \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_4)(\alpha_2\delta_1 - \alpha_4) + 2\varepsilon_3(\alpha_2\delta_1 + \alpha_4) \neq 0,$$
$$(\alpha_2 - \alpha_4\delta_1 +)^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1\delta_1 e_2 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = -\frac{\varepsilon_1\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1}e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\varepsilon_1\delta_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2}e_3,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9)e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_9\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2)e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_9^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_7\varepsilon_1 + 4\alpha_6\alpha_8\alpha_9\varepsilon_2 - 2\alpha_7^3\varepsilon_1 - 2\alpha_7\alpha_9^2\varepsilon_2 - \alpha_7\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$

$$2\alpha_6^2\alpha_9\varepsilon_2 - 4\alpha_6\alpha_7\alpha_8\varepsilon_2 - 2\alpha_7^2\alpha_9\varepsilon_2 - 2\alpha_9^3\varepsilon_1 - \alpha_9\varepsilon_2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_9^2\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + (\alpha_8 - \alpha_7)e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_8 + \alpha_7)e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_7^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_7 - 2\alpha_7^3 + 4\alpha_7^2\alpha_9 + 2\alpha_7\alpha_9^2 - 4\alpha_9^3 - \alpha_7\varepsilon_3 + 2\alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_9 + 4\alpha_7^3 - 2\alpha_7^2\alpha_9 - 4\alpha_7\alpha_9^2 + 2\alpha_9^3 + 2\alpha_7\varepsilon_3 - \alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1)

$$[e_1,e_4] = -\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,e_1 + \alpha_1 e_2,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1 + \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\varepsilon_3}\,e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_4 e_3,$$

$$-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_1\alpha_3-2\varepsilon_3\geqslant 0,$$

$$\varepsilon_1\alpha_1^2+\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_1\alpha_3-2\varepsilon_3}\alpha_4\varepsilon_2-\varepsilon_1\alpha_3^2\neq 0,$$

$$\alpha_4\alpha_1\varepsilon_2-\alpha_1\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_1\alpha_3-2\varepsilon_3}\varepsilon_2+$$
$$+\sqrt{-\alpha_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_3^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_1\alpha_3-2\varepsilon_3}\alpha_3\varepsilon_1+\alpha_4\alpha_3\varepsilon_1\neq 0,$$

$$\alpha_4\neq 0,$$

$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1,e_4]=-\frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}e_1+(\alpha_5\varepsilon_2+\alpha_6\varepsilon_2)e_2+\alpha_2e_3,$$

$$[e_2,e_4]=(\alpha_5\varepsilon_1-\alpha_6\varepsilon_1)e_1+\frac{1}{2}\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}e_2+\delta_1\alpha_2e_3,$$

$$[e_3,e_4]=\frac{1}{2}\delta_3\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}e_3,$$

$$-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3\geqslant 0,\quad -4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3>0,$$

$$\delta_2\delta_3\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\varepsilon_2+8\alpha_5\alpha_6\varepsilon_1\neq 0,$$

$$\delta_3\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\alpha_5-2\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\alpha_6\neq 0,$$

$$\delta_i=\pm 1;$$

$$\langle e_1,e_1\rangle=\varepsilon_1,\quad \langle e_2,e_2\rangle=\varepsilon_2,\quad \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_3,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

Для решения (a.1) сделаем замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1\operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_4) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр δ_1 равным единице, а параметры α_1 и α_4 положительными.

Для решения (a.2) сделаем замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \delta_1\operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_1\operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1\operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1\operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}{\alpha_4\delta_1-\alpha_2}\right)$; либо с матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_1\operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}(\varphi) & \delta_1\operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1\operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1\operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_4^2-\alpha_2^2}{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}\right) \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\alpha_4\delta_1+\alpha_2}{\alpha_4\delta_1-\alpha_2}\right)$. После одной из этих замен параметр δ_1 будет равным единице, параметр α_2 занулится, а параметр α_4 станет положительным. Заметим, что одна из данных замен всегда возможна из-за ограничений на структурные константы, которые приведены выше.

Для решения (b) сделаем замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \delta_1\operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1\operatorname{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр δ_1 равным единице, а параметры α_1 и α_2 положительными.

Для решения (c.1), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\alpha_9}{\delta_1\alpha_7}\right)$, что обратит параметр α_9 в ноль; если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где либо $\varphi = \frac{1}{4}\ln\left(-\frac{\alpha_7\delta_1-\alpha_9}{\alpha_7\delta_1+\alpha_9}\right)$, и тогда параметр α_7 будет равен нулю; либо $\varphi = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\alpha_7\delta_1-\alpha_9}{\alpha_7\delta_1+\alpha_9}\right)$, и тогда параметр α_9 будет равен нулю. Если же $\alpha_7 \pm \alpha_9 = 0$, то после замены базиса с $\varphi = \pm\frac{1}{2}\ln(|\alpha_7|)$, параметр α_7 становится равным ± 1.

Для решения (c.2), выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & -\frac{2\delta_1\alpha_3(\operatorname{sh}(\varphi)-\operatorname{ch}(\varphi))\alpha_6\varepsilon_1}{2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3-1} \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & \frac{2\delta_1\alpha_3(\operatorname{sh}(\varphi)-\operatorname{ch}(\varphi))\alpha_6\varepsilon_1}{2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3-1} \\ \frac{2\varepsilon_3\delta_1\alpha_3\alpha_6}{1-2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3} & \frac{2\varepsilon_3\alpha_3\alpha_6}{1-2\alpha_6\alpha_8\varepsilon_3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln(|\alpha_7|)$, что сделает параметр α_3 равным нулю, параметр α_7 равным ± 1, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (c.3), выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_1}{\alpha_7-\alpha_9} \\ 0 & \delta_1 & 0 & \frac{\alpha_3\varepsilon_3\varepsilon_1\delta_1}{\alpha_7-\alpha_9} \\ -\frac{\delta_1\alpha_3}{\alpha_7-\alpha_9} & \frac{\alpha_3}{\alpha_7-\alpha_9} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_3 равным нулю, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (d.1), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\alpha_5}{\sqrt{-4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}\right)$, что обратит параметр α_5 в ноль; если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\pm 2+\sqrt{2}}{\sqrt{4\alpha_5^2-2}-2\alpha_5}\right)$, если $\varepsilon_3 = 1$; либо $\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\pm 2+\sqrt{6}}{\sqrt{4\alpha_5^2+2}-2\alpha_5}\right)$, если $\varepsilon_3 = -1$. После данной замены параметр α_5 становится равным ± 1.

Для решения (d.2), если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\delta_3 \sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \delta_3 \cos(\varphi) & 0 & B \\ -\sin(\varphi) B \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_3 & -\cos(\varphi) B \varepsilon_1 \varepsilon_3 & \delta_3 & -\frac{1}{2} B^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{gathered} B = 2\alpha_2 \varepsilon_3 (\sin(\varphi)\delta_3\delta_1 + \cos(\varphi)\delta_3\delta_1 - \cos(\varphi) + \sin(\varphi))/ \\ /(2\sin(\varphi)\cos(\varphi)\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 + 4\sin(\varphi)\cos(\varphi)\delta_3\alpha_5 - 4\cos^2(\varphi)\delta_3\alpha_5 + \\ +2\cos^2(\varphi)\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 - 2\delta_3\alpha_6 + 2\delta_3\alpha_5 - \\ -\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 - \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3), \\ \varphi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2 - \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_5\delta_1 - 2\alpha_6\delta_1}{\sqrt{-4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\delta_1\delta_2\delta_3\varepsilon_1 + \sqrt{-4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\delta_1\varepsilon_1 + 2\alpha_5\delta_3 - 2\alpha_6\delta_3} \right); \end{gathered}$$

если $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$, то используем g-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \delta_1\delta_3 \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_3 \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & B \\ \delta_1 \operatorname{sh}(\varphi) B \varepsilon_1 \varepsilon_3 & \operatorname{ch}(\varphi) B \varepsilon_1 \varepsilon_3 & \delta_3 & \frac{1}{2} B^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{gathered} B = 2\alpha_2\varepsilon_3(\operatorname{sh}(\varphi)\delta_1 - \operatorname{sh}(\varphi)\delta_3 - \operatorname{ch}(\varphi)\delta_1 + \delta_3\operatorname{ch}(\varphi))/ \\ /(2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\operatorname{ch}(\varphi)\operatorname{sh}(\varphi)\varepsilon_1\delta_1\delta_2 + 2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\operatorname{ch}^2(\varphi)\varepsilon_1\delta_2\delta_3 + \\ +4\operatorname{ch}(\varphi)\operatorname{sh}(\varphi)\delta_1\alpha_5\delta_3 - \varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\delta_3 + 4\operatorname{ch}^2(\varphi)\alpha_5 - \\ -\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1 - 2\alpha_5 + 2\alpha_6), \\ \varphi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_6\delta_1}{\varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} + 2\alpha_5\delta_1} \right); \end{gathered}$$

либо

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}(\varphi) & \delta_1 \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ -\delta_3\delta_1 \operatorname{ch}(\varphi) & -\delta_3 \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & B \\ -\operatorname{ch}(\varphi) B \varepsilon_1 \varepsilon_3/\delta_1 & -\operatorname{sh}(\varphi) B \varepsilon_1 \varepsilon_3 & \delta_3 & \frac{1}{2} B^2 \varepsilon_1 \varepsilon_3 \delta_3 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

где

$$B = -2\alpha_2\varepsilon_3(\delta_1 \operatorname{ch}(\varphi) + \delta_3 \operatorname{ch}(\varphi) - \operatorname{sh}(\varphi)\delta_1 - \operatorname{sh}(\varphi)\delta_3)/$$
$$/(2\operatorname{ch}(\varphi)^2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2\delta_1 - 2\operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi)\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3\delta_2 -$$
$$-4\operatorname{ch}^2(\varphi)\delta_3\alpha_5\delta_1 - \sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_2\delta_1 + \sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3\delta_1 +$$
$$+ 4\operatorname{sh}(\varphi)\operatorname{ch}(\varphi)\alpha_5 + 2\delta_3\alpha_5\delta_1 + 2\delta_3\alpha_6\delta_1),$$
$$\varphi = \frac{1}{2}\ln\left(-\frac{\sqrt{4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3}\varepsilon_1\delta_3 - 2\alpha_6\delta_1}{\varepsilon_1\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3} + 2\alpha_5\delta_1}\right).$$

Вышеприведенные замены обратят параметр α_2 в ноль, а параметр δ_3 сделают равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$[e_1,e_2] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_1,e_3] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_3] = \alpha_1 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_3 e_1 - \alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_3 e_2 - \frac{4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3}{2\alpha_4}e_3,$$
$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_4 > 0,$$
$$\alpha_4^2\varepsilon_1 - 4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_3 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(a.2)

$$[e_2,e_4] = -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2, \quad [e_3,e_4] = \frac{\alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_4}e_3,$$
$$\alpha_4 > 0, \quad \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1}e_3, \quad [e_3,e_4] = \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2}e_3,$$
$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1.1)

$$\begin{gathered}
[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + \alpha_8 e_2,\\
[e_2,e_4] = -\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2 e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2,\\
[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,\\
\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad \alpha_8 \neq 0,\\
2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 \neq 0,\\
\delta_1 = \pm 1;\\
\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}$$

(c.1.2)

$$\begin{gathered}
[e_1,e_4] = \alpha_6\delta_1 e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9)e_2,\\
[e_2,e_4] = (\alpha_8 - \alpha_9)e_1 + \alpha_6\delta_1 e_2,\\
[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,\\
\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_8 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0,\\
2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0,\\
\delta_1 = \pm 1;\\
\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}$$

(c.1.3)

$$\begin{gathered}
[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \delta_1\delta_2)e_1 + (\alpha_8 + \delta_3)e_2,\\
[e_2,e_4] = (-\alpha_8 + \delta_3)e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \delta_1\delta_2)e_2,\\
[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3 + 4)}{2\alpha_6}e_3,\\
\alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 4\varepsilon_3 + 1 \neq 0,\\
2\alpha_6^2\delta_2 + 4\alpha_6\alpha_8\delta_3 - \delta_2\varepsilon_3 - 4\delta_2 \neq 0,\\
2\alpha_6^2\delta_3 - 4\alpha_6\alpha_8\delta_2 - \delta_3\varepsilon_3 - 4\delta_3 \neq 0,\\
\delta_i = \pm 1;\\
\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.
\end{gathered}$$

(c.2.1)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6 + \delta_2)e_1 + (\alpha_8 - \delta_2)e_2,$$

$$[e_2,e_4] = (\alpha_8 + \delta_2)e_1 + (\alpha_6 - \delta_2)e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2.2)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_7^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2,e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_7 - 2\alpha_7^3 + 4\alpha_7^2\alpha_9 + 2\alpha_7\alpha_9^2 - 4\alpha_9^3 - \alpha_7\varepsilon_3 + 2\alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\alpha_9 + 4\alpha_7^3 - 2\alpha_7^2\alpha_9 - 4\alpha_7\alpha_9^2 + 2\alpha_9^3 + 2\alpha_7\varepsilon_3 - \alpha_9\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.2)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2 + \delta_1\alpha_3 e_3,$$

$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2+\varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3+1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1.1)

$$[e_1,e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \alpha_6 e_2,$$
$$[e_2,e_4] = -\alpha_6 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_6 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = -1, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1.2)

$$[e_1,e_4] = -\frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (\delta_3+\alpha_6)e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_6-\delta_3)e_1 + \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_4 - 4\delta_3\alpha_6 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_6 - \alpha_4\delta_3 \neq 0,$$
$$\delta_3 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1,e_4] = -\frac{\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (\alpha_5\varepsilon_2+\alpha_6\varepsilon_2)e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_5\varepsilon_1-\alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}}{2}e_3,$$
$$-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3 > 0, \quad -4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3 \geqslant 0,$$
$$8\varepsilon_2\alpha_5\alpha_6 + \delta_2\varepsilon_1\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3} \neq 0,$$
$$2\delta_2\sqrt{-4\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\alpha_6 - \sqrt{-4\alpha_6^2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\varepsilon_3}\alpha_5 \neq 0,$$

$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Для решения (a.1), выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1^2+1}{2\alpha_1} & \frac{\alpha_1^2-1}{2\alpha_1} & 0 & A \\ \frac{\alpha_1^2-1}{2\alpha_1} & \frac{\alpha_1^2+1}{2\alpha_1} & 0 & B \\ -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A\alpha_1^2-B\alpha_1^2+A+B)}{2\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A\alpha_1^2-B\alpha_1^2-A-B)}{2\alpha_1} & 1 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3(A^2-B^2)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A = -\frac{\alpha_4(4\alpha_1^5\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_1^4\alpha_4^2 - 4\alpha_1^3\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 + 2\alpha_1^2\alpha_4^2 - \alpha_4^2)}{4\alpha_1^4(4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3)},$$
$$B = -\frac{\alpha_4(4\alpha_1^5\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_1^4\alpha_4^2 - 4\alpha_1^3\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - 4\alpha_1^4\varepsilon_3 + 4\alpha_1^2\varepsilon_3 + \alpha_4^2)}{4\alpha_1^4(4\alpha_1\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3)},$$

что сделает параметр α_1 равным единице.

Замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\alpha_4\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (a.2) в решение (c.2.1).

Для решения (c.1.2), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр ε_1 равным единице.

Замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & \delta_2\delta_1\delta_3\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & 0 & 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) & -\delta_2\delta_1\delta_3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.1.3) в решение (c.1.1).

Для решения (c.1.1) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_8) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_8 положительным, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (c.2.1), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр ε_1 равным единице.

Для решения (c.2.2) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_3^2+1}{2\alpha_3} & \frac{\delta_1(\alpha_3^2-1)}{2\alpha_3} & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_3^2 01}{2\alpha_3} & \frac{\delta_1(\alpha_3^2+1)}{2\alpha_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \operatorname{sign}(\alpha_6) \end{pmatrix}$$

если $\alpha_3 \neq 0$, что сделает параметры α_3 и δ_1 равными единице.

Для решения (c.3.1) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}(\varphi) & \operatorname{sh}(\varphi) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}(\varphi) & \operatorname{ch}(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{\alpha_9 - \alpha_7}{\alpha_9 + \alpha_7} \right)$, если $\alpha_9^2 > \alpha_7^2$, что сделает параметр α_7 равным нулю; либо $\varphi = \frac{1}{4} \ln \left(-\frac{\alpha_9 - \alpha_7}{\alpha_9 + \alpha_7} \right)$, если $\alpha_9^2 < \alpha_7^2$, что сделает параметр α_9 равным нулю.

Замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\alpha_6\alpha_3\varepsilon_1\delta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\alpha_6\alpha_3\delta_1\varepsilon_3 & 0 & 1 & -2\varepsilon_1\alpha_6^2\alpha_3^2\varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.3.2) в решение (c.2.2).

Замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\alpha_5\varepsilon_1\delta_2}{\sqrt{-4\alpha_5^2+2}}\right)$, переводит решение (d.2) (если $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ и $\varepsilon_3 = -1$) в решение (d.1.1).

Для решения (d.1.1), если $\alpha_4 < 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_4 положительным.

Для решения (d.1.2) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр δ_3 равным единице.

Таким образом получим следующие метрические алгебры Ли

(a.1)

$$[e_1,e_2] = -e_1 + e_2, \quad [e_1,e_3] = e_3, \quad [e_2,e_3] = e_3,$$
$$[e_2,e_4] = -\alpha_4 e_1 + \alpha_4 e_2 + \alpha_5 e_3,$$

$$[e_3,e_4] = \varepsilon_1\varepsilon_3 e_1 - \varepsilon_1\varepsilon_3 e_2 + \frac{-4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 + \alpha_4^2 + 2\varepsilon_3}{2\alpha_4} e_3,$$
$$4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_3 - \alpha_4^2 - 2\varepsilon_3 \neq 0, \quad \alpha_4 > 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = -\frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_1} e_3, \quad [e_3,e_4] = \frac{\varepsilon_1(\alpha_2^2\varepsilon_3 + 2)}{2\alpha_2} e_3,$$
$$\alpha_1 > 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_2^2 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1.1)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7) e_1 + \alpha_8 e_2, \quad [e_2,e_4] = -\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2 e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7) e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_8 > 0, \quad \alpha_7 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1.2)

$$[e_1,e_4] = \alpha_6\delta_1 e_1 + (\alpha_8 + \alpha_9) e_2, \quad [e_2,e_4] = (\alpha_8 - \alpha_9) e_1 + \alpha_6\delta_1 e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_8 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = 1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \pm 1.$$

(c.2.1)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6 + \delta_2) e_1 + (\alpha_8 - \delta_2) e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_8 + \delta_2) e_1 + (\alpha_6 - \delta_2) e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6} e_3,$$

$$\alpha_6 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_8 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = 1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_3 = \pm 1.$$

(c.2.2.1)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2 + e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_2 + e_3,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2.2.2)

$$[e_1, e_4] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6},$$
$$[e_2, e_4] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6\delta_1 - \alpha_7\delta_1)e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{\delta_1(2\alpha_6^2 + \varepsilon_3)}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1.1)

$$[e_1, e_4] = \alpha_6 e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_9 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2, e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_9 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + \alpha_6 e_2,$$
$$[e_3, e_4] = \frac{2\alpha_6^2 - 2\alpha_9^2 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_9 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 - 2\alpha_9^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2 + 2\alpha_9^2 - \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1, e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2, e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3, e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1.2)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6+\alpha_7)e_1 - \frac{2\alpha_7^2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2,e_4] = -\frac{2\alpha_7^2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6-\alpha_7)e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_6^2+2\alpha_7^2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 2\alpha_7^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2 - 2\alpha_7^2 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_7^2 + \varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.3.1.3)

$$[e_1,e_4] = (\alpha_6+\alpha_7)e_1 + \frac{2\alpha_6\alpha_7\delta_2-\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_2,$$
$$[e_2,e_4] = -\frac{2\alpha_6\alpha_7\delta_2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_1 + (\alpha_6-\alpha_7)e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_6^2+\varepsilon_3}{2\alpha_6}e_3,$$
$$\alpha_6 \neq 0, \quad \alpha_7 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\varepsilon_3 + 1 \neq 0,$$
$$2\alpha_6^2 + 2\delta_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3 \neq 0, \quad 2\alpha_6^2\delta_2 - \delta_2\varepsilon_3 + 2\varepsilon_3 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.1.1)

$$[e_1,e_4] = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \alpha_6 e_2, \quad [e_2,e_4] = -\alpha_6 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_4 > 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = -1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

(d.1.2)

$$[e_1,e_4] = -\frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (1+\alpha_6)e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_6-1)e_1 + \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_4 e_3,$$

$$\alpha_4 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_4 - 4\alpha_6 \neq 0, \quad \sqrt{4-2\varepsilon_3}\alpha_6 - \alpha_4 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d.2)

$$[e_1,e_4] = -\frac{\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}{2}e_1 + (-\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_2,$$
$$[e_2,e_4] = (\alpha_5\varepsilon_1 - \alpha_6\varepsilon_1)e_1 + \frac{\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}{2}e_2,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\sqrt{4\alpha_6^2-2\varepsilon_3}}{2}e_3,$$
$$4\alpha_6^2 - 2\varepsilon_3 > 0, \quad 4\alpha_5^2 - 2\varepsilon_3 \geqslant 0,$$
$$2\alpha_6\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3} - \sqrt{4\alpha_6^2-2\varepsilon_3}\alpha_5 \neq 0,$$
$$\delta_2\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}\sqrt{4\alpha_6^2-2\varepsilon_3} - 8\alpha_5\alpha_6 \neq 0,$$
$$\delta_2 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = -\varepsilon_1, \quad \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Для решения (c.2.2.2) замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = 1$, либо с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & \delta_1\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = -1$ переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (c.2.1).

При $\varepsilon_1 = 1$ решение (c.3.1.1) совпадает с решением (c.1.2) с точностью до переобозначения параметра α_8; при $\varepsilon_1 = -1$ замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.3.1.1) в решение (c.1.2).

Отметим, что решение (c.3.1.2) совпадает с решением (c.1.1) при $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$ с точностью до переобозначения параметра α_7.

Для решения (c.3.1.3) замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = 1$, либо с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & -\delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|\alpha_7|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при $\varepsilon_1 = -1$ переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (c.2.1).

Для решения (d.2) замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & \operatorname{sign}(A) \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & \operatorname{sign}(A) \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(|A|\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(A)\,\delta_2 \end{pmatrix}$$

где $A = \frac{\sqrt{4-2\varepsilon_3}-2}{2\alpha_5\varepsilon_1+\sqrt{4\alpha_5^2-2\varepsilon_3}}$, переводит данную метрическую алгебру Ли в решение (d.1.2).

Для решения (c.1.1), если $\alpha_7 < 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_7 положительным. Далее, если $\alpha_6 < 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_6 положительным.

Для решения (c.1.2) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_6)\operatorname{sign}(\alpha_9)\delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_6)\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_6)\delta_1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметры α_6 и α_9 положительными, а параметр δ_1 равным единице.

Для решения (c.2.1) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_2 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр δ_2 равным единице.

Для решения (c.2.2.1), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр ε_1 равным единице. После этого выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_6) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_6 положительным.

Для решения (d.1.1) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_6 неотрицательным.

Для решения (d.1.2), если $\varepsilon_1 = -1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр ε_1 равным единице. После этого, если $\varepsilon_3 = -1$, то выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & -\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & -\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(3-2\sqrt{2}\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_6 неотрицательным; если $\varepsilon_3 = 1$, то используем g-ортогональную матрицу

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & -\operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & 0 & 0 \\ \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & -\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\left(5-2\sqrt{6}\right)\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_4 положительным. □

Теорема 2.7. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в табл. 2.*

Доказательство. Пусть оператор Риччи имеет тип Сегре $\{111\bar{1}\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2\rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\alpha & \varepsilon_3\beta \\ 0 & 0 & \varepsilon_3\beta & -\varepsilon_3\alpha \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\rho_1,\rho_2,\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\varepsilon_i = \pm 1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет вид

$$
\begin{gathered}
2C_{34}^3\beta\varepsilon_3 = 0, \;\; 2C_{34}^4\beta\varepsilon_3 = 0,\\
C_{12}^1\varepsilon_1(\rho_1-\rho_2) = 0, \;\; C_{12}^2\varepsilon_2(\rho_1-\rho_2) = 0,\\
((\rho_1-\alpha)C_{13}^1+\beta C_{14}^1)\varepsilon_1 = 0, \;\; ((\alpha-\rho_1)C_{14}^1+\beta C_{13}^1)\varepsilon_1 = 0,\\
((\rho_2-\alpha)C_{23}^2+\beta C_{24}^2)\varepsilon_2 = 0, \;\; ((\alpha-\rho_2)C_{24}^2+\beta C_{23}^2)\varepsilon_2 = 0,\\
C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\alpha)-\beta\varepsilon_3(C_{13}^3-C_{14}^4) = 0, \;\; C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2-\alpha)-\beta\varepsilon_3(C_{23}^3-C_{24}^4) = 0,\\
((3C_{13}^4+C_{14}^3)\beta-2(\rho_1-\alpha)C_{13}^3)\varepsilon_3+\beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,\\
((3C_{23}^4+C_{24}^3)\beta-2(\rho_2-\alpha)C_{23}^3)\varepsilon_3+\beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
((C_{13}^4+3C_{14}^3)\beta+2C_{14}^4(\rho_1-\alpha))\varepsilon_3+\beta C_{34}^1\varepsilon_1 = 0,\\
((C_{23}^4+3C_{24}^3)\beta+2C_{24}^4(\rho_2-\alpha))\varepsilon_3+\beta C_{34}^2\varepsilon_2 = 0,\\
((2\alpha-\rho_1-\rho_2)C_{12}^3+2\beta C_{12}^4)\varepsilon_3-(\rho_1-\rho_2)(C_{13}^2\varepsilon_2+C_{23}^1\varepsilon_1) = 0,\\
((\rho_1+\rho_2-2\alpha)C_{12}^4+2\beta C_{12}^3)\varepsilon_3-(\rho_1-\rho_2)(C_{14}^2\varepsilon_2+C_{24}^1\varepsilon_1) = 0,\\
((C_{14}^3-C_{13}^4)\alpha+(C_{13}^4-C_{14}^3)\rho_1+2\beta C_{14}^4)\varepsilon_3+C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\alpha) = 0,\\
((C_{24}^3-C_{23}^4)\alpha+(C_{23}^4-C_{24}^3)\rho_2+2\beta C_{24}^4)\varepsilon_3+C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2-\alpha) = 0,\\
((C_{14}^3-C_{13}^4)\alpha+(C_{13}^4-C_{14}^3)\rho_1+2\beta C_{13}^3)\varepsilon_3-C_{34}^1\varepsilon_1(\rho_1-\alpha) = 0,\\
((C_{24}^3-C_{23}^4)\alpha+(C_{23}^4-C_{24}^3)\rho_2+2\beta C_{23}^3)\varepsilon_3-C_{34}^2\varepsilon_2(\rho_2-\alpha) = 0,\\
((2\rho_1-\rho_2-\alpha)C_{23}^1+\beta C_{24}^1)\varepsilon_1+(\rho_2C_{13}^2-\alpha C_{13}^2+\beta C_{14}^2)\varepsilon_2-\\
-(\alpha C_{12}^3+\beta C_{12}^4-\rho_2C_{12}^3)\varepsilon_3 = 0,\\
((2\rho_1-\rho_2-\alpha)C_{24}^1-\beta C_{23}^1)\varepsilon_1+(\rho_2C_{14}^2-\alpha C_{14}^2-\beta C_{13}^2)\varepsilon_2+\\
+(\alpha C_{12}^4-\beta C_{12}^3-\rho_2C_{12}^4)\varepsilon_3 = 0,\\
((2\rho_2-\rho_1-\alpha)C_{13}^2+\beta C_{14}^2)\varepsilon_2+(\rho_1C_{23}^1-\alpha C_{23}^1+\beta C_{24}^1)\varepsilon_1+\\
+(\alpha C_{12}^3+\beta C_{12}^4-\rho_1C_{12}^3)\varepsilon_3 = 0,\\
((2\rho_2-\rho_1-\alpha)C_{14}^2-\beta C_{13}^2)\varepsilon_2+(\rho_1C_{24}^1-\alpha C_{24}^1-\beta C_{23}^1)\varepsilon_1-\\
-(\alpha C_{12}^4-\beta C_{12}^3-\rho_1C_{12}^4)\varepsilon_3 = 0.
\end{gathered}
$$

Решая данную систему уравнений, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получим две метрические алгебры Ли:

$$
\begin{gathered}
[e_2,e_3] = -\sqrt{3}\delta_1\alpha_1e_3+\alpha_1e_4, \quad [e_2,e_4] = \alpha_1e_3+\sqrt{3}\delta_1\alpha_1e_4,\\
[e_3,e_4] = 2\varepsilon_2\varepsilon_3\alpha_1e_2,\\
\alpha_1 \neq 0, \quad \delta_1 = \pm 1;
\end{gathered}
$$

$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_3\rangle = -\langle e_4,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

и

$$[e_1,e_3] = -\sqrt{3}\delta_1\alpha_1 e_3 + \alpha_1 e_4, \quad [e_1,e_4] = \alpha_1 e_3 + \sqrt{3}\delta_1\alpha_1 e_4,$$
$$[e_3,e_4] = 2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1 e_1,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \delta_1 = \pm 1;$$
$$\langle e_1,e_1\rangle = \varepsilon_1, \quad \langle e_2,e_2\rangle = \varepsilon_2, \quad \langle e_3,e_3\rangle = -\langle e_4,e_4\rangle = \varepsilon_3, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Отметим, что замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

переводит первое решение во второе.

Для второго решения, если $\varepsilon_3 = -1$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр ε_3 равным единице. Далее, замена базиса с g-ортогональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1)\delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

делает параметр α_1 положительным, а параметр δ_1 равным единице. □

Теорема 2.8. *Пусть (G,g) — четырехмерная метрическая группа Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которой не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной, оператор Риччи которой имеет тип Сегре $\{(22)\}$. Тогда метрическая алгебра Ли группы G содержится в табл. 2.*

Доказательство. Пусть оператор Риччи ρ имеет тип Сегре $\{(22)\}$. Тогда в метрической алгебре Ли существует базис $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ такой, что метрический тензор g и тензор Риччи r имеют следующий вид

$$r=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1\rho_1 & 0 & 0\\ \varepsilon_1\rho_1 & \varepsilon_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1\\ 0 & 0 & \varepsilon_2\rho_1 & \varepsilon_2\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0 & \varepsilon_1 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2\\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0\end{pmatrix},$$

где $\rho_1\in\mathbb{R}$, $\varepsilon_i=\pm1$. Система уравнений (2.1) в данном базисе имеет вид

$$\begin{gathered}
C_{12}^2\varepsilon_1=0,\ \ C_{13}^2\varepsilon_1=0,\\
C_{13}^4\varepsilon_2=0,\ \ C_{34}^4\varepsilon_2=0,\\
C_{23}^4\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1=0,\ \ C_{12}^4\varepsilon_2+C_{14}^2\varepsilon_1=0,\\
(C_{13}^1+C_{23}^2)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2=0,\ \ (C_{13}^3+C_{14}^4)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
(3C_{23}^2-C_{13}^1)\varepsilon_1-C_{12}^4\varepsilon_2=0,\ \ (3C_{14}^4-C_{13}^3)\varepsilon_2+C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
(2C_{14}^2-C_{13}^1-C_{23}^2)\varepsilon_1+C_{12}^4\varepsilon_2=0,\\
(2C_{23}^4-C_{13}^3-C_{14}^4)\varepsilon_2-C_{34}^2\varepsilon_1=0,\\
(3C_{24}^2-2C_{23}^1-C_{14}^1)\varepsilon_1-C_{12}^3\varepsilon_2=0,\\
(3C_{24}^4-2C_{14}^3-C_{23}^3)\varepsilon_2+C_{34}^1\varepsilon_1=0.
\end{gathered}$$

Решая данную систему уравнений, а также накладывая условие выполнения тождества Якоби, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a)

$$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2\alpha_2-2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_2^2\alpha_5+2\alpha_5^3+\alpha_5\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_1-\\ -\frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_5}e_3,$$

$$[e_2,e_3]=\alpha_1e_1+(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2)e_3,$$

$$[e_1,e_4]=\frac{\alpha_1(\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_5)}{\alpha_5}e_1+\alpha_2e_3,$$

$$[e_2,e_4]=\alpha_3e_1+\alpha_4e_3,$$

$$[e_3,e_4]=\alpha_5e_1+\\ +\frac{2\alpha_1^2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_1^2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_2\alpha_5^3\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5-2\alpha_2^2\alpha_5^2+\alpha_5^2\varepsilon_1}{2\alpha_5\alpha_1(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_3,$$

$$\alpha_1\neq0,\quad \alpha_5\neq0,$$

$$\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq0,$$

$$2\alpha_1^3\alpha_2\alpha_4\varepsilon_2 - 2\alpha_1^3\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1 + 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_5\varepsilon_1 - 2\alpha_1^2\alpha_3\alpha_5^2\varepsilon_2 +$$
$$+2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4\alpha_5\varepsilon_2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_4\alpha_5^2\varepsilon_1 + 2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_5^2\varepsilon_1 - 2\alpha_2\alpha_3\alpha_5^3\varepsilon_2 +$$
$$+\alpha_1\alpha_4\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_3\alpha_5^2 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(b)

$$[e_1,e_2] = \frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1, \quad [e_2,e_3] = -\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)}{2\alpha_1}e_1 + \alpha_4 e_3,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2\alpha_4\varepsilon_1 - 2\alpha_1\alpha_3\varepsilon_2 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c)

$$[e_1,e_2] = \frac{(2\alpha_2^2+\varepsilon_1)}{2\alpha_2}e_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1 e_3,$$
$$[e_2,e_3] = -2\alpha_2 e_3, \quad [e_1,e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_3, \quad [e_3,e_4] = \frac{2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0,$$
$$2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4 + 2\alpha_2^3\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4\varepsilon_1 - \alpha_2\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(d)

$$[e_1,e_2] = \delta_1\sqrt{2}e_1, \quad [e_2,e_3] = -\delta_1\sqrt{2}e_3, \quad [e_1,e_4] = \frac{\delta_1\sqrt{2}}{2}e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3, \quad [e_3,e_4] = \alpha_3 e_3,$$
$$\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\delta_1\varepsilon_2\sqrt{2} \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = 1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

(e)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3, \quad [e_2,e_3] = \alpha_2 e_1,$$

$$[e_1,e_4] = -\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1, \quad [e_2,e_4] = \alpha_3 e_1 + \alpha_4 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = -\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3,$$
$$\alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_1\alpha_4\varepsilon_2 + 2\alpha_2\alpha_3\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f)

$$[e_1,e_2] = \frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1, \quad [e_2,e_3] = -\frac{2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{2\alpha_1^2-\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2+\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

Далее, замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (b) в решение (e).

Кроме того, замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (d) в решение (e).

Для решения (a), если $\alpha_1^2 \neq \frac{\alpha_5(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{2(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где

$$A=\frac{2\alpha_3\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}{(2\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_2^2\alpha_5-2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+\alpha_5\varepsilon_1)},$$

что сделает параметр α_3 равным нулю; если $\alpha_1^2=\frac{\alpha_5(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{2(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}1&0&0&A\\0&1&0&0\\0&-A\varepsilon_1\varepsilon_2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

где

$$A=\frac{\alpha_4\varepsilon_2\delta_1\sqrt{2\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2^3-2\alpha_2\alpha_5^2-\alpha_2\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_2)}}{2\alpha_5},$$

что сделает параметр α_4 равным нулю.

Для решения (c), если $2\alpha_2^2-\varepsilon_1\neq 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{2\alpha_1\alpha_4}{2\alpha_2^2-\varepsilon_1}\\0&1&0&0\\0&-\frac{2\alpha_4\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{2\alpha_2^2-\varepsilon_1}&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_4 равным нулю; если $2\alpha_2^2-\varepsilon_1=0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_3\\0&1&0&0\\0&\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_3\varepsilon_2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_3 равным нулю.

Для решения (e) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{\alpha_4\varepsilon_2\varepsilon_1}{2\alpha_2}\\0&1&0&0\\0&-\frac{\alpha_4}{2\alpha_2}&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_4 равным нулю.

Для решения (f), если $6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{4\alpha_2\alpha_1}{6\alpha_1^2+\varepsilon_1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\alpha_2\alpha_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{6\alpha_1^2+\varepsilon_1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_2 равным нулю.

Таким образом, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a.1)

$$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2\alpha_2+2\alpha_2^2\alpha_5+2\alpha_5^3-2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+\alpha_5\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)}e_1- \\ -\frac{\alpha_2\alpha_1}{\alpha_5}e_3,$$

$$[e_2,e_3]=\alpha_1e_1+(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2)e_3,$$

$$[e_1,e_4]=\frac{\alpha_1(\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_5)}{\alpha_5}e_1+\alpha_2e_3,\quad [e_2,e_4]=\alpha_4e_3,$$

$$[e_3,e_4]=\alpha_5e_1+ \\ +(2\alpha_1^2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_1^2\alpha_5^2\varepsilon_1\varepsilon_2+2\alpha_2\alpha_5^3\varepsilon_1\varepsilon_2-4\alpha_1^2\alpha_2\alpha_5-2\alpha_2^2\alpha_5^2+ \\ +\alpha_5^2\varepsilon_1)/(2\alpha_5(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\alpha_1)e_3,$$

$$\alpha_1\neq 0,\quad \alpha_4\neq 0,\quad \alpha_5\neq 0,$$

$$\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq 0,$$

$$2\alpha_1^2\alpha_2\varepsilon_2-2\alpha_1^2\alpha_5\varepsilon_1+2\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_2-2\alpha_2\alpha_5^2\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2\neq 0,$$

$$\langle e_1,e_2\rangle=\varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle=\varepsilon_2,\quad \varepsilon_i=\pm 1.$$

(a.2)

$$[e_1,e_2]=-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2e_1+\alpha_2\delta_1\sqrt{\frac{2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_3,$$

$$[e_2,e_3]=-\delta_1\sqrt{\frac{\alpha_5(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)}{2(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_1+(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2)e_3,$$

$$[e_1,e_4]=\delta_1(2\alpha_5-\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_2)\sqrt{\frac{2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1}{2\alpha_5(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)}}e_1+\alpha_2e_3,$$

$$[e_2,e_4]=\alpha_3e_1,$$

$$[e_3,e_4] = \alpha_5 e_1 + \frac{\delta_1(2\alpha_2^3\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2^2\alpha_5 + \alpha_2\varepsilon_2 - 2\alpha_5\varepsilon_1)}{\sqrt{2\alpha_5(2\alpha_2^2 - 2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_1)(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - \alpha_2)}} e_3,$$
$$\alpha_3 \neq 0, \quad \alpha_5 \neq 0, \quad \alpha_2 - \alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0,$$
$$\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\alpha_2^3 - 2\alpha_2\alpha_5^2 - \alpha_2\varepsilon_1 + \alpha_5\varepsilon_2) > 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.1)

$$[e_1,e_2] = \frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_2} e_1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_3] = -2\alpha_2 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_3 e_1,$$
$$[e_3,e_4] = \frac{2\alpha_1^2 - 2\alpha_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2}{2\alpha_1} e_3,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$2\alpha_2^2 - \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(c.2)

$$[e_1,e_2] = \sqrt{2}\delta_1 e_1 - \varepsilon_2\alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_3] = -\sqrt{2}\delta_1 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = \alpha_1 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = 1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

(e)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3,$$
$$[e_2,e_3] = \alpha_2 e_1, \quad [e_1,e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3,e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3,$$
$$\alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f.1)

$$[e_1,e_2] = \frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1, \quad [e_2,e_3] = -\frac{(2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_3 e_3 + \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)}{4\alpha_1}e_4,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$6\alpha_1^2+\varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2+\varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f.2)

$$[e_1,e_2] = -\frac{\sqrt{6}}{3}\delta_1 e_1, \quad [e_2,e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3}\delta_1 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6}\delta_1 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3}\delta_1 e_4,$$
$$\alpha_3 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = -1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Для решения (a.1), если $\alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_5^2\varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
\frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_4\varepsilon_1\alpha_1(\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-\alpha_2)\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_4\varepsilon_2\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\delta_8}{\alpha_5\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\
0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & -\frac{\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\
\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_4\varepsilon_1\alpha_1^2(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\delta_8}{\alpha_5\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_4\varepsilon_1\alpha_1(\alpha_2-\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2)\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\
0 & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_5\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_5^2\varepsilon_2)\delta_8}}
\end{pmatrix}$$

где $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (a.1) в решение (e).

Для решения (a.2), если $2\alpha_2^2\varepsilon_2 - 4\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1 + 2\alpha_5^2\varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix}
\frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & A\varepsilon_1\varepsilon_2 F\delta_1\sqrt{2} & -\frac{\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & A \\
0 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & -\frac{\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} \\
\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & -A\varepsilon_1\varepsilon_2 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & A\varepsilon_1\varepsilon_2 F\delta_1\sqrt{2} \\
0 & \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_8\delta_1 F\sqrt{2}}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & \frac{\delta_8}{\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}}
\end{pmatrix}$$

где $A = \frac{\varepsilon_1\delta_8 F^2(2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1)\alpha_3}{\alpha_5\sqrt{(2F^2\varepsilon_1+\varepsilon_2)\delta_8}}$, $F = \frac{\sqrt{\alpha_5(4\alpha_2^2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2-2\alpha_2^3-2\alpha_2\alpha_5^2-\alpha_2\varepsilon_1+\alpha_5\varepsilon_2)}}{2\alpha_2^2-2\alpha_2\alpha_5\varepsilon_1\varepsilon_2+\varepsilon_1}$ и $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (a.2) в решение (e).

Для решения (c.1), если $\alpha_1^2\varepsilon_1 + \alpha_2^2\varepsilon_2 \neq 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_2^2\alpha_3\delta_8\varepsilon_1}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\varepsilon_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & -\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ \frac{\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\delta_8\varepsilon_2}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & -\frac{\alpha_2^2\alpha_3\delta_8\varepsilon_1}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \\ 0 & \frac{\alpha_2\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} & 0 & \frac{\alpha_1\delta_8}{\sqrt{(\alpha_1^2\varepsilon_1+\alpha_2^2\varepsilon_2)\delta_8}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_8 = \pm 1$, что переводит решение (c.1) в решение (e).

Для решения (c.2), если $2\alpha_1^2 + \varepsilon_2 \neq 0$, замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} -\frac{\varepsilon_2\alpha_1\delta_6\sqrt{2}\delta_1}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1\alpha_4\delta_6\varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1^2\alpha_4\delta_6\sqrt{2}\delta_1\varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \\ 0 & -\frac{\varepsilon_2\alpha_1\delta_6\sqrt{2}\delta_1}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & 0 & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \\ \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1^2\alpha_4\delta_6\sqrt{2}\delta_1\varepsilon_2}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & \frac{\alpha_1\sqrt{2}\delta_1\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & -\frac{\alpha_1\alpha_4\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \\ 0 & \frac{\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} & 0 & \frac{\alpha_1\sqrt{2}\delta_1\delta_6}{\sqrt{(2\alpha_1^2+\varepsilon_2)\delta_6}} \end{pmatrix}$$

где $\delta_6 = \pm 1$, переводит решение (c.2) в решение (e).

Для решения (f.1), если $2\alpha_1^2 - \varepsilon_1 = 0$, выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

что переводит решение (f.1) в решение (e).

Для решения (e) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_1 неотрицательным, а параметр α_2 положительным.

Для решения (f.2) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{sign}(\alpha_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{sign}(\alpha_2) \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_2 неотрицательным, а параметр δ_1 равным единице.

Таким образом, получим следующие метрические алгебры Ли:

(a.1)

$$[e_1,e_2] = \frac{12\alpha_6^2 + 4\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_1}{4\alpha_6} e_1 + (\alpha_7\delta_1 - \alpha_6\delta_1)e_3,$$
$$[e_2,e_3] = (\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + (\alpha_7 - 3\alpha_6)e_3,$$
$$[e_1,e_4] = -(3\alpha_6\delta_1 + \alpha_7\delta_1)e_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_4 e_3,$$
$$[e_3,e_4] = (\alpha_6 + \alpha_7)e_1 - \frac{(12\alpha_6^2 - 4\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_1)\delta_1}{4\alpha_6} e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0, \quad \alpha_6 \neq 0, \quad 8\alpha_6^2 + \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2 \rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4 \rangle = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

(a.2)

$$[e_1,e_2] = \alpha_5 e_1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \alpha_5\delta_2 \right) \delta_1 e_3,$$
$$[e_2,e_3] = -\delta_1\alpha_5\delta_2 e_1 + (\alpha_5 - \delta_2\sqrt{2})e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \left(\alpha_5\delta_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \delta_1 e_1 + \left(\frac{\delta_2\sqrt{2}}{2} - \alpha_5 \right) e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3,e_4] = \alpha_5 e_1 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - \alpha_5\delta_2 \right) \delta_1 e_3,$$
$$\alpha_3 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2 \rangle = -1, \langle e_3,e_4 \rangle = 1.$$

(c.1)

$$[e_1,e_2] = \frac{\delta_1(2\alpha_1^2 + \varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_1 + \alpha_1 e_3,$$

$$[e_2,e_3] = -2\alpha_1\delta_1 e_3, \quad [e_1,e_4] = \alpha_1\delta_1 e_3 + \alpha_1 e_1,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3,e_4] = \frac{(4\alpha_1^2 - \varepsilon_1)}{2\alpha_1} e_3,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0, \quad 2\alpha_2^2 - \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\delta_1 = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = -\varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 = \pm 1.$$

(c.2)

$$[e_1,e_2] = \sqrt{2}\delta_1 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2 e_3, \quad [e_2,e_3] = -\sqrt{2}\delta_1 e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2 e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_1 e_3,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_4 e_3, \quad [e_3,e_4] = \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_2 e_3,$$
$$\alpha_4 \neq 0,$$
$$\delta_i = \pm 1,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = 1, \langle e_3,e_4\rangle = -1.$$

(e)

$$[e_1,e_2] = \alpha_1 e_1 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2 - \varepsilon_2)}{2\alpha_2} e_3,$$
$$[e_2,e_3] = \alpha_2 e_1, \quad [e_1,e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_1,$$
$$[e_2,e_4] = \alpha_3 e_1, \quad [e_3,e_4] = -\frac{2\alpha_2^2 + \varepsilon_2}{2\alpha_2} e_3,$$
$$\alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f.1)

$$[e_1,e_2] = \frac{2\alpha_1^2 + \varepsilon_1}{2\alpha_1} e_1, \quad [e_2,e_3] = -\frac{2\alpha_1^2 + 3\varepsilon_1}{4\alpha_1} e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \alpha_1 e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_3 e_3 + \frac{2\alpha_1^2 - \varepsilon_1}{4\alpha_1} e_4,$$
$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$6\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 - \varepsilon_1 \neq 0, \quad 2\alpha_1^2 + \varepsilon_1 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = \varepsilon_1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_i = \pm 1.$$

(f.2)

$$[e_1,e_2] = -\frac{\sqrt{6}}{3}e_1, \quad [e_2,e_3] = \frac{2\sqrt{6}}{3}e_3,$$
$$[e_1,e_4] = \frac{\sqrt{6}}{6}e_3, \quad [e_2,e_4] = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_3 + \frac{\sqrt{6}}{3}e_4,$$
$$\alpha_2 > 0, \quad \alpha_3 \neq 0,$$
$$\langle e_1,e_2\rangle = -1, \langle e_3,e_4\rangle = \varepsilon_2, \quad \varepsilon_2 = \pm 1.$$

Далее, замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & \frac{\delta_1\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(64\alpha_6^4-1)}{64\alpha_6^2} & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)^2}{64\alpha_6^2} \\ 0 & -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & 0 & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} \\ \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)^2}{64\alpha_6^2} & -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & \frac{\delta_1\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_4(64\alpha_6^4-1)}{64\alpha_6^2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}(8\alpha_6^2+\varepsilon_1)}{8\alpha_6} & 0 & -\frac{\delta_1\sqrt{2}(8\alpha_6^2-\varepsilon_1)}{8\alpha_6} \end{pmatrix}$$

переводит решение (a.1) в решение (a.2).

Замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_3(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)^2}{16\alpha_1^2} & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} & -\frac{(4\alpha_1^4-1)\alpha_3\sqrt{2}\varepsilon_1\delta_1}{16\alpha_1^2} \\ 0 & \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & 0 & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} \\ \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} & -\frac{(4\alpha_1^4-1)\alpha_3\sqrt{2}\varepsilon_1\delta_1}{16\alpha_1^2} & \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} & -\frac{\varepsilon_1\sqrt{2}\alpha_3(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)^2}{16\alpha_1^2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}\delta_1(2\alpha_1^2+\varepsilon_1)}{4\alpha_1} & 0 & \frac{(2\alpha_1^2-\varepsilon_1)\sqrt{2}}{4\alpha_1} \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.1) в решение (a.2).

Замена базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит решение (c.2) в решение (a.2).

Для решения (a.2) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметры δ_1 и δ_2 равными единице.

Для решения (f.1) выполним замену базиса с g-ортогональной матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} \mathrm{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{sign}(\alpha_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

что сделает параметр α_1 положительным. □

Все метрические алгебры Ли, полученные в теоремах 2.4–2.8 приведены в табл. 2. В ней используются обозначения $\varepsilon_i = \pm 1$, $\delta_1 = \pm 1$. Отдельным списком приведем метрических тензор для каждой алгебры Ли. Для метрических алгебр Ли (A), (B), (E) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (C), (D) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (F), (G), (H) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (I) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Таблица 2 — Метрические алгебры Ли четырехмерных групп Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, метрика которых не является ни конформно плоской, ни Риччи параллельной

№	Таблица умножения
	Тип Сегре $\{1(12)\}$
(A)	$[e_2,e_3]=3\alpha_1 e_3,\ [e_2,e_4]=-\frac{\varepsilon_2}{2\alpha_1}e_3+\alpha_1 e_4,\ \alpha_1>0$
	Тип Сегре $\{(11)2\}$
(B)	$[e_1,e_2]=\frac{\delta_1\sqrt{5}+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_2,\ [e_1,e_3]=\frac{3\varepsilon_1+\delta_1\sqrt{5}}{4\alpha_1}e_3,\ [e_1,e_4]=\alpha_1 e_3-\frac{\delta_1\sqrt{5}+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4,\ \alpha_1>0$
	Тип Сегре $\{(112)\}$
(C)	$[e_1,e_2]=-e_1+e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_2,e_3]=e_3,\ [e_2,e_4]=-\alpha_1 e_1+\alpha_1 e_2+\alpha_2 e_3,$ $[e_3,e_4]=\varepsilon_1\varepsilon_3 e_1-\varepsilon_1\varepsilon_3 e_2+\frac{\alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1>0,\ \alpha_1^2-4\alpha_2\varepsilon_1\varepsilon_3+2\varepsilon_3\neq 0$
(D)	$[e_1,e_2]=\alpha_1 e_1+\alpha_1 e_2+\alpha_2 e_3,\ [e_1,e_4]=-\frac{\varepsilon_1\left(\alpha_2^2\varepsilon_3+2\right)}{2\alpha_1}e_3,\ [e_3,e_4]=\frac{\varepsilon_1\left(\alpha_2^2\varepsilon_3+2\right)}{2\alpha_2}e_3,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2>0,$ $\alpha_2^2+2\varepsilon_3\neq 0$
(E)	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1+\alpha_3 e_2,\ [e_2,e_4]=-\alpha_3\varepsilon_1\varepsilon_2 e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2,\ [e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1>0,$ $\alpha_2>0,\ \alpha_3\geqslant 0,\ 2\alpha_1^2\varepsilon_3+2\alpha_2^2\varepsilon_3+1\neq 0,\ \alpha_3^2+\left(2\alpha_1^2-2\alpha_2^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$
(F)	$[e_1,e_4]=\alpha_1 e_1+(\alpha_2+\alpha_3)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_2-\alpha_3)e_1+\alpha_1 e_2,\ [e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2-2\alpha_3^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1>0,$ $\alpha_3>0,\ 2\alpha_1^2\varepsilon_3-2\alpha_3^2\varepsilon_3+1\neq 0,\ \alpha_2^2+\left(2\alpha_1^2+2\alpha_3^2-\varepsilon_3\right)^2\neq 0$
(G)	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+1)e_1+(\alpha_2-1)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_2+1)e_1+(\alpha_1-1)e_2,\ [e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1\neq 0,$ $2\alpha_1^2\varepsilon_3+1\neq 0,\ 2\alpha_1^2+4\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3\neq 0$
(H)	$[e_1,e_4]=(\alpha_1+\alpha_2)e_1-\frac{2\alpha_1\alpha_2-\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_2+e_3,\ [e_2,e_4]=\frac{2\alpha_1\alpha_2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_1+(\alpha_1-\alpha_2)e_2+e_3,$ $[e_3,e_4]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_3}{2\alpha_1}e_3,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2\neq 0,\ 2\alpha_1^2+\varepsilon_3\neq 0$
(I)	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+\alpha_1 e_2,\ [e_2,e_4]=-\alpha_1 e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2,\ [e_3,e_4]=\alpha_2 e_3,\ \alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2>0$
(J)	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{6}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{6}}{2}e_2,\ [e_3,e_4]=\alpha_2 e_3,\ \alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2\neq 0$
(K)	$[e_1,e_4]=-\frac{\sqrt{2}}{2}e_1+(\alpha_1+1)e_2,\ [e_2,e_4]=(\alpha_1-1)e_1+\frac{\sqrt{2}}{2}e_2,\ [e_3,e_4]=\alpha_2 e_3,\ \alpha_2>0$
	Тип Сегре $\{11 1\bar{1}\}$
(L)	$[e_1,e_3]=-\sqrt{3}\alpha_1 e_3+\alpha_1 e_4,\ [e_1,e_4]=\alpha_1 e_3+\sqrt{3}\alpha_1 e_4,\ [e_3,e_4]=2\varepsilon_1\varepsilon_3\alpha_1 e_1,\ \alpha_1>0$
	Тип Сегре $\{(22)\}$
(M)	$[e_1,e_2]=\alpha_1 e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3,\ [e_2,e_3]=-\alpha_1 e_1+\left(\alpha_1-\sqrt{2}\right)e_3,$ $[e_1,e_4]=\left(\alpha_1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e_1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3,\ [e_2,e_4]=\alpha_2 e_1,\ [e_3,e_4]=\alpha_1 e_1+\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\alpha_1\right)e_3,\ \alpha_2\neq 0$
(N)	$[e_1,e_2]=\alpha_1 e_1-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(2\alpha_2^2-\varepsilon_2)}{2\alpha_2}e_3,\ [e_2,e_3]=\alpha_2 e_1,\ [e_1,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_1,\ [e_2,e_4]=\alpha_3 e_1,$ $[e_3,e_4]=-\frac{2\alpha_2^2+\varepsilon_2}{2\alpha_2}e_3,\ \alpha_1\geqslant 0,\ \alpha_2>0,\ \alpha_3\neq 0$
(O)	$[e_1,e_2]=\frac{2\alpha_1^2+\varepsilon_1}{2\alpha_1}e_1,\ [e_2,e_3]=-\frac{2\alpha_1^2+3\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_3,\ [e_1,e_4]=\alpha_1 e_3,\ [e_2,e_4]=\alpha_2 e_3+\frac{2\alpha_1^2-\varepsilon_1}{4\alpha_1}e_4,\ \alpha_1\neq 0,$ $\alpha_1\neq\frac{\sqrt{2}}{2},\ \alpha_2\neq 0,\ 6\alpha_1^2+\varepsilon_1\neq 0$
(P)	$[e_1,e_2]=-\frac{\sqrt{6}}{3}e_1,\ [e_2,e_3]=\frac{2\sqrt{6}}{3}e_3,\ [e_1,e_4]=\frac{\sqrt{6}}{6}e_3,\ [e_2,e_4]=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_3+\frac{\sqrt{6}}{3}e_4,\ \alpha_1>0,\ \alpha_2\neq 0$

Для метрической алгебры Ли (J) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (K) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (L) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (M) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрических алгебр Ли (N), (O) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Для метрической алгебры Ли (P) метрический тензор имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 2.9. *Все метрические алгебры Ли, приведенные в табл. 2, попарно не изоморфны.*

Доказательство. Метрические алгебры Ли с различными типами Сегре оператора Риччи не изоморфны, поскольку тип Сегре оператора Риччи инвариантен относительно изоморфизма. Таким образом, достаточно проверить изоморфность метрических алгебр Ли с одинаковым типом Сегре.

Рассмотрим метрические алгебры Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{(112)\}$. Все девять метрических алгебр Ли имеют одинаковый оператор Риччи

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим образ $\mathrm{Im}(\rho) = \mathrm{span}\{e_3\}$ оператора Риччи. Для метрической алгебры Ли (C) $\mathrm{Im}(\rho)$ не является идеалом, а для (D)–(K) — является. Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Далее, для каждой метрической алгебры Ли рассмотрим коммутатор $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Для метрической алгебры Ли (D):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_1 + e_2, e_3\} \;\Rightarrow\; \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right) = 2.$$

Для метрических алгебр Ли (E)–(K):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_1, e_2, e_3\} \;\Rightarrow\; \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right) = 3.$$

Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Затем, для метрических алгебр Ли (E)–(K) рассмотрим факторизацию $\mathfrak{g}$ по идеалу $\mathrm{Im}(\rho)$. Для метрической алгебры Ли (E):

$$[x_1, x_3] = (\alpha_6 + \alpha_7)x_1 + \alpha_8 x_2, \quad [x_2, x_3] = -\alpha_8\varepsilon_1\varepsilon_2 x_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (F):

$$[x_1, x_3] = \alpha_6 x_1 + (\alpha_8 + \alpha_9)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_8 - \alpha_9)x_1 + \alpha_6 x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (G):

$$[x_1, x_3] = (\alpha_6 + 1)x_1 + (\alpha_8 - 1)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_8 + 1)x_1 + (\alpha_6 - 1)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (H):

$$[x_1, x_3] = (\alpha_6 + \alpha_7)x_1 - \frac{2\alpha_6\alpha_7 - \varepsilon_3}{2\alpha_6}, \quad [x_2, x_3] = \frac{2\alpha_6\alpha_7 + \varepsilon_3}{2\alpha_6}x_1 + (\alpha_6 - \alpha_7)x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (I):

$$[x_1, x_3] = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + \alpha_6 x_2, \quad [x_2, x_3] = -\alpha_6 x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (J):

$$[x_1, x_3] = -\frac{\sqrt{6}}{2}x_1 + (1+\alpha_6)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_6 - 1)x_1 + \frac{\sqrt{6}}{2}x_2.$$

Для метрической алгебры Ли (K):

$$[x_1, x_3] = -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 + (1+\alpha_6)x_2, \quad [x_2, x_3] = (\alpha_6 - 1)x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2.$$

Для метрических алгебр Ли (E)–(H) факторалгебра $\mathfrak{g}/\operatorname{Im}(\rho)$ неунимодулярна, а для (I)–(K) — унимодулярна (т.е. след всех внутренних дифференцирований равен нулю). Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Далее заметим, что метрическая алгебра Ли (I) имеет скалярное произведение с сигнатурой $(1,\ 1,\ 1,\ -1)$ или $(1,\ -1,\ -1,\ -1)$, а метрические алгебры Ли (J), (K) — с сигнатурой $(1,\ 1,\ -1,\ -1)$. Кроме того, метрическая алгебра Ли (J) имеет отрицательно полуопределенный тензор Риччи, а (K) — положительно полуопределенный. Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Предположим, что метрические алгебры Ли (E)–(H) изоморфны. Тогда изоморфизм должен сохранять оператор Риччи и переводить скалярное произведение одной метрической алгебры Ли в скалярное произведение другой, а значит, задаваться матрицей

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{14} \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_5 A_{12} & \delta_5 A_{11} & 0 & A_{24} \\ \frac{A_{12}A_{24}\delta_5 - A_{11}A_{14}}{\delta_4\varepsilon_1\varepsilon_3} & -\frac{A_{11}A_{24}\delta_5\varepsilon_2 + A_{12}A_{14}\varepsilon_1}{\delta_4\varepsilon_3} & \delta_4 & -\frac{\delta_4\varepsilon_3(A_{14}^2\varepsilon_1 + A_{24}^2\varepsilon_2)}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{pmatrix}$$

где $\delta_i = \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и $A_{11}^2 - A_{12}^2 \neq 0$.

Далее параметры первой метрической алгебры Ли будем обозначать α_i, ε_i, а второй — β_i, ω_i. Структурные константы первой алгебры Ли после изоморфизма будем обозначать $\left(C_{ij}^k\right)'$, второй — Z_{ij}^k.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (H). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,$$

которое имеет вид

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\delta_4 - \alpha_2\delta_4 + 2A_{11}^2\alpha_2\delta_4\varepsilon_1 &= \beta_1 + \beta_2,\\
\alpha_1\delta_4 + \alpha_2\delta_4 - 2A_{11}^2\alpha_2\delta_4\varepsilon_1 &= \beta_1 - \beta_2,\\
\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 + \varepsilon_3\right)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{aligned}
$$

Но данная система не имеет решения, поскольку $\alpha_2 > 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (F) в (H). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$
\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{34}^3\right)' = Z_{34}^3,
$$

которое имеет вид

$$
\begin{aligned}
\alpha_1\delta_4 + 2A_{11}A_{12}\alpha_3\delta_4 &= \beta_1 + \beta_2,\\
\alpha_1\delta_4 - 2A_{11}A_{12}\alpha_3\delta_4 &= \beta_1 - \beta_2,\\
\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2 - 2\alpha_3^2 + \varepsilon_3\right)}{\alpha_1} &= \frac{2\beta_1^2 + \varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{aligned}
$$

Но данная система не имеет решения, так как $\alpha_3 > 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (G) в (H). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$
\begin{aligned}
\left(C_{14}^1\right)' = Z_{14}^1, \quad \left(C_{14}^2\right)' = Z_{14}^2, \quad \left(C_{14}^3\right)' = Z_{14}^3,\\
\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2, \quad \left(C_{24}^3\right)' = Z_{24}^3,
\end{aligned}
$$

которое имеет вид

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta_4\left(\left(\alpha_1+1\right)A_{11} + \left(\alpha_1-1\right)A_{12}\right)}{A_{11}+A_{12}} &= \beta_1 + \beta_2,\\
\frac{\delta_5\delta_4\left(\left(\alpha_2-1\right)A_{11} + \left(\alpha_2+1\right)A_{12}\right)}{A_{11}+A_{12}} &= \frac{\varepsilon_3 - 2\beta_1\beta_2}{2\beta_1},\\
\frac{2\left(A_{12}\left(A_{24}\left(\alpha_2+1\right)\delta_5 + A_{14}\right) - \left(A_{14} - A_{24}\left(\alpha_2-1\right)\delta_5\right)A_{11}\right)\varepsilon_3}{A_{11}+A_{12}} + \frac{A_{14}}{\alpha_1} &= 2,\\
\frac{\delta_5\delta_4\left(\left(\alpha_2+1\right)A_{11} + \left(\alpha_2-1\right)A_{12}\right)}{A_{11}+A_{12}} &= \frac{2\beta_1\beta_2 + \varepsilon_3}{2\beta_1},\\
\frac{\delta_4\left(\left(\alpha_1-1\right)A_{11} + \left(\alpha_1+1\right)A_{12}\right)}{\left(A_{11}+A_{12}\right)} &= \beta_1 - \beta_2,
\end{aligned}
$$

$$\frac{2\varepsilon_3\left(A_{12}\left(A_{24}-A_{14}\left(\alpha_2-1\right)\delta_5\right)-\left(A_{14}\left(\alpha_2+1\right)\delta_5+A_{24}\right)A_{11}\right)}{A_{11}+A_{12}}-\frac{A_{24}}{\alpha_1}=2.$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (G). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{gathered}\left(C_{14}^1\right)'=Z_{14}^1,\quad \left(C_{14}^2\right)'=Z_{14}^2,\quad \left(C_{14}^3\right)'=Z_{14}^3,\\ \left(C_{24}^1\right)'=Z_{24}^1,\quad \left(C_{24}^2\right)'=Z_{24}^2,\quad \left(C_{24}^3\right)'=Z_{24}^3,\quad \left(C_{34}^3\right)'=Z_{34}^3,\end{gathered}$$

которое имеет вид

$$\begin{gathered}\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1+\alpha_1-\alpha_2\right)=\beta_1+1,\\ \delta_5\left(\alpha_3-2A_{11}A_{12}\alpha_2\varepsilon_2+\right)\delta_4=\beta_2-1,\\ \left(\left(\left(\left(2\varepsilon_1-4A_{11}^2\right)A_{14}+4A_{11}A_{12}A_{24}\delta_5\right)\alpha_2-2\varepsilon_2A_{24}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1+2A_{14}\alpha_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_3+\\ \hfill +A_{14}\varepsilon_1=0,\\ -\delta_5\left(2A_{11}A_{12}\alpha_2+\alpha_3\varepsilon_2\right)\varepsilon_1\delta_4=\beta_2+1,\\ -\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1-\alpha_1-\alpha_2\right)=\beta_1-1,\\ \left(\left(\left(\left(4A_{11}^2\varepsilon_1-2\right)A_{24}\alpha_2+2A_{14}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1+2A_{24}\alpha_2^2\right)\varepsilon_3+A_{24}\right)\varepsilon_2+\\ \hfill +4\varepsilon_3A_{11}A_{12}A_{14}\alpha_2\delta_5\alpha_1=0,\\ \frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3\right)}{\alpha_1}=\frac{2\beta_1^2+\varepsilon_3}{\beta_1}.\end{gathered}$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (F) в (G). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\begin{gathered}\left(C_{14}^1\right)'=Z_{14}^1,\quad \left(C_{14}^2\right)'=Z_{14}^2,\quad \left(C_{14}^3\right)'=Z_{14}^3,\\ \left(C_{24}^1\right)'=Z_{24}^1,\quad \left(C_{24}^2\right)'=Z_{24}^2,\quad \left(C_{24}^3\right)'=Z_{24}^3,\quad \left(C_{34}^3\right)'=Z_{34}^3,\end{gathered}$$

которое имеет вид

$$\begin{gathered}\delta_4\left(2A_{11}A_{12}\alpha_3+\alpha_1\right)=\beta_1+1,\\ \delta_5\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_3+\alpha_2-\alpha_3\right)=\beta_2-1,\end{gathered}$$

$$
\begin{gathered}
\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2-2\right)A_{24}\delta_5-4A_{11}A_{12}A_{14}\right)\alpha_3+2A_{24}\alpha_2\delta_5\right)\alpha_1-2A_{14}\alpha_3^2\right)\varepsilon_3+A_{14}=0,\\
-\delta_5\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_3-\alpha_2-\alpha_3\right)=\beta_2+1,\\
-\left(2A_{11}A_{12}\alpha_3-\alpha_1\right)\delta_4=\beta_1-1,\\
\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2-2\right)A_{14}\delta_5-4A_{11}A_{12}A_{24}\right)\alpha_3-2A_{14}\alpha_2\delta_5\right)\alpha_1+2A_{24}\alpha_3^2\right)\varepsilon_3-A_{24}=0,\\
\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2-2\alpha_3^2+\varepsilon_3\right)}{\alpha_1}=\frac{2\beta_1^2+\varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{gathered}
$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (E) в (F). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$
\begin{gathered}
\left(C_{14}^1\right)'=Z_{14}^1,\quad \left(C_{14}^2\right)'=Z_{14}^2,\quad \left(C_{14}^3\right)'=Z_{14}^3,\\
\left(C_{24}^1\right)'=Z_{24}^1,\quad \left(C_{24}^2\right)'=Z_{24}^2,\quad \left(C_{24}^3\right)'=Z_{24}^3,\quad \left(C_{34}^3\right)'=Z_{34}^3,
\end{gathered}
$$

которое имеет вид

$$
\begin{gathered}
\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1+\alpha_1-\alpha_2\right)=\beta_1,\\
-\delta_4\delta_5\left(2A_{11}A_{12}\alpha_2\varepsilon_2-\alpha_3\right)=\beta_2+\beta_3,\\
\left(\left(\left(\left(2\varepsilon_1-4A_{11}^2\right)A_{14}+4A_{11}A_{12}A_{24}\delta_5\right)\alpha_2-2\varepsilon_2A_{24}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1+2A_{14}\alpha_2^2\varepsilon_1\right)\varepsilon_3+\\
+A_{14}\varepsilon_1=0,\\
-\delta_4\varepsilon_1\left(2A_{11}A_{12}\alpha_2+\alpha_3\varepsilon_2\right)\delta_5=\beta_8-\beta_9,\\
-\delta_4\left(2A_{11}^2\alpha_2\varepsilon_1-\alpha_1-\alpha_2\right)=\beta_1,\\
\left(\left(\left(\left(4A_{11}^2\varepsilon_1-2\right)A_{24}\alpha_2+2A_{14}\alpha_3\delta_5\right)\alpha_1+2A_{24}\alpha_2^2\right)\varepsilon_3+A_{24}\right)\varepsilon_2+\\
+4A_{11}A_{12}A_{14}\alpha_1\alpha_2\delta_5\varepsilon_3=0,\\
\frac{\delta_4\left(2\alpha_1^2+2\alpha_2^2+\varepsilon_3\right)}{\alpha_1}=\frac{2\beta_1^2-2\beta_3^2+\varepsilon_3}{\beta_1}.
\end{gathered}
$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Далее, рассмотрим метрические алгебры Ли, оператор Риччи которых имеет тип Сегре $\{22\}$. Все четыре метрические алгебры Ли имеют одинаковый оператор Риччи

$$
\rho=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}
$$

Для каждой метрической алгебры Ли рассмотрим коммутатор $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Для метрических алгебр Ли (M)–(N):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_1,e_3\} \;\Rightarrow\; \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right) = 2.$$

Для метрических алгебр Ли (O)–(P):

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \mathrm{span}\{e_1,e_3,e_4\} \;\Rightarrow\; \dim\left([\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\right) = 3.$$

Следовательно, данные метрические алгебры Ли не изоморфны.

Предположим, что метрические алгебры Ли (M), (N) и (O), (P) изоморфны. Тогда изоморфизм должен сохранять оператор Риччи и переводить скалярное произведение одной метрической алгебры Ли в скалярное произведение другой, а значит, задаваться матрицей

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{11} & 0 & A_{13} \\ -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_4 A_{13} & A_{32} & \delta_4 A_{11} & A_{34} \\ 0 & -\varepsilon_1\varepsilon_2\delta_4 A_{13} & 0 & \delta_4 A_{11} \end{pmatrix}$$

где $\delta_i = \pm 1$, $\varepsilon_i = \pm 1$ и $A_{11}^2 - A_{13}^2 \neq 0$.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (M) в (N). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{14}^3\right)' = Z_{14}^3, \quad \left(C_{34}^1\right)' = Z_{34}^1,$$

которое имеет вид

$$\begin{gathered} 2\left(2A_{11}^2\omega_1 - 2A_{11}A_{13}\omega_1 + 1\right)\alpha_1 - A_{11}\omega_1\left(A_{11} - 2A_{13}\right)\sqrt{2} = 0, \\ \left(A_{11}^2\omega_1 - 2A_{11}A_{13}\omega_1 + 1\right)\sqrt{2} - 2\left(2A_{11}^2\omega_1 - 2A_{11}A_{13}\omega_1 + 1\right)\alpha_1 = 0. \end{gathered}$$

Но данная система не имеет решения, так как изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу.

Рассмотрим изоморфизм, переводящий метрическую алгебру Ли (O) в (P). Тогда необходимо выполняется равенство между структурными константами

$$\left(C_{24}^1\right)' = Z_{24}^1, \quad \left(C_{24}^2\right)' = Z_{24}^2,$$

которое имеет вид

$$\begin{aligned} \left(2A_{14}\delta_4\varepsilon_2 + A_{32}\right)\sqrt{6}A_{13}^2 - \Big(A_{11}\left(A_{12}\delta_4 + 2A_{34}\right)\sqrt{6} + 6\omega_1\delta_4\alpha_2\Big)A_{13} - \\ -6\omega_1 A_{11}\alpha_2\delta_4 = 0, \end{aligned}$$

$$A_{13}\boldsymbol{\delta}_4\boldsymbol{\omega}_1 = 0.$$

Но данная система не имеет решения, поскольку изоморфизм обязан иметь невырожденную матрицу. $\square$

В заключении отметим, что полученная классификация содержит 16 метрических алгебр Ли: 1 из них имеет скалярное произведение лоренцевой сигнатуры, 11 — нейтральной сигнатуры, а 4 допускают скалярное произведение как лоренцевой, так и нейтральной сигнатуры.

Глава 3. Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля

Результаты данной главы опубликованы в работах [A9; A18].

3.1 Вычисление компонент инвариантных тензорных полей на локально однородных (псевдо)римановых многообразиях

Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии (алгебра Ли группы H), $\mathfrak{m} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — фактор-пространство, являющиеся дополнением к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$.

Пара $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ определяет представление изотропии $\psi\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ правилом $\psi_X(Y) = [X,Y]_{\mathfrak{m}}$. Каждая инвариантная (псевдо)риманова метрика на однородном пространстве G/H соответствует невырожденной симметричной билинейной форме g на $\mathfrak{m}$, которая определяется равенством

$$(\psi_X)^t \cdot g + g \cdot \psi_X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{h}, \tag{3.1}$$

где $(\psi_X)^t$ — транспонированная матрица. Данная билинейная форма определяет связность Леви–Чивита $\nabla\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ равенством

$$\nabla_X(Y_{\mathfrak{m}}) = \frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{m}} + v(X,Y),$$

где $v\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{m}$ определяется через равенство

$$2g(v(X,Y), Z_{\mathfrak{m}}) = g(X_{\mathfrak{m}}, [Z,Y]_{\mathfrak{m}}) + g(Y_{\mathfrak{m}}, [Z,X]_{\mathfrak{m}}).$$

Тензор кривизны $R\colon \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ определяется выражением

$$R(X,Y) = [\nabla_Y, \nabla_X] + \nabla_{[X,Y]}.$$

Тензор Риччи, скалярная кривизна, тензор одномерной кривизны и тензор Схоутена–Вейля определяются аналогично общему случаю (псевдо)римановых многообразий. Отметим однако, что в случае локально однородных (псевдо)римановых многообразий скалярная кривизна постоянно, поэтому для определения тензора Схоутена–Вейля можно использовать равенство

$$SW\left(X,Y,Z\right)=\frac{1}{n-2}\left(\nabla_{Z}r\left(X,Y\right)-\nabla_{Y}r\left(X,Z\right)\right).$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ определяется как полная свертка тензора Схоутена–Вейля с метрическим тензором по каждому индексу.

Определение 3.1. Тензор Схоутена–Вейля SW будем называть *изотропным*, если квадрат его длины равен нулю ($\|SW\|^2=0$), а сам тензор не равен нулю ($SW\neq 0$).

Далее приведем алгоритм, позволяющий вычислять компоненты тензора Схоутена–Вейля SW и квадрат его длины $\|SW\|^2$ на локально однородном (псевдо)римановом пространстве (см. подробнее [18; 43]).

Пусть, как и ранее, $(M=G/H,g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности m, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{h}$ — подалгебра изотропии, $\mathfrak{m}=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ дополнение в $\mathfrak{g}$ к $\mathfrak{h}$, $h=\dim\mathfrak{h}$.

Пусть $\{e_1,e_2,\ldots,e_h,u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ — базис в $\mathfrak{g}$, где $\{e_i\}$ и $\{u_i\}$ есть базисы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{m}$ соответственно. Положим

$$[u_i,u_j]_{\mathfrak{m}}=c_{ij}^k u_k,\quad [u_i,u_j]_{\mathfrak{h}}=C_{ij}^k e_k,\quad [h_i,u_j]_{\mathfrak{m}}=\bar{c}_{ij}^k u_k,$$

где c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$ — массивы соответствующих размеров.

Первым шагом является вычисление представления изотропии ψ на базисных векторах $\mathfrak{h}$:

$$(\psi_i)_j^k=\left(\psi\left(e_i\right)\right)_j^k=\bar{c}_{ij}^k \tag{3.2}$$

и запись системы уравнений (3.1).

Далее вычисляются компоненты связности Леви–Чивита ∇ с помощью известного метрического тензора g_{ij} и структурных констант c_{ij}^k, C_{ij}^k и $\bar{c}_{ij}^k$:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}\left(c_{ij}^k+g^{sk}c_{sj}^l g_{il}+g^{sk}c_{si}^l g_{jl}\right),\quad \bar{\Gamma}_{ij}^k=\frac{1}{2}\bar{c}_{ij}^k-\frac{1}{2}g^{sk}\bar{c}_{is}^l g_{jl}, \tag{3.3}$$

где $\nabla_{u_i}u_j=\Gamma_{ij}^k u_k$, $\nabla_{h_i}u_j=\bar{\Gamma}_{ij}^k u_k$, $\{g^{ij}\}$ — матрица обратная к $\{g_{ij}\}$.

Следующим шагом является вычисление компонент тензора кривизны R и тензора Риччи r:

$$R_{ijks}=\left(\Gamma_{ik}^l\Gamma_{jl}^p-\Gamma_{jk}^l\Gamma_{il}^p+c_{ij}^l\Gamma_{lk}^p+C_{ij}^l\bar{\Gamma}_{lk}^p\right)g_{ps},\quad r_{ik}=R_{ijks}g^{js}. \tag{3.4}$$

В конце вычисляются компоненты тензора Схоутена–Вейля

$$SW_{ijk} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ij,k} - r_{ik,j}\right) = \frac{1}{n-2}\left(r_{sk}\Gamma^s_{ji} + r_{is}\Gamma^s_{jk} - r_{sj}\Gamma^s_{ki} - r_{is}\Gamma^s_{kj}\right)$$

и квадрат длины тензора Схоутена–Вейля

$$\|SW\|^2 = SW_{ijk}SW_{\alpha\beta\gamma}g^{i\alpha}g^{j\beta}g^{k\gamma}.$$

В данной работе мы будем использовать классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий полученную в работе [44]. Данная классификация приведена в табл. A.1 в приложении. Для каждого случая указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_i)$. Далее по тексту мы будем ссылаться на случаи из данной классификации по их номеру (например, “$2.1^3.5$”).

Ниже по тексту, при указании вида инвариантной метрики, мы будем ссылаться на табл. 3. Так, например, фраза “Метрический тензор имеет вид 4” означает, что матрица метрического тензора имеет вид, приведенный в табл. 3 под номером 4 вместе с соответствующими ограничениями на компоненты метрического тензора.

3.2 Кривизна четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

В данном разделе мы приведем некоторые теоремы о четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с ограничениями на тензоры кривизны. Но сначала упомянем следующую лемму, доказательство которой приводится, например, в [1].

Лемма 3.1 ([1]). *Пусть $\{R = 0\}$ обозначает класс всех плоских (псевдо)римановых многообразий; $\{r = 0\}$ — класс многообразий с нулевым тензором Риччи; $\{\nabla R = 0\}$ — класс локально симметричных; $\{W = 0\}$ — класс конформно плоских многообразий; $\{\nabla r = 0\}$ — класс Риччи параллельных многообразий; $\{\nabla W = 0\}$ — класс многообразий с параллельным тензором*

Таблица 3 — Вид инвариантного метрического тензора

№	Матрица метрического тензора	Ограничения	№	Матрица метрического тензора	Ограничения
1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	9	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$	10	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
3	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{22}\alpha_{44}$	11	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{44} & 0 \\ -\alpha_{23} & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$
4	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
5	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{23} \neq 0$	13	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{44} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{22} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	14	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{24} \neq 0$
7	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$	15	$\begin{pmatrix} \alpha_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{44} \neq 0$
8	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{24} & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ -\alpha_{24} & \alpha_{23} & 0 & 0 \\ \alpha_{23} & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha_{23}^2 + \alpha_{24}^2 \neq 0$			

Вейля; $\{SW = 0\}$ — класс многообразий с нулевым тензором Схоутена–Вейля. Тогда выполняются следующие включения:

– $\{R = 0\} \subseteq \{r = 0\}$, $\{R = 0\} \subseteq \{\nabla R = 0\}$, $\{R = 0\} \subseteq \{W = 0\}$;

– $\{r = 0\} \subseteq \{\nabla r = 0\}$, $\{\nabla R = 0\} \subseteq \{\nabla r = 0\}$;

– $\{W=0\} \subseteq \{\nabla W=0\}$, $\{\nabla R=0\} \subseteq \{\nabla W=0\}$;
– $\{\nabla r=0\} \subseteq \{SW=0\}$, $\{\nabla W=0\} \subseteq \{SW=0\}$.

Теорема 3.2. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда $(G/H,g)$ является плоским многообразием (т.е. $R=0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.1^1.9$, $1.1^1.10$, $1.1^2.12$, $1.1^3.1$, $1.1^4.1$, $1.1^5.1$, $1.1^6.1$, $1.2^1.1$, $1.2^2.1$, $1.3^1.18$, $1.3^1.32$, $1.4^1.23$, $1.4^1.26$, $2.1^1.3$, $2.1^2.6$, $2.1^3.6$, $2.1^4.2$, $2.2^1.6$, $2.2^1.7$, $2.2^2.4$, $2.2^3.1$, $2.3^1.1$, $2.4^1.3$, $2.5^1.14$, $2.5^2.7$, $3.1^1.1$, $3.1^2.1$, $3.2^1.2$, $3.2^1.4$, $3.2^2.2$, $3.3^1.4$, $3.3^2.4$, $3.4^1.1$, $3.4^2.1$, $3.5^1.4$, $3.5^2.4$, $4.1^1.1$, $4.1^2.1$, $4.2^1.2$, $4.2^2.3$, $4.2^3.2$, $4.3^1.2$, $5.1^1.1$, $6.1^1.2$, $6.1^2.3$, $6.1^3.3$

Замечание 3.3. *Всего в теореме 3.2 перечислено 46 типов локально однородных пространств.*

Доказательство. Ниже мы подробно рассмотрим случай $1.1^1.9$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Для случая $1.1^1.9$ существует базис $\{e_1,u_1,u_2,u_3,u_4\}$ в $\mathfrak{g}$ такой, что ненулевые скобки Ли имеют вид

$$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_4,\ [u_1,u_4]=u_2.$$

Далее, обозначая $\mathfrak{m}=\operatorname{span}\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ и с использованием (3.1) и (3.2), мы получаем представление изотропии и вид инвариантного метрического тензора в данном базисе:

$$\psi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}0&0&\alpha_{13}&0\\0&0&0&\alpha_{24}\\\alpha_{13}&0&0&0\\0&\alpha_{24}&0&0\end{pmatrix}.$$

Так как g невырождена, то $\alpha_{13}\alpha_{24}\neq 0$. Компоненты связности Леви-Чивита определяются с помощью (3.3):

$$(\Gamma_1)_j^k=(\Gamma_2)_j^k=(\Gamma_3)_j^k=0,$$

$$(\Gamma_4)^k_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_{24}}{\alpha_{13}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\bar{\Gamma}_1)^k_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Далее с помощью (3.4) убеждаемся, что все компоненты тензора кривизны R тождественно равны нулю.

Остальные случаи теоремы 3.2 рассматриваются аналогично. □

Доказательство теорем 3.4, 3.6, 3.8, 3.10 и 3.12 аналогично доказательству теоремы 3.2 и основывается на прямых вычислениях, поэтому мы приводить их не будем.

Теорема 3.4. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 3.2). Тогда $(G/H,g)$ является Риччи плоским многообразием (т.е. $r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.3^1.17$, $1.3^1.23$, $1.3^1.31$, $2.2^1.5$, $2.2^2.3$, $2.5^1.2$, $2.5^1.11$, $2.5^1.12$, $2.5^1.13$, $2.5^2.6$, $3.2^1.3$, $4.3^1.1$

Замечание 3.5. *Всего в теореме 3.4 перечислено 12 типов локально однородных пространств.*

Теорема 3.6. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 3.2). Тогда $(G/H,g)$ является конформно плоским многообразием (т.е. $W = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.4^1.8$, $2.2^1.2$, $2.2^1.3$, $2.4^1.1$, $2.4^1.2$, $2.5^1.4$, $2.5^1.6$, $2.5^1.9$, $2.5^1.10$, $3.2^1.1$, $3.2^2.1$, $3.3^1.1$, $3.3^1.2$, $3.3^1.3$, $3.3^2.1$, $3.3^2.2$, $3.3^2.3$, $3.5^1.1$, $3.5^1.2$, $3.5^1.3$, $3.5^2.1$, $3.5^2.2$, $3.5^2.3$, $6.1^1.1$, $6.1^2.1$, $6.1^2.2$, $6.1^3.1$, $6.1^3.2$

Замечание 3.7. *Всего в теореме 3.6 перечислено 28 типов локально однородных пространств.*

Теорема 3.8. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теореме 3.2). Тогда $(G/H,g)$ является локально симметричным многообразием (т.е. $\nabla R = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.1^1.5$, $1.1^1.6$, $1.1^1.7$, $1.1^2.6$, $1.1^2.7$, $1.1^2.8$, $1.1^2.9$, $1.1^2.10$, $1.3^1.11$, $1.3^1.17$, $1.3^1.31$, $1.4^1.8$, $1.4^1.14$, $1.4^1.21$, $1.4^1.22$, $1.4^1.24$, $1.4^1.25$, $2.1^1.1$, $2.1^1.2$, $2.1^2.1$, $2.1^2.2$, $2.1^2.3$, $2.1^2.4$, $2.1^2.5$, $2.1^3.1$, $2.1^3.2$, $2.1^3.3$, $2.1^3.4$, $2.1^3.5$, $2.1^4.1$, $2.2^1.1$, $2.2^1.4$, $2.2^1.5$, $2.2^2.1$, $2.2^2.2$, $2.2^2.3$, $2.4^1.1$, $2.4^1.2$, $2.5^1.2$, $2.5^1.6$, $2.5^1.7$, $2.5^1.8$, $2.5^1.9$, $2.5^1.10$, $2.5^1.11$, $2.5^1.12$, $2.5^1.13$, $2.5^2.4$, $2.5^2.5$, $2.5^2.6$, $3.2^1.1$, $3.2^1.3$, $3.2^2.1$, $3.3^1.2$, $3.3^1.3$, $3.3^2.2$, $3.3^2.3$, $3.5^1.1$, $3.5^1.2$, $3.5^1.3$, $3.5^2.1$, $3.5^2.2$, $3.5^2.3$, $4.2^1.1$, $4.2^2.1$, $4.2^2.2$, $4.2^3.1$, $4.3^1.1$, $6.1^1.1$, $6.1^2.1$, $6.1^2.2$, $6.1^3.1$, $6.1^3.2$

Замечание 3.9. *Всего в теореме 3.8 перечислено 73 типа локально однородных пространств.*

Теорема 3.10. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 3.2, 3.4 и 3.8). Тогда $(G/H,g)$ является Риччи параллельным многообразием (т.е. $\nabla r = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.3^1.3$, $1.3^1.6$, $1.3^1.8$, $1.3^1.9$, $1.3^1.10$, $1.3^1.20$, $1.4^1.13$, $1.4^1.15$, $1.4^1.16$, $1.4^1.17$, $1.4^1.18$, $1.4^1.19$, $1.4^1.20$, $2.5^1.5$, $2.5^2.3$

Замечание 3.11. *Всего в теореме 3.10 перечислено 15 типов локально однородных пространств.*

Теорема 3.12. *Пусть G/H — четырехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что перечислены в теоремах 3.2, 3.4, 3.6, 3.8 и 3.10). Тогда $(G/H,g)$ имеет нулевой тензор Схоутена–Вейля (т.е. $SW = 0$) для любой инвариантной метрики g тогда и только тогда, когда G/H содержится в списке:*

$1.3^1.2$, $1.3^1.4$, $1.3^1.5$, $1.3^1.7$, $1.3^1.12$, $1.3^1.13$, $1.3^1.14$, $1.3^1.15$, $1.3^1.16$, $1.3^1.19$, $1.3^1.21$, $1.3^1.22$, $1.3^1.24$, $1.3^1.25$, $1.3^1.26$, $1.3^1.27$, $1.3^1.28$, $1.3^1.29$, $1.3^1.30$, $1.4^1.9$, $1.4^1.10$, $1.4^1.11$, $1.4^1.12$, $2.5^1.3$, $2.5^2.2$

Замечание 3.13. *Всего в теореме 3.12 перечислено 25 типов локально однородных пространств.*

3.3 Изотропный тензор Схоутена–Вейля четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

Доказательство классификационной теоремы 3.19 основывается на предложениях, которые будут доказаны далее. Сама теорема 3.19 приведена в конце данного раздела.

Предложение 3.14. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда тензор Схоутена–Вейля многообразия $(G/H,g)$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, если и только если G/H содержится в следующем списке:*

$1.1^1.(5\text{-}7,9,10)$	$1.1^2.(6\text{-}10)$	$1.1^2.12$	$1.1^3.1$	$1.1^4.1$	$1.1^5.1$
$1.1^6.1$	$1.2^1.1$	$1.2^2.1$	$1.3^1.(2\text{-}32)$	$1.4^1.(8\text{-}26)$	$2.1^1.(1\text{-}3)$
$2.1^2.(1\text{-}6)$	$2.1^3.(1\text{-}6)$	$2.1^4.(1,2)$	$2.2^1.(1\text{-}7)$	$2.2^2.(1\text{-}4)$	$2.2^3.1$
$2.3^1.1$	$2.4^1.(1\text{-}3)$	$2.5^1.(2\text{-}14)$	$2.5^2.(2\text{-}7)$	$3.1^1.1$	$3.1^2.1$
$3.2^1.(1\text{-}4)$	$3.2^2.(1,2)$	$3.3^1.(1\text{-}4)$	$3.3^2.(1\text{-}4)$	$3.4^1.1$	$3.4^2.1$
$3.5^1.(1\text{-}4)$	$3.5^2.(1\text{-}4)$	$4.1^1.1$	$4.1^2.1$	$4.2^1.(1,2)$	$4.2^2.(1\text{-}3)$
$4.2^3.(1,2)$	$4.3^1.(1,2)$	$5.1^1.1$	$6.1^1.(1,2)$	$6.1^2.(1\text{-}3)$	$6.1^3.(1\text{-}3)$

Доказательство. Данное предложение является прямым следствием теорем 3.2, 3.4, 3.6, 3.8, 3.10 и 3.12 в силу леммы 3.1. □

Предложение 3.15. *Пусть $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии.*

Тогда, если G/H есть случай $1.1^1.8$ или $1.1^2.11$, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g.

Доказательство. **Случай** $1.1^1.8$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &[e_1,u_1]=u_1, && [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_2, && [e_1,u_3]=-u_3, && [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_4,\\ &[u_1,u_3]=-2e_1, && [u_1,u_4]=u_2, && [u_2,u_3]=u_4, \end{aligned}$$

где $\mathfrak{h}=\operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m}=\operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}&\alpha_{14}\\\alpha_{12}&\alpha_{22}&\alpha_{23}&\alpha_{24}\\\alpha_{13}&\alpha_{23}&\alpha_{33}&\alpha_{34}\\\alpha_{14}&\alpha_{24}&\alpha_{34}&\alpha_{44}\end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\alpha_{22}=0,\quad 2\alpha_{11}=0,\quad \frac{3}{2}\alpha_{12}=0,\quad \frac{1}{2}\alpha_{14}=0,\\ -\frac{1}{2}\alpha_{23}=0,\quad -2\alpha_{33}=0,\quad -\frac{3}{2}\alpha_{34}=0,\quad -\alpha_{44}=0.\end{gathered}$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 2.

Нетривиальными компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{223}=-SW_{232}=-SW_{441}=\frac{3\alpha_{24}}{2\alpha_{13}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет следующий вид:

$$\|SW\|^2=-\frac{9}{\alpha_{13}^3}.$$

Он, очевидно, не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g.

Случай $1.1^2.11$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$\begin{array}{lll} [e_1,u_1] = u_3, & [e_1,u_2] = \dfrac{1}{2}u_4, & [e_1,u_3] = -u_1, \\ [e_1,u_4] = -\dfrac{1}{2}u_2, & [u_1,u_2] = u_2, & [u_1,u_3] = -4e_1, \\ [u_1,u_4] = -u_4, & [u_2,u_3] = -u_4, & [u_3,u_4] = u_2, \end{array}$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\begin{array}{llll} 2\alpha_{13} = 0, & -\alpha_{11} + \alpha_{33} = 0, & -\alpha_{12} + \dfrac{1}{2}\alpha_{34} = 0, & -\dfrac{1}{2}\alpha_{12} + \alpha_{34} = 0, \\ \alpha_{24} = 0, & \dfrac{1}{2}\alpha_{14} + \alpha_{23} = 0, & -\dfrac{1}{2}\alpha_{22} + \dfrac{1}{2}\alpha_{44} = 0, & -\dfrac{1}{2}\alpha_{23} - \alpha_{14} = 0. \end{array}$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 4.

Нетривиальными компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{221} = -SW_{234} = SW_{243} = -SW_{441} = \frac{3\alpha_{44}}{\alpha_{33}}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет следующий вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{72}{\alpha_{33}^3}.$$

Он, очевидно, не равен нулю ни для какой инвариантной метрики g. $\square$

Предложение 3.16. *Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное (псевдо)риманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии (кроме тех, что приведены в предложении 3.14). Тогда, если G/H содержится в нижеприведенном списке, то из равенства нулю квадрата длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики g следует равенство нулю самого тензора Схоутена–Вейля SW:*

$$1.1^1.2 \quad 1.1^1.4 \quad 1.1^2.2 \quad 1.1^2.5$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай $1.1^1.2$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = u_1, \qquad [e_1,u_3] = -u_3, \qquad [u_2,u_4] = pu_2, \qquad [u_3,u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$, $p \in \mathbb{R}$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{33} = 0, \quad \alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{224} = -SW_{242} = \frac{\alpha_{22}^2 p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}$$

$$SW_{143} = -SW_{134} = SW_{341} = \frac{\alpha_{13}\alpha_{22} p(2p-1)}{8(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}$$

$$SW_{442} = -\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}p(2p-1)}{4(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет следующий вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}^3 p^2(2p-1)^2}{16(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)^3}.$$

Он равен нулю тогда, когда либо $\alpha_{22} = 0$, либо $p = 0$, либо $p = \frac{1}{2}$. Но во всех этих случаях сам тензор Схоутена–Вейля также равен нулю.

Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая мы приведем лишь номер вида метрического тензора g (из табл. 3), нетривиальные компоненты тензора Схоутена–Вейля SW и квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$.

Случай $1.1^1.4$.

g	SW	$\|SW\|^2$
1	$SW_{123} = -SW_{132} = \frac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2}$, $SW_{143} = -SW_{341} = -SW_{134} = \frac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{13}^2}$, $SW_{231} = -\frac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{13}^2}$	$-\frac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{13}^6}$

Случай $1.1^2.2$.

g	SW	$\|SW\|^2$
3	$SW_{141} = SW_{343} = -SW_{114} = -SW_{334} = \frac{\alpha_{33}\alpha_{22}p(p-1)}{2(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)}$, $SW_{224} = -SW_{242} = \frac{\alpha_{22}^2 p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$, $SW_{442} = -\frac{\alpha_{24}\alpha_{22}p(p-1)}{\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2}$	$\frac{3\alpha_{22}^3 p^2(p-1)^2}{(\alpha_{22}\alpha_{44}-\alpha_{24}^2)^3}$

Случай $1.1^2.5$.

g	SW	$\|SW\|^2$
3	$SW_{132} = -SW_{123} = \frac{\alpha_{22}^2}{4\alpha_{33}^2}$, $SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}\alpha_{22}}{4\alpha_{33}^2}$, $SW_{231} = \frac{\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2}$	$\frac{3\alpha_{22}^3}{4\alpha_{33}^6}$

□

Предложение 3.17. *Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H есть случай $1.4^1.6$ или $1.4^1.7$, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, а сам тензор Схоутена–Вейля не тривиален.*

Доказательство. **Случай** $1.4^1.6$. В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_2] = u_1, \qquad [e_1,u_3] = u_2, \qquad [u_1,u_4] = u_1,$$

$$[u_2,u_4] = u_2, \qquad [u_3,u_4] = u_1 + u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{13} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{343} = -SW_{334} = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут занулиться, поскольку при $\alpha_{23} = 0$ метрический тензор был бы вырожденным.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен нулю.

Случай 1.4^1.7**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_2] = u_1, \qquad [e_1,u_3] = u_2, \qquad [u_1,u_4] = u_1,$$
$$[u_2,u_4] = u_2, \qquad [u_3,u_4] = -u_1 + u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad 2\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{22} + \alpha_{13} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 6.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{3\alpha_{22}}{2\alpha_{44}}.$$

Они не могут занулиться, поскольку при $\alpha_{23} = 0$ метрический тензор был бы вырожденным.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен нулю. □

Предложение 3.18. *Если $(M = G/H, g)$ — локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда, если G/H содержится в нижеприведенном списке, то квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ равен нулю для любой инвариантной метрики g, но сам тензор Схоутена–Вейля может быть равен нулю для некоторых инвариантных метрик:*

$$1.3^1.1 \quad 1.4^1.1 \quad 1.4^1.2 \quad 1.4^1.3 \quad 1.4^1.4 \quad 1.4^1.5 \quad 2.5^1.1 \quad 2.5^2.1$$

Доказательство. Последовательно рассмотрим все случаи, приведенные выше.

Случай $1.3^1.1$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = e_1, \qquad [e_1,u_3] = u_1, \qquad [e_1,u_4] = u_2, \qquad [u_1,u_2] = -\frac{1}{2}u_2,$$
$$[u_1,u_3] = u_3, \qquad [u_1,u_4] = \frac{1}{2}u_4, \qquad [u_2,u_3] = \frac{1}{2}u_4,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{11} = 0, \quad \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{22} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{24} = 0, \quad \alpha_{23} + \alpha_{14} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 5.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{331} = \frac{45(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{32\alpha_{23}^2}, \quad SW_{334} = -SW_{343} = \frac{15\alpha_{44}(\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2)}{64\alpha_{23}^3}.$$

Они могут зануляться тогда, когда $\alpha_{33}\alpha_{44} - \alpha_{34}^2 = 0$.

Непосредственными вычислениями убеждаемся, что квадрат длины тензора Схоутена–Вейля равен нулю.

Поскольку во всех случаях алгоритм доказательства однообразен, то далее для каждого случая мы приведем лишь номер вида метрического тензора g (из табл. 3) и нетривиальные компоненты тензора Схоутена–Вейля SW. Во всех случаях квадрат длины тензора Схоутена–Вейля тривиален.

Случай 1.4^1.1.

g	SW
6	$SW_{332} = -\frac{3\alpha_{33}(\alpha_{44}+2\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$, $SW_{343} = -SW_{334} = \frac{\alpha_{33}(5\alpha_{44}+8\alpha_{22})}{4\alpha_{22}\alpha_{44}}$

Случай 1.4^1.2.

g	SW
6	$SW_{343} = -SW_{334} = \frac{\alpha_{33}(p-3)(3p-5)}{2\alpha_{44}}$

Случай $1.4^1.3.$

g	SW
6	$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{\alpha_{33}-\alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$

Случай $1.4^1.4.$

g	SW
6	$SW_{334} = -SW_{343} = \frac{\alpha_{33}+\alpha_{44}}{2\alpha_{44}}$

Случай $1.4^1.5.$

g	SW
6	$SW_{332} = -\frac{3\alpha_{33}}{4\alpha_{22}}$

Случай $2.5^1.1.$

g	SW
12	$SW_{332} = SW_{334} = -SW_{343} = \frac{15\alpha_{33}}{\alpha_{24}}$

Случай $2.5^2.1.$

g	SW
6	$SW_{332} = \frac{15\alpha_{33}}{2\alpha_{44}}$

□

В предложениях 3.14, 3.15, 3.16 перечислены четырехмерные локально однородные (псевдо)римановы многообразия, которые не могут иметь изотропный тензор Схоутена–Вейля. В предложении 3.17 перечислены локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4, тензор Схоутена–Вейля которых изотропен для любой инвариантной метрики. В предложении 3.18 содержатся четырехмерные однородные псевдоримановы многообразия, тензор Схоутена–Вейля которых изотропен при некоторых условиях типа "неравенство", эти многообразия вместе с соответствующими условиями содержатся в табл. 4. Пять оставшихся случаев из классификации [44] рассмотрим далее.

Случай $1.1^1.1.$ В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = u_1, \quad [e_1,u_3] = -u_3, \quad [u_1,u_3] = u_2, \quad [u_2,u_4] = u_2, \quad [u_3,u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\,(e_1)$, $\mathfrak{m} = \mathrm{span}\,(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{123} = SW_{224} = -SW_{132} = -SW_{231} = -SW_{242} = \frac{(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}^2}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{143} = -SW_{134} = \frac{(\alpha_{13} + 2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{341} = \frac{(\alpha_{13} - 2\alpha_{24})(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}}{8\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{442} = -\frac{(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)\alpha_{22}\alpha_{24}}{4\alpha_{13}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{13}^2 - 4\alpha_{22}\alpha_{44} + 4\alpha_{24}^2)(\alpha_{13}^2 + \alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^2\alpha_{22}^3}{16\alpha_{13}^6(\alpha_{44}\alpha_{22} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он равен нулю в трех случаях:

1. при $\alpha_{22} = 0$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
2. при $\alpha_{22} = -\frac{\alpha_{13}^2 - \alpha_{24}^2}{\alpha_{44}}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

3. при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{13}^2+4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}}$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Случай 1.1[1].3**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = u_1, \quad [e_1,u_3] = -u_3, \quad [u_1,u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{14} = 0, \quad 2\alpha_{11} = 0, \quad -\alpha_{23} = 0, \quad -2\alpha_{33} = 0, \quad -\alpha_{34} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 1.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{13}-\alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2},$$
$$SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{13}-\alpha_{22})}{4\alpha_{13}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = -\frac{3\alpha_{22}(\alpha_{13}-\alpha_{22})^2}{4\alpha_{13}^6}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. при $\alpha_{13} = \alpha_{22}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;

2. при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Случай $1.1^2.1$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = u_3, \qquad [e_1,u_3] = -u_1, \qquad [u_1,u_3] = -u_2,$$
$$[u_1,u_4] = u_1, \qquad [u_2,u_4] = 2u_2, \qquad [u_3,u_4] = u_3,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{114} = SW_{334} = -SW_{141} = -SW_{343} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}}{4\alpha_{33}(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{242} = 2SW_{123} = -SW_{224} = -SW_{231} =$$
$$= -2SW_{132} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{22}^2}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)},$$
$$SW_{442} = 2SW_{143} = -2SW_{134} = -2SW_{341} = \frac{(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)\alpha_{24}\alpha_{22}}{2\alpha_{33}^2(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 + \alpha_{33}^2)\alpha_{22}^3(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2 - 4\alpha_{33}^2)^2}{4\alpha_{33}^6(\alpha_{22}\alpha_{44} - \alpha_{24}^2)^3}.$$

Он равен нулю в трех случаях:

1. при $\alpha_{22} = 0$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
2. при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{24}^2+4\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
3. при $\alpha_{22} = \frac{\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}}$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным, если $\alpha_{24}^2 - \alpha_{33}^2 \neq 0$.

Случай $1.1^2.3$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = u_3, \quad [e_1,u_3] = -u_1, \quad [u_1,u_3] = e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{231} = 2SW_{132} = -2SW_{123} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2},$$

$$SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} - \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} - \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. при $\alpha_{22} = \alpha_{33}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
2. при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Случай $1.1^2.4$**.** В данном случае скобки Ли имеют следующий вид:

$$[e_1,u_1] = u_3, \quad [e_1,u_3] = -u_1, \quad [u_1,u_3] = -e_1 + u_2,$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_1)$, $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_1,u_2,u_3,u_4)$.

Вычислим представление изотропии (3.2):

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть метрический тензор имеет вид:

$$g = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

тогда условие инвариантности метрического тензора (3.1) будет иметь вид:

$$\alpha_{23} = 0, \quad \alpha_{34} = 0, \quad -\alpha_{12} = 0, \quad 2\alpha_{13} = 0, \quad -\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{33} - \alpha_{11} = 0.$$

Таким образом, инвариантный метрический тензор имеет вид 3.

Ненулевыми компонентами тензора Схоутена–Вейля являются:

$$SW_{132} = -SW_{123} = 2SW_{231} = \frac{\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2},$$
$$SW_{134} = SW_{341} = -SW_{143} = \frac{\alpha_{24}(\alpha_{22} + \alpha_{33})}{4\alpha_{33}^2}.$$

Квадрат длины тензора Схоутена–Вейля имеет вид:

$$\|SW\|^2 = \frac{3\alpha_{22}(\alpha_{22} + \alpha_{33})^2}{4\alpha_{33}^6}.$$

Он равен нулю в двух случаях:

1. при $\alpha_{22} = -\alpha_{33}$, но в этом случае зануляются компоненты тензора Схоутена–Вейля, следовательно, в данном случае тензор Схоутена–Вейля не является изотропным;
2. при $\alpha_{22} = 0$, в этом случае тензор Схоутена–Вейля является изотропным.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.19. *Пусть* $(M = G/H, g)$ *— локально однородное псевдориманово многообразие размерности 4 с нетривиальной подгруппой изотропии. Тогда* $(M = G/H, g)$ *имеет изотропный тензор Схоутена–Вейля тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы* G *содержится в табл. 4.*

Таблица 4 — Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля

№	Скобки Ли	Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии	Ограничения
$1.1^1.1$	$[e_1,u_1] = u_1$, $[e_1,u_3] = -u_3$, $[u_1,u_3] = u_2$, $[u_2,u_4] = u_2$, $[u_3,u_4] = u_3$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{13}^2+4\alpha_{24}^2}{4\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$
$1.1^1.3$	$[e_1,u_1] = u_1$, $[e_1,u_3] = -u_3$, $[u_1,u_3] = e_1 + u_2$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{13} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$
$1.1^2.1$	$[e_1,u_1] = u_3$, $[e_1,u_3] = -u_1$, $[u_1,u_3] = -u_2$, $[u_1,u_4] = u_1$, $[u_2,u_4] = 2u_2$, $[u_3,u_4] = u_3$	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_{24}^2-\alpha_{33}^2}{\alpha_{44}} & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{24}^2 \neq \alpha_{33}^2$, $\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{44} \neq 0$
$1.1^2.3$	$[e_1,u_1] = u_3$, $[e_1,u_3] = -u_1$, $[u_1,u_3] = e_1 + u_2$	$\begin{pmatrix} \alpha_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$
$1.1^2.4$	$[e_1,u_1] = u_3$, $[e_1,u_3] = -u_1$, $[u_1,u_3] = -e_1 + u_2$		$\alpha_{33} \neq 0$, $\alpha_{24} \neq 0$
$1.3^1.1$	$[e_1,u_1] = e_1$, $[e_1,u_3] = u_1$, $[e_1,u_4] = u_2$, $[u_1,u_2] = -\frac{1}{2}u_2$, $[u_1,u_3] = u_3$, $[u_1,u_4] = \frac{1}{2}u_4$, $[u_2,u_3] = \frac{1}{2}u_4$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ -\alpha_{23} & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$	$\alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 \neq 0$, $\alpha_{33}\alpha_{44} \neq \alpha_{34}^2$, $\alpha_{23} \neq 0$

Продолжение табл. 4

<table>
<tr><th>№</th><th>Скобки Ли</th><th>Скалярное произведение на дополнении к подалгебре изотропии</th><th>Ограничения</th></tr>
<tr><td>$1.4^1.1$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=u_3$, $[u_3,u_4]=-u_3$</td><td rowspan="7">$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33}\neq 0$, $\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.2$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=pu_1$, $[u_2,u_4]=(p-1)u_2$, $[u_3,u_4]=(p-2)u_3$</td><td>$\alpha_{33}\neq 0$, $p\neq 3$, $p\neq \frac{5}{3}$, $\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.3$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$</td><td>$\alpha_{33}\neq \alpha_{44}$, $\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.4$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=-e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$</td><td>$\alpha_{33}\neq -\alpha_{44}$, $\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.5$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_3$</td><td>$\alpha_{33}\neq 0$, $\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.6$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_1+u_3$</td><td>$\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$1.4^1.7$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=-u_1+u_3$</td><td>$\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$2.5^1.1$</td><td>$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_1,u_4]=-2e_1$, $[e_2,u_2]=-2e_2$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_2]=2e_2-u_1$, $[u_1,u_3]=u_2+u_4$, $[u_1,u_4]=2e_1-u_1$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=u_2-u_4$, $[u_3,u_4]=2u_3$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & \alpha_{24} & 0 & 0 \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33}\neq 0$, $\alpha_{24}\neq 0$</td></tr>
<tr><td>$2.5^2.1$</td><td>$[e_1,u_2]=-e_1+u_1$, $[e_1,u_3]=-u_2$, $[e_1,u_4]=e_2$, $[e_2,u_2]=-e_2$, $[e_2,u_3]=u_4$, $[e_2,u_4]=-e_1-u_1$, $[u_1,u_2]=e_1-u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=-e_2$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=-u_4$</td><td>$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_{22} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ -\alpha_{22} & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{pmatrix}$</td><td>$\alpha_{33}\neq 0$, $\alpha_{22}\neq 0$, $\alpha_{44}\neq 0$</td></tr>
</table>

В заключении данной главы заметим, что для 186 многообразий из классификации [44] справедливо следующее:

- 15 многообразий могут иметь изотропный тензор Схоутена–Вейля SW, причем:
  - для 2 из них тензор Схоутена–Вейля SW изотропен для любой инвариантной метрики;
  - в остальных 13 случаях тензор Схоутена–Вейля SW является изотропным лишь при определенных условиях на инвариантную метрику, причем:

    * в 5 случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа “равенство”;
    * в 8 случаях условия на инвариантную метрику являются условиями типа “неравенство”;

– 171 многообразие не может иметь изотропный тензор Схоутена–Вейля SW, причем:
  – в 2 случаях квадрат длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ не равен нулю ни для какой инвариантной метрики;
  – в 165 случаях все компоненты тензора Схоутена–Вейля SW равны нулю для любой инвариантной метрики;
  – в 4 случаях тривиальность квадрата длины тензора Схоутена–Вейля $\|SW\|^2$ для некоторой инвариантной метрики влечет за собой тривиальность тензора Схоутена–Вейля SW.

Заключение

В ходе проведённого исследования решены поставленные задачи и достигнуты следующие результаты:

1. Доказана теорема о строении оператора Риччи на группах Ли с левоинвариантной псевдоримановой метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи и нулевым тензором Схоутена–Вейля. Кроме того, доказаны теоремы о строении метрической алгебры Ли конформно плоской группы Ли с метрикой нетривиального алгебраического солитона Риччи.
2. Классифицированы четырехмерные метрические алгебры Ли групп Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками и нулевым тензором Схоутена–Вейля, которые не являются конформно плоскими и имеют не параллельный тензор Риччи.
3. Получена классификация четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии и изотропным тензором Схоутена–Вейля в терминах алгебр Ли.

Полученные результаты могут найти применение в теории однородных (псевдо)римановых многообразий, теории солитонов Риччи.

Разработанные методы и программы нахождения инвариантных тензорных полей на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и на локально однородных (псевдо)римановых многообразиях могут быть использованы при подготовке специалистов в области геометрии и топологии по программе бакалавриата, магистратуры и аспирантуры в вузах России.

В перспективе предполагается продолжить исследование алгебраических солитонов Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля, получить их классификацию с точностью до изометрии. В четырехмерном случается предполагается исследовать алгебраическое строение, а также различные операторы кривизны на таких метрических группах Ли.

Список литературы

1. *Besse A.* Einstein Manifolds. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987. — 510 p.
2. *Berger M.* A Panoramic View of Riemannian Geometry. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2003. — 824 p.
3. *Cao H.-D.* Recent progress on Ricci solitons // Advanced Lectures in Mathematics. — 2009. — Vol. 11. — P. 1—38.
4. *Gray A.* Einstein-like manifolds which are not Einstein // Geom. Dedicata. — 1978. — Vol. 7. — P. 259—280.
5. *Hamilton R. S.* The Ricci flow on surfaces // Contemporary Mathematics. — 1988. — Vol. 71. — P. 237—261.
6. *Arroyo R. M.*, *Lafuente R.* Homogeneous Ricci solitons in low dimensions // International Mathematics Research Notices. — 2015. — Vol. 2015, no. 13. — P. 4901—4932.
7. *Lauret J.* Ricci soliton homogeneous nilmanifolds // Mathematische Annalen. — 2001. — Vol. 319, no. 4. — P. 715—733.
8. *Onda K.* Examples of Algebraic Ricci Solitons in the Pseudo-Riemannian Case // Acta Mathematica Hungarica. — 2014. — Vol. 144, no. 1. — P. 247—265.
9. *Jablonski M.* Homogeneous Ricci solitons are algebraic // Geometry & Topology. — 2014. — Vol. 18, no. 4. — P. 2477—2486.
10. *Chaichi M.*, *Keshavarzi Y.* Conformally flat pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons 4-spaces // Indian Journal of Science and Technology. — 2015. — Vol. 8, no. 12. — P. 1—11.
11. *Brozos-Vázquez M.*, *García-Río E.*, *Gavino-Fernández S.* Locally Conformally Flat Lorentzian Gradient Ricci Solitons // Journal of Geometric Analysis. — 2013. — Vol. 23. — P. 1196—1212.
12. *Cho J. T.*, *Kimura M.* Ricci solitons on locally conformally flat hypersurfaces in space forms // Journal of Geometry and Physics. — 2012. — Vol. 62, no. 8. — P. 1882—1891.

13. *Cao H.-D.*, *Chen Q.* On locally conformally flat gradient steady Ricci solitons // Transactions of the American Mathematical Society. — 2012. — Vol. 364. — P. 2377—2391.

14. *Honda K.*, *Tsukada K.* Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds // Journal of Physics A Mathematical and Theoretical. — 2007. — Vol. 40, no. 4. — P. 831—851.

15. *Zaeim A.*, *Haji-Badali A.* Einstein-like Pseudo-Riemannian Homogeneous Manifolds of Dimension Four // Mediterranean Journal of Mathematics. — 2016. — Vol. 13, no. 5. — P. 3455—3468.

16. *Гладунова О. П.*, *Славский В. В.* О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли // Математические труды. — 2011. — Т. 14, № 1. — С. 50—69.

17. *Воронов Д. С.*, *Родионов Е. Д.* Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля // Докалады академии наук. — 2010. — Т. 432, № 3. — С. 301—303.

18. *Calvaruso G.*, *Zaeim A.* Conformally flat homogeneous pseudo-riemannian four-manifolds // Tohoku Mathematical Journal. — 2014. — Vol. 66. — P. 31—54.

19. *Calvaruso G.*, *Zaeim A.* Four-dimensional Lorentzian Lie groups // Differential Geometry and its Applications. — 2013. — Vol. 31. — P. 496—509.

20. *Calvaruso G.*, *Zaeim A.* Neutral Metrics on Four-Dimensional Lie Groups // Journal of Lie Theory. — 2015. — Vol. 25. — P. 1023—1044.

21. *Zaeim A.* Einstein-like Lorentzian Lie groups of dimension four // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. — 2017. — Vol. 24, no. 4. — P. 556—570.

22. *Rodionov E. D.*, *Slavskii V. V.* Conformal deformations of the Riemannian metrics and homogeneous Riemannian spaces // Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae. — 2002. — Vol. 43, no. 2. — P. 271—282.

23. *Alekseevsky D.* Lorentzian manifolds with transitive conformal group // Note di Matematica. — 2017. — Vol. 37, no. 1. — P. 35—47.

24. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Локально конформно однородные псевдоримановы пространства // Математические труды. — 2006. — Т. 9, № 1. — С. 130—168.

25. *Хромова О. П., Клепиков П. Н., Клепикова С. В., Родионов Е. Д.* On the Schouten–Weyl tensor of 3-dimensional metric Lie groups // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2017. — Т. 3. — С. 21—29.

26. *Клепикова С. В., Хромова О. П.* Локально однородные псевдоримановы многообразия размерности 4 с изотропным тензором Вейля // Известия АлтГУ. — 2018. — 1(99). — С. 99—102.

27. *Клепикова С. В.* Изотропный тензор Вейля на четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2019. — 1(105). — С. 80—83.

28. *Клепикова С. В.* О классификации четырехмерных локально однородных псевдоримановых многообразий с изотропным тензором Вейля // Известия вузов. Математика. — 2019. — № 7. — С. 86—90.

29. *Jentsch T.* The Jet Isomorphism Theorem of pseudo-Riemannian geometry [Электронный ресурс]. — 2015. — URL: https://arxiv.org/abs/1509.08269 (visited on 05/21/2021).

30. *Wang M.* Einstein metrics from symmetry and bundle constructions // Surveys in Differential Geometry. — 1999. — Vol. 6. — P. 287—325.

31. *Lauret J.* Einstein solvmanifolds and nilsolitons, New development in Lie theory and geometry // Contemporary Mathematics. — 2009. — Vol. 491. — P. 1—35.

32. *Alexeevskii D. V., Kimelfeld B. N.* Structure of homogeneous Riemannian spaces with zero Ricci curvature // Functional Analysis and Its Applications. — 1975. — Vol. 9, no. 2. — P. 5—11.

33. *Petersen P., Wylie W.* On gradient Ricci solitons with symmetry // Proceedings of the American Mathematical Society. — 2009. — Vol. 137, no. 6. — P. 2085—2092.

34. *Ivey T.* Ricci solitons on compact three-manifolds // Differential Geometry and Applications. — 1993. — Vol. 3, no. 4. — P. 301—307.

35. *Lauret J.* Ricci soliton solvmanifolds // Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik. — 2011. — Vol. 650. — P. 1—21.

36. *Lafuente R.*, *Lauret J.* Structure of homogeneous Ricci solitons and the Alekseevskii conjecture // Journal of Differential Geometry. — 2014. — Vol. 98, no. 2. — P. 315—347.

37. *Batat W.*, *Onda K.* Algebraic Ricci solitons of three-dimensional Lorentzian Lie groups // Journal of Geometry and Physics. — 2017. — Vol. 114. — P. 138—152.

38. *O'Neill B.* Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. — Academic Press, 1983. — 468 p.

39. *Honda K.* Conformally Flat Semi-Riemannian Manifolds with Commuting Curvature and Ricci Operators // Tokyo journal of mathematics. — 2003. — Vol. 26, no. 1. — P. 241—260.

40. *Brozos-Vazquez M.*, *Garcia-Rio E.*, *Gilkey P.*, *Nikcevic S.*, *Vazquez-Lorenzo R.* The Geometry of Walker Manifolds. — Morgan and Claypool Publishers, 2009. — 179 p.

41. *Гладунова О. П.* Применение математических пакетов к вычислению инвариантных тензорных полей на трехмерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Вестник Алтайского государственного педагогического университета. — 2006. — Т. 6—2. — С. 111—115.

42. *Гладунова О. П.*, *Оскорбин Д. Н.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию спектра оператора кривизны на метрических группах Ли // Известия АлтГУ. — 2013. — Т. 1—1(77). — С. 19—23.

43. *Хромова О. П.* Применение пакетов символьных вычислений к исследованию оператора одномерной кривизны на нередуктивных однородных псевдоримановых многообразиях // Известия АлтГУ. — 2017. — Т. 1(93). — С. 140—143.

44. *Komrakov B. B.* Einstein-Maxwell equation on four-dimensional homogeneous spaces // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2001. — Vol. 8. — P. 33—165.

Публикации автора по теме диссертации

A1. *Klepikov P. N.* Left-Invariant Pseudo-Riemannian Metrics on Four-Dimensional Lie Groups With Nonzero Schouten–Weyl Tensor // Russian Mathematics. — 2017. — Vol. 61, no. 1. — P. 81—85.

A2. *Klepikov P. N.*, *Rodionov E. D.* Algebraic Ricci Solitons on Metric Lie Groups with Zero Schouten–Weyl Tensor // Doklady Mathematics. — 2017. — Vol. 95, no. 1. — P. 62—64.

A3. *Klepikov P. N.* Conformally Flat Algebraic Ricci Solitons on Lie Groups // Mathematical Notes. — 2018. — Vol. 104, no. 1/2. — P. 53—62.

A4. *Клепиков П. Н.* Четырехмерные метрические группы Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Сибирские электронные математические известия. — 2019. — Т. 16. — С. 271—330.

A5. *Клепиков П. Н.*, *Оскорбин Д. Н.* Конформно плоские солитоны Риччи на группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой // Известия АлтГУ. — 2016. — 1(89). — С. 123—128.

A6. *Клепиков П. Н.* Левоинвариантные псевдоримановы метрики на четырехмерных группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2017. — Т. 8. — С. 92—97.

A7. *Клепиков П. Н.*, *Родионов Е. Д.* Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с недиагонализируемым оператором Риччи // Известия АлтГУ. — 2017. — 1(93). — С. 97—90.

A8. *Клепиков П. Н.*, *Родионов Е. Д.* Алгебраические солитоны Риччи на метрических группах Ли с нулевым тензором Схоутена–Вейля // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 472, № 5. — С. 506—508.

A9. *Клепиков П. Н.*, *Клепикова С. В.*, *Кизбикенов К. О.*, *Эрнст И. В.* Исследование четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с изотропным тензором Схоутена–Вейля // Известия АлтГУ. — 2018. — 4(102). — С. 79—82.

A10. *Клепиков П. Н.* Конформно плоские алгебраические солитоны Риччи на группах Ли // Математические заметки. — 2018. — Т. 104, № 1. — С. 62—73.

A11. *Klepikov P.* Ricci solitons on conformally flat metric Lie groups // Международная конференция «Геометрический анализ и теория управления». Тезисы докладов. — Новосибирск: ФГБУН ИМ СО РАН, 2016. — С. 49—50.

A12. *Khromova O.*, *Klepikov P.*, *Rodionov E.* Left-invariant pseudo-Riemannian metrics on 4-dimensional Lie groups with zero divergence Weyl tensor // The 13th Conference on Differential Geometry and its Applications. Programme and Abstracts. — Brno: Masaryk University, 2016. — P. 48—49.

A13. *Клепиков П. Н.*, *Клепикова С. В.*, *Хромова О. П.* О метрических группах Ли с гармоническим тензором Вейля // ДНИ ГЕОМЕТРИИ В НОВОСИБИРСКЕ — 2016: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск: ФГБУН ИМ СО РАН, 2016. — С. 94—98.

A14. *Клепиков П. Н.*, *Хромова О. П.* О псевдоримановых однородных С-пространствах размерности 4 // Материалы международной конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвященной юбилеям выдающихся профессоров Казанского университета, математиков Петра Алексеевича (1895-1944) и Александра Петровича (1926-1998) Широковых, и молодежной школы-конференции по алгебре, анализу, геометрии. — Казань: АН РТ, 2016. — С. 205—206.

A15. *Клепиков П. Н.*, *Родионов Е. Д.* Исследование эйнштейново-подобных псевдоримановых многообразий с использованием методов компьютерной математики // “Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования”. Тезисы докладов XIV Международной научной конференции. — Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2017. — С. 152.

A16. *Клепиков П. Н.*, *Родионов Е. Д.* Об эйнштейново-подобных по А. Грею однородных многообразиях // Математика в современном мире. Международная конференция, посвященная 60-летия Института математики им. С.Л.Соболева (Новосибирск, 14-19 августа 2017г.): Тез. докладов. — Новосибирск: ФГБУН ИМ СО РАН, 2017. — С. 121.

A17. *Клепиков П. Н.*, *Родионов Е. Д.* Об Эйнштейново-подобных псевдоримановых многообразиях по А. Грею // Дни геометрии в Новосибирске-2017: Тезисы Международной конференции. — Новосибирск: ФГБУН ИМ СО РАН, 2017. — С. 38.

A18. *Клепиков П. Н.* Четырехмерные локально однородные псевдоримановы многообразия с изотропным тензором Схоутена–Вейля // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. — 2019. — Т. 5. — С. 24—50.

Список таблиц

Приложение А

Классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

Далее приведем классификацию четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий G/H с нетривиальной подгруппой изотропии, которая была получена в [44]. Данная классификация приведена в табл. А.1. Для каждого случая указаны скобки Ли, определяющие алгебру Ли группы G, параметры могут принимать любые действительные значения, если не указано обратное; во всех случаях подалгебра изотропии $\mathfrak{h} = \operatorname{span}(e_i)$, дополнение $\mathfrak{m} = \operatorname{span}(u_i)$.

Таблица А.1 — Классификация четырехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразий с нетривиальной подгруппой изотропии

№	Скобки Ли
$1.1^1.1$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_1,u_3] = u_2,\ [u_2,u_4] = u_2,\ [u_3,u_4] = u_3$
$1.1^1.2$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_2,u_4] = pu_2,\ [u_3,u_4] = u_3$
$1.1^1.3$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_1,u_3] = e_1 + u_2$
$1.1^1.4$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_1,u_3] = u_2$
$1.1^1.5$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_1,u_3] = e_1,\ [u_2,u_4] = u_2$
$1.1^1.6$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_2,u_4] = u_2$
$1.1^1.7$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [u_1,u_3] = e_1$
$1.1^1.8$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_2] = \frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [e_1,u_4] = -\frac{1}{2}u_4,\ [u_1,u_3] = -2e_1,\ [u_1,u_4] = u_2,\ [u_2,u_3] = u_4$
$1.1^1.9$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_2] = \frac{1}{2}u_2,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [e_1,u_4] = -\frac{1}{2}u_4,\ [u_1,u_4] = u_2$
$1.1^1.10$	$[e_1,u_1] = u_1,\ [e_1,u_2] = \lambda u_2,\ [e_1,u_3] = -u_3,\ [e_1,u_4] = -\lambda u_4,\ \lambda \in [0,1]$
$1.1^2.1$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_3] = -u_2,\ [u_1,u_4] = u_1,\ [u_2,u_4] = 2u_2,\ [u_3,u_4] = u_3$
$1.1^2.2$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_4] = u_1,\ [u_2,u_4] = pu_2,\ [u_3,u_4] = u_3$
$1.1^2.3$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_3] = e_1 + u_2$
$1.1^2.4$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_3] = -e_1 + u_2$
$1.1^2.5$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_3] = u_2$
$1.1^2.6$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_3] = e_1,\ [u_2,u_4] = u_2$
$1.1^2.7$	$[e_1,u_1] = u_3,\ [e_1,u_3] = -u_1,\ [u_1,u_3] = -e_1,\ [u_2,u_4] = u_2$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$1.1^2.8$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_2,u_4]=u_2$
$1.1^2.9$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=e_1$
$1.1^2.10$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [u_1,u_3]=-e_1$
$1.1^2.11$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=\frac{1}{2}u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=-\frac{1}{2}u_2,\ [u_1,u_2]=u_2,\ [u_1,u_3]=-4e_1,$ $[u_1,u_4]=-u_4,\ [u_2,u_3]=-u_4,\ [u_3,u_4]=u_2$
$1.1^2.12$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=\lambda u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=-\lambda u_2,\ \lambda\in[0,1]$
$1.1^3.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_4,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-\lambda u_2,\ \lambda\in(0,1]$
$1.1^4.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-\lambda u_2,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=\lambda u_4,\ \lambda\in(0,1)$
$1.1^5.1$	$[e_1,u_1]=\cos(\varphi/2)u_1-\sin(\varphi/2)u_2,\ [e_1,u_2]=\cos(\varphi/2)u_2+\sin(\varphi/2)u_1,$ $[e_1,u_3]=-\cos(\varphi/2)u_3+\sin(\varphi/2)u_4,\ [e_1,u_4]=-\cos(\varphi/2)u_4-\sin(\varphi/2)u_3,\ \varphi\in(0,\pi/2]$
$1.1^6.1$	$[e_1,u_1]=-\cos(\varphi/2)u_2-\sin(\varphi/2)u_1,\ [e_1,u_2]=\cos(\varphi/2)u_1-\sin(\varphi/2)u_2,$ $[e_1,u_3]=-\cos(\varphi/2)u_4+\sin(\varphi/2)u_3,\ [e_1,u_4]=\cos(\varphi/2)u_3+\sin(\varphi/2)u_4,\ \varphi\in(0,\pi/2)$
$1.2^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_1+u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3-u_4,\ [e_1,u_4]=-u_4$
$1.2^2.1$	$[e_1,u_1]=u_2,\ [e_1,u_2]=-u_1,\ [e_1,u_3]=u_2+u_4,\ [e_1,u_4]=-u_1-u_3$
$1.3^1.1$	$[e_1,u_1]=e_1,\ [e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2,\ [u_1,u_3]=u_3,\ [u_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4,$ $[u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_4$
$1.3^1.2$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\lambda e_1+(\lambda+1)u_1+\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ \lambda\in[-1,1]$
$1.3^1.3$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.4$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-(1+\lambda^2)e_1+2\lambda u_1+(1+\lambda^2)u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ \lambda\geqslant 0$
$1.3^1.5$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-\frac{\lambda^2+\mu}{\mu-1}e_1+\frac{1+\lambda^2}{\mu-1}u_2,\ [u_1,u_4]=-\lambda e_1+u_1+\lambda u_2,$ $[u_2,u_3]=-\lambda e_1+u_1+\lambda u_2,\ [u_2,u_4]=-\mu e_1+(\mu+1)u_2,\ \lambda\geqslant 0,\ \mu\neq 1$
$1.3^1.6$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.7$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}u_1-\frac{1}{1+\lambda}u_2,$ $[u_1,u_4]=-\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{1}{1+\lambda}u_1+\frac{1}{1+\lambda}u_2,\ [u_2,u_3]=-\frac{1}{1+\lambda}e_1+\frac{1}{1+\lambda}u_1+\frac{1}{1+\lambda}u_2,$ $[u_2,u_4]=-\frac{\lambda}{1+\lambda}e_1+\frac{\lambda}{1+\lambda}u_1+\frac{1+2\lambda}{1+\lambda}u_2,\ \lambda\neq -1$
$1.3^1.8$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=-u_3$
$1.3^1.9$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=\lambda u_1,\ [u_2,u_4]=-\lambda e_1+(\lambda+1)u_2,\ [u_3,u_4]=-\lambda u_3$
$1.3^1.10$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.11$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=-u_1,\ [u_2,u_4]=e_1,\ [u_3,u_4]=e_1+u_3$
$1.3^1.12$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\mu u_1,\ [u_2,u_4]=-\lambda\mu e_1+(\lambda+\mu)u_2,$ $[u_3,u_4]=(1-\mu)u_3$
$1.3^1.13$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_1,\ [u_2,u_4]=-\frac{\lambda}{2}e_1+\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1+\frac{1}{2}u_3$
$1.3^1.14$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=(1-\lambda)u_1,\ [u_2,u_4]=\lambda(\lambda-1)e_1+u_2,$ $[u_3,u_4]=e_1+\lambda u_3,\ \lambda\neq\frac{1}{2}$
$1.3^1.15$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1+2u_1,\ [u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,$ $[u_2,u_4]=-e_1+u_1$
$1.3^1.16$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1+2u_1,\ [u_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_2,\ [u_2,u_4]=e_1-u_1$
$1.3^1.17$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.18$	$[e_1,u_3]=u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,\ [u_2,u_4]=u_1$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$1.3^1.19$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=u_1$, $[u_2,u_4]=-e_1+u_1+2u_2$
$1.3^1.20$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2-u_1$, $[u_3,u_4]=-u_3$
$1.3^1.21$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=\lambda u_1$, $[u_2,u_4]=-\lambda e_1+(1-\lambda)u_1+(1+\lambda)u_2$, $[u_3,u_4]=(1-\lambda)u_3$, $\lambda\neq 1$
$1.3^1.22$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=\frac{1}{2}u_1$, $[u_2,u_4]=-\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}u_1+\frac{3}{2}u_2$, $[u_3,u_4]=e_1+\frac{1}{2}u_3$
$1.3^1.23$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_1+u_2$, $[u_3,u_4]=e_1+u_3$
$1.3^1.24$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=(1-2\lambda)e_1+2\lambda u_1$, $[u_1,u_4]=(2\lambda-1)u_2$, $[u_2,u_3]=\lambda u_2$, $[u_2,u_4]=\frac{2\lambda-1}{2\lambda-2}e_1-\frac{1}{2\lambda-2}u_1$, $[u_3,u_4]=(\lambda-1)u_4$, $\lambda\neq 1$
$1.3^1.25$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=(1-2\lambda)e_1+2\lambda u_1$, $[u_1,u_4]=(2\lambda-1)u_2$, $[u_2,u_3]=\lambda u_2$, $[u_2,u_4]=\frac{1-2\lambda}{2\lambda-2}e_1+\frac{1}{2\lambda-2}u_1$, $[u_3,u_4]=(\lambda-1)u_4$, $\lambda\neq 1$
$1.3^1.26$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=-\frac{1}{3}e_1+\frac{4}{3}u_1$, $[u_1,u_4]=\frac{1}{3}u_2$, $[u_2,u_3]=\frac{2}{3}u_2$, $[u_2,u_4]=-\frac{1}{2}e_1+\frac{3}{2}u_1$, $[u_3,u_4]=e_1-\frac{1}{3}u_4$
$1.3^1.27$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=-\frac{1}{3}e_1+\frac{4}{3}u_1$, $[u_1,u_4]=\frac{1}{3}u_2$, $[u_2,u_3]=\frac{2}{3}u_2$, $[u_2,u_4]=\frac{1}{2}e_1-\frac{3}{2}2u_1$, $[u_3,u_4]=e_1-\frac{1}{3}u_4$
$1.3^1.28$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=2u_1$, $[u_1,u_4]=2u_2$, $[u_2,u_3]=u_2$, $[u_2,u_4]=e_1-\frac{1}{2}u_1$, $[u_3,u_4]=u_4$
$1.3^1.29$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=2u_1$, $[u_1,u_4]=2u_2$, $[u_2,u_3]=u_2$, $[u_2,u_4]=-e_1+\frac{1}{2}u_1$, $[u_3,u_4]=u_4$
$1.3^1.30$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=\frac{\lambda\mu(\lambda-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\lambda^2+\mu-\lambda^2\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda(1-\lambda)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $[u_1,u_4]=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $[u_2,u_3]=-\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $[u_2,u_4]=\frac{\lambda\mu(\mu-1)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}e_1+\frac{\mu(1-\mu)}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_1+\frac{\lambda+\mu^2-\mu^2\lambda}{\lambda+\mu-\lambda\mu}u_2$, $\lambda+\mu-\lambda\mu\neq 0$, $1\leqslant\mu\leqslant\lambda$, $\lambda\mu>0$
$1.3^1.31$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=e_1$
$1.3^1.32$	$[e_1,u_3]=u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$
$1.4^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=u_3$, $[u_3,u_4]=-u_3$
$1.4^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=pu_1$, $[u_2,u_4]=(p-1)u_2$, $[u_3,u_4]=(p-2)u_3$
$1.4^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$
$1.4^1.4$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[e_1,u_4]=e_1$, $[u_1,u_4]=2u_1$, $[u_2,u_3]=-e_1$, $[u_2,u_4]=u_2$
$1.4^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_3$
$1.4^1.6$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_1+u_3$
$1.4^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=-u_1+u_3$
$1.4^1.8$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_3$
$1.4^1.9$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2+u_4$, $[u_3,u_4]=pu_4$
$1.4^1.10$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2$, $[u_3,u_4]=pu_4$
$1.4^1.11$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2+u_4$, $[u_3,u_4]=u_1-u_4$
$1.4^1.12$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=re_1+u_2$, $[u_3,u_4]=u_1-u_4$
$1.4^1.13$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=re_1+u_4$, $[u_3,u_4]=u_4$
$1.4^1.14$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=re_1$, $[u_3,u_4]=u_4$
$1.4^1.15$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=e_1+u_4$, $[u_3,u_4]=u_1$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$1.4^1.16$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1+u_4,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.17$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_4,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.18$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1+u_4$
$1.4^1.19$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1+u_4$
$1.4^1.20$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=u_4$
$1.4^1.21$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.22$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.23$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_1$
$1.4^1.24$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=e_1$
$1.4^1.25$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2,\ [u_2,u_3]=-e_1$
$1.4^1.26$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=u_2$
$2.1^1.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^1.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [u_1,u_3]=e_1$
$2.1^1.3$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4$
$2.1^2.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^2.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^2.3$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1$
$2.1^2.4$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^2.5$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^2.6$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2$
$2.1^3.1$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.1^3.2$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^3.3$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1,\ [u_2,u_4]=-e_2$
$2.1^3.4$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=e_1$
$2.1^3.5$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [u_1,u_3]=-e_1$
$2.1^3.6$	$[e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2$
$2.1^4.1$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_1]=u_2,\ [e_2,u_2]=-u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=u_3,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_1,u_4]=e_2,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_2,u_4]=-e_1$
$2.1^4.2$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_1]=u_2,\ [e_2,u_2]=-u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=u_3$
$2.2^1.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=-2e_2,$ $[u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=2u_3$
$2.2^1.2$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [u_1,u_2]=e_2,$ $[u_1,u_3]=u_4,\ [u_2,u_3]=(p-1)u_3,\ [u_2,u_4]=pu_4$
$2.2^1.3$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [u_2,u_3]=u_3,$ $[u_2,u_4]=u_4$
$2.2^1.4$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[u_1,u_3]=e_2,\ [u_2,u_3]=e_1,\ [u_2,u_4]=e_2$
$2.2^1.5$	$[e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[u_2,u_3]=e_2$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$2.2^1.6$	$[e_1,e_2]=\frac{3}{2}e_2$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-\frac{1}{2}u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=\frac{1}{2}u_4$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$, $[u_1,u_2]=u_4$
$2.2^1.7$	$[e_1,e_2]=(1-\lambda)e_2$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=\lambda u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=-\lambda u_4$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$, $\lambda\in[-1,1]$
$2.2^2.1$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=e_2$, $[u_2,u_4]=e_2$, $[u_3,u_4]=-e_1$
$2.2^2.2$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $[u_1,u_3]=-e_2$, $[u_2,u_4]=-e_2$, $[u_3,u_4]=e_1$
$2.2^2.3$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=e_2$
$2.2^2.4$	$[e_1,u_1]=u_2$, $[e_1,u_2]=-u_1$, $[e_1,u_3]=u_4$, $[e_1,u_4]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$
$2.2^3.1$	$[e_1,e_2]=-2\sin(\varphi/2)e_2$, $[e_1,u_1]=-\sin(\varphi/2)u_1-\cos(\varphi/2)u_2$, $[e_1,u_2]=-\sin(\varphi/2)u_2+\cos(\varphi/2)u_1$, $[e_1,u_3]=\sin(\varphi/2)u_3-\cos(\varphi/2)u_4$, $[e_1,u_4]=\sin(\varphi/2)u_4+\cos(\varphi/2)u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_2,u_4]=u_2$, $\varphi\in(0,\pi)$
$2.3^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_2-u_3$, $[e_1,u_4]=u_1+u_4$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$
$2.4^1.1$	$[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=u_2$, $[u_1,u_2]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_2$, $[u_2,u_3]=u_3$
$2.4^1.2$	$[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=u_2$, $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$, $[u_3,u_4]=u_3$
$2.4^1.3$	$[e_1,e_2]=e_2$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=u_2$
$2.5^1.1$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_1,u_4]=-2e_1$, $[e_2,u_2]=-2e_2$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_2]=2e_2-u_1$, $[u_1,u_3]=u_2+u_4$, $[u_1,u_4]=2e_1-u_1$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=u_2-u_4$, $[u_3,u_4]=2u_3$
$2.5^1.2$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_2]=-2e_2$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_2]=-u_1$, $[u_1,u_3]=u_4$, $[u_2,u_3]=-2u_3$, $[u_2,u_4]=-u_4$
$2.5^1.3$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1+pe_2+(1-q)u_2$, $[u_2,u_4]=qu_1$, $[u_3,u_4]=-(p+q)e_1+\lambda e_2-(1+q)u_4$, $q\geqslant 0$ (если $\lambda\neq 0$), $q\in\mathbb{R}$ (если $\lambda=0$)
$2.5^1.4$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_2,u_3]=qe_2+(1-p)u_2$, $[u_2,u_4]=pu_1$, $[u_3,u_4]=-(p+q)e_1-(1+p)u_4$, $p\geqslant 0$
$2.5^1.5$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1+qe_2-u_2$, $[u_2,u_4]=u_1$, $[u_3,u_4]=-qe_1-\lambda e_2-u_4$
$2.5^1.6$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=qe_2-u_2$, $[u_2,u_4]=u_1$, $[u_3,u_4]=-qe_1-u_4$
$2.5^1.7$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1+e_2$, $[u_3,u_4]=-e_1+\lambda e_2$
$2.5^1.8$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1-e_2$, $[u_3,u_4]=e_1+\lambda e_2$
$2.5^1.9$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_2$, $[u_3,u_4]=-e_1$
$2.5^1.10$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=-e_2$, $[u_3,u_4]=e_1$
$2.5^1.11$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_3,u_4]=e_2$
$2.5^1.12$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$, $[u_3,u_4]=-e_2$
$2.5^1.13$	$[e_1,u_2]=u_1$, $[e_1,u_3]=-u_4$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=e_1$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$2.5^1.14$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_4]=u_1$
$2.5^2.1$	$[e_1,u_2]=-e_1+u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_1,u_4]=e_2,\ [e_2,u_2]=-e_2,\ [e_2,u_3]=u_4,$ $[e_2,u_4]=-e_1-u_1,\ [u_1,u_2]=e_1-u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-e_2,\ [u_2,u_3]=-2u_3,$ $[u_2,u_4]=-u_4$
$2.5^2.2$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,$ $[u_2,u_3]=(p+s)e_1+re_2+u_2-2ru_4,\ [u_2,u_4]=2ru_1,$ $[u_3,u_4]=-re_1+(p-s)e_2-2ru_2-u_4,\ r\geqslant 0,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.3$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-(r+s)e_1-u_4,$ $[u_2,u_4]=u_1,\ [u_3,u_4]=(s-r)e_2-u_2,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.4$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=(1+s)e_1,$ $[u_3,u_4]=(1-s)e_2,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.5$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-(1+s)e_1,$ $[u_3,u_4]=(s-1)e_2,\ s\geqslant 0$
$2.5^2.6$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_3,u_4]=e_1$
$2.5^2.7$	$[e_1,u_2]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_2,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_1$
$3.1^1.1$	$[e_1,e_3]=e_3,\ [e_2,e_3]=-e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4$
$3.1^2.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_1]=u_2,$ $[e_2,u_2]=-u_1,\ [e_2,u_3]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_1,\ [e_3,u_4]=u_2$
$3.2^1.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_2,u_4]=-2e_2,\ [e_3,u_2]=-2e_3,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_1,u_2]=2e_3-u_1,$ $[u_1,u_3]=u_2+u_4,\ [u_1,u_4]=2e_2-u_1,\ [u_2,u_3]=-2u_3,\ [u_2,u_4]=u_2-u_4,\ [u_3,u_4]=2u_3$
$3.2^1.2$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_2,u_4]=-2e_2,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,$ $[u_3,u_4]=2u_3$
$3.2^1.3$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_2$
$3.2^1.4$	$[e_1,e_2]=(1-\lambda)e_2,\ [e_1,e_3]=(1+\lambda)e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,$ $[e_1,u_4]=-\lambda u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ \lambda\geqslant 0$
$3.2^2.1$	$[e_1,e_2]=e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_2]=-e_2+u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_2,u_4]=e_3,\ [e_3,u_2]=-e_3,\ [e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-e_2-u_1,\ [u_1,u_2]=e_2-u_1,$ $[u_1,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=-e_3,\ [u_2,u_3]=-2u_3,\ [u_2,u_4]=-u_4$
$3.2^2.2$	$[e_1,e_2]=e_2-\lambda e_3,\ [e_1,e_3]=e_3+\lambda e_2,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=\lambda u_4,\ [e_1,u_3]=-u_3,$ $[e_1,u_4]=-\lambda u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ \lambda\geqslant 0$
$3.3^1.1$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=pe_3+u_2,\ [u_3,u_4]=-pe_2-u_4$
$3.3^1.2$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=e_3,\ [u_3,u_4]=-e_2$
$3.3^1.3$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1,\ [u_2,u_3]=-e_3,\ [u_3,u_4]=e_2$
$3.3^1.4$	$[e_1,e_2]=-e_2,\ [e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,u_2]=u_2,\ [e_1,u_4]=-u_4,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,$ $[e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=u_1$
$3.3^2.1$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_3]=u_1,\ [u_2,u_3]=pe_2+u_2,\ [u_3,u_4]=pe_3-u_4$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$3.3^2.2$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=e_2,\ [u_3,u_4]=e_3$
$3.3^2.3$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1,\ [u_2,u_3]=-e_2,\ [u_3,u_4]=-e_3$
$3.3^2.4$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_2]=u_4,\ [e_1,u_4]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_2,$ $[e_3,u_3]=u_4,\ [e_3,u_4]=-u_1$
$3.4^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_1]=u_2,\ [e_3,u_4]=-u_3$
$3.4^2.1$	$[e_1,e_2]=2e_3,\ [e_1,e_3]=-2e_2,\ [e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[e_2,e_3]=2e_1,\ [e_2,u_1]=-u_2,\ [e_2,u_2]=u_1,\ [e_2,u_3]=-u_4,\ [e_2,u_4]=u_3,\ [e_3,u_1]=u_4,$ $[e_3,u_2]=u_3,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_3,u_4]=-u_1$
$3.5^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$3.5^1.2$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [u_1,u_2]=e_2,\ [u_1,u_3]=e_1,\ [u_2,u_3]=e_3$
$3.5^1.3$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [u_1,u_2]=-e_2,\ [u_1,u_3]=-e_1,\ [u_2,u_3]=-e_3$
$3.5^1.4$	$[e_1,e_2]=2e_2,\ [e_1,e_3]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=2u_1,\ [e_1,u_3]=-2u_3,\ [e_2,e_3]=e_1,\ [e_2,u_2]=u_1,$ $[e_2,u_3]=-2u_2,\ [e_3,u_1]=2u_2,\ [e_3,u_2]=-u_3$
$3.5^2.1$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2,\ [u_1,u_4]=u_1,\ [u_2,u_4]=u_2,\ [u_3,u_4]=u_3$
$3.5^2.2$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=e_1,\ [u_1,u_3]=e_2,\ [u_2,u_3]=e_3$
$3.5^2.3$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2,\ [u_1,u_2]=-e_1,\ [u_1,u_3]=-e_2,\ [u_2,u_3]=-e_3$
$3.5^2.4$	$[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\ [e_1,u_1]=-u_2,\ [e_1,u_2]=u_1,\ [e_2,e_3]=-e_1,\ [e_2,u_1]=-u_3,$ $[e_2,u_3]=u_1,\ [e_3,u_2]=-u_3,\ [e_3,u_3]=u_2$
$4.1^1.1$	$[e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,e_3]=-e_3,\ [e_2,e_4]=e_4,$ $[e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_3]=-u_2,\ [e_4,u_4]=u_1$
$4.1^2.1$	$[e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_2,e_3]=-e_4,\ [e_2,e_4]=e_3,$ $[e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_2,\ [e_4,u_3]=u_4,\ [e_4,u_4]=-u_1$
$4.2^1.1$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,$ $[e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3,\ [u_1,u_3]=e_1+3e_2,\ [u_1,u_4]=2e_3,\ [u_2,u_3]=2e_4,$ $[u_2,u_4]=-e_1+3e_2$
$4.2^1.2$	$[e_1,e_3]=2e_3,\ [e_1,e_4]=-2e_4,\ [e_1,u_1]=u_1,\ [e_1,u_2]=-u_2,\ [e_1,u_3]=-u_3,\ [e_1,u_4]=u_4,$ $[e_2,u_1]=u_1,\ [e_2,u_2]=u_2,\ [e_2,u_3]=-u_3,\ [e_2,u_4]=-u_4,\ [e_3,e_4]=e_1,\ [e_3,u_2]=u_1,$ $[e_3,u_3]=-u_4,\ [e_4,u_1]=u_2,\ [e_4,u_4]=-u_3$
$4.2^2.1$	$[e_1,e_3]=2e_4,\ [e_1,e_4]=-2e_3,\ [e_1,u_1]=u_3,\ [e_1,u_2]=-u_4,\ [e_1,u_3]=-u_1,\ [e_1,u_4]=u_2,$ $[e_2,u_1]=u_3,\ [e_2,u_2]=u_4,\ [e_2,u_3]=-u_1,\ [e_2,u_4]=-u_2,\ [e_3,e_4]=2e_1,\ [e_3,u_1]=-u_2,$ $[e_3,u_2]=u_1,\ [e_3,u_3]=-u_4,\ [e_3,u_4]=u_3,\ [e_4,u_1]=u_4,\ [e_4,u_2]=u_3,\ [e_4,u_3]=-u_2,$ $[e_4,u_4]=-u_1,\ [u_1,u_2]=-e_3,\ [u_1,u_3]=e_1+3e_2,\ [u_1,u_4]=e_4,\ [u_2,u_3]=e_4,$ $[u_2,u_4]=-e_1+3e_2,\ [u_3,u_4]=-e_3$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$4.2^2.2$	$[e_1,e_3]=2e_4$, $[e_1,e_4]=-2e_3$, $[e_1,u_1]=u_3$, $[e_1,u_2]=-u_4$, $[e_1,u_3]=-u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[e_2,u_1]=u_3$, $[e_2,u_2]=u_4$, $[e_2,u_3]=-u_1$, $[e_2,u_4]=-u_2$, $[e_3,e_4]=2e_1$, $[e_3,u_1]=-u_2$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_3,u_4]=u_3$, $[e_4,u_1]=u_4$, $[e_4,u_2]=u_3$, $[e_4,u_3]=-u_2$, $[e_4,u_4]=-u_1$, $[u_1,u_2]=e_3$, $[u_1,u_3]=-e_1-3e_2$, $[u_1,u_4]=-e_4$, $[u_2,u_3]=-e_4$, $[u_2,u_4]=e_1-3e_2$, $[u_3,u_4]=e_3$
$4.2^2.3$	$[e_1,e_3]=2e_4$, $[e_1,e_4]=-2e_3$, $[e_1,u_1]=u_3$, $[e_1,u_2]=-u_4$, $[e_1,u_3]=-u_1$, $[e_1,u_4]=u_2$, $[e_2,u_1]=u_3$, $[e_2,u_2]=u_4$, $[e_2,u_3]=-u_1$, $[e_2,u_4]=-u_2$, $[e_3,e_4]=2e_1$, $[e_3,u_1]=-u_2$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_3,u_4]=u_3$, $[e_4,u_1]=u_4$, $[e_4,u_2]=u_3$, $[e_4,u_3]=-u_2$, $[e_4,u_4]=-u_1$
$4.2^3.1$	$[e_1,e_3]=2e_3$, $[e_1,e_4]=-2e_4$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,u_1]=-u_4$, $[e_2,u_2]=u_3$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[e_3,e_4]=e_1$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_4,u_1]=u_2$, $[e_4,u_4]=-u_3$, $[u_1,u_2]=3e_2$, $[u_1,u_3]=e_1$, $[u_1,u_4]=2e_3$, $[u_2,u_3]=2e_4$, $[u_2,u_4]=-e_1$, $[u_3,u_4]=3e_2$
$4.2^3.2$	$[e_1,e_3]=2e_3$, $[e_1,e_4]=-2e_4$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,u_1]=-u_4$, $[e_2,u_2]=u_3$, $[e_2,u_3]=-u_2$, $[e_2,u_4]=u_1$, $[e_3,e_4]=e_1$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_4,u_1]=u_2$, $[e_4,u_4]=-u_3$
$4.3^1.1$	$[e_1,e_2]=2e_2$, $[e_1,e_3]=-2e_3$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$, $[e_3,u_1]=u_2$, $[e_3,u_4]=-u_3$, $[e_4,u_3]=-u_2$, $[e_4,u_4]=u_1$, $[u_3,u_4]=e_4$
$4.3^1.2$	$[e_1,e_2]=2e_2$, $[e_1,e_3]=-2e_3$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,e_3]=e_1$, $[e_2,u_2]=u_1$, $[e_2,u_3]=-u_4$, $[e_3,u_1]=u_2$, $[e_3,u_4]=-u_3$, $[e_4,u_3]=-u_2$, $[e_4,u_4]=u_1$
$5.1^1.1$	$[e_1,e_3]=2e_3$, $[e_1,e_4]=-2e_4$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,e_5]=2e_5$, $[e_2,u_1]=u_1$, $[e_2,u_2]=u_2$, $[e_2,u_3]=-u_3$, $[e_2,u_4]=-u_4$, $[e_3,e_4]=e_1$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_4,u_1]=u_2$, $[e_4,u_4]=-u_3$, $[e_5,u_3]=-u_2$, $[e_5,u_4]=u_1$
$6.1^1.1$	$[e_1,e_3]=2e_3$, $[e_1,e_4]=-2e_4$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,e_5]=2e_5$, $[e_2,e_6]=-2e_6$, $[e_2,u_1]=u_1$, $[e_2,u_2]=u_2$, $[e_2,u_3]=-u_3$, $[e_2,u_4]=-u_4$, $[e_3,e_4]=e_1$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_4,u_1]=u_2$, $[e_4,u_4]=-u_3$, $[e_5,e_6]=-e_2$, $[e_5,u_3]=-u_2$, $[e_5,u_4]=u_1$, $[e_6,u_1]=-u_4$, $[e_6,u_2]=u_3$, $[u_1,u_2]=2e_5$, $[u_1,u_3]=e_1+e_2$, $[u_1,u_4]=2e_3$, $[u_2,u_3]=2e_4$, $[u_2,u_4]=-e_1+e_2$, $[u_3,u_4]=2e_6$
$6.1^1.2$	$[e_1,e_3]=2e_3$, $[e_1,e_4]=-2e_4$, $[e_1,u_1]=u_1$, $[e_1,u_2]=-u_2$, $[e_1,u_3]=-u_3$, $[e_1,u_4]=u_4$, $[e_2,e_5]=2e_5$, $[e_2,e_6]=-2e_6$, $[e_2,u_1]=u_1$, $[e_2,u_2]=u_2$, $[e_2,u_3]=-u_3$, $[e_2,u_4]=-u_4$, $[e_3,e_4]=e_1$, $[e_3,u_2]=u_1$, $[e_3,u_3]=-u_4$, $[e_4,u_1]=u_2$, $[e_4,u_4]=-u_3$, $[e_5,e_6]=-e_2$, $[e_5,u_3]=-u_2$, $[e_5,u_4]=u_1$, $[e_6,u_1]=-u_4$, $[e_6,u_2]=u_3$
$6.1^2.1$	$[e_1,e_2]=-e_4$, $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_1,e_4]=e_2$, $[e_1,e_5]=e_3$, $[e_1,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=-e_1$, $[e_2,e_6]=e_3$, $[e_2,u_1]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_3,e_5]=-e_1$, $[e_3,e_6]=-e_2$, $[e_3,u_1]=-u_4$, $[e_3,u_4]=u_1$, $[e_4,e_5]=-e_6$, $[e_4,e_6]=e_5$, $[e_4,u_2]=-u_3$, $[e_4,u_3]=u_2$, $[e_5,e_6]=-e_4$, $[e_5,u_2]=-u_4$, $[e_5,u_4]=u_2$, $[e_6,u_3]=-u_4$, $[e_6,u_4]=u_3$, $[u_1,u_2]=e_1$, $[u_1,u_3]=e_2$, $[u_1,u_4]=e_3$, $[u_2,u_3]=e_4$, $[u_2,u_4]=e_5$, $[u_3,u_4]=e_6$

Продолжение табл. А.1

№	Скобки Ли
$6.1^2.2$	$[e_1,e_2]=-e_4$, $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_1,e_4]=e_2$, $[e_1,e_5]=e_3$, $[e_1,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=-e_1$, $[e_2,e_6]=e_3$, $[e_2,u_1]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_3,e_5]=-e_1$, $[e_3,e_6]=-e_2$, $[e_3,u_1]=-u_4$, $[e_3,u_4]=u_1$, $[e_4,e_5]=-e_6$, $[e_4,e_6]=e_5$, $[e_4,u_2]=-u_3$, $[e_4,u_3]=u_2$, $[e_5,e_6]=-e_4$, $[e_5,u_2]=-u_4$, $[e_5,u_4]=u_2$, $[e_6,u_3]=-u_4$, $[e_6,u_4]=u_3$, $[u_1,u_2]=-e_1$, $[u_1,u_3]=-e_2$, $[u_1,u_4]=-e_3$, $[u_2,u_3]=-e_4$, $[u_2,u_4]=-e_5$, $[u_3,u_4]=-e_6$
$6.1^2.3$	$[e_1,e_2]=-e_4$, $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_1,e_4]=e_2$, $[e_1,e_5]=e_3$, $[e_1,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=-e_1$, $[e_2,e_6]=e_3$, $[e_2,u_1]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_3,e_5]=-e_1$, $[e_3,e_6]=-e_2$, $[e_3,u_1]=-u_4$, $[e_3,u_4]=u_1$, $[e_4,e_5]=-e_6$, $[e_4,e_6]=e_5$, $[e_4,u_2]=-u_3$, $[e_4,u_3]=u_2$, $[e_5,e_6]=-e_4$, $[e_5,u_2]=-u_4$, $[e_5,u_4]=u_2$, $[e_6,u_3]=-u_4$, $[e_6,u_4]=u_3$
$6.1^3.1$	$[e_1,e_2]=-e_4$, $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_1,e_4]=e_2$, $[e_1,e_5]=e_3$, $[e_1,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=-e_1$, $[e_2,e_6]=e_3$, $[e_2,u_1]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_3,e_5]=e_1$, $[e_3,e_6]=e_2$, $[e_3,u_1]=u_4$, $[e_3,u_4]=u_1$, $[e_4,e_5]=-e_6$, $[e_4,e_6]=e_5$, $[e_4,u_2]=-u_3$, $[e_4,u_3]=u_2$, $[e_5,e_6]=e_4$, $[e_5,u_2]=u_4$, $[e_5,u_4]=u_2$, $[e_6,u_3]=u_4$, $[e_6,u_4]=u_3$, $[u_1,u_2]=e_1$, $[u_1,u_3]=e_2$, $[u_1,u_4]=-e_3$, $[u_2,u_3]=e_4$, $[u_2,u_4]=-e_5$, $[u_3,u_4]=-e_6$
$6.1^3.2$	$[e_1,e_2]=-e_4$, $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_1,e_4]=e_2$, $[e_1,e_5]=e_3$, $[e_1,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=-e_1$, $[e_2,e_6]=e_3$, $[e_2,u_1]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_3,e_5]=e_1$, $[e_3,e_6]=e_2$, $[e_3,u_1]=u_4$, $[e_3,u_4]=u_1$, $[e_4,e_5]=-e_6$, $[e_4,e_6]=e_5$, $[e_4,u_2]=-u_3$, $[e_4,u_3]=u_2$, $[e_5,e_6]=e_4$, $[e_5,u_2]=u_4$, $[e_5,u_4]=u_2$, $[e_6,u_3]=u_4$, $[e_6,u_4]=u_3$, $[u_1,u_2]=-e_1$, $[u_1,u_3]=-e_2$, $[u_1,u_4]=e_3$, $[u_2,u_3]=-e_4$, $[u_2,u_4]=e_5$, $[u_3,u_4]=e_6$
$6.1^3.3$	$[e_1,e_2]=-e_4$, $[e_1,e_3]=-e_5$, $[e_1,e_4]=e_2$, $[e_1,e_5]=e_3$, $[e_1,u_1]=-u_2$, $[e_1,u_2]=u_1$, $[e_2,e_3]=-e_6$, $[e_2,e_4]=-e_1$, $[e_2,e_6]=e_3$, $[e_2,u_1]=-u_3$, $[e_2,u_3]=u_1$, $[e_3,e_5]=e_1$, $[e_3,e_6]=e_2$, $[e_3,u_1]=u_4$, $[e_3,u_4]=u_1$, $[e_4,e_5]=-e_6$, $[e_4,e_6]=e_5$, $[e_4,u_2]=-u_3$, $[e_4,u_3]=u_2$, $[e_5,e_6]=e_4$, $[e_5,u_2]=u_4$, $[e_5,u_4]=u_2$, $[e_6,u_3]=u_4$, $[e_6,u_4]=u_3$