ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Матвеева Инесса Изотовна

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
д.ф.-м.н., профессор
Демиденко Геннадий Владимирович

НОВОСИБИРСК
2022

Содержание

Введение

Актуальность темы исследования. Теория дифференциальных уравнений с запаздыванием начала интенсивно развиваться во второй половине XX века. Повышенный интерес к таким уравнениям обусловлен тем, что они возникают во многих прикладных задачах при изучении процессов, скорость протекания которых определяется не только настоящим, но и предшествующим состояниями. Такие процессы часто называют “процессами с запаздыванием” или “с последействием”. Уравнения с запаздыванием возникают в различных приложениях, таких как системы управления, механика, ядерные реакторы, нейронные сети, процессы горения, взаимодействие видов, микробиология, модели обучения, эпидемиология, физиология и многие другие. (см., например, работы [13, 16, 17, 21, 26, 27, 30, 39, 43, 57, 58, 69, 75, 76, 85, 106, 120, 124, 138, 140] и библиографию, содержащуюся в них).

В настоящее время имеется огромное число работ по теории дифференциальных уравнений с запаздыванием. Для таких уравнений изучаются различные постановки задач, проводятся теоретические и численные исследования свойств решений, рассматриваются конкретные модели, возникающие в приложениях. Некоторые аспекты теории уравнений с запаздыванием отражены в книгах Ю.И. Неймарка [74], А.Д. Мышкиса [72], Л.Э. Эльсгольца [101], Н.Н. Красовского [49], В.И. Зубова [42], Э. Пинни [77], Р. Беллмана и К. Кука [15], В.П. Рубаника [84], А. Халаная и Д. Векслера [89], Л.Э. Эльсгольца и С.Б. Норкина [103], Ю.А. Митропольского и Д.И. Мартынюка [68], С.Н. Шиманова [97], Дж. Хейла [91], В.Г. Курбатова [50] Н.В. Азбелева, В.П. Максимова и Л.Ф. Рахматуллиной [1], В.Б. Колмановского и А.Д. Мышкиса [136], Власова В.В., Медведева Д.А. [20], в имеющейся в этих книгах библиографии, а также в обзорных статьях Зверкина А.М., Каменского Г.А., Норкина С.Б., Эльсгольца Л.Э. [40], Азбелева Н.В., Максимова В.П., Симонова П.М. [7], Ришара Ж.П. [150].

Одной из важных проблем в теории дифференциальных уравнений с запаздыванием является вопрос устойчивости решений. Исследования устойчивости начались более полувека назад (А.А. Андронов и А.Г. Майер [12], Р. Беллман [14], Н.Н. Красовский [48], Л.С. Понтрягин [78], Б.С. Разумихин [79] и др.). В настоящее время изучению проблемы устойчивости решений уравнений с запаздыванием посвящено очень много работ (см., например, монографии [6, 38, 44, 45, 47, 80, 92, 105, 109, 122, 125, 127, 134, 146, 149] и имеющуюся в них библиографию).

К настоящему времени наиболее изученными являются задачи об асимптотической устойчивости стационарных решений **автономных** дифференциальных уравнений с запаздыванием, при этом широкое распространение получили спектральные методы исследований. Как известно, для многих классов систем автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием достаточным условием асимптотической устойчивости нулевого решения служит принадлежность корней квазимногочлена левой полуплоскости (см., например, [15, 91, 102]). Знание корней дает исчерпывающую информацию о поведении решений, поэтому в литературе активно развивается это направление (см., например, монографию [146] и имеющуюся в ней библиографию).

Однако при исследовании асимптотической устойчивости решений конкретных систем уравнений нахождение корней может представлять очень сложную задачу. С одной стороны, приближенное вычисление корней квазимногочленов является весьма трудоемкой задачей (при этом их может быть счетное число), с другой стороны, эта задача является, вообще говоря, плохо обусловленной с точки зрения теории возмущения. Проблема возникает даже в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания с постоянными коэффициентами. Как известно, задача о нахождении спектра недиагонализируемых матриц относится к плохо обусловленным задачам, и даже очень малые возмущения элементов матрицы могут привести к очень большим ошибкам при вычислении собственных значений (см., например, [25, 87]). Это обстоятельство может послужить серьезным препятствием при изучении устойчивости решений с помощью стандартных пакетов программ. Поэтому при исследовании асимптотической устойчивости решений конкретных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием (обыкновенных дифференциальных уравнений без запаздывания) большое значение приобретают различные признаки принадлежности корней квазимногочленов (собственных значений) левой полуплоскости.

Для уравнений с запаздыванием для этой цели, в частности, используют метод D-разбиений (см., например, [70, 71, 74, 94, 111, 135, 141]), метод функций Разумихина (см., например, [11, 79, 104, 128, 151], метод производящих функций (см., например, [53, 82, 96]), W-метод Азбелева (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 18]), test-метод (см., например, работы [54, 55, 56]), а также предложенный Н.Н. Красовским [48] метод, который основан на использовании функционалов Ляпунова – Красовского [49].

Метод функционалов Ляпунова – Красовского получил достаточно широкое распространение в теории уравнений с запаздыванием. Достоинством этого метода является простота формулировок утверждений и сведение исследования асимптотической устойчивости к решению хорошо обусловленных задач. В частности, для уравнений с постоянными коэффициентами достаточные условия, зачастую, формулируются в виде матричных неравенств для эрмитовых матриц, которые легко проверить с использованием стандартных комплексов программ на компьютере.

Отметим, что первые функционалы Ляпунова – Красовского для автономных уравнений являлись аналогами функций Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений. Как известно, для системы с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = Ay$$

в качестве функции Ляпунова можно взять $\langle Hy, y\rangle$, где H — эрмитово положительно определенное решение матричного уравнения Ляпунова

$$HA + A^*H = -C, \quad C = C^* > 0.$$

Используя это решение можно указать оценку, характеризующую скорость убывания решений системы на бесконечности. Например, если $C = I$, то имеет место оценка Крейна [28]:

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{2\|A\|\|H\|}\ \exp\left(-\frac{t}{2\|H\|}\right)\ \|y(0)\|, \quad t > 0.$$

При помощи решения уравнения Ляпунова можно также оценить область притяжения нулевого решения нелинейных систем и установить оценку экспоненциального убывания решения, не вычисляя при этом собственные значения матрицы A. Особо отметим, что в отличие от задачи о нахождении матричного спектра построение решения матричного уравнения Ляпунова является хорошо обусловленной задачей (см.

[24]). Поэтому подход, основанный на использовании уравнения Ляпунова, послужил основой для разработки численных методов исследования асимптотической устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений с гарантированной точностью [25]. Аппарат матричных уравнений активно применяется при решении задач о расположении матричного спектра (см., например, [25, 34, 52, 110]).

В отличие от функции Ляпунова первые функционалы Ляпунова – Красовского не позволяли получить аналоги оценки Крейна для решений дифференциальных уравнений с запаздыванием. Задача о получении аналогов оценки Крейна для решений дифференциальных уравнений с запаздыванием в случае постоянных коэффициентов с помощью некоторых функционалов и без нахождения корней квазимногочленов была решена относительно недавно (см., например, [32, 93, 130, 147]). В данных работах предложены различные модификации функционалов Ляпунова–Красовского. Отметим, что использование таких функционалов позволило получить аналоги оценки Крейна для решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, а также оценить область притяжения нулевого решения [32]. В настоящее время имеется очень большое число работ по исследованию устойчивости решений с постоянными коэффициентами с использованием различных функционалов Ляпунова – Красовского (см., например, монографии [122, 134], имеющуюся в них библиографию и обзоры [10, 116, 121]). В ряде работ рассматриваются функционалы Ляпунова – Красовского так называемого полного типа (см., например, [107, 118, 119, 123, 129, 132, 133, 145, 156]).

В отличие от автономных дифференциальных уравнений с запаздыванием задача об асимптотической устойчивости решений **неавтономных** дифференциальных уравнений является менее изученной. Основные исследования в этом направлении проводились для линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием с периодическими коэффициентами. В литературе имеются также некоторые обобщения на случай почти периодических коэффициентов [9, 83]. Основы теории устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами заложены в работах А.М. Зверкина [41], А. Стокса [154], А. Халаная [88], В. Хана [126], Дж. Хейла [91], С.Н. Шиманова [97]. Основным подходом в этих исследованиях является развитие теории Флоке и использование оператора монодромии, являющегося обобщением матрицы монодромии для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Отметим, что этот подход применяется также при изучении устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа с периодическими коэффициентами. Элементы теории Флоке для систем уравнений с запаздыванием изложены, например, в работах [22, 23, 38, 46, 51] и др.

Следует отметить, что существующие условия асимптотической устойчивости решений неавтономных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием проверить достаточно сложно. Трудности возникают также при описании областей притяжения при рассмотрении систем нелинейных уравнений, а также при получении асимптотических оценок решений при $t \to \infty$. Впервые с использованием функционалов Ляпунова – Красовского аналоги оценок Крейна для решений систем дифференциальных уравнений запаздывающего типа с периодическими коэффициентами в линейных членах были получены в [32, 33].

В настоящей диссертации изложено развитие подхода, основанного на использовании подходящих функционалов Ляпунова – Красовского для исследования устойчивости решений классов неавтономных нелинейных систем с запаздыванием. Предложены классы функционалов Ляпунова – Красовского, которые позволили получить условия устойчивости, установить оценки решений, характеризующие скорость убывания на бесконечности, и указать оценки областей притяжения.

Цели и задачи исследования. Основная цель диссертации — развитие методов исследования устойчивости решений неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Для достижения поставленной цели ставятся и решаются следующие задачи.

- Исследование устойчивости нулевого решения некоторых классов неавтономных нелинейных систем запаздывающего и нейтрального типов.

- Построение классов функционалов Ляпунова – Красовского.

- Получение конструктивных оценок решений неавтономных систем дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов, характеризующих скорость убывания решений на бесконечности.

- Получение конструктивных оценок на области притяжения нулевого решения неавтономных нелинейных систем дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов.

- Нахождение конструктивных условий на возмущения функций, входящих в уравнения, при которых сохраняется устойчивость нулевого решения.

Основные результаты диссертации. Во **введении** дается обзор истории вопроса, обосновывается актуальность темы исследования, ставятся задачи исследования и дается краткое описание полученных результатов.

В **главе 1** рассматриваются классы систем дифференциальных уравнений запаздывающего типа:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \qquad (0.0.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. С использованием функционала Ляпунова – Красовского первого типа, предложенного в [32],

$$V_1(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle \, ds \qquad (0.0.2)$$

проводится изучение экспоненциальной устойчивости решений систем вида (0.0.1).

В параграфе 1.1 кратко описано содержание первой главы. В параграфе 1.2 исследуются линейные системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0. \qquad (0.0.3)$$

Установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений и получены оценки экспоненциального убывания решений.

В параграфе 1.3 аналогичные исследования проведены для нелинейных систем вида (0.0.1), если $F(t,u_1,u_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\|, \qquad q_j \ge 0,\ j=1,2. \tag{0.0.4}$$

На основе полученных результатов указаны условия робастной устойчивости для линейных систем (0.0.3) и установлены оценки решений возмущенных систем.

В параграфе 1.4 исследуется экспоненциальная устойчивость решений нелинейных систем вида (0.0.1), когда для $F(t,u_1,u_2)$ выполнена оценка

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \tag{0.0.5}$$

$$q_j \ge 0, \quad \omega_j \ge 0, \quad j=1,2.$$

Установлены оценки на области притяжения нулевого решения и оценки, характеризующие экспоненциальное убывание решений на бесконечности.

В параграфе 1.5 в качестве примера рассмотрен класс систем вида (0.0.1) с параметром

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t,y(t),y(t-\tau)), \quad t>0. \tag{0.0.6}$$

Предполагается, что спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ при всех $t \ge 0$. Используя результаты предыдущих параграфов показано, что существует $\mu_* > 0$ такое, что нулевое решение системы (0.0.6) асимптотически устойчиво при $\mu > \mu_*$, и предложен способ определения μ_*.

В параграфе 1.6 обсуждаются обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах, для систем со многими постоянными и переменными ограниченными запаздываниями.

В **главе 2** рассматриваются классы систем дифференциальных уравнений нейтрального типа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F(t,y(t),y(t-\tau)), \qquad t>0, \end{aligned} \tag{0.0.7}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, C — постоянная матрица размера $n\times n$, $\tau>0$ — параметр запаздывания. С использованием функционала Ляпунова – Красовского второго типа, предложенного в [35],

$$V_2(t,y) = \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds \qquad (0.0.8)$$

проводится изучение экспоненциальной устойчивости решений систем вида (0.0.7).

В параграфе 2.1 кратко описано содержание второй главы. В параграфе 2.2 исследуются линейные системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0. \qquad (0.0.9)$$

Установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений и получены оценки, характеризующие скорость убывания решений систем вида (0.0.9) при $t \to \infty$.

В параграфе 2.3 аналогичные исследования проведены для нелинейных систем вида (0.0.7), если $F(t, u_1, u_2)$ удовлетворяет условию (0.0.4). На основе полученных результатов указаны условия робастной устойчивости для линейных систем (0.0.9) и установлены оценки решений возмущенных систем.

В параграфе 2.4 исследуется экспоненциальная устойчивость решений нелинейных систем вида (0.0.7), когда для $F(t, u_1, u_2)$ выполнена оценка (0.0.5). Установлены оценки на области притяжения и оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание решений систем вида (0.0.7) на бесконечности.

В параграфе 2.5 содержатся некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах, в том числе на случай систем с несколькими запаздываниями.

В **главе 3** рассматриваются классы систем дифференциальных уравнений нейтрального типа:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \qquad (0.0.10)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. С использованием функционала Ляпунова – Красовского третьего типа, предложенного в [61],

$$V_3(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s) \right\rangle ds \qquad (0.0.11)$$

проводится изучение экспоненциальной устойчивости решений систем вида (0.0.10).

В параграфе 3.1 кратко описано содержание третьей главы. В параграфе 3.2 исследуются линейные системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0. \qquad (0.0.12)$$

Установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений и получены оценки экспоненциального убывания решений.

В параграфе 3.3 аналогичные исследования проведены для нелинейных систем вида (0.0.10), если $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \qquad (0.0.13)$$

$$q_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

На основе полученных результатов указаны условия робастной устойчивости для линейных систем (0.0.12) и установлены оценки решений возмущенных систем.

В параграфе 3.4 исследуется экспоненциальная устойчивость решений нелинейных систем вида (0.0.10), когда для $F(t, u_1, u_2, u_3)$ выполнена оценка

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3\|u_3\|^{1+\omega_3}, \qquad (0.0.14)$$

$$q_j \ge 0, \quad \omega_j \ge 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Установлены оценки на области притяжения нулевого решения и оценки, характеризующие экспоненциальное убывание решений на бесконечности.

В параграфе 3.5 содержатся некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах, на случай нескольких постоянных запаздываний и переменного ограниченного запаздывания.

В **главе 4** рассматриваются классы систем дифференциальных уравнений нейтрального типа

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{0.0.15}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, функция $\tau(t)$, определяющая запаздывание, может быть постоянной, ограниченной или неограниченной. Наша цель — получить оценки для решений системы (0.0.15) на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений.

При получении результатов используется класс функционалов Ляпунова – Красовского, предложенный в [65], следующего вида

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds. \end{aligned} \tag{0.0.16}$$

Этот класс включает в себя функционалы, использованные в предыдущих главах. В частности, он содержит функционал первого типа (0.0.2) при

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

функционал второго типа (0.0.8) при

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & -H(t)C \\ -C^*H(t) & C^*H(t)C \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

функционал третьего типа (0.0.11) при

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t, s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & L(s) \end{pmatrix}.$$

Класс функционалов Ляпунова – Красовского вида (0.0.16) позволяет исследовать экспоненциальную устойчивость решений для более широкого класса систем с периодическими коэффициентами в линейной части. Более того, с использованием функционалов из данного класса и их обобщений на случай переменного запаздывания можно получать оценки для решений систем вида (0.0.15) с непериодическими коэффициентами.

В параграфе 4.2 с использованием функционалов Ляпунова – Красовского вида (0.0.16) исследуются линейные периодические системы вида (0.0.12). В параграфе 4.3 изучаются нелинейные системы вида (0.0.11) с периодическими коэффициентами в линейных членах, если $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет неравенству (0.0.13). Полученные результаты позволяют устанавливать экспоненциальную устойчивость для более широкого класса систем по сравнению с рассматриваемыми в предыдущих главах.

В параграфе 4.4 мы получаем оценки на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ для решений линейных систем

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \quad t > 0, \tag{0.0.17}$$

с произвольными переменными коэффициентами и переменным запаздыванием, которое может быть неограниченным. На основе этих оценок мы можем сделать вывод об устойчивости нулевого решения и скорости стабилизации решений на бесконечности.

В параграфе 4.5 мы устанавливаем оценки для решений систем вида (0.0.15) с переменными коэффициентами в линейной части и переменным запаздыванием, если $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет условию вида (0.0.13).

В параграфе 4.6 аналогичные исследования проведены для систем вида (0.0.15), когда $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет условию вида (0.0.14). Установлены оценки решений на полупрямой, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости получены оценки на область притяжения и указана скорость стабилизации решений на бесконечности.

В параграфе 4.7 рассмотрен класс неавтономных систем с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями.

В **заключении** подводятся итоги исследования и перечисляются основные результаты диссертации.

Методы исследования. Для получения результатов построены классы функционалов Ляпунова – Красовского. Вспомогательным аппаратом исследования являются методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории дифференциальных уравнений с запаздыванием, теории разностных уравнений, теории матричных уравнений и теории матриц.

Научная новизна результатов. В диссертации предложены новые классы функционалов Ляпунова – Красовского, которые позволяют исследовать устойчивость нелинейных неавтономных систем с запаздыванием. Все результаты, полученные в работе, являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость результатов. Результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы при исследовании конкретных математических моделей, возникающих при описании динамики популяций, развитии эпидемических процессов, синтеза веществ и т.д. При получении результатов не использовалась спектральная информация, при этом построение оценок было сведено к решению хорошо обусловленных задач с точки зрения теории возмущений. Это открывает широкие возможности для использования теоретических результатов для численного изучения асимптотических свойств решений неавтономных уравнений с запаздыванием и разработки численных алгоритмов для исследования экспоненциальной устойчивости.

Степень достоверности и апробация результатов проведенных исследований. Результаты диссертации приведены в виде строгих математических утверждений. Достоверность полученных теоретических результатов подтверждается высоким уровнем научных журналов, в которых основные результаты диссертации прошли независимую экспертизу и были опубликованы, а также апробацией результатов диссертации. Результаты исследований докладывались и обсуждались на следующих семинарах под руководством специалистов в области дифференциальных, функционально-дифференциальных и разностных уравнений, в области математического анализа:

- Общеинститутский семинар Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: академик Ю.Г. Решетняк), 2005, 2006, 2021;

- Семинар по дифференциальным уравнениям (руководители: проф. L. Hatvani, проф. T. Krisztin, Венгрия, Сегед, Сегедский университет, Институт Бойяи), 2009;
- Семинар "Избранные вопросы математического анализа" Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (руководитель: д.ф.-м.н., проф. Г.В. Демиденко), 2012, 2016, 2021;
- Drakhlin's Seminar (руководитель: проф. A. Domoshnitsky, Израиль, Ариэльский университет), 2020;
- Семинар кафедры математики и компьютерной безопасности Полоцкого государственного университета (руководитель: к.ф.-м.н. А.А. Козлов, Республика Беларусь, Новополоцк), 2021;
- Пермский семинар по функционально-дифференциальным уравнениям (руководитель: д.ф.-м.н., проф. В.П. Максимов), 2022;

а также на следующих **научных мероприятиях**:

- Conference on Scientific Computation and Differential Equations (Канада, Ванкувер, 2001);
- International Congress of Mathematicians (Китай, Пекин, 2002);
- Fifth International Conference on Bioinformatics of Genome Regulation and Structure (Новосибирск, 2006);
- Международная конференция в честь 150-летия А.М. Ляпунова (Украина, Харьков, 2007);
- Российская конференция "Математика в современном мире", посвященная 50-летию Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Новосибирск, 2007);
- Школа-семинар "Нелинейный анализ и экстремальные задачи" (Иркутск, 2008, 2010, 2014, 2016);
- Международная конференция "Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений", посвященная 100-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2008);

- Всероссийская конференция по вычислительной математике (Новосибирск, 2009, 2011);
- Conference on Mathematics in Science and Technology (Индия, Дели, 2010);
- International Congress of Mathematicians (Индия, Хайдарабад, 2010);
- Международная конференция “Моделирование и исследование устойчивости динамических систем” (Украина, Киев, 2011, 2013);
- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная памяти И.Г. Петровского (Москва, 2011);
- Международная научная конференция “Теория операторов. Комплексный анализ и математическое моделирование” (Волгодонск, 2011);
- Международная конференция “Моделирование, управление и устойчивость”, посвященная 110-летию Н.Г. Четаева и 80-летию В.М. Матросова (Украина, Севастополь, 2012);
- Международная конференция “Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений”, посвященная 105-летию со дня рождения С.Л. Соболева (Новосибирск, 2013);
- Международная научная конференция “Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений” (Кыргызстан, Бишкек, 2013);
- International Congress of Mathematicians (Республика Корея, Сеул, 2014);
- Международная конференция “Метод функций Ляпунова и его приложения”
(Алушта, 2014, 2016);
- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и математическое моделирование” (Улан-Удэ, оз. Байкал, 2015);

- Международная конференция “Математическое моделирование и высокопроизводительные вычисления в биоинформатике, биомедицине и биотехнологии” (Новосибирск, 2016);
- Международная школа-конференция “Соболевские чтения” (Новосибирск, 2016, 2017, 2018);
- Международная конференция “Математика в современном мире”, посвященная 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск, 2017);
- International Conference “Functional Differential Equations and Applications” (Израиль, Ариэль, 2017);
- International Congress of Mathematicians (Бразилия, Рио-де-Жанейро, 2018);
- Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям “Еругинские чтения” (Республика Беларусь, Могилев, 2019);
- Международная конференция “Математика в приложениях” в честь 90-летия
  С.К. Годунова (Новосибирск, 2019);
- Seminar on Technological Innovation in R & D and Industrial Policy of New Smart Materials in Asia–Pacific Region (Китай, Цзиньхуа, 2019);
- IX Международная конференция по математическому моделированию, посвященная 75-летию В.Н. Врагова (Якутск, 2020);
- Международная математическая конференция “Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям”, посвященная 100-летию со дня рождения Ю.С. Богданова (Республика Беларусь, Минск, 2021);
- 3-я Международная конференция “Динамические системы и компьютерные науки: теория и приложения” (Иркутск, 2021);
- Международная конференция “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвященная И.Г. Петровскому (Москва, 2021).

Публикации. По теме диссертации опубликовано более 50 работ, из них 23 статьи в рецензируемых журналах, включенных в перечень изданий, рекомендованных ВАК, и индексируемых в международных базах Web of Science и Scopus [29, 32, 33, 35, 36, 37, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 112, 113, 114, 115, 117, 142, 143, 144].

Личный вклад автора. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию вошли только результаты, принадлежащие лично автору диссертации.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 278 страниц. Список литературы содержит 156 наименований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту д.ф.-м.н., профессору Г.В. Демиденко за внимание к работе и ценные советы, а также к.ф.-м.н. М.А. Скворцовой и к.ф.-м.н. Т. Ыскаку за полезные дискуссии.

Глава 1

Экспоненциальная устойчивость решений систем дифференциальных уравнений запаздывающего типа с периодическими коэффициентами

1.1 Постановка задачи и содержание главы

В этой главе мы рассмотрим классы систем дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \tag{1.1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t),$$

$\tau > 0$ — параметр запаздывания. Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получим оценки, характеризующие скорость убывания решений систем вида (1.1.1) при $t \to \infty$.

При получении результатов мы будем использовать критерий асимптотической устойчивости решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t), \quad t > 0, \tag{1.1.2}$$

установленный в [29].

Теорема 1.1.1 *I. Если нулевое решение системы* (1.1.2) *асимптотически устойчиво, то для любой матрицы* $G(t) \in C([0,T])$ *существует единственное решение* $L(t)$ *краевой задачи*

$$\frac{d}{dt}L + LA(t) + A^*(t)L = -G(t), \quad 0 < t < T,$$
$$L(0) = L(T), \tag{1.1.3}$$

при этом, если

$$G(t) = G^*(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

то

$$L(t) = L^*(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

II. Пусть

$$G(t) \in C([0,T]) \quad G(t) = G^*(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

Если краевая задача (1.1.3) *имеет эрмитово решение* $L(t)$ *такое, что* $L(0) > 0$, *то нулевое решение системы* (1.1.2) *асимптотически устойчиво.*

Очевидно, в случае постоянных матриц $A(t) \equiv A$, $G(t) \equiv G > 0$ этот критерий совпадает с критерием Ляпунова.

Пусть $L(t)$ — эрмитово решение краевой задачи (1.1.3). Тогда, как было показано в [29], $L(t) > 0$ при $t \in [0,T]$. Используя T-периодическое продолжение $L(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$, в [29] были установлены оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (1.1.2)

$$\|y(t)\|^2 \leq \frac{\|L(0)\|}{l_{\min}(t)} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{g_{\min}(\xi)}{\|L(\xi)\|} d\xi\right) \|y(0)\|^2, \quad t > 0, \tag{1.1.4}$$

где $l_{\min}(t) > 0$, $g_{\min}(t) > 0$ — минимальные собственные числа матриц $L(t)$, $G(t)$ соответственно. Отметим, что эта оценка является аналогом оценки Крейна для решений линейных систем с постоянными коэффициентами. Действительно, в случае линейных систем с постоянными коэффициентами ($A(t) \equiv A$) решение краевой задачи (1.1.3) при $G(t) \equiv I$ не зависит от t и совпадает с решением матричного уравнения Ляпунова

$$LA + A^*L = -I.$$

Следовательно, из указанного выше неравенства вытекает оценка Крейна

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{\|L\|}{l_{\min}(t)} e^{-\frac{t}{\|L\|}} \|y(0)\|^2, \qquad t > 0.$$

Неравенство (1.1.4) характеризует скорость стабилизации решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (1.1.2) на бесконечности. В этой и последующих главах мы установим аналоги оценок Крейна для систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.

В параграфе 1.2 мы исследуем линейные системы

$$\frac{d}{dt} y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0. \tag{1.1.5}$$

В параграфе 1.3 мы установим условия робастной устойчивости для линейных систем (1.1.5) и исследуем экспоненциальную устойчивость решений нелинейных систем вида (1.1.1), если $F(t, u_1, u_2)$ удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \le q_1 \|u_1\| + q_2 \|u_2\|, \qquad q_j \ge 0, \ j = 1, 2.$$

В параграфе 1.4 мы исследуем экспоненциальную устойчивость решений нелинейных систем вида (1.1.1), когда для $F(t, u_1, u_2)$ выполнена оценка

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \le q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2},$$

$$q_j \ge 0, \quad \omega_j \ge 0, \quad j = 1, 2.$$

Мы установим оценки на области притяжения и оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности. В параграфе 1.5 мы рассмотрим специальный класс систем вида (1.1.1) с параметром. В параграфе 1.6 содержатся некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [32, 33, 59, 60, 113].

1.2 Линейные системы дифференциальных уравнений запаздывающего типа

В этом параграфе мы рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0, \tag{1.2.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений системы (1.2.1). Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.2.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (1.2.1) на бесконечности.

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа. Начнем с наиболее простых по формулировке утверждений.

Теорема 1.2.1 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$ *такие, что*

$$H(t) \in C^1[0,T], \quad H(t) = H^*(t), \quad H(0) = H(T) > 0, \tag{1.2.2}$$

$$K(s) \in C^1[0,\tau], \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \tag{1.2.3}$$

и матрица

$$Q(t) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) & -H(t)B(t) \\ -B^*(t)H(t) & K(\tau) \end{pmatrix} \tag{1.2.4}$$

положительно определена при $t \in [0,T]$. *Тогда нулевое решение системы* (1.2.1) *экспоненциально устойчиво.*

Ниже мы установим оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (1.2.1). Для формулировки результата нам потребуется ввести ряд обозначений. Предполагая, что выполнены условия теоремы 1.2.1, перепишем матрицу $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = \begin{pmatrix} I & Q_{12}(t)(Q_{22}(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & Q_{22}(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ (Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t) & I \end{pmatrix}, \tag{1.2.5}$$

где

$$\begin{gathered}
Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0), \\
Q_{12}(t) = -H(t)B(t), \quad Q_{22}(t) = K(\tau), \\
P(t) = Q_{11}(t) - Q_{12}(t)(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t) \\
= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) \\
-K(0) - H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t).
\end{gathered} \tag{1.2.6}$$

Очевидно, если $Q(t)$ положительно определена, то матрица $P(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$.

Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0),$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}H + HA(t) + A^*(t)H = -G(t), \qquad t \in [0,T], \\
&H(0) = H(T) > 0,
\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. В этом случае из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и функцию $p_{\min}(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Обозначим через $h_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, через $k > 0$ максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \qquad s \in [0,\tau]. \tag{1.2.8}$$

Отметим, что существование k обеспечивается условиями (1.2.3). Пусть

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}, \tag{1.2.9}$$

$$V(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int_{-\tau}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle\, ds. \qquad (1.2.10)$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.2.1):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0,\\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0],\\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \qquad (1.2.11)$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$.

Теорема 1.2.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2.1. Тогда для решения задачи* (1.2.11) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)\, d\xi\right), \qquad t > 0. \qquad (1.2.12)$$

Очевидно, что утверждение теоремы 1.2.1 непосредственно вытекает из оценки (1.2.12). Поэтому достаточно доказать теорему 1.2.2.

Доказательство теоремы 1.2.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.2.11). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского, введенный в работе [32],

$$V(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds. \qquad (1.2.13)$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (1.2.11), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \left[\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) + K(0)\right] y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)B(t)y(t-\tau), y(t)\rangle + \langle B^*(t)H(t)y(t), y(t-\tau)\rangle$$

$$-\langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Используя матрицу $Q(t)$, определенную в (1.2.4), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds. \qquad (1.2.14)$$

В силу представления (1.2.5) получаем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (1.2.6). Тогда

$$\langle P(t)y(t), y(t)\rangle \geq p_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p_{\min}(t)$ – минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Поскольку

$$h_{\min}(t)\|y(t)\|^2 \leq \langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \|H(t)\|\|y(t)\|^2, \qquad (1.2.15)$$

где $h_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, то

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \geq \frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle.$$

Используя (1.2.8), из (1.2.14) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ задано в (1.2.9). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \leq V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (1.2.10). Используя (1.2.15), с учетом определения функционала (1.2.13) получаем

$$\|y(t)\|^2 \leq \frac{1}{h_{\min}(t)}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$\leq \frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)} \leq \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда следует оценка (1.2.12).

Теорема 1.2.2 доказана.

Замечание. Функция $\gamma(t)$ в оценке (1.2.12) характеризует скорость экспоненциального убывания решений системы (1.2.1).

Учитывая представление (1.2.5), теорему 1.2.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.2.3 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям (1.2.2), (1.2.3) и дифференциальному неравенству*

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)$$
$$+H(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)H(t) < -K(0) \tag{1.2.16}$$

при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство. При выполнении условий (1.2.2), (1.2.3), в силу представления (1.2.5) матрица $Q(t)$ положительно определена, если матрица $P(t)$ положительно определена. Учитывая вид матрицы $P(t)$ в (1.2.6), теорема 1.2.3 доказана.

Заметим, что условия (1.2.3) на $K(s)$ можно ослабить, при этом отказаться от требования положительной определенности матрицы $Q(t)$, заданной в (1.2.4).

Теорема 1.2.4 *Предположим, что существуют матрица $H(t)$, удовлетворяющая условиям (1.2.2), и матрица $K(s)$:*

$$K(s) \in C^1[0,\tau], \quad K(s) = K^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) \leq 0, \ s \in [0,\tau], \quad (1.2.17)$$

такие, что для матрицы $Q(t)$ в (1.2.4) справедливо неравенство

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle S(t)u, u \rangle, \quad u, \ v \in \mathbb{C}^n, \quad t \in [0,T], \quad (1.2.18)$$

где $S(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существует число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), тогда нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи (1.2.11) имеет место оценка (1.2.12), где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}, \quad (1.2.19)$$

$s_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $S(t)$.

В оценке (1.2.12) используются T-периодические продолжения определенных выше функции $s_{\min}(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2.4, то в силу (1.2.18)

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \leq -S(t) - K(0),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7), где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица. Как отмечалось выше, из [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим $H(t)$ и

$S(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1.2.4, рассмотрим на решении задачи (1.2.11) функционал (1.2.13). Как при доказательстве теоремы 1.2.2, после дифференцирования получаем (1.2.14). В силу (1.2.18) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle S(t)y(t), y(t)\rangle \geq s_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $s_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $S(t)$. Используя (1.2.8) и (1.2.15), из (1.2.14) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) > 0$ задано в (1.2.19). Отсюда, как при доказательстве теоремы 1.2.2, имеем неравенство (1.2.12).

Теорема 1.2.4 доказана.

Замечание. Если $B(t) \equiv 0$, теорема 1.2.4 дает условие экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{1.2.20}$$

а также оценку для решения этой системы, установленную в [29]. Действительно, выбирая $K(s) \equiv 0$, из (1.2.18) мы приходим к тому, что нулевое решение системы (1.2.20) экспоненциально устойчиво, если существует эрмитово решение $H(t)$ краевой задачи (1.2.7) с $G(t) \geq S(t) > 0$. Поскольку $K(s) \equiv 0$, мы можем выбрать k любым положительным. Тогда $\gamma(t) = \dfrac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|}$ и (1.2.12) дает оценку для решений системы (1.2.20) следующего вида (см. [29]):

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\|H(0)\|}{h_{\min}(t)}}\|x(0)\| \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{s_{\min}(\xi)}{\|H(\xi)\|}d\xi\right).$$

От требования положительной определенности матрицы $S(t)$ можно отказаться и ослабить условие (1.2.18). Соответствующий результат приведен ниже.

Теорема 1.2.5 *Предположим, что существуют матрица*

$$H(t) \in C^1[0,T], \quad H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.2.21}$$

и матрица $K(s)$, удовлетворяющая условиям (1.2.17), такие, что для матрицы $Q(t)$ в (1.2.4) справедливо неравенство

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\rangle \geq p(t)\langle H(t)u,u\rangle, \quad u,\ v \in \mathbb{C}^n,\ t \in [0,T], \tag{1.2.22}$$

где $p(t) \in C([0,T])$. Если существует $k > 0$ такое, что выполнено (1.2.8) и

$$\int\limits_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \quad \text{где} \quad \gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k\}, \tag{1.2.23}$$

тогда нулевое решение системы (1.2.1) экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи (1.2.11) имеет место оценка (1.2.12).

В оценке (1.2.12) в данном случае используются T-периодические продолжения матрицы $H(t)$ и функции $p(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Замечание. Нетрудно убедиться, что оценка (1.2.12) при условии (1.2.23) гарантирует экспоненциальное убывание решений задачи (1.2.11) при $t \to \infty$. Действительно, в силу T-периодичности $\gamma(t)$, при любом $t = jT + \eta$, $j = 0, 1, 2 \ldots$, $0 \leq \eta < T$, имеем

$$\begin{aligned}
\int_0^t \gamma(\xi)d\xi &= j\int_0^T \gamma(\xi)d\xi + \int_0^\eta \gamma(\xi)d\xi \\
&= \frac{t}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi - \frac{\eta}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi + \int_0^\eta \gamma(\xi)d\xi \\
&\geq \gamma_1 t - \eta(\gamma_1 - \gamma_2) \geq \gamma_1 t - T(\gamma_1 - \gamma_2),
\end{aligned} \tag{1.2.24}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \qquad \gamma_2 = \min_{\xi\in[0,T]} \gamma(\xi).$$

Тогда из (1.2.12) получаем

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \frac{T(\gamma_1 - \gamma_2)}{2}\right). \qquad (1.2.25)$$

Доказательство теоремы 1.2.5. Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.2.5, рассмотрим на решении задачи (1.2.11) функционал (1.2.13). Продолжим T-периодическим образом матрицу $H(t)$ и функцию $p(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя обозначения. Как при доказательстве теоремы 1.2.2, после дифференцирования получаем (1.2.14). В силу (1.2.22) имеем

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle.$$

Используя (1.2.8), из (1.2.22) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p(t)\left\langle H(t)y(t), y(t)\right\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (1.2.23). Отсюда, как при доказательстве теоремы 1.2.2, имеем неравенство (1.2.12).

Теорема 1.2.5 доказана.

Замечание. Как видим из формулировок доказанных выше теорем, условия экспоненциальной устойчивости решений формулируются в терминах различных матричных неравенств. Установленные оценки характеризуют скорость экспоненциального убывания решений, при этом все величины указаны в явном виде.

1.3 Робастная устойчивость для систем дифференциальных уравнений запаздывающего типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \quad (1.3.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $F(t, u_1, u_2)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Мы предполагаем, что $F(t, u_1, u_2)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \leq q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\|, \qquad t \geq 0, \ u_j \in \mathbb{R}^n, \ q_j \geq 0. \quad (1.3.2)$$

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений системы (1.3.1). Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1.3.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (1.3.1) на бесконечности. Из доказанных утверждений будут вытекать результаты о робастной устойчивости решений линейных систем (1.2.1).

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа. Начнем с наиболее простых по формулировке утверждений.

Теорема 1.3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Если матрица*

$$Q(t) - \left(q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)\|H(t)\|I$$

положительно определена при $t \in [0, T]$, *тогда нулевое решение системы* (1.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Ниже мы установим оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (1.3.1). Для формулировки результата нам потребуется ввести ряд обозначений. Предполагая, что выполнены условия теоремы 1.3.1, определим матрицу

$$Q^q(t) = Q(t) - q(t)I,$$

где

$$q(t) = \left(q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2}\right)\|H(t)\|. \quad (1.3.3)$$

Перепишем её в виде

$$Q^q(t) = \begin{pmatrix} I & Q_{12}^q(t)(Q_{22}^q(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^q(t) & 0 \\ 0 & Q_{22}^q(t) \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ (Q_{22}^q(t))^{-1}(Q_{12}^q(t))^* & I \end{pmatrix}, \qquad (1.3.4)$$

где

$$Q_{11}^q(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - q(t)I,$$
$$Q_{12}^q(t) = -H(t)B(t), \quad Q_{22}^q(t) = K(\tau) - q(t)I,$$
$$P^q(t) = Q_{11}^q(t) - Q_{12}^q(t)(Q_{22}^q(t))^{-1}(Q_{12}^q(t))^*$$
$$= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - q(t)I$$
$$-H(t)B(t)(K(\tau) - q(t)I)^{-1}B^*(t)H(t). \qquad (1.3.5)$$

Очевидно, если $Q^q(t)$ положительно определена, то матрица $P^q(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}^q(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P^q(t)$.

Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - q(t)I,$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи вида (1.2.7) для дифференциального уравнения Ляпунова. Как отмечалось ранее, в этом случае из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и функцию $p_{\min}^q(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), определим функцию

$$\gamma^q(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}^q(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}. \qquad (1.3.6)$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.3.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \qquad (1.3.7)$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, \infty)) \cap C^1((0, \infty))$.

Теорема 1.3.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.3.1. Тогда для решения задачи* (1.3.7) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma^q(\xi)\, d\xi\right), \qquad t > 0. \tag{1.3.8}$$

Очевидно, что утверждение теоремы 1.3.1 непосредственно вытекает из оценки (1.3.8). Поэтому достаточно доказать теорему 1.3.2.

Доказательство теоремы 1.3.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.3.7). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, как и в линейном случае, рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского (1.2.13), введенный в работе [32]. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$
$$+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$
$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (1.3.7), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$
$$+W(t) + \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds, \tag{1.3.9}$$

где матрица $Q(t)$ определена в (1.2.4),

$$W(t) = \langle H(t)F(t, y(t), y(t-\tau)), y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), F(t, y(t), y(t-\tau))\rangle.$$

В силу (1.3.2)

$$|W(t)| \leq 2\|H(t)\| \left(q_1\|y(t)\| + q_2\|y(t-\tau)\|\right)\|y(t)\|. \qquad (1.3.10)$$

Очевидно,

$$|W(t)| \leq q(t)(\|y(t)\|^2 + \|y(t-\tau)\|^2), \qquad (1.3.11)$$

где функция $q(t)$ определена в (1.3.3). Тогда из (1.3.9) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q^q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds. \qquad (1.3.12)$$

В силу представления (1.3.4) имеем

$$\left\langle Q^q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P^q(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P^q(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (1.3.5). Тогда

$$\langle P^q(t)y(t), y(t)\rangle \geq p^q_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p^q_{\min}(t) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы $P^q(t)$. Используя (1.2.15), получаем

$$\left\langle Q^q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \geq \frac{p^q_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\left\langle H(t)y(t), y(t)\right\rangle.$$

В силу (1.2.8) из (1.3.12) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p^q_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\left\langle H(t)y(t), y(t)\right\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma^q(t)V(t,y),$$

где функция $\gamma^q(t)$ задана в (1.3.6). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \leq V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma^q(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (1.2.10). Используя (1.2.15), с учетом определения функционала (1.2.13) получаем

$$\|y(t)\|^2 \leq \frac{1}{h_{\min}(t)} \langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$\leq \frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)} \leq \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)} \exp\left(-\int_0^t \gamma^q(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем оценку (1.3.8).

Теорема 1.3.2 доказана.

Учитывая представление (1.3.4), теорему 1.3.1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.3.3 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$*, удовлетворяющие условиям* (1.2.2)*,* (1.2.3) *и матричным неравенствам*

$$K(\tau) > q(t)I,$$

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t)$$
$$+H(t)B(t)(K(\tau) - q(t)I)^{-1}B^*(t)H(t) < -K(0) - q(t)I,$$

при $t \in [0,T]$*. Тогда нулевое решение системы* (1.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Замечание. Функция $\gamma^q(t)$ в оценке (1.3.8) характеризует скорость экспоненциального убывания решений системы (1.3.1). Она зависит от функции $q(t)$, которая возникает при оценивании правой части неравенства (1.3.10). Заметим, что правую часть этого неравенства можно оценивать разными способами, что дает возможность управлять параметрами в оценке для решений системы (1.3.1). Ниже мы приведем некоторые результаты.

Очевидно, что для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$q_1u_1^2 + q_2u_1u_2 \leq \left(q_1 + \frac{q_2^2}{4\alpha}\right)u_1^2 + \alpha u_2^2. \qquad (1.3.13)$$

С использованием (1.3.13) правую часть неравенства (1.3.10) можно оценить следующим образом

$$|W(t)| \leq \beta_1(t)\|y(t)\|^2 + \beta_2(t)\|y(t-\tau)\|^2, \qquad (1.3.14)$$

где

$$\beta_1(t) = 2\|H(t)\| \left(q_1 + \frac{q_2^2}{4\alpha(t)} \right), \quad \beta_2(t) = 2\|H(t)\| \, \alpha(t), \tag{1.3.15}$$

$\alpha(t) > 0$ — произвольная непрерывная функция. Например, выбирая,

$$\alpha(t) = \frac{\left(q_1 + \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \right)}{2},$$

мы получаем, что

$$\beta_1(t) = \beta_2(t) = q(t),$$

и оценка (1.3.14) переходит в (1.3.11).

Используя оценку (1.3.14), сформулируем аналоги теорем 1.3.1 и 1.3.2. Введем матрицу

$$Q^\beta(t) = Q(t) - \begin{pmatrix} \beta_1(t) & 0 \\ 0 & \beta_2(t) \end{pmatrix} I,$$

где $Q(t)$ определена в (1.2.4).

Теорема 1.3.4 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Если матрица $Q^\beta(t)$ положительно определена при $t \in [0, T]$, тогда нулевое решение системы* (1.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Ниже мы установим оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (1.3.1). Для формулировки результата нам потребуется ввести ряд обозначений. Перепишем матрицу $Q^\beta(t)$ в виде

$$Q^\beta(t) = \begin{pmatrix} I & Q_{12}^\beta(t)(Q_{22}^\beta(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^\beta(t) & 0 \\ 0 & Q_{22}^\beta(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ (Q_{22}^\beta(t))^{-1}(Q_{12}^\beta(t))^* & I \end{pmatrix}, \tag{1.3.16}$$

где

$$Q_{11}^\beta(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - \beta_1(t)I,$$

$$Q_{12}^\beta(t) = -H(t)B(t), \quad Q_{22}^\beta(t) = K(\tau) - \beta_2(t)I,$$

$$\begin{aligned}P^\beta(t) &= Q_{11}^\beta(t) - Q_{12}^\beta(t)(Q_{22}^\beta(t))^{-1}(Q_{12}^\beta(t))^* \\ &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - \beta_1(t)I \\ &\quad -H(t)B(t)(K(\tau) - \beta_2(t)I)^{-1}B^*(t)H(t). \qquad (1.3.17)\end{aligned}$$

Очевидно, если $Q^\beta(t)$ положительно определена, то матрица $P^\beta(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}^\beta(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P^\beta(t)$.

Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.3, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - \beta_1(t)I,$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи вида (1.2.7) для дифференциального уравнения Ляпунова. Как отмечалось ранее, в этом случае из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и функцию $p_{\min}^\beta(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), определим функцию

$$\gamma^\beta(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}^\beta(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}. \qquad (1.3.18)$$

Теорема 1.3.5 *Предположим, что выполнены условия теоремы 1.3.4. Тогда для решения задачи* (1.3.7) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^\beta(\xi)\,d\xi\right), \qquad t > 0. \qquad (1.3.19)$$

Утверждение теоремы 1.3.4 следует из оценки (1.3.19). Доказательство теоремы 1.3.5 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.3.2, с использованием (1.3.14), (1.3.16), (1.3.17).

Как в параграфе 1.2, условия (1.2.3) на $K(s)$ можно ослабить, при этом отказаться от требования положительной определенности матрицы $Q^\beta(t)$.

Теорема 1.3.6 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям (1.2.2), (1.2.17), такие, что для матрицы $Q^\beta(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\beta(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle S^\beta(t)u, u\rangle, \quad u,\ v \in \mathbb{C}^n, \quad t \in [0,T], \quad (1.3.20)$$

где $S^\beta(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существует $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), тогда нулевое решение системы (1.3.1) экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи (1.3.7) имеет место оценка (1.3.19), где

$$\gamma^\beta(t) = \min\left\{\frac{s^\beta_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}, \quad (1.3.21)$$

$s^\beta_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $S^\beta(t)$.

В оценке (1.3.19) в данном случае используются T-периодические продолжения определенных выше функции $s^\beta_{\min}(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство теоремы 1.3.6. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.3.6, то в силу (1.3.20)

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \leq -S^\beta(t) - K(0) - \beta_1(t)I,$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7), где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица. Как отмечалось выше, из [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим $H(t)$ и $S^\beta(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 1.3.6, рассмотрим на решении задачи (1.3.7) функционал (1.2.13). Как при доказательстве теоремы 1.3.2, после дифференцирования получаем (1.3.9). Используя (1.3.14), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left\langle Q^\beta(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds. \quad (1.3.22)$$

В силу (1.3.20) имеем

$$\left\langle Q^\beta(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle S^\beta(t)y(t), y(t)\rangle \geq s^\beta_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $s^\beta_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $S^\beta(t)$. Используя (1.2.8) и (1.2.15), из (1.3.22) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{s^\beta_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma^\beta(t)V(t,y),$$

где $\gamma^\beta(t) > 0$ определено в (1.3.21). Отсюда, как при доказательстве теоремы 1.3.2, имеем неравенство (1.3.19).

Теорема 1.3.6 доказана.

От требования положительной определенности матрицы $S^\beta(t)$ также можно отказаться и ослабить условие (1.3.20). Соответствующий результат приведен ниже.

Теорема 1.3.7 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям (1.2.21) и (1.2.17) соответственно, такие, что для матрицы $Q^\beta(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\beta(t)\begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v\end{pmatrix}\right\rangle \geq p^\beta(t)\langle H(t)u, u\rangle, \quad u, v\in\mathbb{C}^n, \ t\in[0,T], \quad (1.3.23)$$

где $p^\beta(t) \in C([0,T])$. Если существует $k > 0$ такое, что выполнено (1.2.8) и

$$\int\limits_0^T \gamma^\beta(\xi)d\xi > 0, \quad \textit{где} \quad \gamma^\beta(\xi) = \min\{p^\beta(\xi), k\}, \qquad (1.3.24)$$

тогда нулевое решение системы (1.3.1) экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи (1.3.7) имеет место оценка (1.3.19).

В оценке (1.3.19) в данном случае используются T-периодические продолжения функции $p^\beta(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство. Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.3.7, рассмотрим на решении задачи (1.3.7) функционал (1.2.13). Продолжим T-периодическим образом матрицу $H(t)$ и функцию $p^\beta(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя обозначения. Как при доказательстве теоремы 1.3.6, получаем (1.3.22). В силу (1.3.23) имеем

$$\left\langle Q^\beta(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq p^\beta(t) \langle H(t)y(t), y(t) \rangle.$$

Используя (1.2.8), из (1.3.22) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p^\beta(t) \left\langle H(t)y(t), y(t) \right\rangle - k \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma^\beta(t) V(t,y),$$

где $\gamma^\beta(t)$ определено в (1.3.24). Отсюда, как при доказательстве теоремы 1.3.2, имеем неравенство (1.3.19).

Теорема 1.3.7 доказана.

Замечание. Из полученных результатов вытекают утверждения о робастной устойчивости для систем вида (1.2.1). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + \Delta A(t)y(t) + \Delta B(t)y(t-\tau), \quad (1.3.25)$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ — произвольные матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \leq q_1, \quad \|\Delta B(t)\| \leq q_2, \qquad t \geq 0.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t, u_1, u_2) = \Delta A(t)u_1 + \Delta B(t)u_2$$

удовлетворяет неравенству (1.3.2). Тогда теоремы 1.3.1–1.3.7 дают условия робастной устойчивости для линейных систем вида (1.2.1) и оценки экспоненциального убывания решений возмущенной системы (1.3.25) при $t \to \infty$.

1.4 Нелинейные системы дифференциальных уравнений запаздывающего типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \tag{1.4.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $F(t, u_1, u_2)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция. Мы предполагаем, что $F(t, u_1, u_2)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \leq q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2}, \qquad t \geq 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \tag{1.4.2}$$

q_j, $\omega_j \geq 0$, $j = 1, 2$.

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений системы (1.4.1). Случай $\omega_1 = \omega_2 = 0$ был подробно исследован в параграфе 1.3. В этом параграфе мы рассмотрим системы (1.4.1) при $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$. Мы установим оценки на множества притяжения и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (1.4.1) на бесконечности. Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа.

Рассмотрим начальную задачу для системы (1.4.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, t')) \cap C^1((0, t'))$, $t' > 0$.

Вначале рассмотрим случай $q_2 = 0$.

Начнем с наиболее простых по формулировке утверждений. Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2.1, которые гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (1.2.1). Тогда определены матрицы $Q(t)$, $P(t)$, заданные в (1.2.4), (1.2.6) соответственно, которые являются положительно определенными эрмитовыми матрицами. Как отмечалось в параграфе 1.2, $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и минимальное собственное значение $p_{\min}(t)$ матрицы $P(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), рассмотрим функцию $\gamma(t)$, заданную в (1.2.9), и определим

$$R^{\omega_1/2} = \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\right)$$
$$\times \left(q_1\omega_1 \int\limits_0^T \frac{\|H(\xi)\|}{(h_{\min}(\xi))^{1+\omega_1/2}} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \frac{\gamma(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\right)^{-1}. \qquad (1.4.4)$$

Теорема 1.4.1 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Тогда нулевое решение системы* (1.4.1) *экспоненциально устойчиво, и множество вещественнозначных функций*

$$\mathcal{E} = \left\{\varphi(t) \in C([-\tau, 0]) : \ V(0, \varphi) < R\right\} \qquad (1.4.5)$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения задачи (1.4.3) *с начальными данными* $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)\, d\xi\right)$$
$$\times \left(1 - R^{-\omega_1/2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{-1/\omega_1}, \qquad t > 0, \qquad (1.4.6)$$

где $V(0,\varphi)$ *определено в* (1.2.10).

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.4.3). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, как и в линейном случае, рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского (1.2.13), введенный в работе [32]. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (1.4.3), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+W(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds, \qquad (1.4.7)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (1.2.4),

$$W(t) = \langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau)), y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), F(t,y(t),y(t-\tau))\rangle .$$

В силу (1.4.2) при $q_2 = 0$ имеем

$$|W(t)| \le 2q_1\|H(t)\|\,\|y(t)\|^{2+\omega_1}.$$

Используя (1.2.15), получаем оценку

$$|W(t)| \le \frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle^{1+\omega_1/2}. \qquad (1.4.8)$$

В силу представления (1.2.5) получаем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \ge p_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, заданной в (1.2.6). Используя (1.2.15), имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq \frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)y(t), y(t)\rangle .$$

В силу (1.2.8) и (1.4.8) из (1.4.7) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)y(t), y(t)\rangle - k\int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+\frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}} \langle H(t)y(t), y(t)\rangle^{1+\omega_1/2}.$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y) + \frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2},$$

где функция $\gamma(t)$ задана в (1.2.9).

Введем обозначение

$$\alpha(t) = \frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}. \tag{1.4.9}$$

По построению $\alpha(t) > 0$, $\gamma(t) > 0$ — непрерывные T-периодические функции. Очевидно, последнее неравенство перепишется в виде

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y) + \alpha(t)(V(t,y))^{1+\omega_1/2}.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла (см., например, [90]) получаем оценку

$$V(t,y) \leq \exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)\,d\xi\right) V(0,\varphi)$$

$$\times\left[1-\frac{\omega_1}{2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\int_0^t \alpha(\xi)\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int_0^{\xi}\gamma(s)\,ds\right)d\xi\right]^{-2/\omega_1}, \tag{1.4.10}$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (1.2.10).

Оценим выражение, стоящее в квадратных скобках:

$$U(t) = 1 - \frac{\omega_1}{2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} \int\limits_0^t \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)\,ds\right) d\xi$$

$$\geq 1 - \frac{\omega_1}{2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} \int\limits_0^\infty \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)\,ds\right) d\xi. \qquad (1.4.11)$$

Рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_0^\infty \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)\,ds\right) d\xi$$

$$= \int\limits_0^T \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)\,ds\right) d\xi + \int\limits_T^{2T} \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)\,ds\right) d\xi + \ldots$$

$$= J_1 + J_2 + \ldots.$$

В силу T-периодичности функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ получаем

$$J_k = \exp\left(-\frac{(k-1)\omega_1}{2}\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds\right) J_1, \quad k = 2, 3, \ldots.$$

Поэтому, учитывая, что $\gamma(t) > 0$, интеграл J представим в виде

$$J = \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds\right)\right)^{-1} J_1$$

$$= \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds\right)\right)^{-1} \int\limits_0^T \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \gamma(s)\,ds\right) d\xi.$$

Отсюда в силу (1.4.11) получаем

$$U(t) \geq 1 - \frac{\omega_1}{2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2} \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \gamma(s)\,ds\right)\right)^{-1}$$

$$\times \int\limits_0^T \alpha(\xi) \exp\left(-\frac{\omega_1}{2} \int\limits_0^\xi \gamma(s)\, ds\right) d\xi.$$

В силу обозначений (1.4.9) имеем

$$U(t) \geq 1 - R^{-\omega_1/2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2},$$

где R определено в (1.4.4). Если $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$, определенному в (1.4.5), то $U(t) > 0$. Следовательно, из (1.4.10) для решения задачи (1.4.3) имеем оценку

$$V(t,y) \leq \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(\xi) d\xi\right) V(0,\varphi) \left(1 - R^{-\omega_1/2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{-2/\omega_1},$$

из которой вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (1.4.1), а также неравенство (1.4.6).

Теорема 1.4.1 доказана.

Замечание. Установленные оценки характеризуют множество притяжения нулевого решения и скорость экспоненциального убывания решений системы (1.4.1), при этом все величины указаны в явном виде.

Как в линейном случае (см. параграф 1.2), аналогичные результаты для нелинейных систем можно получить при менее ограничительных требованиях по сравнению с теоремой 1.4.1.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2.4, которые также гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (1.2.1). Тогда определена матрица $S(t)$, заданная в (1.2.18), которая является положительно определенной эрмитовой матрицей. Как отмечалось в параграфе 1.2, $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и минимальное собственное значение $s_{\min}(t)$ матрицы $S(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), рассмотрим функцию $\gamma(t)$, заданную в (1.2.19), и определим R_s по формуле (1.4.4).

Теорема 1.4.2 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.4. Тогда нулевое решение системы* (1.4.1) *экспоненциально устойчиво, и множество* *вещественнозначных функций*

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi(t) \in C([-\tau, 0]) : \ V(0, \varphi) < R_s \right\} \tag{1.4.12}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения задачи (1.4.3) *с начальными данными* $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ *имеет место оценка вида* (1.4.6).

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.4.3). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, как и в линейном случае рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского (1.2.13). Как при доказательстве теоремы 1.4.1 после дифференцирования получаем (1.4.7). В силу (1.2.15) и (1.2.18) имеем

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq \frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)y(t), y(t) \rangle ,$$

где $s_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $S(t)$. Следовательно, используя (1.2.8) и (1.4.8), из (1.4.7) получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)y(t), y(t) \rangle - k \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds$$

$$+ \frac{2q_1 \|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}} \langle H(t)y(t), y(t) \rangle^{1+\omega_1/2} .$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\gamma(t) V(t, y) + \frac{2q_1 \|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}} (V(t, y))^{1+\omega_1/2},$$

где функция $\gamma(t)$ задана в (1.2.19). Повторяя далее рассуждения из доказательства теоремы 1.4.1, получаем требуемую оценку.

Теорема 1.4.2 доказана.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2.5, которые также гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (1.2.1). Тогда определена функция $p(t) \in C([0, T])$, заданная в (1.2.22). Продолжим матрицу $H(t)$ и функцию $p(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), рассмотрим функцию $\gamma(t)$, заданную в (1.2.23), и определим R_p по формуле (1.4.4).

Теорема 1.4.3 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.5. Тогда нулевое решение системы* (1.4.1) *экспоненциально устойчиво, и множество вещественнозначных функций*

$$\mathcal{E} = \left\{ \varphi(t) \in C([-\tau, 0]) : \ V(0,\varphi) < R_p \right\} \tag{1.4.13}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения задачи (1.4.3) *с начальными данными* $\varphi(t) \in \mathcal{E}$ *имеет место оценка вида* (1.4.6).

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.4.3). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 1.2.5, как и в линейном случае, рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского (1.2.13). Как при доказательстве теоремы 1.4.1 после дифференцирования получаем (1.4.7). В силу (1.2.22) имеем

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t) \left\langle H(t)y(t), y(t) \right\rangle .$$

Следовательно, используя (1.2.8) и (1.4.8), из (1.4.7) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p(t) \left\langle H(t)y(t), y(t) \right\rangle - k \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds$$

$$+ \frac{2q_1 \|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}} \left\langle H(t)y(t), y(t) \right\rangle^{1+\omega_1/2} .$$

Тогда в силу определения функционала (1.2.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y) + \frac{2q_1 \|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}} (V(t,y))^{1+\omega_1/2},$$

где функция $\gamma(t)$ задана в (1.2.23). Далее нужно повторить рассуждения из доказательства теоремы 1.4.1. Отметим, что при этом не требуется положительность функции $\gamma(t)$, достаточно того, что $\int\limits_0^T \gamma(s)\, ds > 0$.

Теорема 1.4.3 доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $q_1 + q_2 \neq 0$.

Предположим, что выполнены условия теоремы 1.2.1, которые гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейной системы (1.2.1). Тогда определены матрицы $Q(t)$, $P(t)$, заданные в (1.2.4), (1.2.6) соответственно, которые являются положительно определенными эрмитовыми. Как отмечалось в параграфе 1.2, $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим матрицы $H(t)$ и $P(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Обозначим через $h_{\min}(t)$, $p_{\min}(t)$, $q_{\min}$ минимальные собственные значения матриц $H(t)$, $P(t)$, $Q_{22}(t)$ соответственно. В силу T-периодичности матриц $H(t)$, $P(t)$ $h_{\min}(t) \geq h_{\min} > 0$, $p_{\min}(t) \geq p_{\min} > 0$. Поскольку $Q_{22}(t)$ — постоянная положительно определенная эрмитова матрица, то $q_{\min} > 0$.

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.4.3), определенное при $t \in [0, t')$, $t' > 0$. Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, как и в линейном случае рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского $V(t, y)$, заданный в (1.2.13). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.4 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для решения задачи* (1.4.3) *имеет место оценка*

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left[\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - \delta(\|y(t-\tau)\|)\left(\|(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4\varepsilon}\right)\right]$$

$$\times\|H(t)\|\|y(t)\|^2 - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+\frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}$$

$$-\left[q_{\min} - \varepsilon\|H(t)\|\delta(\|y(t-\tau)\|)\right]\|z(t)\|^2, \quad t \in [0, t'), \tag{1.4.14}$$

где

$$z(t) = (Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)y(t) + y(t-\tau), \tag{1.4.15}$$

$$\delta(s) = 2q_2 s^{\omega_2}, \quad s \geq 0, \tag{1.4.16}$$

$k > 0$ удовлетворяет (1.2.8).

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.4.1, дифференцируя $V(t,y)$ и учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (1.4.3), имеем (1.4.7).

В силу представления (1.2.5) получаем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq p_{\min}(t)\|y(t)\|^2 + q_{\min}\|z(t)\|^2, \qquad (1.4.17)$$

где $p_{\min}(t)$, $q_{\min}$ — минимальные собственные значения матриц $P(t)$, $Q_{22}(t)$ соответственно, $z(t)$ определено в (1.4.15).

В силу (1.4.2) имеем

$$|W(t)| \leq 2q_1\|H(t)\|\,\|y(t)\|^{2+\omega_1} + 2q_2\|H(t)\|\,\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}.$$

Используя определение $z(t)$, получаем

$$|W(t)| \leq 2q_1\|H(t)\|\,\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+2q_2\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\left[\|(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)\|\|y(t)\|^2 + \|y(t)\|\|z(t)\|\right].$$

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|W(t)| \leq 2q_1\|H(t)\|\,\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+2q_2\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\left[\left(\|(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4\varepsilon}\right)\|y(t)\|^2 + \varepsilon\|z(t)\|^2\right].$$

Используя (1.2.15), получаем

$$|W(t)| \leq \frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle^{1+\omega_1/2} + 2q_2\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}$$

$$\times\left[\left(\|(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4\varepsilon}\right)\|y(t)\|^2 + \varepsilon\|z(t)\|^2\right]. \qquad (1.4.18)$$

Следовательно, учитывая (1.2.8), (1.4.17) и (1.4.18), из (1.4.7) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left[\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - 2q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\left(\|(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4\varepsilon}\right)\right]$$

$$\times\|H(t)\|\|y(t)\|^2 - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+\frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle^{1+\omega_1/2}$$
$$-\left[q_{\min}-2q_2\varepsilon\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\right]\|z(t)\|^2.$$

Используя определения функционала (1.2.13) и функции $\delta(s)$ в (1.4.16), имеем (1.4.14).

Теорема 1.4.4 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$q_{\max}=\max_{t\in[0,T]}\|(Q_{22}(t))^{-1}Q_{12}^*(t)\|, \tag{1.4.19}$$

$$\widetilde{q}=\max_{t\in[0,T]}\frac{q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}, \tag{1.4.20}$$

$$h=\min_{t\in[0,T]}\frac{1}{\|H(t)\|}. \tag{1.4.21}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\varepsilon=\frac{q_{\min}}{2p_{\min}}\left(q_{\max}+\sqrt{q_{\max}^2+\frac{p_{\min}}{q_{\min}}}\right), \tag{1.4.22}$$

$\rho>0$ такое, что

$$\delta(\rho)<\frac{q_{\min}h}{\varepsilon}. \tag{1.4.23}$$

Обозначим

$$\gamma(t)=\min\left\{\left(\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}-(q_{\max}+(4\varepsilon)^{-1})\delta(\rho)\right),k\right\}. \tag{1.4.24}$$

$$R^{\omega_1/2}=\left(1-\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T\gamma(\xi)d\xi\right)\right)$$
$$\times\left(\widetilde{q}\omega_1\int\limits_0^T\exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\eta\gamma(\xi)d\xi\right)d\eta\right)^{-1}, \tag{1.4.25}$$

$$\Phi_1=\max_{s\in[-\tau,0]}\|\varphi(s)\|, \tag{1.4.26}$$

$$\Phi_2=\sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}}}\left(1-R^{-\omega_1/2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{-1/\omega_1}. \tag{1.4.27}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ определяется в (1.4.22) и $\rho > 0$ удовлетворяет условию (1.4.23), то нетрудно показать, что $\gamma(t) > 0$.

Теорема 1.4.5 *Пусть выполнены условия теоремы 1.2.1. Предположим, что начальная функция* $\varphi(t)$ *в задаче* (1.4.3) *принадлежит множеству*

$$\mathcal{E} = \{\varphi(s) \in C([-\tau, 0]) : \quad V(0, \varphi) < R, \quad \max\{\Phi_1, \Phi_2\} < \rho\}.$$

Тогда решение задачи (1.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \geq 0\}$*, и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0. \tag{1.4.28}$$

Доказательство. Мы покажем, что решение начальной задачи (1.4.3) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и удовлетворяет оценке (1.4.28).

Пусть $t \in [0, \tau]$. Поскольку $\Phi_1 < \rho$, то

$$p_{\min}(t) > \|H(t)\|(q_{\max} + (4\varepsilon)^{-1})\delta(\|\varphi(t-\tau)\|),$$

$$q_{\min} > \|H(t)\|\varepsilon\delta(\|\varphi(t-\tau)\|).$$

Следовательно, учитывая определение функционала $V(t, y)$, обозначения (1.4.20) и (1.4.24), из неравенства (1.4.14) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) + \gamma(t)V(t, y) \leq 2\widetilde{q}(V(t, y))^{1+\omega_1/2}. \tag{1.4.29}$$

Поскольку $V(0, \varphi) < R$, где $R > 0$ определено в (1.4.25), то в силу неравенства Гронуолла [90], получаем оценку

$$V(t, y) \leq \frac{V(0, \varphi)}{\Big(1 - \big(R^{-1}V(0, \varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right). \tag{1.4.30}$$

Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (1.4.3) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, т. е. $t' > \tau$.

Отметим, что для справедливости неравенства (1.4.30) при $t \in [0,\tau]$ было достаточно, чтобы $\Phi_1 < \rho$ и $V(0,\varphi) < R$.

Из (1.4.30) вытекает, что если начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0,\tau]$. Тогда при $t \in [\tau, 2\tau]$

$$p_{\min}(t) > \|H(t)\|(q_{\max} + (4\varepsilon)^{-1})\delta(\|y(t-\tau)\|),$$
$$q_{\min} > \|H(t)\|\varepsilon\delta(\|y(t-\tau)\|).$$

Отсюда вытекает оценка (1.4.29) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Следовательно, как и выше, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t,y)$, получаем неравенство (1.4.30). Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (1.4.3) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$.

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получаем, что решение задачи (1.4.3) определено при всех $t > 0$ и удовлетворяет оценке (1.4.28).

Теорема 1.4.5 доказана.

Естественно возникает вопрос: можно ли, как в параграфе 1.2, отказаться от требования положительной определенности матрицы $Q(t)$, заданной в (1.2.4)?

Вначале мы сформулируем аналог теоремы 1.2.5, который гарантирует экспоненциальную устойчивость решений линейной системы (1.2.1).

Теорема 1.4.6 *Предположим, что существуют матрица*

$$H(t) \in C^1[0,T], \quad H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{1.4.31}$$

и матрица $K(s)$, удовлетворяющая условиям (1.2.17), *такие, что для матрицы $Q(t)$ в* (1.2.4) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\rangle \geq p(t)\langle H(t)u, u\rangle + s(t)\|v\|^2, \quad u,\ v \in \mathbb{C}^n,\ t \in [0,T], \tag{1.4.32}$$

где $p(t), s(t) \in C([0,T])$, $s(t) > 0$. Если существует $k > 0$ такое, что выполнено (1.2.8) *и*

$$\int\limits_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \quad \textit{где} \quad \gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k\}, \tag{1.4.33}$$

тогда нулевое решение системы (1.2.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (1.2.11) *имеет место оценка* (1.2.12).

В оценке (1.2.12) в данном случае используются T-периодические продолжения матрицы $H(t)$ и функции $p(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$. Справедливость теоремы 1.4.6 следует из теоремы 1.2.5, поскольку из оценки (1.4.32) вытекает неравенство (1.2.22).

Перейдем теперь к рассмотрению нелинейной системы (1.4.1) и начальной задачи (1.4.3) для этой системы. Предположим, что выполнены условия теоремы 1.4.6. Продолжим T-периодическим образом матрицу $H(t)$, функции $p(t)$, $s(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя обозначения. Обозначим через $h_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. В силу T-периодичности $H(t)$ и $s(t)$, очевидно, $h_{\min}(t) \geq h_{\min} > 0$, $s(t) \geq s_{\min} > 0$.

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (1.4.3), определенное при $t \in [0, t')$, $t' > 0$. Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, как и в линейном случае рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского $V(t, y)$, заданный в (1.2.13). Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.4.7 *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.6. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ для решения задачи* (1.4.3) *имеет место оценка*

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left[p(t) - \frac{\delta(\|y(t-\tau)\|)\|H(t)\|}{4\varepsilon h_{\min}(t)}\right]\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds + \frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}$$

$$-\left[s(t) - \varepsilon\|H(t)\|\delta(\|y(t-\tau)\|)\right]\|y(t-\tau)\|^2, \qquad (1.4.34)$$

где функция $\delta(s)$ определена в (1.4.16), *$k > 0$ удовлетворяет* (1.2.8).

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.4.1, дифференцируя $V(t, y)$ и учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (1.4.3), имеем (1.4.7).

В силу (1.4.32) получаем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq p(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + s(t)\|y(t-\tau)\|^2. \tag{1.4.35}$$

В силу (1.4.2) имеем

$$|W(t)| \leq 2q_1\|H(t)\|\,\|y(t)\|^{2+\omega_1} + 2q_2\|H(t)\|\,\|y(t)\|\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2}.$$

Очевидно, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$|W(t)| \leq 2q_1\|H(t)\|\,\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+2q_2\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\left[\frac{1}{4\varepsilon}\|y(t)\|^2 + \varepsilon\|y(t-\tau)\|^2\right].$$

Используя (1.2.15), получаем

$$|W(t)| \leq \frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}\ \langle H(t)y(t), y(t)\rangle^{1+\omega_1/2}$$

$$+\frac{q_2\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}}{2\varepsilon h_{\min}(t)}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+2q_2\varepsilon\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{2+\omega_2}. \tag{1.4.36}$$

Следовательно, учитывая (1.2.8), (1.4.35) и (1.4.36), из (1.4.7) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left[p(t) - \frac{q_2\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}}{2\varepsilon h_{\min}(t)}\right]\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+\frac{2q_1\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}\,\langle H(t)y(t), y(t)\rangle^{1+\omega_1/2}$$

$$-\left[s(t) - 2q_2\varepsilon\|H(t)\|\,\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\right]\|y(t-\tau)\|^2.$$

Используя определения функционала (1.2.13) и функции $\delta(s)$ в (1.4.16), имеем (1.4.34).

Теорема 1.4.7 доказана.

Введем обозначения:

$$h = \min_{t\in[0,T]}\frac{1}{\|H(t)\|}, \quad \widetilde{p} = \int\limits_0^T p(s)\,ds, \quad \widetilde{h} = \int\limits_0^T \frac{\|H(s)\|}{h_{\min}(s)}\,ds, \tag{1.4.37}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{s_{\min} h \widetilde{h}}}{2\sqrt{\widetilde{p}}}, \tag{1.4.38}$$

$\rho > 0$ такое, что

$$\delta(\rho) < \frac{s_{\min} h}{\varepsilon}. \tag{1.4.39}$$

Обозначим

$$\widetilde{\gamma}(t) = \min\left\{\left(p(t) - \frac{\delta(\rho)\|H(t)\|}{4\varepsilon h_{\min}(t)}\right), k\right\}, \tag{1.4.40}$$

$$\widetilde{R}^{\omega_1/2} = \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \widetilde{\gamma}(\xi) d\xi\right)\right)$$
$$\times \left(\widetilde{q}\omega_1 \int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\eta \widetilde{\gamma}(\xi) d\xi\right) d\eta\right)^{-1}. \tag{1.4.41}$$

Поскольку $\varepsilon > 0$ определяется в (1.4.38) и $\rho > 0$ удовлетворяет условию (1.4.39), то нетрудно показать, что

$$\int\limits_0^T \widetilde{\gamma}(\xi)\, d\xi > 0.$$

Тогда, как отмечалось в параграфе 1.2 (см. неравенство (1.2.24)), справедлива оценка

$$\int\limits_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)\, d\xi \geq \widetilde{\gamma}_1 t - T(\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2),$$

где

$$\widetilde{\gamma}_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \widetilde{\gamma}(\xi) d\xi, \qquad \widetilde{\gamma}_2 = \min_{\xi\in[0,T]} \widetilde{\gamma}(\xi).$$

Обозначим

$$\widetilde{\Phi}_2 = \Phi_2 \exp\left(\frac{T(\widetilde{\gamma}_1 - \widetilde{\gamma}_2)}{2}\right), \tag{1.4.42}$$

где Φ_2 определено в (1.4.27).

Теорема 1.4.8 *Пусть выполнены условия теоремы 1.4.6. Предположим, что начальная функция* $\varphi(t)$ *в задаче* (1.4.3) *принадлежит множеству*

$$\mathcal{E} = \Big\{\varphi(s) \in C([-\tau, 0]) : \quad V(0,\varphi) < \widetilde{R}, \quad \max\{\Phi_1, \widetilde{\Phi}_2\} < \rho\Big\},$$

где Φ_1*,* $\widetilde{\Phi}_2$*,* $\widetilde{R}$ *определены в* (1.4.26)*,* (1.4.42)*,* (1.4.41) *соответственно. Тогда решение задачи* (1.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \geq 0\}$*, и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right), \quad t > 0. \tag{1.4.43}$$

Доказательство. Мы покажем, что решение начальной задачи (1.4.3) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и удовлетворяет оценке (1.4.43).

Пусть $t \in [0, \tau]$. Поскольку $\Phi_1 < \rho$, то

$$p(t) - \frac{\|H(t)\|\delta(\|\varphi(t-\tau)\|)}{4\varepsilon h_{\min}(t)} \geq p(t) - \frac{\|H(t)\|\delta(\rho)}{4\varepsilon h_{\min}(t)},$$

$$s_{\min} > \|H(t)\|\varepsilon\delta(\|\varphi(t-\tau)\|).$$

Следовательно, учитывая определение функционала $V(t, y)$, обозначения (1.4.20) и (1.4.40), из неравенства (1.4.34) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \widetilde{\gamma}(t)V(t,y) \leq 2\widetilde{q}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}. \tag{1.4.44}$$

Поскольку $V(0,\varphi) < \widetilde{R}$, где $\widetilde{R} > 0$ определено в (1.4.41), то в силу неравенства Гронуолла [90] получаем оценку

$$V(t,y) \leq \frac{V(0,\varphi)}{\left(1 - \left(\widetilde{R}^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \widetilde{\gamma}(\xi)d\xi\right). \tag{1.4.45}$$

Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (1.4.3) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, т. е. $t' > \tau$.

Отметим, что для справедливости неравенства (1.4.45) при $t \in [0,\tau]$ было достаточно, чтобы $\Phi_1 < \rho$ и $V(0,\varphi) < \widetilde{R}$.

Из (1.4.45) вытекает, что если начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0,\tau]$. Тогда при $t \in [\tau, 2\tau]$

$$p(t) - \frac{\|H(t)\|\delta(\|y(t-\tau)\|)}{4\varepsilon h_{\min}(t)} \geq p(t) - \frac{\|H(t)\|\delta(\rho)}{4\varepsilon h_{\min}(t)},$$

$$s_{\min} > \|H(t)\|\varepsilon\delta(\|y(t-\tau)\|).$$

Отсюда вытекает оценка (1.4.44) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Следовательно, как и выше, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t,y)$, получаем неравенство (1.4.45). Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (1.4.3) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$.

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получаем, что решение задачи (1.4.3) определено при всех $t > 0$ и удовлетворяет оценке (1.4.43).

Теорема 1.4.8 доказана.

Замечание 1. Функции $\gamma(t)$ и $\widetilde{\gamma}(t)$ в полученных оценках характеризуют скорость экспоненциального убывания решений системы (1.4.1).

Замечание 2. Если $q_2 = 0$, утверждение теоремы 1.4.5 дает теорему 1.4.1, утверждение теоремы 1.4.8 — теорему 1.4.3.

Замечание 3. Если $q_1 = q_2 = 0$ (линейный случай), утверждение теоремы 1.4.1 дает теорему 1.2.2, утверждение теоремы 1.4.2 — теорему 1.2.4, утверждение теоремы 1.4.3 — теорему 1.2.5.

1.5 Системы дифференциальных уравнений запаздывающего типа с параметром

В этом параграфе мы рассмотрим системы следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau), \quad t > 0, \tag{1.5.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $\mu > 0$ — параметр. Мы предполагаем, что спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \mathrm{Re}\lambda < 0\}$ при всех $t \geq 0$. Используя результаты работ [29, 32, 33] и утверждения из параграфов 1.1, 1.2, мы докажем, что в этом случае существует $\mu_* > 0$ такое, что нулевое решение системы (1.5.1) асимптотически устойчиво при $\mu > \mu_*$, и предложим способ определения μ_*.

Для получения основных результатов нам потребуются вспомогательные утверждения для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}y = \mu A(t)y, \tag{1.5.2}$$

где спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ при всех $t \geq 0$ и $\mu > 0$.

Хорошо известны примеры периодических матриц $A(t)$ таких, что нулевое решение системы (1.5.2) не является асимптотически устойчивым при произвольных $\mu > 0$ (см, например, [19]). Действительно, рассмотрим систему вида (1.5.2), где

$$A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos(4t) - 1 & 2\sin(4t) + 2 \\ 2\sin(4t) - 2 & 2\cos(4t) - 1 \end{pmatrix}$$

и $\mu = 1$. Очевидно, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$ являются собственными значениями матрицы $A(t)$. Нетрудно проверить, что вектор-функция

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t \sin(2t) \\ e^t \cos(2t) \end{pmatrix}$$

является решением системы (1.5.2) при $\mu = 1$. Очевидно,

$$\|y(t)\| \to \infty, \qquad t \to \infty,$$

и нулевое решение этой системы не является устойчивым. Этот пример показывает, что нулевое решение системы (1.5.2) не является асимптотически устойчивым при произвольных $\mu > 0$, несмотря на то, что спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ при всех $t \geq 0$.

Однако, согласно результатам М. Г. Крейна, нулевое решение системы (1.5.2) асимптотически устойчиво при достаточно больших $\mu \gg 0$

(см. [28]). Ниже мы укажем способ определения значения $\mu_0 > 0$ такого, что нулевое решение системы (1.5.2) асимптотически устойчиво при $\mu > \mu_0$.

Поскольку спектр матрицы $A(t)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$ при всех $t \in [0, T]$, то в силу критерия Ляпунова при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ существует единственное решение $H(t) = H^*(t) > 0$ уравнения Ляпунова

$$HA(t) + A^*(t)H = -I.$$

Введем следующие обозначения:

$$H_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \|H(t)\|, \quad \nu_{\max} = \max_{t\in[0,T]} \nu(H(t)),$$

где $\nu(H(t)) = \|H(t)\| \, \|H^{-1}(t)\|$ — число обусловленности матрицы $H(t)$.

Теорема 1.5.1 *Пусть N — такое число, что выполнено неравенство*

$$\max_{|t-s|\leq \frac{T}{N}} \|A(t) - A(s)\| \leq \frac{1}{4H_{\max}\sqrt{\nu_{\max}}}.$$

Тогда нулевое решение системы (1.5.2) *асимптотически устойчиво при*

$$\mu > \mu_0 = \frac{2NH_{\max}}{T} \ln \nu_{\max}. \tag{1.5.3}$$

Доказательство. Пусть $Y(t)$ — матрицант системы (1.5.2), т.е. $Y(t)$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}Y = \mu A(t)Y, \qquad t > 0,$$

$$Y\Big|_{t=0} = I.$$

Очевидно, при каждом фиксированном $t_j \geq 0$ матрица $Y(t)$ является решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}Y = \mu A(t)Y, \qquad t > t_j \geq 0,$$

$$Y\Big|_{t=t_j} = Y_j,$$

где $Y_j = Y(t_j)$. Перепишем задачу Коши в виде

$$\frac{d}{dt}Y = \mu A(t_j)Y + \mu(A(t) - A(t_j))Y, \qquad t > t_j \geq 0,$$

$$Y\Big|_{t=t_j} = Y_j.$$

Очевидно, решение этой задачи является решением интегрального матричного уравнения

$$Y(t) = \exp\left((t - t_j)\mu A(t_j)\right) Y_j$$

$$+\int\limits_{t_j}^{t} \exp\left((t - s)\mu A(t_j)\right) \mu(A(s) - A(t_j))Y(s)\, ds.$$

Следовательно,

$$\|Y(t)\| \leq \|\exp\left((t - t_j)\mu A(t_j)\right)\| \; \|Y_j\|$$

$$+\mu \int\limits_{t_j}^{t} \|\exp\left((t - s)\mu A(t_j)\right)\| \, \|A(s) - A(t_j)\| \, \|Y(s)\|\, ds. \qquad (1.5.4)$$

Поскольку спектр матрицы $A(t_j)$ принадлежит левой полуплоскости $\mathbb{C}_-$, то в силу оценки Крейна [28] имеем

$$\|\exp\left(tA(t_j)\right)\| \leq \sqrt{\nu(H_j)} \exp\left(-\frac{t}{2\|H_j\|}\right), \qquad t > 0, \qquad (1.5.5)$$

где H_j — решение матричного уравнения Ляпунова

$$H_j A(t_j) + A^*(t_j)H_j = -I,$$

$\nu(H_j) = \|H_j\| \, \|H_j^{-1}\|$. Используя (1.5.5), из (1.5.4) получаем

$$\|Y(t)\| \leq \sqrt{\nu(H_j)} \exp\left(-\frac{(t - t_j)\mu}{2\|H_j\|}\right) \|Y_j\|$$

$$+\mu\sqrt{\nu(H_j)} \int\limits_{t_j}^{t} \exp\left(-\frac{(t - s)\mu}{2\|H_j\|}\right) \|A(s) - A(t_j)\| \, \|Y(s)\|\, ds.$$

Согласно условиям теоремы, если $t \in \left[t_j, t_j + \frac{T}{N}\right]$, то

$$\|A(t) - A(t_j)\| \le \frac{1}{4H_{\max}\sqrt{\nu_{\max}}}.$$

Следовательно,

$$\|Y(t)\| \le \sqrt{\nu_{\max}} \exp\left(-\frac{(t-t_j)\mu}{2H_{\max}}\right) \|Y_j\|$$

$$+\frac{\mu}{4H_{\max}} \int\limits_{t_j}^{t} \exp\left(-\frac{(t-s)\mu}{2H_{\max}}\right) \|Y(s)\|\, ds.$$

В силу неравенства Гронуолла (см., например, [90]) получаем

$$\|Y(t)\| \le \sqrt{\nu_{\max}}\|Y_j\| \exp\left(-\frac{(t-t_j)\mu}{4H_{\max}}\right), \quad t \in \left[t_j, t_j + \frac{T}{N}\right]. \tag{1.5.6}$$

Пусть $t_j = \frac{jT}{N}$, $j = 0, \ldots, N$. Из (1.5.6) имеем

$$\|Y_j\| \le \sqrt{\nu_{\max}}\|Y_{j-1}\| \exp\left(-\frac{T\mu}{4NH_{\max}}\right), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Поскольку $\|Y_0\| = \|Y(0)\| = 1$, то

$$\|Y_j\| \le (\sqrt{\nu_{\max}})^j \exp\left(-\frac{jT\mu}{4NH_{\max}}\right), \quad j = 1, \ldots, N.$$

Тогда из (1.5.6) вытекает неравенство

$$\|Y(t)\| \le (\sqrt{\nu_{\max}})^{j+1} \exp\left(-\frac{t\mu}{4H_{\max}}\right), \quad t \in [t_j, t_{j+1}], \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

Следовательно, для матриканта системы (1.5.2) получаем оценку

$$\|Y(t)\| \le (\sqrt{\nu_{\max}})^N \exp\left(-\frac{t\mu}{4H_{\max}}\right), \quad t \in [0, T]. \tag{1.5.7}$$

Тогда для матрицы монодромии справедливо неравенство

$$\|Y(T)\| \le (\sqrt{\nu_{\max}})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{4H_{\max}}\right). \tag{1.5.8}$$

Если μ удовлетворяет неравенству (1.5.3), то $\|Y(T)\| < 1$ и спектр матрицы монодромии $Y(T)$ принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : \ |\lambda| < 1\}$. Следовательно, в силу спектрального критерия нулевое решение системы (1.5.2) асимптотически устойчиво.

Теорема 1.5.1 доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что число N, удовлетворяющее условиям теоремы 1.5.1, существует в силу непрерывности элементов матрицы $A(t)$ на $[0, T]$.

Замечание 2. Из доказательства теоремы следует, что все решения системы (1.5.2) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению систем с запаздыванием вида (1.5.1). Используя результаты, установленные выше для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.5.2), мы укажем μ_* такое, что нулевое решение системы (1.5.1) асимптотически устойчиво при $\mu > \mu_*$.

Теорема 1.5.2 *Пусть N — такое число, что выполнено неравенство*

$$\max_{|t-s| \leq \frac{T}{N}} \|A(t) - A(s)\| \leq \frac{1}{4H_{\max}\sqrt{\nu_{\max}}},$$

и пусть $\mu_* > 0$ удовлетворяет равенству

$$\mu_* \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu_* T}{2H_{\max}}\right)\right)$$
$$= 4e^{\alpha\tau/2} H_{\max} (\nu_{\max})^N \max_{t \in [0,T]} \|B(t)\| \tag{1.5.9}$$

при некотором $\alpha > 0$. Тогда нулевое решение системы (1.5.1) *асимптотически устойчиво при $\mu > \mu_*$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2.3, если существуют матрицы $L(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиями (1.2.2), (1.2.3) и матричному дифференциальному неравенству типа Риккати вида (1.2.16)

$$\frac{d}{dt}L(t) + \mu L(t)A(t) + \mu A^*(t)L(t)$$
$$+L(t)B(t)K^{-1}(\tau)B^*(t)L(t) + K(0) < 0, \tag{1.5.10}$$

тогда нулевое решение системы (1.5.1) асимптотически устойчиво. Покажем, что такие матрицы $L(t)$ и $K(s)$ существуют. Нетрудно видеть, что $\mu_* > \mu_0$, где μ_0 определено в (1.5.3). Следовательно, в силу теоремы 1.5.1 нулевое решение системы (1.5.2) асимптотически устойчиво при $\mu > \mu_*$, причем имеет место неравенство (1.5.7). Следовательно, согласно теореме 1.1.1 (см. также [29]) при таких μ существует единственное решение $L(t) = L^*(t)$ краевой задачи

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}L + \mu L A(t) + \mu A^*(t) L = -I, \quad 0 < t < T, \\ &L(0) = L(T) > 0. \end{aligned} \tag{1.5.11}$$

Используя матрицант $Y(t)$ системы (1.5.2), решение этой задачи может быть выписано в следующем виде [29]:

$$L(t) = (Y^{-1}(t))^* \left[\int\limits_t^\infty (Y(s))^* Y(s)\, ds \right] Y^{-1}(t)$$

$$= \int\limits_0^\infty (Y(\eta + t) Y^{-1}(t))^* (Y(\eta + t) Y^{-1}(t))\, d\eta.$$

Рассмотрим матрицу

$$\widetilde{Y}(\eta) = Y(\eta + t) Y^{-1}(t)$$

при каждом фиксированном t. Очевидно, она является матрицантом системы

$$\frac{d}{d\eta}\widetilde{y}(\eta) = \mu A(\eta + t)\widetilde{y}(\eta).$$

В силу (1.5.7) имеем

$$\|\widetilde{Y}(\eta)\| \leq (\sqrt{\nu_{\max}})^N \exp\left(-\frac{\mu\eta}{4H_{\max}} \right), \qquad \eta \in [0, T]. \tag{1.5.12}$$

Используя свойство матрицанта

$$\widetilde{Y}(\eta + kT) \equiv \widetilde{Y}(\eta) Y^k(T), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

перепишем формулу для решения $L(t)$ задачи (1.5.11) следующим образом

$$L(t) = \int_0^\infty (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta = \sum_{k=0}^\infty \int_{kT}^{(k+1)T} (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta$$

$$= \int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta + (Y(T))^* \left[\int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta \right] Y(T)$$

$$+ (Y^2(T))^* \left[\int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta \right] Y^2(T) + \dots .$$

Обозначим $D = \int_0^T (\widetilde{Y}(\eta))^* \widetilde{Y}(\eta)\, d\eta$. Тогда, очевидно, мы получаем неравенство

$$\|L(t)\| \le \|D\| + \|Y(T)\|^2 \|D\| + \|Y(T)\|^4 \|D\| + \dots .$$

Учитывая (1.5.3) и (1.5.8), имеем $\|Y(T)\|^2 < 1$. Следовательно,

$$\|L(t)\| \le \frac{1}{1 - \|Y(T)\|^2} \|D\|.$$

Используя определение D и (1.5.12), получаем

$$\|D\| \le \int_0^T \|\widetilde{Y}(\eta)\|^2 d\eta \le (\nu_{\max})^N \int_0^T \exp\left(-\frac{\mu\eta}{2H_{\max}}\right) d\eta$$

$$= \frac{2H_{\max} (\nu_{\max})^N}{\mu} \left(1 - \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right) \le \frac{2H_{\max} (\nu_{\max})^N}{\mu}.$$

Тогда в силу (1.5.8) имеем

$$\|L(t)\| \le \frac{2H_{\max} (\nu_{\max})^N}{\mu} \left(1 - (\nu_{\max})^N \exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-1}. \tag{1.5.13}$$

Возьмем $K(s) = \frac{1}{2} e^{-\alpha s} I$. Тогда проверка неравенства (1.5.10) для матриц $L(t)$ и $K(s)$ сводится к проверке неравенства

$$2e^{\alpha\tau} L(t) B(t) B^*(t) L(t) - \frac{1}{2} I < 0. \tag{1.5.14}$$

В силу (1.5.13) получаем

$$\|2e^{\alpha\tau}L(t)B(t)B^*(t)L(t)\| \leq 2e^{\alpha\tau}\|L(t)\|^2\|B(t)\|^2$$

$$\leq \frac{8e^{\alpha\tau}\left(H_{\max}\right)^2\left(\nu_{\max}\right)^{2N}}{\mu^2}$$

$$\times\left(1-\left(\nu_{\max}\right)^N\exp\left(-\frac{\mu T}{2H_{\max}}\right)\right)^{-2}\|B(t)\|^2.$$

Следовательно, для любой непрерывной матрицы $B(t)$ и любого $\tau > 0$,

$$\|2e^{\alpha\tau}L(t)B(t)B^*(t)L(t)\| < \frac{1}{2}$$

при $\mu > \mu_*$, где μ_* задано в (1.5.9); т.е. имеет место (1.5.14). Следовательно, нулевое решение системы (1.5.1) асимптотически устойчиво.

Теорема 1.5.2 доказана.

Замечание 1. Из теоремы 1.5.2 и результатов параграфа 1.2 следует, что все решения системы (1.5.1) стремятся к нулю при $t \to \infty$ с экспоненциальной скоростью.

Замечание 2. При выполнении условий теоремы 1.5.2 с использованием результатов параграфов 1.3 и 1.4 нетрудно установить утверждения об экспоненциальной устойчивости решений систем вида

$$\frac{d}{dt}y(t) = \mu A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания, $\mu > 0$ — параметр, $F(t, u_1, u_2)$ — непрерывная вещественнозначная вектор-функция, являющаяся липшицевой по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяющая неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \leq q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \qquad t \geq 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n,$$

$q_j,\ \omega_j \geq 0$, $j = 1, 2$.

1.6 Некоторые обобщения

В этом параграфе мы обсудим некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах. Полученные результаты можно распространить на системы с несколькими запаздываниями

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) \\ &+ F(t, y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m)), \qquad t > 0. \quad (1.6.1)\end{aligned}$$

Для этого достаточно использовать, например, функционал следующего вида:

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Соответствующие утверждения вытекают из результатов, установленных для более общего класса систем нейтрального типа в главе 2 в параграфе 2.5 .

Рассмотрим системы с переменным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + F\left(t, y(t), y(t-\tau(t))\right), \quad t > 0. \quad (1.6.2)$$

Для этих систем можно получить результаты об устойчивости решений, используя, например, функционал следующего вида:

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Соответствующие утверждения вытекают из результатов, установленных для более общего класса систем нейтрального типа в главах 3, 4. В параграфе 3.5 рассмотрены системы с ограниченным запаздыванием, в главе 4 — системы с переменным запаздыванием, которое может быть неограниченным.

Результаты, установленные в параграфе 1.4, могут быть использованы для исследования устойчивости решений нелинейных систем:

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \tag{1.6.3}$$

по первому приближению.

Функционалы Ляпунова – Красовского активно используются при исследовании конкретных систем, возникающих в приложениях. Например, в работах [86, 152, 153] с использованием функционалов вида (1.2.13) получены оценки на скорость стаблизации процессов.

Отметим, что функционалы вида (1.2.13) могут быть использованы для исследования устойчивости систем с распределенным запаздыванием. В частности, при изучении систем с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds + F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \quad t > 0,$$

показал свою эффективность следующий функционал (см., например, [99]):

$$H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{0}^{\tau}\int\limits_{t-\eta}^{t} \langle L(t-s)y(s), y(s)\rangle ds d\eta$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle M(t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

Нетрудно заметить, что этот функционал входит в класс (1.2.13) при

$$K(\xi) = (\tau - \xi)L(\xi) + M(\xi).$$

В последующих главах рассмотрены функционалы Ляпунова – Красовского более общего вида.

Глава 2

Экспоненциальная устойчивость решений систем нейтрального типа с постоянной матрицей при производной

2.1 Постановка задачи и содержание главы

В этой главе мы рассмотрим классы систем дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\
&+ F(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t > 0,
\end{aligned} \tag{2.1.1}
$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t),$$

C — постоянная матрица размера $n \times n$, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Если $C \neq 0$, системы вида (2.1.1) называются системами нейтрального типа [102]. Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получим оценки, характеризующие скорость убывания решений систем вида (2.1.1) при $t \to \infty$.

В параграфе 2.2 мы исследуем линейные системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0. \tag{2.1.2}$$

В параграфе 2.3 мы установим условия робастной устойчивости для линейных систем (2.1.2) и исследуем экспоненциальную устойчивость решений нелинейных систем вида (2.1.1) при

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\|, \qquad q_j \ge 0, \quad j = 1,2.$$

В параграфе 2.4 мы исследуем экспоненциальную устойчивость решений нелинейных систем вида (2.1.1) при

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2},$$

$$q_j \ge 0, \quad \omega_j \ge 0, \quad j = 1,2.$$

Мы установим оценки на области притяжения и оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности. В параграфе 2.5 содержатся некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах, в том числе на случай нескольких запаздываний.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [35, 36, 37, 112, 113, 115, 117].

2.2 Линейные системы нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \tag{2.2.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, C — постоянная матрица размера $n \times n$, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.2.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (2.2.1) на бесконечности.

Перейдем к формулировке и доказательству результатов параграфа. Начнем с наиболее простого по формулировке утверждения.

Теорема 2.2.1 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (1.2.3) *и такие, что матрица*

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.2.2}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{11}(t) &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0), \\ Q_{12}(t) &= \frac{d}{dt}H(t)C - H(t)B(t) + A^*(t)H(t)C, \\ Q_{22}(t) &= -C^*\frac{d}{dt}H(t)C + C^*H(t)B(t) + B^*(t)H(t)C + K(\tau), \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

положительно определена при $t \in [0, T]$. *Тогда нулевое решение системы* (2.2.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.1.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, \infty))$ такую, что $y(t) \in C^1([(k-1)\tau, k\tau])$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

В предположении, что выполнены условия теоремы 2.2.1, ниже мы установим оценки решений начальной задачи (2.2.4), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов мы введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7). Тогда, как уже отмечалось ранее, из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2.2.1, рассмотрим на решении $y(t)$ задачи (2.2.4) функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle ds, \tag{2.2.5}$$

введенный в работе [35], и определим

$$V(0,\varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) - C\varphi(-\tau)), (\varphi(0) - C\varphi(-\tau)) \rangle + \int\limits_{-\tau}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s) \rangle ds. \tag{2.2.6}$$

Очевидно, при $C = 0$ функционал (2.2.5) совпадает с функционалом (1.2.13), предложенным в [32].

Рассмотрим матрицу

$$S(t) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ C^* & I \end{pmatrix} Q(t) \begin{pmatrix} I & C \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{12}^*(t) & S_{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{2.2.7}$$

где матрица $Q(t)$ определена в (2.2.2) с элементами (2.2.3). Тогда из определения $Q(t)$ вытекает, что

$$\begin{aligned} S_{11}(t) &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0), \\ S_{12}(t) &= -H(t)A(t)C - H(t)B(t) - K(0)C, \\ S_{22}(t) &= K(\tau) - C^*K(0)C. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

В силу положительной определенности $Q(t)$ матрица $S(t)$ также положительно определена. Отсюда, очевидно, имеем $S_{22}(t) > 0$. Тогда матрицу $S(t)$ можно представить в виде

$$S(t) = \begin{pmatrix} I & S_{12}(t)(S_{22}(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} S_{11}(t) - S_{12}(t)(S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t) & 0 \\ 0 & S_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ (S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t) & I \end{pmatrix}. \quad (2.2.9)$$

Из наших рассуждений вытекает, что условие положительной определенности матрицы $Q(t)$ эквивалентно положительной определенности эрмитовых матриц

$$P(t) = S_{11}(t) - S_{12}(t)(S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t), \qquad S_{22}(t).$$

По построению

$$P(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0)$$
$$-(H(t)A(t)C + K(0)C + H(t)B(t))[K(\tau) - C^*K(0)C]^{-1}$$
$$\times(H(t)A(t)C + K(0)C + H(t)B(t))^*. \qquad (2.2.10)$$

Обозначим через $h_{\min}(t)$, $p_{\min}(t)$ минимальные собственные значения матриц $H(t)$, $P(t)$ соответственно. Поскольку $H(t) > 0$, $P(t) > 0$, то $h_{\min}(t) > 0$, $p_{\min}(t) > 0$. Пусть $k > 0$ — максимальное число такое, что выполнено (1.2.8). Обозначим

$$\Phi_1 = \max_{t\in[-\tau,0]} \|\varphi(t)\|, \quad \Phi_2 = \max_{t\in[0,T]} \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}, \qquad (2.2.11)$$

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}, \qquad (2.2.12)$$

$$\beta(t) = \frac{\gamma(t)}{2}, \quad \beta^+ = \max_{t\in[0,T]} \beta(t), \quad \beta^- = \min_{t\in[0,T]} \beta(t). \qquad (2.2.13)$$

Отметим, что из положительной определенности матрицы $S_{22}(t)$ и условий на матрицу $K(s)$ следует, что положительно определенная эрмитова матрица $K(0)$ удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$K(0) - C^*K(0)C = G,$$

где $G = G^* > 0$. Следовательно, в силу критерия Ляпунова (см., например, [28]) спектр матрицы C принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Тогда $\|C^j\| \to 0$ при $j \to \infty$. Пусть l — минимальное натуральное число такое, что $\|C^l\| < 1$.

Перейдем к формулировке утверждений. Мы выделяем три случая. В зависимости от величины $\|C^l\|$ ниже мы установим оценки решений начальной задачи (2.2.4), если

$$\|C^l\| < e^{-l\beta^+\tau}, \qquad e^{-l\beta^+\tau} \le \|C^l\| \le e^{-l\beta^-\tau}, \qquad e^{-l\beta^-\tau} < \|C^l\| < 1,$$

где β^+ и β^- определены в (2.2.13).

Теорема 2.2.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$\|C^l\| < e^{-l\beta^+\tau}. \tag{2.2.14}$$

Тогда для решения начальной задачи (2.2.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \left[\Phi_2\big(1 - \|C^l\| e^{l\beta^+\tau}\big)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}\right.$$

$$\left. + \max\left\{\|C\| e^{\beta^+\tau}, \dots, \|C^l\| e^{l\beta^+\tau}\right\} \Phi_1\right] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\, d\xi}, \qquad t > 0, \tag{2.2.15}$$

где Φ_1, Φ_2, $\beta(t)$, β^+ *определены в* (2.2.11), (2.2.13).

Теорема 2.2.3 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$e^{-l\beta^+\tau} \le \|C^l\| \le e^{-l\beta^-\tau}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.2.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \left[\Phi_2 \left(1 + \frac{t}{l\tau}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}\right.$$

$$\left. + \max\left\{1, \|C\| e^{\beta^+\tau}, \dots, \|C^{l-1}\| e^{(l-1)\beta^+\tau}\right\} \Phi_1\right] e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi}, \quad t > 0, \tag{2.2.16}$$

где Φ_1, Φ_2, $\beta(t)$, β^+, β^- *определены в* (2.2.11), (2.2.13),

$$\widetilde{\beta}(t) = \min\left\{\beta(t),\ -\frac{1}{l\tau} \ln \|C^l\|\right\}. \tag{2.2.17}$$

Теорема 2.2.4 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$e^{-l\beta^{-}\tau} < \|C^l\| < 1. \tag{2.2.18}$$

Тогда для решения начальной задачи (2.2.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \left[\Phi_2 \left(1 - \left(\|C^l\| e^{l\beta^{-}\tau} \right)^{-1} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^{-}\tau} \right.$$

$$\left. + \|C^l\|^{\frac{1}{l}-1} \max\left\{1, \|C\|, \ldots, \|C^{l-1}\|\right\} \Phi_1 \right] \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|C^l\| \right), \quad t > 0, \tag{2.2.19}$$

где Φ_1, Φ_2, β^{-} *определены в* (2.2.11), (2.2.13).

Вначале докажем несколько вспомогательных лемм. В следующей лемме мы получим оценку для решения начальной задачи (2.2.4), которая имеет предварительный характер и будет нами существенно использоваться при получении основных результатов.

Лемма 2.2.1 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда для решения начальной задачи* (2.2.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t) - Cy(t-\tau)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(- \int_0^t \frac{\gamma(\xi)}{2} d\xi \right), \quad t > 0, \tag{2.2.20}$$

где $V(0,\varphi)$, $\gamma(t)$ *определены в* (2.2.6), (2.2.12) *соответственно,* $h_{\min}(t)$ *— минимальмальное собственное значение матрицы* $H(t)$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.2.4). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2.2.5) на решении. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt} V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt} H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$+ \langle H(t)(A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \rangle$$

$$+ \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau)) \rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Используя матрицу $Q(t)$, имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix} \right\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds. \qquad (2.2.21)$$

В силу (2.2.7) и (2.2.9) можно записать

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \left\langle \left[S_{11}(t) - S_{12}(t)(S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t)\right](y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\right\rangle$$
$$+\langle S_{22}(t)z(t), z(t)\rangle,$$

где $S_{ij}(t)$ определены в (2.2.8),

$$z(t) = (S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t)(y(t) - Cy(t-\tau)) + y(t-\tau).$$

Отсюда получаем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix} \right\rangle$$
$$= \langle P(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle + \langle S_{22}(t)z(t), z(t)\rangle,$$

где матрица $P(t)$ задана в (2.2.10). Следовательно,

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\geq \langle P(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle$$
$$\geq p_{\min}(t)\|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Используя матрицу $H(t)$, имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq \frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \left\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle .$$

В силу (2.2.21) отсюда получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \left\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Используя условие (1.2.8), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \left\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$-k \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (2.2.5) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y), \tag{2.2.22}$$

где $\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \leq V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)\,d\xi\right).$$

Очевидно,

$$\|y(t)-Cy(t-\tau)\|^2 \leq \frac{1}{h_{\min}(t)} \left\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle,$$

где $h_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда с учетом определения функционала (2.2.5) из (2.2.22) получаем требуемое неравенство (2.2.20).

Лемма 2.2.1 доказана.

Опираясь на полученный результат, ниже мы получаем оценки решений начальной задачи (2.2.4) на промежутках $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Лемма 2.2.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда для решения начальной задачи* (2.2.4) *на каждом промежутке* $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \dots$, *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\, d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1, \tag{2.2.23}$$

где Φ_1, Φ_2, $\beta(t)$ *определены в* (2.2.11), (2.2.13).

Доказательство. Очевидно, в силу (2.2.20) при $t \in [0, \tau)$ с учетом обозначений (2.2.11), (2.2.13) имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|Cy(t-\tau)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|C\|\Phi_1,$$

что дает требуемое неравенство (2.2.23) при $k = 0$.

Пусть $t \in [\tau, 2\tau)$. В силу (2.2.20) с учетом обозначений (2.2.11), (2.2.13) имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|Cy(t-\tau)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|Cy(t-\tau) - C^2 y(t-2\tau)\| + \|C^2 y(t-2\tau)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|C\|\, \|y(t-\tau) - Cy(t-2\tau)\| + \|C^2\|\, \|y(t-2\tau)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \Phi_2 \|C\| e^{-\int\limits_0^{t-\tau} \beta(\xi)\, d\xi} + \|C^2\|\Phi_1,$$

что дает требуемое неравенство (2.2.23) при $k = 1$.

Пусть $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$. Нетрудно выписать цепочку неравенств:

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|Cy(t-\tau)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|Cy(t-\tau) - C^2 y(t-2\tau)\| + \|C^2 y(t-2\tau) - C^3 y(t-3\tau)\|$$
$$+ \dots + \|C^k y(t-k\tau) - C^{k+1} y(t-(k+1)\tau)\| + \|C^{k+1} y(t-(k+1)\tau)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\, d\xi} + \|C\|\, \|y(t-\tau) - Cy(t-2\tau)\| + \|C^2\|\, \|y(t-2\tau) - Cy(t-3\tau)\|$$
$$+ \dots + \|C^k\|\, \|y(t-k\tau) - Cy(t-(k+1)\tau)\| + \|C^{k+1}\|\, \|y(t-(k+1)\tau)\|.$$

В силу (2.2.20) получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2\|C\| e^{-\int\limits_0^{t-\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2\|C^2\| e^{-\int\limits_0^{t-2\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \ldots$$

$$+\Phi_2\|C^k\| e^{-\int\limits_0^{t-k\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1,$$

что дает требуемое неравенство (2.2.23).

Лемма 2.2.2 доказана.

Перейдем непосредственно к получению оценок для решений начальной задачи (2.2.4) на всей полупрямой $\{t > 0\}$.

Доказательство теоремы 2.2.2. Используя (2.2.23), для решения начальной задачи (2.2.4) на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$, можно выписать неравенства

$$\|y(t)\| \le \left[\Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t} \beta(\xi)\,d\xi} + \|C^{k+1}\| e^{\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} \Phi_1\right] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi}$$

$$\le \left[\Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} + \|C^{k+1}\| e^{(k+1)\beta^+\tau}\Phi_1\right] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi},$$

где β^+ определено в (2.2.13). Отсюда, учитывая условие (2.2.14) на $\|C^l\|$, для решения начальной задачи (2.2.4) на всей полупрямой $\{t > 0\}$ получаем оценку

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\Phi_2 \sum_{j=0}^{\infty} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}$$

$$+\max\left\{\|C\| e^{\beta^+\tau}, \ldots, \|C^l\| e^{l\beta^+\tau}\right\}\Phi_1\Bigg] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi}. \qquad (2.2.24)$$

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}$. Очевидно,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} = \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} + \sum_{j=l}^{2l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} + \sum_{j=2l}^{3l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} + \ldots.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau} \le \sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau} + \|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}$$

$$+\left(\|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\right)^2\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau} + \ldots$$

$$= \left(1 + \|C^l\|e^{l\beta^+\tau} + \left(\|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\right)^2 + \ldots\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}.$$

Отсюда, поскольку согласно условию (2.2.14) $\|C^l\|e^{l\beta^+\tau} < 1$, имеем

$$\sum_{j=0}^{\infty}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau} \le \left(1 - \|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}.$$

Используя это неравенство, из (2.2.24) получаем оценку (2.2.15).

Теорема 2.2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.3. Вначале проведем доказательство в случае $l = 1$. Из оценки (2.2.23) для решения начальной задачи (2.2.4) на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$, имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2\sum_{j=0}^{k} e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t}\frac{1}{\tau}\ln\|C\|\,d\xi - \int\limits_{0}^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1. \tag{2.2.25}$$

В силу определения функции $\widetilde{\beta}(t)$ в (2.2.17) для функций, стоящих в показателе экспонент, справедливы неравенства

$$\int\limits_{t-j\tau}^{t}\frac{1}{\tau}\ln\|C\|\,d\xi - \int\limits_{0}^{t-j\tau}\beta(\xi)\,d\xi \le -\int\limits_{0}^{t}\widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi.$$

Следовательно, из (2.2.25) получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2(k+1)e^{-\int\limits_{0}^{t}\widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1.$$

Отсюда на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$, имеем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi} + \|C\|^{k+1}\Phi_1$$

$$= \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi} + e^{(k+1)\ln\|C\|}\Phi_1$$

$$\le \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi} + e^{\frac{t}{\tau}\ln\|C\|}\Phi_1.$$

В силу определения функции $\widetilde{\beta}(t)$ получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi} + e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi}\Phi_1,$$

что дает требуемое неравенство (2.2.16) в случае $l = 1$.

Пусть $l \ge 2$. Как доказано в лемме 2.2.2, для решения начальной задачи (2.2.4) на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$, справедлива оценка (2.2.23).

Вначале рассмотрим случай, когда $l \le k \le 2l - 1$. Обозначим первое слагаемое в (2.2.23) через $I_1(t)$ и перепишем его следующим образом:

$$I_1(t) = \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\, d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=l}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\, d\xi}$$

$$= \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-j\tau}^{t} \beta(\xi)\, d\xi} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\, d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=l}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\, d\xi}.$$

С учетом определения числа β^+ в (2.2.13) имеем

$$I_1(t) \le \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\, d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=l}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\, d\xi}$$

$$\le \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\, d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{k-l} \|C^l\| \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-(l+j)\tau} \beta(\xi)\, d\xi}$$

$$= \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{k-l} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-(l+j)\tau}^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \|C^l\| e^{-\int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi}$$

$$\leq \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{k-l} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} \|C^l\| e^{-\int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi}.$$

Используя определение функции $\widetilde{\beta}(t)$ в (2.2.17), получаем

$$\|C^l\| e^{-\int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} = e^{\int\limits_{t-l\tau}^{t} \frac{1}{l\tau} \ln \|C^l\|\,d\xi - \int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \leq e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}.$$

Следовательно,

$$I_1(t) \leq \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{k-l} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}\ e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}.$$

Поскольку $l \leq k \leq 2l-1$, то $1 \leq \dfrac{t}{l\tau} < 2$. Тогда

$$I_1(t) \leq \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{l\tau}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}\ e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}. \qquad (2.2.26)$$

Рассмотрим второе слагаемое в оценке (2.2.23) при $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$:

$$I_2(t) = \|C^{k+1}\| \Phi_1.$$

Если $l \leq k \leq 2l-2$, то

$$I_2(t) \leq \|C^l\|\, \|C^{k+1-l}\| \Phi_1 = e^{\int\limits_{t-l\tau}^{t} \frac{1}{l\tau} \ln \|C^l\|\,d\xi} \|C^{k+1-l}\| \Phi_1$$

$$= e^{\int\limits_{t-l\tau}^{t} \frac{1}{l\tau} \ln \|C^l\|\,d\xi - \int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} e^{\int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \|C^{k+1-l}\| \Phi_1.$$

Отсюда в силу определений β^+ в (2.2.13) и $\widetilde{\beta}(t)$ в (2.2.17) получаем

$$I_2(t) \leq e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi} e^{(t-l\tau)\beta^+} \|C^{k+1-l}\| \Phi_1 \leq e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi} e^{(k+1-l)\beta^+\tau} \|C^{k+1-l}\| \Phi_1.$$

Следовательно,

$$I_2(t) \leq \max\left\{ \|C\| e^{\beta^+\tau}, \ldots, \|C^{l-1}\| e^{(l-1)\beta^+\tau} \right\} e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi} \Phi_1. \qquad (2.2.27)$$

Если $k = 2l - 1$, то $(2l-1)\tau \le t < 2l\tau$. Тогда, очевидно, имеем

$$I_2(t) \le \|C^l\|^2 \Phi_1 = e^{2\ln\|C^l\|}\Phi_1 \le e^{\frac{t}{l\tau}\ln\|C^l\|}\Phi_1$$
$$= e^{\int\limits_0^t \frac{1}{l\tau}\ln\|C^l\|\,d\xi}\Phi_1 \le e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}\Phi_1.$$

С учетом оценки (2.2.27) при $l \le k \le 2l-1$ для второго слагаемого в (2.2.23) имеем неравенство

$$I_2(t) \le \max\left\{1, \|C\|e^{\beta^+\tau}, \ldots, \|C\|^{l-1}e^{(l-1)\beta^+\tau}\right\} e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}\Phi_1. \qquad (2.2.28)$$

Оценки (2.2.26) и (2.2.28) дают требуемое неравенство (2.2.16) в случае $l \ge 2$ при $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $l \le k \le 2l-1$. Отметим, что получение оценки (2.2.16) при $0 \le k \le l-1$ не вызывает затруднений.

Перейдем теперь к случаю $ml \le k \le (m+1)l - 1$, $m = 2, 3, \ldots$. Вначале рассмотрим первое слагаемое $I_1(t)$ в (2.2.23) и перепишем его следующим образом:

$$I_1(t) = \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-j\tau}^t \beta(\xi)\,d\xi}\, e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=l}^{2l-1} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \ldots$$
$$+\Phi_2 \sum_{j=(m-1)l}^{ml-1} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=ml}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau} \beta(\xi)\,d\xi}.$$

С учетом определения числа β^+ в (2.2.13) имеем

$$I_1(t) \le \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^l\|\,\|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-(l+j)\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \ldots$$
$$+\Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^l\|^{m-1}\|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-((m-1)l+j)\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{k-ml} \|C^l\|^m \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-(ml+j)\tau} \beta(\xi)\,d\xi}$$
$$= \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-(l+j)\tau}^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \|C^l\| e^{-\int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \ldots$$
$$+\Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-((m-1)l+j)\tau}^{t-(m-1)l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \|C^l\|^{m-1} e^{-\int\limits_0^{t-(m-1)l\tau} \beta(\xi)\,d\xi}$$

$$+\Phi_2 \sum_{j=0}^{k-ml} \|C^j\| e^{\int\limits_{t-(ml+j)\tau}^{t-ml\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \|C^l\|^m e^{-\int\limits_0^{t-ml\tau} \beta(\xi)\,d\xi}$$

$$\le \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^{t} \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} \|C^l\| e^{-\int\limits_0^{t-l\tau} \beta(\xi)\,d\xi} + \ldots$$

$$+\Phi_2 \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} \|C^l\|^{m-1} e^{-\int\limits_0^{t-(m-1)l\tau} \beta(\xi)\,d\xi}$$

$$+\Phi_2 \sum_{j=0}^{k-ml} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} \|C^l\|^m e^{-\int\limits_0^{t-ml\tau} \beta(\xi)\,d\xi}.$$

Как выше, используя определение $\widetilde{\beta}(t)$ в (2.2.17), при $i = 1, \ldots, m$ получаем

$$\|C^l\|^i e^{-\int\limits_0^{t-il\tau} \beta(\xi)\,d\xi} = e^{\int\limits_{t-il\tau}^{t} \frac{1}{l\tau} \ln \|C^l\|\,d\xi - \int\limits_0^{t-il\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \le e^{-\int\limits_0^{t} \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}.$$

Следовательно,

$$I_1(t) \le \Phi_2(1+m) \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} e^{-\int\limits_0^{t} \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}.$$

Поскольку $ml \le k \le (m+1)l - 1$, то $m \le \dfrac{t}{l\tau} < m+1$. Тогда

$$I_1(t) \le \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{l\tau}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau}\; e^{-\int\limits_0^{t} \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}. \tag{2.2.29}$$

Рассмотрим второе слагаемое $I_2(t)$ в оценке (2.2.23) при $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$. Если $ml \le k \le (m+1)l - 2$, то

$$I_2(t) \le \|C^l\|^m\, \|C^{k+1-ml}\| \Phi_1$$

$$= e^{\int\limits_{t-ml\tau}^{t} \frac{1}{l\tau} \ln \|C^l\|\,d\xi - \int\limits_0^{t-ml\tau} \beta(\xi)\,d\xi} e^{\int\limits_0^{t-ml\tau} \beta(\xi)\,d\xi} \|C^{k+1-ml}\| \Phi_1$$

$$\le e^{-\int\limits_0^{t} \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi} e^{(t-ml\tau)\beta^+} \|C^{k+1-ml}\| \Phi_1 \le e^{-\int\limits_0^{t} \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi} e^{(k+1-ml)\beta^+\tau} \|C^{k+1-ml}\| \Phi_1.$$

Следовательно,

$$I_2(t) \le \max\left\{\|C\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|C^{l-1}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\right\} e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}\Phi_1. \qquad (2.2.30)$$

Если $k = (m+1)l-1$, то $((m+1)l-1)\tau \le t < (m+1)l\tau$. Тогда, очевидно, имеем

$$I_2(t) \le \|C^l\|^{m+1}\Phi_1 = e^{(m+1)\ln\|C^l\|}\Phi_1 \le e^{\frac{t}{l\tau}\ln\|C^l\|}\Phi_1 \le e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}\Phi_1.$$

С учетом оценки (2.2.30) при $ml \le k \le (m+1)l-1$ для второго слагаемого в (2.2.23) имеем неравенство

$$I_2(t) \le \max\left\{1, \|C\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|C^{l-1}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\right\} e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}\Phi_1. \qquad (2.2.31)$$

В силу произвольности m оценки (2.2.29) и (2.2.31) дают требуемое неравенство (2.2.16) в случае $l \ge 2$ при всех $t > 0$.

Теорема 2.2.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.4. Используя неравенство (2.2.23), доказанное в лемме 2.2.2, для решения начальной задачи (2.2.4) на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, \dots$, можно выписать оценку

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\|e^{-\beta^-(t-j\tau)} + \|C^{k+1}\|\Phi_1, \qquad (2.2.32)$$

где β^- определено в (2.2.13).

Вначале рассмотрим первое слагаемое в (2.2.32). Очевидно, при $0 \le k \le l-1$

$$\sum_{j=0}^{k} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau} \le \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Пусть $l \le k \le 2l-1$. Тогда

$$\sum_{j=0}^{k} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau} = \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau} + \sum_{j=l}^{k} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$\le \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau} + \|C^l\|e^{l\beta^-\tau} \sum_{j=0}^{k-l} \|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$\leq \|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\left[1+\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right]\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Пусть $ml \leq k \leq (m+1)l-1$, $m = 2, 3, \ldots$. Очевидно,

$$\sum_{j=0}^{k}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau} \leq \sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$+\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}+\cdots+\|C^{ml}\|e^{ml\beta^-\tau}\sum_{j=0}^{k-ml}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$\leq \left[1+\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}+\cdots+\|C^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}\right]\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=0}^{k}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau} \leq \|C^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}\left[1+\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}+\cdots+\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-m}\right]$$

$$\times\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau} \leq \|C^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}$$

$$\times\left[1+\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}+\cdots+\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-m}+\ldots\right]\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Поскольку $\|C^l\|e^{l\beta^-\tau} > 1$ согласно условию (2.11), то

$$\sum_{j=0}^{k}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau} \leq \|C^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}\left[1-\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right]^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Учитывая, что $ml\tau \leq t < (m+1)l\tau$, получаем

$$\sum_{j=0}^{k}\|C^j\|e^{-\beta^-(t-j\tau)} \leq \|C^l\|^m e^{-\beta^-(t-ml\tau)}\left[1-\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right]^{-1}$$

$$\times\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau} \leq \|C^l\|^{\frac{t}{l\tau}}\left[1-\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right]^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

Таким образом, для первого слагаемого в (2.2.32) при любом k получаем оценку

$$\Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{-\beta^-(t-j\tau)} \leq \Phi_2 \left[1 - \left(\|C^l\| e^{l\beta^-\tau} \right)^{-1} \right]^{-1}$$

$$\times \left(\sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^-\tau} \right) \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|C^l\| \right). \tag{2.2.33}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (2.2.32). Очевидно, при $0 \leq k \leq l-2$

$$\|C^{k+1}\| \leq \max\left\{ \|C\|, \dots, \|C^{l-1}\| \right\}.$$

Пусть $ml - 1 \leq k \leq (m+1)l - 2$, $m = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\|C^{k+1}\| \leq \|C^l\|^m \|C^{k+1-ml}\| \leq \|C^l\|^m \max\left\{ 1, \|C\|, \dots, \|C^{l-1}\| \right\}.$$

Поскольку $\|C^l\| < 1$ и $t < ((m+1)l - 1)\tau$, то

$$\|C^l\|^m \leq \|C^l\|^{\frac{t-(l-1)\tau}{l\tau}} = \|C^l\|^{\frac{1}{l}-1} \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|C^l\| \right).$$

Тогда в силу произвольности m имеем

$$\|C^{k+1}\| \leq \|C^l\|^{\frac{1}{l}-1} \max\left\{ 1, \|C\|, \dots, \|C^{l-1}\| \right\} \exp\left(\frac{t}{l\tau} \ln \|C^l\| \right)$$

для любого k. Учитывая оценку (2.2.33) для первого слагаемого в (2.2.32), приходим к неравенству (2.2.19).

Теорема 2.2.4 доказана.

Доказательство теоремы 2.2.1. Из оценок (2.2.15), (2.2.16), (2.2.19), установленных в теоремах 2.2.2–2.2.4, вытекает экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (2.2.1) при выполнении условий теоремы 2.2.1.

Теорема 2.2.1 доказана.

Замечание 1. Как видим из формулировок доказанных выше теорем, условия экспоненциальной устойчивости решений формулируются в терминах матричных неравенств. Установленные оценки характеризуют скорость экспоненциального убывания решений, при этом все величины указаны в явном виде.

Замечание 2. Отметим, что основой для получения оценок решений начальной задачи (2.2.4) явилось неравенство (2.2.20), установленное в лемме 2.2.1. Фактически, при доказательстве теорем 2.2.2–2.2.4 мы предложили способ получения оценок решений начальной задачи для неоднородных функционально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} &y(t) = Cy(t-\tau) + f(t), \qquad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \qquad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \tag{2.2.34}$$

где спектр матрицы C принадлежит единичного кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, а правая часть удовлетворяет оценке

$$\|f(t)\| \le \sigma_1(t) \exp\left(-\int_0^t \sigma_2(\xi)\, d\xi\right), \tag{2.2.35}$$

$\sigma_j(t) > 0$ — T-периодические функции.

Замечание 3. Иногда исследователей помимо оценок на решение $y(t)$ начальной задачи (2.2.4) интересуют оценки на производную $\dfrac{d}{dt}y(t)$. Отметим, что, используя предложенную методику, такие оценки нетрудно получить, если решение системы (2.2.1) экспоненциально устойчиво, т.е. удовлетворяет оценке вида

$$\|y(t)\| \le \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}, \qquad \alpha_j > 0.$$

Действительно, в силу (2.2.4) вектор-функция

$$z(t) = \frac{d}{dt}y(t)$$

является решением начальной задачи для неоднородного функционально-разностного уравнения вида (2.2.34)

$$\begin{aligned} &z(t) = Cz(t-\tau) + g(t), \qquad t > 0, \\ &z(t) = \psi(t), \qquad t \in [-\tau, 0], \end{aligned}$$

где $\psi(t) = \dfrac{d}{dt}\varphi(t)$, $g(t)$ удовлетворяет оценке вида (2.2.35). Тогда, как отмечалось в замечании 2, используя способ, предложенный при доказательстве теорем 2.2.2–2.2.4, нетрудно получить оценки для $z(t)$.

Замечание 4. При получении оценок решений задачи (2.2.4) мы использовали тот факт, что спектр матрицы C принадлежит единичного кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, и следовательно, существует натуральное l, начиная с которого $\|C^l\| < 1$. В зависимости от этой величины были получены оценки (2.2.15), (2.2.16), (2.2.19). Следует отметить, что при оценивании $\|C^j\|$ можно было бы использовать решение $L = L^* > 0$ дискретного уравнения Ляпунова

$$L - C^* L C = I.$$

Как известно (см., например, [25, 28]),

$$\|C^j\| \leq \left(1 - \frac{1}{\|L\|}\right)^{j/2} \sqrt{\|L\|\|L^{-1}\|}, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Однако в этом случае оценки будут более слабыми по сравнению с оценками (2.2.15), (2.2.16), (2.2.19).

Замечание 5. Если $C = 0$, то утверждение теоремы 2.2.2 переходит в утверждение теоремы 1.2.2, при этом оценка (2.2.15) — в оценку (1.2.12).

Как и в случае систем дифференциальных уравнений запаздывающего типа, условия (1.2.3) на $K(s)$ можно ослабить, при этом отказаться от требования положительной определенности матрицы $Q(t)$, заданной в (2.2.2).

Теорема 2.2.5 *Пусть спектр матрицы C принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Предположим, что существуют матрицы $H(t)$ и $K(s)$, удовлетворяющие условиям* (1.2.2) *и* (1.2.17)*, такие, что для матрицы $Q(t)$ в* (2.2.2) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle \widetilde{P}(t)(u - Cv), (u - Cv) \rangle, \tag{2.2.36}$$

$$u,\ v \in \mathbb{C}^n, \quad t \in [0, T],$$

где $\widetilde{P}(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существует число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8)*, тогда нулевое решение системы* (2.2.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (2.2.4) *имеет место оценка* (2.2.20)*, где*

$$\gamma(t) = \min \left\{ \frac{\widetilde{p}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k \right\}, \tag{2.2.37}$$

$\widetilde{p}_{\min}(t) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $\widetilde{P}(t)$.

В оценке (2.2.20) используются T-периодические продолжения определенных выше функции $\widetilde{p}_{\min}(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2.5, то в силу (2.2.7) и (2.2.36)

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \leq -\widetilde{P}(t) - K(0),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7), где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица. Как отмечалось выше, из [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим $H(t)$ и $\widetilde{P}(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2.2.5, рассмотрим на решении задачи (2.2.4) функционал (2.2.5). Как при доказательстве леммы 2.2.1, после дифференцирования получаем (2.2.21). В силу (2.2.36) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq \langle \widetilde{P}(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle \geq \widetilde{p}_{\min}(t)\|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2,$$

где $\widetilde{p}_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $\widetilde{P}(t)$. Используя (1.2.8) и (1.2.15), из (2.2.21) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{\widetilde{p}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Тогда в силу определения функционала (2.2.5) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) > 0$ задано в (2.2.37). Отсюда, как при доказательстве леммы 2.2.1, имеем неравенство (2.2.20).

Повторяя рассуждения из доказательств теорем 2.2.2–2.2.4, при выполнении условий теоремы 2.2.5 получаем аналогичные оценки на решение задачи (2.2.4), которые гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (2.2.1).

Теорема 2.2.5 доказана.

Пример.

Рассмотрим систему вида (2.2.1), где

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

В работе [148] было показано, что если $|a| < 0.4$, то нулевое решение системы устойчиво при любом запаздывании τ. Эта же система рассматривалась в работе [139], где устойчивость была установлена при условии $|a| < 0.533$. В работе [108] была установлена экспоненциальная устойчивость, если $|a| \leq 0.6213$. Более того, при $a = 0.6213$ и $\tau = 1$ была получена следующая оценка:

$$\|y(t)\| \leq \left(c_1 \|y(0)\| + c_2 \sup_{-1 \leq s \leq 0} \|y(s)\| + c_3 \sup_{-1 \leq s \leq 0} \left\| \frac{d}{ds} y(s) \right\| \right) e^{-0.00001559\, t/2}.$$

При тех же значениях параметров, используя результаты нашей работы, мы можем установить следующую оценку:

$$\|y(t)\| \leq d \max_{-1 \leq s \leq 0} \|y(s)\| e^{-0.147\, t/2}, \quad d > 0. \tag{2.2.38}$$

Действительно, выберем матрицы H и $K(s)$ следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}, \quad K(s) = e^{-ks} K_0, \quad k = 0.147, \quad K_0 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эти матрицы удовлетворяют условиям (1.2.2) и (1.2.3). Поскольку матрица

$$Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & -0.19426 & -0.16639 \\ 0.2 & 0.6 & -0.55704 & -0.16426 \\ -0.19426 & -0.55704 & 0.7154872 & 0.2410018 \\ -0.16639 & -0.16426 & 0.2410018 & 0.1975108 \end{pmatrix}$$

положительно определена, то по теореме 2.2.1 нулевое решение системы экспоненциально устойчиво. Для получения неравенства (2.2.38) нам нужно вычислить матрицу P, ее минимальное собственное значение $p_{\min}$, $\|H\|$ и $\beta = \dfrac{1}{2}\min\left\{\dfrac{p_{\min}}{\|H\|}, k\right\}$. В нашем случае

$$P = \begin{pmatrix} 0.4741402 & 0.1208201 \\ 0.1208201 & 0.1704705 \end{pmatrix}, \quad p_{\min} = 0.1282659,$$

$$\|H\| = 0.8701562, \quad \beta = \frac{1}{2}\min\{0.1474056, 0.147\} = \frac{0.147}{2}.$$

Поскольку $\|C\| < e^{-\beta\tau}$, по теореме 2.2.2 получаем (2.2.38).

Следует отметить, что используя те же матрицы H и K_0, нетрудно установить экспоненциальную устойчивость при произвольном положительном запаздывании τ, если $-0.9 \le a \le 0.78$. Достаточно взять, например, $k = 0.015/\tau$.

2.3 Робастная устойчивость для систем нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, C — постоянная матрица размера $n \times n$, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t, u_1, u_2)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\|, \qquad t \ge 0,\ u_j \in \mathbb{R}^n,\ q_j \ge 0. \tag{2.3.2}$$

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.3.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (2.3.1) на бесконечности. Из доказанных утверждений будут вытекать результаты о робастной устойчивости решений линейных систем (2.2.1).

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа. Начнем с наиболее простого по формулировке утверждения. Предполагая, что выполнены условия теоремы 2.2.1, определим функцию

$$q(t) = \left(q_1 + \sqrt{q_1^2 + (q_1\|C\| + q_2)^2}\right) \|H(t)\| \tag{2.3.3}$$

и матрицу

$$S^q(t) = S(t) - q(t)I, \tag{2.3.4}$$

где матрица $S(t)$ определена в (2.2.7).

Теорема 2.3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Если матрица $S^q(t)$ положительно определена при $t \in [0,T]$, тогда нулевое решение системы* (2.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Ниже мы установим оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (2.3.1). Для формулировки результата нам потребуется ввести ряд обозначений. В силу (2.2.8) элементы матрицы

$$S^q(t) = \begin{pmatrix} S_{11}^q(t) & S_{12}^q(t) \\ (S_{12}^q(t))^* & S_{22}^q(t) \end{pmatrix}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} S_{11}^q(t) &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - q(t)I, \\ S_{12}^q(t) &= -H(t)A(t)C - H(t)B(t) - K(0)C, \\ S_{22}^q(t) &= K(\tau) - C^*K(0)C - q(t)I. \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Поскольку $S^q(t)$ является положительно определенной, то ее можно представить в виде

$$S^q(t) = \begin{pmatrix} I & S_{12}^q(t)(S_{22}^q(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^q(t) - S_{12}^q(t)(S_{22}^q(t))^{-1}(S_{12}^q(t))^* & 0 \\ 0 & S_{22}^q(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ (S_{22}^q(t))^{-1}(S_{12}^q(t))^* & I \end{pmatrix}. \tag{2.3.6}$$

Следовательно, условие положительной определенности матрицы $S^q(t)$ эквивалентно положительной определенности эрмитовых матриц

$$P^q(t) = S^q_{11}(t) - S^q_{12}(t)(S^q_{22}(t))^{-1}(S^q_{12}(t))^*, \qquad S^q_{22}(t).$$

По построению

$$\begin{aligned} P^q(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - q(t)I, \\ -(H(t)A(t)C + K(0)C + H(t)B(t)) \\ \times[K(\tau) - C^*K(0)C - q(t)I]^{-1} \\ \times(H(t)A(t)C + K(0)C + H(t)B(t))^*. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Обозначим через $p^q_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P^q(t)$.

Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - q(t)I,$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи вида (1.2.7) для дифференциального уравнения Ляпунова. Как отмечалось ранее, в этом случае из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и функцию $p^q_{\min}(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), определим функцию

$$\gamma^q(t) = \min\left\{\frac{p^q_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}. \tag{2.3.8}$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.3.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &\qquad + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, \infty))$ такую, что $y(t) \in C^1([(k-1)\tau, k\tau])$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Вначале докажем вспомогательный результат, который будет использоваться для доказательства теоремы 2.3.1.

Теорема 2.3.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.3.1. Тогда для решения задачи* (2.3.9) *имеет место оценка*

$$\|y(t) - Cy(t-\tau)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma^q(\xi)\, d\xi\right), \qquad t > 0. \quad (2.3.10)$$

Доказательство теоремы 2.3.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.3.9). Используя матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные выше, как и в линейном случае, рассмотрим на решении задачи функционал Ляпунова – Красовского (2.2.5). Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)\frac{d}{dt}(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), \frac{d}{dt}(y(t) - Cy(t-\tau)) \right\rangle$$

$$+ \langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (2.3.9), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ W(t) + \int\limits_{t-\tau}^t \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds,$$

где матрица $Q(t)$ определена в (2.2.2),

$$W(t) = \langle H(t)F(t, y(t), y(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle$$
$$+ \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau))\rangle .$$

Используя (2.2.7), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle S(t) \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$+W(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds. \tag{2.3.11}$$

В силу (2.3.2)

$$|W(t)| \le 2\|H(t)\| \left(q_1\|y(t)\| + q_2\|y(t-\tau)\|\right)\|y(t) - Cy(t-\tau)\|$$
$$\le 2q_1\|H(t)\|\|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2$$
$$+2(q_1\|C\| + q_2)\|H(t)\|\|y(t-\tau)\|\|y(t) - Cy(t-\tau)\|. \tag{2.3.12}$$

Очевидно,

$$|W(t)| \le q(t)(\|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2 + \|y(t-\tau)\|^2), \tag{2.3.13}$$

где функция $q(t)$ определена в (2.3.3). Тогда из (2.3.11) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle S^q(t) \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds. \tag{2.3.14}$$

В силу (2.3.6) имеем

$$\left\langle S^q(t) \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$
$$\ge \langle P^q(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle,$$

где $P^q(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (2.3.7). Тогда

$$\langle P^q(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), (y(t) - Cy(t-\tau))\rangle \ge p^q_{\min}(t)\|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2,$$

где $p^q_{\min}(t) > 0$ – минимальное собственное значение матрицы $P^q(t)$. Используя (1.2.15), получаем

$$\left\langle S^q(t)\begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq \frac{p^q_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\right\rangle .$$

В силу (1.2.8) из (2.3.14) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p^q_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\left\langle H(t)y(t),y(t)\right\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (2.2.5) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma^q(t)V(t,y),$$

где функция $\gamma^q(t)$ задана в (2.3.8). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \leq V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma^q(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.2.6). Используя (1.2.15), с учетом определения функционала (2.2.5) получаем

$$\|y(t)-Cy(t-\tau)\|^2 \leq \frac{1}{h_{\min}(t)}\left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\right\rangle$$

$$\leq \frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)} \leq \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma^q(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем оценку (2.3.10).

Теорема 2.3.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.3.1. На основе оценки (2.3.10), как в параграфе 2.2, повторяя рассуждения из доказательств теорем 2.2.2–2.2.4, могут быть получены аналоги оценок (2.2.15), (2.2.16), (2.2.19). Эти оценки гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (2.3.1).

Теорема 2.3.1 доказана.

Замечание 1. Если $C = 0$, то утверждение теоремы 2.3.1 переходит в утверждение теоремы 1.3.1, утверждение теоремы 2.3.2 — в утверждение теоремы 1.3.2.

Замечание 2. Функция $\gamma^q(t)$ в оценке (2.3.10) характеризует скорость экспоненциального убывания решений системы (2.3.1). Она зависит от функции $q(t)$, которая возникает при оценивании правой части неравенства (2.3.12). Однако, правую часть этого неравенства можно оценивать разными способами, что дает возможность управлять параметрами в оценке для решений системы (2.3.1). Ниже мы приведем некоторые результаты.

Очевидно, что для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_1 u_1^2 + \alpha_2 u_1 u_2 \leq \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2^2}{4\alpha}\right) u_1^2 + \alpha u_2^2. \qquad (2.3.15)$$

С использованием (2.3.15) правую часть неравенства (2.3.12) можно оценить следующим образом

$$|W(t)| \leq \beta_1(t)\|y(t)\|^2 + \beta_2(t)\|y(t-\tau)\|^2, \qquad (2.3.16)$$

где

$$\beta_1(t) = 2\|H(t)\| \left(q_1 + \frac{(q_1\|C\| + q_2)^2}{4\alpha(t)}\right), \quad \beta_2(t) = 2\|H(t)\|\,\alpha(t), \quad (2.3.17)$$

$\alpha(t) > 0$ — произвольная непрерывная функция. Например, выбирая

$$\alpha(t) = \frac{q_1 + \sqrt{q_1^2 + (q_1\|C\| + q_2)^2}}{2},$$

мы получаем, что

$$\beta_1(t) = \beta_2(t) = q(t),$$

и оценка (2.3.16) переходит в (2.3.13).

Используя оценку (2.3.16), сформулируем аналоги теорем 2.3.1 и 2.3.2. Введем матрицу

$$S^\beta(t) = S(t) - \begin{pmatrix} \beta_1(t) & 0 \\ 0 & \beta_2(t) \end{pmatrix} I,$$

где элементы матрицы $S(t)$ определены в (2.2.8).

Теорема 2.3.3 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Если матрица $S^\beta(t)$ положительно определена при $t \in [0,T]$, тогда нулевое решение системы* (2.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Для доказательства этой теоремы нам нужно установить аналог оценки (2.3.10). Для формулировки результата нам потребуется ввести ряд обозначений. По определению элементы матрицы

$$S^\beta(t) = \begin{pmatrix} S_{11}^\beta(t) & S_{12}^\beta(t) \\ (S_{12}^\beta(t))^* & S_{22}^\beta(t) \end{pmatrix} \tag{2.3.18}$$

имеют вид

$$\begin{aligned} S_{11}^\beta(t) &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - \beta_1(t)I, \\ S_{12}^\beta(t) &= -H(t)A(t)C - H(t)B(t) - K(0)C, \\ S_{22}^\beta(t) &= K(\tau) - C^*K(0)C - \beta_2(t)I. \end{aligned} \tag{2.3.19}$$

Матрицу $S^\beta(t)$ можно представить в виде

$$S^\beta(t) = \begin{pmatrix} I & S_{12}^\beta(t)(S_{22}^\beta(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_{11}^\beta(t) - S_{12}^\beta(t)(S_{22}^\beta(t))^{-1}(S_{12}^\beta(t))^* & 0 \\ 0 & S_{22}^\beta(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ (S_{22}^\beta(t))^{-1}(S_{12}^\beta(t))^* & I \end{pmatrix}. \tag{2.3.20}$$

Отсюда вытекает, что условие положительной определенности матрицы $S^\beta(t)$ эквивалентно положительной определенности эрмитовых матриц

$$P^\beta(t) = S_{11}^\beta(t) - S_{12}^\beta(t)(S_{22}^\beta(t))^{-1}(S_{12}^\beta(t))^*, \qquad S_{22}^\beta(t).$$

По построению

$$\begin{aligned} P^\beta(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - \beta_1(t)I, \\ -(H(t)A(t)C + K(0)C + H(t)B(t)) \\ \times[K(\tau) - C^*K(0)C - \beta_2(t)I]^{-1} \\ \times(H(t)A(t)C + K(0)C + H(t)B(t))^*. \end{aligned} \tag{2.3.21}$$

Обозначим через $p^{\beta}_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P^{\beta}(t)$.

Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.3, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^{*}(t)H(t) < -K(0) - \beta_1(t)I,$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи вида (1.2.7) для дифференциального уравнения Ляпунова. Как отмечалось ранее, в этом случае из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим матрицу $H(t)$ и функцию $p^{\beta}_{\min}(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя минимальное собственное значение $h_{\min}(t) > 0$ матрицы $H(t)$ и число $k > 0$, удовлетворяющее (1.2.8), определим функцию

$$\gamma^{\beta}(t) = \min\left\{\frac{p^{\beta}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k\right\}. \tag{2.3.22}$$

Теорема 2.3.4 *Предположим, что выполнены условия теоремы 2.3.3. Тогда для решения задачи* (2.3.9) *имеет место оценка*

$$\|y(t) - Cy(t-\tau)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma^{\beta}(\xi)\,d\xi\right), \quad t > 0. \tag{2.3.23}$$

Доказательство теоремы 2.3.4 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 2.3.2, с использованием (2.3.16), (2.3.18)–(2.3.21).

Утверждение теоремы 2.3.3 следует из оценки (2.3.23). Действительно, используя эту оценку, как в параграфе 2.2, повторяя рассуждения из доказательств теорем 2.2.2–2.2.4, нетрудно получить аналоги оценок (2.2.15), (2.2.16), (2.2.19). Эти оценки гарантируют экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (2.3.1).

Замечание. Если $C = 0$, то утверждение теоремы 2.3.3 переходит в утверждение теоремы 1.3.4, утверждение теоремы 2.3.4 — в утверждение теоремы 1.3.5.

Условия (1.2.3) на $K(s)$ можно ослабить, при этом отказаться от требования положительной определенности матрицы $S^{\beta}(t)$.

Теорема 2.3.5 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$ *и* $K(s)$*, удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (1.2.17)*, такие, что для матрицы* $S^\beta(t)$ *справедливо неравенство*

$$\left\langle S^\beta(t)\begin{pmatrix} u-Cv \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u-Cv \\ v \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle \widetilde{P}^\beta(t)(u-Cv),(u-Cv)\rangle, \quad (2.3.24)$$

$$u,\ v\in\mathbb{C}^n, \qquad t\in[0,T],$$

где $\widetilde{P}^\beta(t)$ *— положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существует* $k>0$*, удовлетворяющее* (1.2.8)*, тогда нулевое решение системы* (2.3.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (2.3.9) *имеет место оценка* (2.3.23)*, где*

$$\gamma^\beta(t)=\min\left\{\frac{\widetilde{p}^\beta_{\min}(t)}{\|H(t)\|},k\right\}, \qquad (2.3.25)$$

$\widetilde{p}^\beta_{\min}(t)>0$ *— минимальное собственное значение матрицы* $\widetilde{P}^\beta(t)$.

В оценке (2.3.23) в данном случае используются T-периодические продолжения определенных выше функции $\widetilde{p}^\beta_{\min}(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t\geq 0\}$.

Доказательство теоремы 2.3.5. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.5, то в силу (2.3.19) и (2.3.24)

$$\frac{d}{dt}H(t)+H(t)A(t)+A^*(t)H(t)\leq -\widetilde{P}^\beta(t)-K(0)-\beta_1(t)I,$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7), где $G(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица. Как отмечалось выше, из [29] следует, что $H(t)>0$ на всем отрезке $[0,T]$. Продолжим $H(t)$ и $\widetilde{P}^\beta(t)$ T-периодическим образом на всю полуось $\{t\geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2.3.5, рассмотрим на решении задачи (2.3.9) функционал (2.2.5). Как при доказательстве теоремы 2.3.2, после дифференцирования получаем (2.3.11). Используя (2.3.16), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq -\left\langle S^\beta(t)\begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds. \qquad (2.3.26)$$

В силу (2.3.24) имеем

$$\left\langle S^{\beta}(t)\left(\begin{array}{c} y(t)-Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{array}\right),\left(\begin{array}{c} y(t)-Cy(t-\tau) \\ y(t-\tau)\end{array}\right)\right\rangle$$

$\geq \langle \widetilde{P}^{\beta}(t)(y(t)-Cy(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\rangle \geq \widetilde{p}^{\beta}_{\min}(t)\|y(t)-Cy(t-\tau)\|^2,$

где $\widetilde{p}^{\beta}_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $\widetilde{P}^{\beta}(t)$. Используя (1.2.8) и (1.2.15), из (2.3.26) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{\widetilde{p}^{\beta}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds.$$

Тогда в силу определения функционала (2.2.5) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma^{\beta}(t)V(t,y),$$

где $\gamma^{\beta}(t) > 0$ определено в (2.3.25). Отсюда, как при доказательстве теоремы 2.3.2, имеем неравенство (2.3.23).

Теорема 2.3.5 доказана.

Замечание. Из полученных результатов вытекают утверждения о робастной устойчивости для линейных систем вида (2.2.1). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau) \\ &+ \Delta A(t)y(t)+\Delta B(t)y(t-\tau)+C\frac{d}{dt}y(t-\tau), \qquad (2.3.27)\end{aligned}$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ — произвольные матрицы размера $n\times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \leq q_1, \quad \|\Delta B(t)\| \leq q_2, \qquad t\geq 0.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t,u_1,u_2) = \Delta A(t)u_1 + \Delta B(t)u_2$$

удовлетворяет неравенству (2.3.2). Тогда теоремы 2.3.1–2.3.5 дают условия робастной устойчивости для линейных систем вида (2.2.1) и оценки экспоненциального убывания решений возмущенной системы (2.3.27) при $t \to \infty$.

2.4 Нелинейные системы нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F(t, y(t), y(t-\tau)), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, C — постоянная матрица размера $n \times n$, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t,u_1,u_2)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2}, \qquad t \ge 0, \quad u_j \in \mathbb{R}^n, \tag{2.4.2}$$

$q_j,\ \omega_j \ge 0$, $j = 1, 2$.

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений системы (2.4.1). Случай $\omega_1 = \omega_2 = 0$ был подробно исследован в параграфе 2.3. В этом параграфе мы рассмотрим системы (2.4.1) при $\omega_1 + \omega_2 \ne 0$. Мы установим оценки на множества притяжения и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (2.4.1) на бесконечности. Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа.

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.4.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &\qquad\qquad + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, \infty))$ такую, что $y(t) \in C^1([(k-1)\tau, k\tau])$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Далее мы будем предполагать, что выполнены условия теоремы 2.2.1. Рассмотрим матрицы $H(t)$ и $K(s)$, указанные в этой теореме. Отметим, что из положительной определенности матрицы $Q(t)$ вытекает, что $Q_{11}(t) > 0$ на $[0, T]$. А поскольку $H(0) = H(T) > 0$, то, как отмечалось ранее, из работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя обозначение.

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.4.3), определенное при $t \in [0, t')$. Используя указанную выше матрицу $H(t)$ и матрицу $K(s)$, удовлетворяющую условиям теоремы 2.2.1, рассмотрим на решении $y(t)$ функционал Ляпунова – Красовского (2.2.5).

Как в параграфе 2.2, рассмотрим матрицу $S(t)$, определенную в (2.2.7), с элементами, заданными в (2.2.8), и матрицу $P(t)$, заданную в (2.2.10).

Обозначим через $h_{\min}(t)$, $p_{\min}(t)$, $s_{\min}(t)$ минимальные собственные значения матриц $H(t)$, $P(t)$, $S_{22}(t)$ соответственно. Поскольку $H(t) > 0$, $P(t) > 0$, то в силу T-периодичности этих матриц $h_{\min}(t) \geq h_{\min} > 0$, $p_{\min}(t) \geq p_{\min} > 0$. Имеем также $s_{\min}(t) \equiv s_{\min} > 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.1 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1. Тогда при любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$ для решения задачи* (2.4.3) *имеет место оценка*

$$\frac{d}{dt}V(t, y) \leq \frac{2q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1}\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t, y))^{1+\omega_1/2}$$

$$-\left(\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - 2(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|y(t-\tau)\|)\right)\|H(t)\|\|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2$$

$$- \left(s_{\min} - 2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|y(t-\tau)\|)\right)\|z(t)\|^2$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle ds, \quad t\in[0,t'), \tag{2.4.4}$$

где

$$s_{\max} = \max_{t\in[0,T]}\|(S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t)\|, \tag{2.4.5}$$

$$\delta(s) = q_1\left(1+(\varepsilon_1)^{-1}\right)^{\omega_1}\|C\|^{1+\omega_1}s^{\omega_1} + q_2 s^{\omega_2}, \quad s\geq 0, \tag{2.4.6}$$

$$z(t) = (S_{22}(t))^{-1}S_{12}^*(t)(y(t)-Cy(t-\tau)) + y(t-\tau) \tag{2.4.7}$$

и $k>0$ *удовлетворяет* (1.2.8).

Доказательство. Продифференцируем функционал $V(t,y)$. Учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (2.4.3), и используя матрицу $Q(t)$ из (2.2.2), при $t\in[0,t')$ имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau)),F(t,y(t),y(t-\tau))\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds. \tag{2.4.8}$$

Рассмотрим первое слагаемое $I_1(t)$ из правой части. Очевидно, его можно записать в виде

$$I_1(t) = -\left\langle S(t)\begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где матрица $S(t)$ определена в (2.2.7). Поскольку ее можно представить в виде (2.2.9), то для $I_1(t)$ получаем оценку

$$I_1(t)\leq -p_{\min}(t)\|y(t)+Cy(t-\tau)\|^2 - s_{\min}\|z(t)\|^2, \tag{2.4.9}$$

где вектор-функция $z(t)$ определена в (2.4.7).

Рассмотрим второе и третье слагаемые

$$I_2(t) = \langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau)), F(t, y(t), y(t-\tau))\rangle$$

из правой части (2.4.8). В силу (2.4.2)

$$I_2(t) \leq 2\|H(t)\| \left(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2} \right) \|y(t) - Cy(t-\tau)\|.$$

Воспользуемся следующим неравенством:

$$(a+b)^{1+\omega} \leq (1+\varepsilon)^{\omega} a^{1+\omega} + (1+\varepsilon^{-1})^{\omega} b^{1+\omega}, \quad a, b \geq 0, \ \omega, \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$\|y(t)\|^{1+\omega_1} \leq (\|y(t) - y(t-\tau)\| + \|C\|\|y(t-\tau)\|)^{1+\omega_1}$$

$$\leq (1+\varepsilon_1)^{\omega_1} \|y(t) - Cy(t-\tau)\|^{1+\omega_1} + \left(\frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right)^{\omega_1} \|C\|^{1+\omega_1} \|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}.$$

Например, выбирая $\varepsilon_1 = \|C\|$, получаем

$$\|y(t)\|^{1+\omega_1} \leq (\|y(t) - Cy(t-\tau)\| + \|C\|\|y(t-\tau)\|)^{1+\omega_1}$$

$$\leq (1+\|C\|)^{\omega_1} \|y(t) - Cy(t-\tau)\|^{1+\omega_1} + (1+\|C\|)^{\omega_1} \|C\| \|y(t-\tau)\|^{1+\omega_1}.$$

Следовательно,

$$I_2(t) \leq 2q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1} \|H\| \|y(t) - Cy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}$$

$$+2\|H\| \left[q_1 \left(\frac{1+\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right)^{\omega_1} \|C\|^{1+\omega_1} \|y(t-\tau)\|^{\omega_1} + q_2 \|y(t-\tau)\|^{\omega_2} \right]$$

$$\times \|y(t-\tau)\| \|y(t) - Cy(t-\tau)\|.$$

В силу определения $z(t)$, очевидно,

$$\|y(t-\tau)\| \leq \|(S_{22}(t))^{-1} S_{12}^*(t)\| \|y(t) - Cy(t-\tau)\| + \|z(t)\|.$$

Следовательно,

$$\|y(t-\tau)\| \|y(t) - Cy(t-\tau)\| \leq \|(S_{22}(t))^{-1} S_{12}^*(t)\| \|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2$$

$$+\|z(t)\| \|y(t) - Cy(t-\tau)\|$$

$$\leq \left(\|(S_{22}(t))^{-1} S_{12}^*(t)\| + \frac{1}{4\varepsilon_2} \right) \|y(t) - Cy(t-\tau)\|^2 + \varepsilon_2 \|z(t)\|^2, \quad \varepsilon_2 > 0.$$

Отсюда имеем неравенство

$$I_2(t) \leq 2q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1} \|H(t)\| \|y(t) + Cy(t-\tau)\|^{2+\omega_1}$$

$$
+2\|H(t)\|\left[q_1(1+(\varepsilon_1)^{-1})^{\omega_1}\|C\|^{1+\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}+q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\right]
$$
$$
\times\left(s_{\max}+(4\varepsilon_2)^{-1}\right)\|y(t)-Cy(t-\tau)\|^2
$$
$$
+2\|H(t)\|\Big[q_1(1+(\varepsilon_1)^{-1})^{\omega_1}\|C\|^{1+\omega_1}\|y(t-\tau)\|^{\omega_1}
$$
$$
+q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}\Big]\varepsilon_2\|z(t)\|^2, \tag{2.4.10}
$$

где ε_1, $\varepsilon_2>0$. Используя очевидную оценку

$$
\|y(t)-Cy(t-\tau)\|^2\le\frac{1}{h_{\min}(t)}\left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau)),(y(t)-Cy(t-\tau))\right\rangle
$$

и определение $V(t,y)$, из неравенства (2.4.10) получаем

$$
I_2(t)\le\frac{2q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1}\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}
$$
$$
+2\|H(t)\|(s_{\max}+(4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|y(t-\tau)\|)\|y(t)-Cy(t-\tau)\|^2
$$
$$
+2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|y(t-\tau)\|)\|z(t)\|^2, \tag{2.4.11}
$$

где $\delta(s)$ определено в (2.4.6).

Следовательно, учитывая (1.2.8), из (2.4.8), (2.4.9), (2.4.11) имеем неравенство (2.4.4).

Теорема 2.4.1 доказана.

Введем следующие обозначения:

$$
\widetilde{q}=\max_{t\in[0,T]}\frac{q_1(1+\varepsilon_1)^{\omega_1}\|H(t)\|}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}, \tag{2.4.12}
$$

$$
p=\min_{t\in[0,T]}\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|},\quad h=\min_{t\in[0,T]}\frac{1}{\|H(t)\|}. \tag{2.4.13}
$$

В дальнейшем будем считать, что

$$
\varepsilon_2=\frac{s_{\min}}{2p_{\min}}\left(s_{\max}+\sqrt{s_{\max}^2+\frac{p_{\min}}{s_{\min}}}\right), \tag{2.4.14}
$$

$\rho>0$ такое, что

$$
\delta(\rho)<\frac{s_{\min}h}{2\varepsilon_2}. \tag{2.4.15}
$$

Обозначим

$$\gamma(t) = \min\left\{\left(\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} - 2(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\rho)\right), k\right\}, \tag{2.4.16}$$

$$R^{\omega_1/2} = \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \gamma(\xi)d\xi\right)\right)$$

$$\times\left(\widetilde{q}\omega_1\int\limits_0^T \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\eta \gamma(\xi)d\xi\right)d\eta\right)^{-1}, \tag{2.4.17}$$

$$\beta(t) = \frac{\gamma(t)}{2}, \quad \beta^+ = \max_{t\in[0,T]}\beta(t), \quad \beta^- = \min_{t\in[0,T]}\beta(t), \tag{2.4.18}$$

$$\Phi_1 = \max_{s\in[-\tau,0]}\|\varphi(s)\|, \tag{2.4.19}$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}}}\left(1 - R^{-\omega_1/2}V(0,\varphi)^{\omega_1/2}\right)^{-1/\omega_1}. \tag{2.4.20}$$

Поскольку $\varepsilon_2 > 0$ определяется в (2.4.14) и $\rho > 0$ определяется условием (2.4.15), то нетрудно показать, что $\gamma(t) \geq \gamma_{\min} > 0$. Поэтому $\beta^- > 0$.

В параграфе 2.2 отмечалось, что из условия положительной определенности матрицы $Q(t)$ в (2.2.2) следует, что спектр матрицы C принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$. Тогда $\|C^j\| \to 0$ при $j \to \infty$. Пусть l — минимальное натуральное число такое, что $\|C^l\| < 1$.

Перейдем к формулировке утверждений.

Мы выделяем три случая. В зависимости от величины $\|C^l\|$ ниже мы установим оценки решений в случаях:

$$\|C^l\| < e^{-l\beta^+\tau}, \quad e^{-l\beta^+\tau} \leq \|C^l\| \leq e^{-l\beta^-\tau}, \quad e^{-l\beta^-\tau} < \|C^l\| < 1,$$

где β^+ и β^- определены в (2.4.18).

Теорема 2.4.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$\|C^l\| < e^{-l\beta^+\tau}. \tag{2.4.21}$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(t)$ задачи (2.4.3) принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$, где

$$\mathcal{E}_1 = \left\{\varphi(s) \in C^1([-\tau,0]) : \quad \Phi_1 < \rho, \quad V(0,\varphi) < R,\right.$$

$$\Phi_2\big(1-\|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\big)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}+\max\{\|C\|,\dots,\|C^l\|\}\Phi_1<\rho\Bigg\}.$$

Тогда решение задачи (2.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \ge 0\}$, *и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \left(\Phi_2\big(1-\|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\big)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}\right.$$

$$\left.+\max\left\{\|C\|e^{\beta^+\tau},\dots,\|C^l\|e^{l\beta^+\tau}\right\}\Phi_1\right)$$

$$\times\exp\left(-\int_0^t\beta(\xi)d\xi\right),\quad t>0. \tag{2.4.22}$$

Теорема 2.4.3 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$e^{-l\beta^+\tau}\le\|C^l\|\le e^{-l\beta^-\tau}.$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(t)$ *задачи* (2.4.3) *принадлежит множеству* $\mathcal{E}_2$, *где*

$$\mathcal{E}_2=\Bigg\{\varphi(s)\in C^1([-\tau,0]):\quad \Phi_1<\rho,\quad V(0,\varphi)<R,$$

$$\Phi_2B_l\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}+\max\{\|C\|,\dots,\|C^l\|\}\Phi_1<\rho\Bigg\},$$

$$B_l=\max_{t\ge0}\left(1+\frac{t}{l\tau}\right)\exp\left(-\int_0^t\hat\beta(\xi)d\xi\right),$$

$$\hat\beta(t)=\min\left\{\beta(t),-\frac{1}{l\tau}\ln\|C^l\|\right\}. \tag{2.4.23}$$

Тогда решение задачи (2.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \ge 0\}$, *и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\|\le\left(\Phi_2\left(1+\frac{t}{l\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^+\tau}\right.$$

$$+\max\left\{1, \|C\|e^{\beta^+\tau}, \dots, \|C^{(l-1)}\|e^{(l-1)\beta^+\tau}\right\}\Phi_1\Bigg)$$

$$\times\exp\left(-\int\limits_0^t \hat{\beta}(\xi)d\xi\right), \quad t > 0. \tag{2.4.24}$$

Теорема 2.4.4 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1 и*

$$e^{-l\beta^-\tau} < \|C^l\| < 1. \tag{2.4.25}$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(t)$ *задачи* (2.4.3) *принадлежит множеству* $\mathcal{E}_3$*, где*

$$\mathcal{E}_3 = \Bigg\{\varphi(s) \in C^1([-\tau, 0]): \quad \Phi_1 < \rho, \quad V(0,\varphi) < R,$$

$$\Phi_2\big(1 - \big(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\big)^{-1}\big)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau} + \max\{\|C\|, \dots, \|C^l\|\}\Phi_1 < \rho\Bigg\}.$$

Тогда решение задачи (2.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \geq 0\}$*, и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Bigg(\Phi_2\big(1 - \big(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\big)^{-1}\big)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$+\|C^l\|^{\frac{1}{l}-1}\max\left\{1, \|C\|, \dots, \|C^{l-1}\|\right\}\Phi_1\Bigg)$$

$$\times\exp\left(\frac{t}{l\tau}\ln\|C^l\|\right), \quad t \geq l\tau. \tag{2.4.26}$$

Очевидно, что из теорем 2.4.2–2.4.4 вытекает следующий результат.

Теорема 2.4.5 *Пусть выполнены условия теоремы 2.2.1, тогда нулевое решение системы* (2.4.1) *экспоненциально устойчиво.*

Ниже мы приведем подробное доказательство теорем 2.4.2–2.4.4.

Доказательство теоремы 2.4.2. Вначале мы покажем, что решение начальной задачи (2.4.3) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, и на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \left(\sum_{j=0}^{k} \|C^j\| \exp \left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^{t-j\tau} \gamma(\xi) d\xi \right) \right) + \|C^{k+1}\| \Phi_1, \quad (2.4.27)$$

где Φ_1, Φ_2 определены в (2.4.19), (2.4.20).

Пусть $t \in [0, \tau]$. Поскольку $\Phi_1 < \rho$, то

$$p_{\min}(t) > 2\|H(t)\|(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|\varphi(t-\tau)\|),$$

$$s_{\min} > 2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|\varphi(t-\tau)\|).$$

Следовательно, учитывая определение функционала $V(t, y)$, обозначения (2.4.12) и (2.4.16), из неравенства (2.4.4) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) + \gamma(t)V(t, y) \leq 2\widetilde{q}(V(t, y))^{1+\omega_1/2}. \quad (2.4.28)$$

Поскольку $V(0, \varphi) < R$, где $R > 0$ определено в (2.4.17), то в силу неравенства Гронуолла (см., например, [90]) получаем оценку

$$V(t, y) \leq \frac{V(0, \varphi)}{\left(1 - \left(R^{-1}V(0, \varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp \left(-\int\limits_0^t \gamma(\xi) d\xi \right),$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t) - Cy(t-\tau)\| \leq \Phi_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \gamma(\xi) d\xi \right). \quad (2.4.29)$$

Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp \left(-\frac{1}{2} \int\limits_0^t \gamma(\xi) d\xi \right) + \|C\|\Phi_1. \quad (2.4.30)$$

Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.4.3) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, т. е. $t' > \tau$, и при $k = 0$ неравенство (2.4.27) доказано.

Отметим, что для справедливости неравенства (2.4.30) при $t \in [0, \tau]$ было достаточно, чтобы $\Phi_1 < \rho$ и $V(0, \varphi) < R$, и оно выполняется независимо от величины $\|C^l\|$.

Из (2.4.27) вытекает, что если начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}_1$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, \tau]$. Тогда при $t \in [\tau, 2\tau]$

$$p_{\min}(t) > 2\|H(t)\|(s_{\max} + (4\varepsilon_2)^{-1})\delta(\|y(t-\tau)\|), \tag{2.4.31}$$

$$s_{\min} > 2\|H(t)\|\varepsilon_2\delta(\|y(t-\tau)\|). \tag{2.4.32}$$

Отсюда вытекает оценка (2.4.28) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Следовательно, как и выше, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t, y)$, получим неравенство (2.4.29). Тогда

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right) + \|Cy(t-\tau)\|$$

$$\le \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right) + \|C\left(y(t-\tau) - Cy(t-2\tau)\right)\| + \|C^2 y(t-2\tau)\|,$$

и, учитывая неравенство (2.4.29), будем иметь

$$\|y(t)\| \le \Phi_2\Bigg(\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right)$$

$$+\|C\|\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-\tau} \gamma(\xi)d\xi\right)\Bigg) + \|C^2\|\Phi_1. \tag{2.4.33}$$

Из полученной оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.4.3) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$, и при $k = 1$ неравенство (2.4.27) также доказано. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_1$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$.

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получим, что решение задачи (2.4.3) определено при всех $t > 0$ и на каждом промежутке $t \in [k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяет оценке (2.4.27).

Из этой оценки на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$ вытекает неравенство

$$\|y(t)\| \leq \left(\Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} + \|C^{k+1}\| e^{(k+1)\beta^+\tau} \Phi_1\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где β^+ определено в (2.4.18). Отсюда, учитывая условие (2.4.21) на $\|C^l\|$, получаем оценку

$$\|y(t)\| \leq \left(\Phi_2 \sum_{j=0}^{\infty} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} + \max\left\{\|C\| e^{\beta^+\tau}, \dots, \|C^l\| e^{l\beta^+\tau}\right\} \Phi_1\right)$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

А поскольку

$$\sum_{j=0}^{\infty} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau} \leq \left(1 - \|C^l\| e^{l\beta^+\tau}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau},$$

то отсюда непосредственно вытекает неравенство (2.4.22).

Теорема 2.4.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.4.3. Рассмотрим подробно случай $l = 1$.

Покажем, что решение задачи (2.4.3) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, и на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет оценке

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\int_0^t \hat{\beta}(\xi)d\xi\right) + \|C^{k+1}\|\Phi_1. \tag{2.4.34}$$

По условию $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, тогда в силу рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.4.2, $\|y(t)\| \leq \rho$ при $t \in [0, \tau]$. Поэтому, если $t \in [\tau, 2\tau]$, то выполнены оценки (2.4.31), (2.4.32). Следовательно, учитывая неравенство (2.4.4), получаем оценку (2.4.28) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Отсюда, как и ранее, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t, y)$, получим неравенство (2.4.33).

Перепишем это неравенство в следующем виде:

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \Biggl(\exp\biggl(-\int\limits_0^t \beta(\xi)d\xi \biggr)$$

$$+\exp\biggl(\int\limits_{t-\tau}^t \frac{1}{\tau}\ln\|C\|d\xi - \int\limits_0^{t-\tau} \beta(\xi)d\xi \biggr)\Biggr) + \|C^2\|\Phi_1.$$

Тогда, учитывая обозначение (2.4.23), в случае $l = 1$ имеем

$$\|y(t)\| \le 2\Phi_2 \exp\left(-\int\limits_0^t \hat{\beta}(\xi)d\xi \right) + \|C^2\|\Phi_1$$

$$\le \Phi_2\left(1+\frac{t}{\tau}\right)\exp\left(-\int\limits_0^t \hat{\beta}(\xi)d\xi \right) + \|C^2\|\Phi_1.$$

Из полученной оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.4.3) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$, и при $k = 1$ неравенство (2.4.34) доказано. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$. Поэтому, если $t \in [2\tau, 3\tau]$, то выполнены оценки (2.4.31), (2.4.32). Следовательно, учитывая неравенство (2.4.4), получаем оценку (2.4.28) при $t \in [2\tau, t_3)$, где $t_3 = \min\{3\tau, t'\}$. Отсюда, как и ранее, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t, y)$, получим неравенство

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \left(\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi \right) + \|C\|\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-\tau} \gamma(\xi)d\xi \right) \right.$$

$$\left. +\|C^2\|\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^{t-2\tau} \gamma(\xi)d\xi \right)\right) + \|C^3\|\Phi_1. \qquad (2.4.35)$$

Тогда, учитывая, что

$$\|C^j\| \le \exp\left(\int\limits_{t-j\tau}^t \frac{1}{\tau}\ln\|C\|d\xi \right)$$

и определение (2.4.23), получим

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \left(\exp\left(-\int\limits_0^t \beta(\xi)d\xi \right) + \exp\left(\int\limits_{t-\tau}^t \frac{1}{\tau} \ln\|C\| d\xi - \int\limits_0^{t-\tau} \beta(\xi)d\xi \right) \right.$$

$$\left. + \exp\left(\int\limits_{t-2\tau}^t \frac{1}{\tau} \ln\|C\| d\xi - \int\limits_0^{t-2\tau} \beta(\xi)d\xi \right) \right) + \|C^3\|\Phi_1$$

$$\le \Phi_2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \exp\left(-\int\limits_0^t \hat\beta(\xi)d\xi \right) + \|C^3\|\Phi_1.$$

Из полученной оценки вытекает, что решение начальной задачи (2.4.3) определено на всем отрезке $[0, 3\tau]$, т. е. $t' > 3\tau$, и при $k = 2$ неравенство (2.4.34) доказано. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 3\tau]$.

Проводя аналогичные рассуждения, при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_2$ можно получить оценку (2.4.34) на любом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k \ge 3$. Следовательно, решение задачи (2.4.3) определено на всей правой полуоси $\{t \ge 0\}$.

Покажем, что выполнено неравенство (2.4.24). Действительно, для второго слагаемого в правой части (2.4.34) при $l = 1$, очевидно, имеем

$$\|C^{k+1}\|\Phi_1 \le \exp\left(\frac{t}{\tau}\ln\|C\|\right)\Phi_1 \le \exp\left(-\int\limits_0^t \hat\beta(\xi)d\xi \right)\Phi_1.$$

Отсюда и из (2.4.34) непосредственно вытекает (2.4.24).

Аналогичным образом, учитывая условия на $\|C^l\|$, как при доказательстве теоремы 2.2.3, можно установить разрешимость задачи (2.4.3) в целом и оценку (2.4.24) в случае $l \ge 2$.

Теорема 2.4.3 доказана.

Доказательство теоремы 2.4.4. Покажем, что при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ решение начальной задачи (2.4.3) определено на всей полуоси $\{t \ge 0\}$.

Как уже отмечалось, если $\Phi_1 < \rho$ и $V(0, \varphi) < R$, то независимо от величины $\|C^l\|$ решение задачи (2.4.3) определено на всем отрезке $[0, \tau]$ и на нем выполнено неравенство (2.4.30). Поэтому

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\beta^- t} + \|C\|\Phi_1, \qquad t \in [0, \tau].$$

Отсюда при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ имеем $\|y(t)\| < \rho$, $t \in [0, \tau]$. Следовательно, как при доказательстве теоремы 2.4.2 получаем оценку (2.4.33) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Но тогда из этой оценки вытекает, что решение определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$. А в силу условия (2.4.25) получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \left(e^{-\beta^- t} + \|C\| e^{-\beta^-(t-\tau)} \right) + \|C^2\| \Phi_1, \quad t \in [\tau, 2\tau]. \qquad (2.4.36)$$

Из неравенства (2.4.36) в случае $l = 1$ на отрезке $[\tau, 2\tau]$ будем иметь

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \|C\| e^{-\beta^-(t-\tau)} \left(1 + \left(\|C\| e^{\beta^- \tau} \right)^{-1} \right) + \|C^2\| \Phi_1$$

$$\le \Phi_2 \|C\|^{\frac{t}{\tau}} \left(1 - \left(\|C\| e^{\beta^- \tau} \right)^{-1} \right)^{-1} + \|C\|^{\frac{t}{\tau}} \Phi_1.$$

А при $l \ge 2$, учитывая условие (2.4.25), очевидно, получаем

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\beta^- t} \left(1 + \|C\| e^{\beta^- \tau} \right) + \|C^2\| \Phi_1$$

$$\le \Phi_2 \|C^l\|^{\frac{t}{l\tau}} \left(1 - \left(\|C^l\| e^{l\beta^- \tau} \right)^{-1} \right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^- \tau} + \|C^2\| \Phi_1.$$

Поэтому, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$, то имеем $\|y(t)\| < \rho$, $t \in [0, 2\tau]$. Следовательно, как и при доказательстве предыдущей теоремы, на промежутке $t \in [2\tau, t_3)$, где $t_3 = \min\{3\tau, t'\}$ можно получить оценку (2.4.35). А из нее будет вытекать существование решения задачи (2.4.3) на всем отрезке $[0, 3\tau]$, т. е. $t' > 3\tau$.

Аналогичными рассуждениями устанавливается разрешимость начальной задачи (2.4.3) при $\varphi(t) \in \mathcal{E}_3$ на всей полуоси $\{t \ge 0\}$, при этом на каждом промежутке $[k\tau, (k+1)\tau)$, $k \in \mathbb{N}$, справедлива оценка

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{-\beta^-(t-j\tau)} + \|C^{k+1}\| \Phi_1. \qquad (2.4.37)$$

Из этой оценки вытекает неравенство (2.4.26). Действительно, будем рассматривать неравенство (2.4.37) на промежутках $[k\tau, (k+1)\tau)$, при этом $ml \le k \le (m+1)l - 1$, $m \in \mathbb{N}$. По условию (2.4.25) $\|C^l\| e^{l\beta^- \tau} > 1$, поэтому

$$\sum_{j=0}^{k}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}\le\left(1+\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}+\dots+\|C^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$\le\|C^l\|^m e^{ml\beta^-\tau}\left(1-\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}.$$

А поскольку $ml\tau\le t<(m+1)l\tau$, то для первого слагаемого в правой части (2.4.37) получаем

$$\Phi_2\sum_{j=0}^{k}\|C^j\|e^{-\beta^-(t-j\tau)}$$

$$\le\Phi_2\|C^l\|^{\frac{t}{l\tau}}\left(1-\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}$$

$$=\Phi_2\left(1-\left(\|C^l\|e^{l\beta^-\tau}\right)^{-1}\right)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\beta^-\tau}\right)\exp\left(\frac{t}{l\tau}\ln\|C^l\|\right).\tag{2.4.38}$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в (2.4.37). При доказательстве теоремы 2.2.4 было показано, что

$$\|C^{k+1}\|\le\|C^l\|^{\frac{1}{l}-1}\max\left\{1,\|C\|,\dots,\|C^{l-1}\|\right\}\exp\left(\frac{t}{l\tau}\ln\|C^l\|\right)\tag{2.4.39}$$

для любого k. Следовательно, в силу (2.4.38), (2.4.39) из неравенства (2.4.37) вытекает (2.4.26).

Теорема 2.4.4 доказана.

Замечание 1. Если $C=0$, то утверждение теоремы 2.4.2 переходит в утверждение теоремы 1.4.5, при этом оценка (2.4.22) — в оценку (1.4.28).

Замечание 2. Если $q_1=q_2=0$ (линейный случай), утверждение теоремы 2.4.2 дает теорему 2.2.2, утверждение теоремы 2.4.3 — теорему 2.2.3, утверждение теоремы 2.4.4 — теорему 2.2.4.

2.5 Некоторые обобщения

В этом параграфе мы обсудим некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах.

Вначале отметим, что результаты, установленные в случае одного запаздывания, нетрудно распространить на системы с несколькими запаздываниями. Приведем некоторые результаты.

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau_1), \qquad t > 0, \quad (2.5.1)$$

где $A(t)$, $B_j(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, C — постоянная матрица размера $n \times n$, $\tau_j > 0$ — параметры запаздывания, $j = 1, \dots, m$, $\tau_1 > \tau_k > 0$, $k = 2, \dots, m$. Случай одного запаздывания ($m = 1$) был исследован в предыдущих параграфах. Поэтому всюду далее мы рассматриваем $m \geq 2$.

Теорема 2.5.1 *Предположим, что существует матрица $H(t)$, удовлетворяющая условиям* (1.2.2), *и матрицы $K_j(s)$ такие, что*

$$K_j(s) \in C^1[0,\tau_j], \quad K_j(s) = K_j^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}K_j(s) < 0, \quad s \in [0,\tau_j], \quad (2.5.2)$$

$j = 1, \dots, m$, *и матрица*

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix},$$

где

$$Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \sum_{j=1}^{m} K_j(0),$$

$$Q_{12}(t) = \frac{d}{dt}H(t)C - H(t)B_1(t) + A^*(t)H(t)C,$$

$$Q_{13}(t) = \begin{pmatrix} -H(t)B_2(t) & \cdots & -H(t)B_m(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.5.3)$$

$$Q_{22}(t) = -C^*\frac{d}{dt}H(t)C + C^*H(t)B_1(t) + B_1^*(t)H(t)C + K_1(\tau_1),$$

$$Q_{23}(t) = \begin{pmatrix} C^*H(t)B_2(t) & \cdots & C^*H(t)B_m(t) \end{pmatrix},$$

$$Q_{33}(t) = \begin{pmatrix} K_2(\tau_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_m(\tau_m) \end{pmatrix},$$

положительно определена при $t \in [0, T]$. *Тогда нулевое решение системы* (2.5.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.5.1):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau_1), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau_1, 0])$ — заданная вектор-функция. В предположении, что выполнены условия теоремы 2.5.1, ниже мы установим оценки решений начальной задачи (2.5.4), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов мы введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -\sum_{j=1}^{m} K_j(0),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7). Тогда, как уже отмечалось ранее, из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K_j(s)$, $j = 1, \dots, m$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.5.1, рассмотрим на решении $y(t)$ задачи (2.5.4) функционал

$$\begin{aligned} V(t, y) = &\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1))\rangle \\ &+ \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle ds, \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

введенный в работе [115]. Очевидно, этот функционал является обобщением функционала (2.2.5) на случай нескольких запаздываний. Определим

$$V(0, \varphi) = \langle H(0)(\varphi(0) - C\varphi(-\tau_1)), (\varphi(0) - C\varphi(-\tau_1))\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{-\tau_j}^{0}\langle K_j(-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds, \tag{2.5.6}$$

$$P(t)=-\frac{d}{dt}H(t)-H(t)A(t)-A^*(t)H(t)-\sum_{j=1}^{m}K_j(0)$$

$$-\left(H(t)A(t)C+\sum_{j=1}^{m}K_j(0)C+H(t)B_1(t)\right)\left[K_1(\tau_1)-D^*\sum_{j=1}^{m}K_j(0)D\right]^{-1}$$

$$\times\left(C^*A^*(t)H(t)+\sum_{j=1}^{m}C^*K_j(0)+B_1^*(t)H(t)\right)$$

$$-\sum_{j=2}^{m}H(t)B_j(t)K_j^{-1}(\tau_j)B_j^*(t)H(t). \tag{2.5.7}$$

Нетрудно проверить, что матрица $P(t)$ является положительно определенной, если матрица $Q(t)$ является положительно определенной (подробно см. ниже). Обозначим через $h_{\min}(t)$, $p_{\min}(t)$ минимальные собственные значения матриц $H(t)$, $P(t)$ соответственно. Поскольку $H(t)>0$, $P(t)>0$, то $h_{\min}(t)>0$, $p_{\min}(t)>0$. Пусть $k_j>0$ — максимальное число такое, что

$$\frac{d}{ds}K_j(s)+k_jK_j(s)\le 0,\quad s\in[0,\tau_j],\quad j=1,\dots,m. \tag{2.5.8}$$

Обозначим

$$\gamma(t)=\min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|},\ k_1,\dots,\ k_m\right\}, \tag{2.5.9}$$

$$\Phi_1=\max_{t\in[-\tau_1,0]}\|\varphi(t)\|,\quad \Phi_2=\max_{t\in[0,T]}\sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}, \tag{2.5.10}$$

$$\beta(t)=\frac{\gamma(t)}{2},\quad \beta^+=\max_{t\in[0,T]}\beta(t),\quad \beta^-=\min_{t\in[0,T]}\beta(t). \tag{2.5.11}$$

Нетрудно показать, что спектр матрицы C принадлежит единичному кругу $\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|<1\}$, если матрица $Q(t)$ является положительно определенной (см. подобные рассуждения в параграфе 2.2). Тогда

$\|C^j\| \to 0$ при $j \to \infty$. Пусть l — минимальное натуральное число такое, что $\|C^l\| < 1$. В зависимости от величины $\|C^l\|$ ниже мы установим оценки решений начальной задачи (2.5.4), если

$$\|C^l\| < e^{-l\beta^+\tau_1}, \qquad e^{-l\beta^+\tau_1} \le \|C^l\| \le e^{-l\beta^-\tau_1}, \qquad e^{-l\beta^-\tau_1} < \|C^l\| < 1.$$

Теорема 2.5.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1 и*

$$\|C^l\| < e^{-l\beta^+\tau_1}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.5.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\Phi_2\big(1 - \|C^l\| e^{l\beta^+\tau_1}\big)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau_1}$$

$$+ \max\left\{\|C\| e^{\beta^+\tau_1}, \dots, \|C^l\| e^{l\beta^+\tau_1}\right\} \Phi_1\Bigg] e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi}, \qquad t > 0,$$

где Φ_1, Φ_2, $\beta(t)$, β^+ *определены в* (2.5.10), (2.5.11).

Теорема 2.5.3 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1 и*

$$e^{-l\beta^+\tau_1} \le \|C^l\| \le e^{-l\beta^-\tau_1}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.5.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \left[\Phi_2 \left(1 + \frac{t}{l\tau_1}\right) \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^+\tau_1}\right.$$

$$\left. + \max\left\{1, \|C\| e^{\beta^+\tau_1}, \dots, \|C^{l-1}\| e^{(l-1)\beta^+\tau_1}\right\} \Phi_1\right] e^{-\int\limits_0^t \sigma(\xi)\,d\xi}, \qquad t > 0,$$

где Φ_1, Φ_2, $\beta(t)$, β^+, β^- *определены в* (2.5.10), (2.5.11),

$$\sigma(t) = \min\left\{\beta(t),\ -\frac{1}{l\tau_1} \ln \|C^l\|\right\}.$$

Теорема 2.5.4 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1 и*

$$e^{-l\beta^-\tau_1} < \|C^l\| < 1.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.5.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \left[\Phi_2 \left(1 - \left(\|C^l\| e^{l\beta^-\tau_1}\right)^{-1}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{l-1} \|C^j\| e^{j\beta^-\tau_1}\right.$$

$$\left. + \|C^l\|^{\frac{1}{l}-1} \max\left\{1, \|C\|, \dots, \|C^{l-1}\|\right\} \Phi_1 \right] \exp\left(\frac{t}{l\tau_1} \ln \|C^l\|\right), \qquad t > 0,$$

где Φ_1, Φ_2, β^- *определены в* (2.5.10), (2.5.11).

Очевидно, утверждение теоремы 2.5.1 сразу следует из теорем 2.5.2–2.5.4.

Для доказательства этих теорем мы установим несколько предварительных утверждений. Вначале сформулируем вспомогательную лемму из теории матриц, которая будет в дальнейшем использоваться.

Лемма 2.5.1 *Пусть*

$$R(t) = \begin{pmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & R_{13}(t) \\ R_{12}^*(t) & R_{22}(t) & R_{23}(t) \\ R_{13}^*(t) & R_{23}^*(t) & R_{33}(t) \end{pmatrix}, \qquad t \in [0, T],$$

— положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Тогда имеет место представление

$$R(t) = \begin{pmatrix} I & \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t) & R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t) \\ 0 & I & R_{23}(t)R_{33}^{-1}(t) \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} R_{11}(t) - \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) - R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{R}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & R_{33}(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) & I & 0 \\ R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t) & R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t) & I \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{R}_1(t) = R_{12}(t) - R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t), \quad \widetilde{R}_2(t) = R_{22}(t) - R_{23}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{23}^*(t),$$

причем матрицы

$$R_{11}(t) - \widetilde{R}_1(t)\widetilde{R}_2^{-1}(t)\widetilde{R}_1^*(t) - R_{13}(t)R_{33}^{-1}(t)R_{13}^*(t), \quad \widetilde{R}_2(t), \quad \text{и} \quad R_{33}(t)$$

являются положительно определенными.

Лемма 2.5.2 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Тогда для решения начальной задачи* (2.5.4) *имеет место оценка*

$$\|y(t) - Cy(t-\tau_1)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\int_0^t \frac{\gamma(\xi)}{2\|H(\xi)\|} d\xi\right), \quad t > 0, \tag{2.5.12}$$

где $V(0,\varphi)$, $\gamma(t)$ *определены в* (2.5.6), (2.5.9) *соответственно,* $h_{\min}(t)$ *— минимальмальное собственное значение матрицы* $H(t)$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.5.4). Используя матрицы $H(t)$ и $K_j(s)$, $j = 1, \dots, m$, указанные выше, рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2.5.5) на решении. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle \frac{d}{dt}H(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)\left(A(t)y(t) + \sum_{j=1}^m B_j(t)y(t-\tau_j)\right), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), \left(A(t)y(t) + \sum_{j=1}^m B_j(t)y(t-\tau_j)\right) \right\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^m \langle K_j(0)y(t), y(t)\rangle - \sum_{j=1}^m \langle K_j(\tau_j)y(t-\tau_j), y(t-\tau_j)\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_{t-\tau_j}^t \left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Используя матрицу $Q(t)$ с элементами (2.5.3), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds, \qquad (2.5.13)$$

где

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t-\tau_2) \\ \vdots \\ y(t-\tau_m) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части (2.5.13). Поскольку

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & C & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

то

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\equiv \left\langle S(t)\begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle, \qquad (2.5.14)$$

где

$$S(t) = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ C^* & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} Q(t) \begin{pmatrix} I & C & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) & S_{13}(t) \\ S_{12}^*(t) & S_{22}(t) & S_{23}(t) \\ S_{13}^*(t) & S_{23}^*(t) & S_{33}(t) \end{pmatrix}, \qquad (2.5.15)$$

$$S_{11}(t) = Q_{11}(t), \quad S_{12}(t) = Q_{12}(t) + Q_{11}(t)C, \quad S_{13}(t) = Q_{13}(t),$$

$$S_{22}(t) = C^*Q_{11}(t)C + Q_{12}^*(t)C + C^*Q_{12}(t) + Q_{22}(t),$$

$$S_{23}(t) = Q_{23}(t) + C^*Q_{13}(t), \quad S_{33}(t) = Q_{33}(t).$$

Учитывая вид элементов матрицы $Q(t)$ в (2.5.3), имеем

$$S_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \sum_{j=1}^{m} K_j(0),$$

$$\begin{gathered} S_{12}(t) = -H(t)A(t)C - \sum_{j=1}^{m} K_j(0)C - H(t)B_1(t), \\ S_{13}(t) = \begin{pmatrix} -H(t)B_2(t) & \cdots & -H(t)B_m(t) \end{pmatrix}, \\ S_{22}(t) = K_1(\tau_1) - C^* \sum_{j=1}^{m} K_j(0)C, \end{gathered} \tag{2.5.16}$$

$$S_{23}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad S_{33}(t) = \begin{pmatrix} K_2(\tau_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & K_m(\tau_m) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица $Q(t)$ положительно определена тогда и только тогда, когда матрица $S(t)$ положительно определена. Поскольку $S_{23}(t)$ — нулевая матрица, из леммы 2.5.1 следует, что

$$S(t) = \begin{pmatrix} I & S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t) & S_{13}(t)S_{33}^{-1}(t) \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} S_{11}(t) - S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{12}^*(t) - S_{13}(t)S_{33}^{-1}(t)S_{13}^*(t) & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}(t) & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ S_{22}^{-1}(t)S_{12}^*(t) & I & 0 \\ S_{33}^{-1}(t)S_{13}^*(t) & 0 & I \end{pmatrix},$$

причем матрицы

$$P(t) = S_{11}(t) - S_{12}(t)S_{22}^{-1}(t)S_{12}^*(t) - S_{13}(t)S_{33}^{-1}(t)S_{13}^*(t), \ S_{22}(t) \text{ и } S_{33}(t)$$

являются положительно определенными. Следовательно,

$$\left\langle S(t) \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq \langle P(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \rangle . \qquad (2.5.17)$$

Учитывая (2.5.16), матрица $P(t)$ имеет вид (2.5.7). Следовательно, в силу (2.5.17), из (2.5.14) получаем

$$-\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\leq - \langle P(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \rangle$$

$$\leq -p_{\min}(t)\|y(t) - Cy(t-\tau_1)\|^2, \qquad (2.5.18)$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Используя матрицу $H(t)$, имеем

$$\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2 \geq \frac{1}{\|H(t)\|} \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \rangle .$$

В силу (2.5.18) из (2.5.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int_{t-\tau_j}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Используя (2.5.8), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)(y(t) - Cy(t-\tau_1)), (y(t) - Cy(t-\tau_1)) \rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{m} k_j \int_{t-\tau_j}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s) \rangle ds.$$

Принимая во внимание определение функционала (2.5.5), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k_1, \ldots, k_m\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \leq V(0,\varphi) \exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi \right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (2.5.5). Очевидно,

$$\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}(t)} \left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\right\rangle,$$

где $h_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда с учетом определения функционала (2.5.5)

$$\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\| \le \sqrt{\frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)}} \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\gamma(\xi)}{2} d\xi\right).$$

Лемма 2.5.2 доказана.

Лемма 2.5.3 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Тогда для решения начальной задачи* (2.5.4) *на каждом промежутке* $t \in [k\tau,(k+1)\tau)$, $k=0,1,\dots$, *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau_1} \beta(\xi)\,d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1, \qquad (2.5.19)$$

где Φ_1, Φ_2, $\beta(t)$ *определены в* (2.5.10), (2.5.11).

Доказательство. В силу леммы 2.5.2 для решения начальной задачи (2.5.4) имеет место оценка (2.5.12). Принимая во внимание обозначения (2.5.10) и (2.5.11), получаем

$$\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi}, \qquad t>0. \qquad (2.5.20)$$

Очевидно, при $t \in [0,\tau_1)$ имеем неравенство

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Cy(t-\tau_1)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|C\|\Phi_1,$$

что дает требуемое неравенство (2.5.19) при $k=0$.

Пусть $t \in [k\tau_1,(k+1)\tau_1)$, $k=1,2\dots$. Нетрудно выписать цепочку неравенств

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Cy(t-\tau_1)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|Cy(t-\tau_1)-C^2y(t-2\tau_1)\| + \|C^2y(t-2\tau_1)-C^3y(t-3\tau_1)\| + \dots$$

$$+\|C^k y(t-k\tau_1) - C^{k+1}y(t-(k+1)\tau_1)\| + \|C^{k+1}y(t-(k+1)\tau_1)\|$$

$$\le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \|C\|\,\|y(t-\tau_1) - Cy(t-2\tau_1)\|$$

$$+\|C^2\|\,\|y(t-2\tau_1) - Cy(t-3\tau_1)\| + \dots$$

$$+\|C^k\|\,\|y(t-k\tau_1) - Cy(t-(k+1)\tau_1)\| + \|C^{k+1}\|\,\|y(t-(k+1)\tau_1)\|.$$

В силу (2.5.20) приходим к неравенству

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 e^{-\int\limits_0^t \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2\|C\|e^{-\int\limits_0^{t-\tau_1} \beta(\xi)\,d\xi} + \Phi_2\|C^2\|e^{-\int\limits_0^{t-2\tau_1} \beta(\xi)\,d\xi} + \dots$$

$$+\Phi_2\|C^k\|e^{-\int\limits_0^{t-k\tau_1} \beta(\xi)\,d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1,$$

что дает требуемое неравенство (2.5.19).

Лемма 2.5.3 доказана.

Доказательство теорем 2.5.2–2.5.4. В случае одного запаздывания в параграфе 2.2 аналоги теорем 2.5.2–2.5.4 (см. теоремы 2.2.2–2.2.4) были подробно доказаны с использованием вспомогательных утверждений (см. леммы 2.2.1, 2.2.2). Используя леммы 2.5.2, 2.5.3 и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 2.2.2–2.2.4, мы получаем требуемые оценки решений начальной задачи (2.5.4).

Принимая во внимание доказательство леммы 2.5.2, мы можем переформулировать условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.5.1) следующим образом.

Теорема 2.5.5 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$, $K_j(s)$, $j = 1, \dots, m$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (2.5.2), *такие, что*

$$K_1(\tau_1) - C^* \sum_{j=1}^{m} K_j(0) C > 0$$

и матрица $P(t)$, *заданная в* (2.5.7), *положительно определена при* $t \in [0, T]$. *Тогда нулевое решение системы* (2.5.1) *экспоненциально устойчиво.*

Пример. Рассмотрим систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B_1(t)y(t-\tau_1) + B_2(t)y(t-\tau_2) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau_1), \quad (2.5.21)$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} -10 + 0.2\cos t & 1 - 0.3\cos t \\ 2 + 0.5\cos t & -20 - 0.1\cos t \end{pmatrix},$$

$$B_1(t) = \begin{pmatrix} 0.1\sin t & 0.3\cos t \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B_2(t) = \begin{pmatrix} 0.5\sin 2t & 0 \\ -0.4\sin t & 0.2\cos t \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.1 \\ -0.05 & 0.11 \end{pmatrix}, \qquad \tau_1 = 2, \quad \tau_2 = 1.$$

В силу теоремы 2.5.5 мы можем гарантировать экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (2.5.21), если существуют матрицы $H(t)$, $K_1(s)$, $K_2(s)$, удовлетворяющие условиям (1.2.2), (2.5.2), такие, что

$$K_1(2) - C^* K_1(0) C - C^* K_2(0) C > 0$$

и матрица $P(t)$, заданная в (2.5.7), положительно определена при $t \in [0, 2\pi]$. Возьмем в качестве $H(t)$, $K_1(s)$, $K_2(s)$ следующие матрицы:

$$H(t) = \begin{pmatrix} 6 - 3.4\sin t & 1 - 2.3\sin t \\ 1 - 2.3\sin t & 8 + 2.2\sin t \end{pmatrix},$$

$$K_1(s) = e^{-0.07s} K_0, \quad K_2(s) = e^{-0.28s} K_0, \quad K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$2.38 \le h_{\min}(t) \le 5.65, \qquad 8.4 \le \|H(t)\| \le 11.37.$$

Очевидно, матрица

$$K_1(2) - C^* K_1(0) C - C^* K_2(0) C = \begin{pmatrix} 0.8305582 & -0.002 \\ -0.002 & 1.6703165 \end{pmatrix}$$

является положительно определенной. Вычисляя $P(t)$, мы получаем, что

$$3.58 \le p_{\min}(t) \le 41.86.$$

Следовательно, нулевое решение системы (2.5.21) экспоненциально устойчиво.

Чтобы оценить скорость убывания решений системы (2.5.21) на бесконечности, нам нужно найти функцию $\gamma(t)$, заданную в (2.5.9). Очевидно, в нашем случае

$$k_1 = 0.07, \quad k_2 = 0.28, \quad \gamma(t) = k_1.$$

Тогда

$$\beta(t) = \beta^+ = \beta^- = k_1/2 = 0.035.$$

Поскольку $\|C\| < e^{-\beta^+\tau_1}$, в силу теоремы 2.5.2 имеем оценку

$$\|y(t)\| \le c \max_{-2\le s\le 0} \|y(s)\| e^{-0.035\,t}, \qquad c > 0, \quad t \ge 0.$$

Рассмотрим теперь нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau_1)\\ &+ F(t, y(t), y(t-\tau_1), \ldots, y(t-\tau_m)), \qquad t > 0, \quad (2.5.22)\end{aligned}$$

где $A(t)$, $B_j(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, C — постоянная матрица размера $n \times n$, $\tau_j > 0$ — параметр запаздывания, $j = 1, \ldots, m$, $\tau_1 > \tau_k > 0$, $k = 2, \ldots, m$. Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t, u, v_1, \ldots, v_m)$ липшицева по u на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u, v_1, \ldots, v_m)\| \le q_0\|u\| + \sum_{j=1}^{m} q_j\|v_j\|, \qquad t \ge 0, \qquad (2.5.23)$$

$$u,\ v_j \in \mathbb{R}^n, \quad q_j \ge 0, \quad j = 0, \ldots, m.$$

Используя результаты, установленные выше для линейных систем вида (2.5.1), мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.5.22) и получим оценки, характеризующие скорость убывания решений системы (2.5.22) на бесконечности.

Предполагая, что выполнены условия теоремы 2.5.1, определим функцию

$$q(t) = \left(q_0 + \sqrt{q_0^2 + (q_0\|C\| + q_1)^2 + \sum_{j=2}^{m} q_j^2} \right) \|H(t)\| \qquad (2.5.24)$$

и матрицу

$$S^q(t) = S(t) - q(t)I.$$

Теорема 2.5.6 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.1. Если матрица $S^q(t)$ положительно определена при $t \in [0,T]$, тогда нулевое решение системы (2.5.22) экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (2.5.22):

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + C\frac{d}{dt}y(t-\tau_1) \\
&\qquad\quad + F(t, y(t), y(t-\tau_1), \dots, y(t-\tau_m)), \qquad t > 0, \\
&y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_1, 0], \\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned}
\tag{2.5.25}
$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Предполагая, что выполнены условия теоремы 2.5.6 (т. е. матрица $S^q(t)$ положительно определена), ниже мы установим оценки, характеризующие скорость экспоненциального убывания решений начальной задачи (2.5.25) при $t \to \infty$.

Введем матрицу

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \sum_{j=1}^{m} K_j(0) - q(t)I \\
- \left(H(t)A(t)C + \sum_{j=1}^{m} K_j(0)C + H(t)B_1(t) \right) \\
\times \left[K_1(\tau_1) - C^* \sum_{j=1}^{m} K_j(0)C - q(t)I \right]^{-1} \\
\times \left(C^*A^*(t)H(t) + \sum_{j=1}^{m} C^*K_j(0) + B_1^*(t)H(t) \right) \\
- \sum_{j=2}^{m} H(t)B_j(t)\left[K_j(\tau_j) - q(t)I\right]^{-1} B_j^*(t)H(t).
\end{aligned}
\tag{2.5.26}
$$

Нетрудно проверить, что матрица $\widetilde{P}(t)$ является положительно определенной, если матрица $S^q(t)$ является положительно определенной (подробно см. ниже). Обозначим через $\widetilde{p}_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $\widetilde{P}(t)$,

$$\widetilde{\gamma}(t) = \min\left\{\frac{\widetilde{p}_{\min}(t)}{\|H(t)\|},\ k_1, \dots,\ k_m\right\}, \tag{2.5.27}$$

$$\widetilde{\beta}(t) = \frac{\widetilde{\gamma}(t)}{2}, \quad \widetilde{\beta}^+ = \max_{t\in[0,T]} \widetilde{\beta}(t), \quad \widetilde{\beta}^- = \min_{t\in[0,T]} \widetilde{\beta}(t). \tag{2.5.28}$$

Как отмечалось выше, спектр матрицы C принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$, если выполнены условия теоремы 2.5.1. Тогда $\|C^j\| \to 0$ при $j \to \infty$. Пусть l — минимальное натуральное число такое, что $\|C^l\| < 1$. В зависимости от величины $\|C^l\|$ ниже мы установим оценки решений начальной задачи (2.5.25), если

$$\|C^l\| < e^{-l\widetilde{\beta}^+\tau_1}, \qquad e^{-l\widetilde{\beta}^+\tau_1} \le \|C^l\| \le e^{-l\widetilde{\beta}^-\tau_1}, \qquad e^{-l\widetilde{\beta}^-\tau_1} < \|C^l\| < 1.$$

Теорема 2.5.7 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.6 и*

$$\|C^l\| < e^{-l\widetilde{\beta}^+\tau_1}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.5.25) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\Phi_2\big(1 - \|C^l\|e^{l\widetilde{\beta}^+\tau_1}\big)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\widetilde{\beta}^+\tau_1}$$

$$+ \max\left\{\|C\|e^{\widetilde{\beta}^+\tau_1}, \dots, \|C^l\|e^{l\widetilde{\beta}^+\tau_1}\right\}\Phi_1\Bigg] e^{-\int_0^t \widetilde{\beta}(\xi)\,d\xi}, \qquad t > 0,$$

где Φ_1, Φ_2, $\widetilde{\beta}(t)$, $\widetilde{\beta}^+$ *определены в* (2.5.10), (2.5.28).

Теорема 2.5.8 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.6 и*

$$e^{-l\widetilde{\beta}^+\tau_1} \le \|C^l\| \le e^{-l\widetilde{\beta}^-\tau_1}.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.5.25) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\Phi_2\left(1 + \frac{t}{l\tau_1}\right)\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\widetilde{\beta}^+\tau_1}$$

$$+\max\left\{1, \|C\|e^{\widetilde{\beta}^{+}\tau_1}, \ldots, \|C^{l-1}\|e^{(l-1)\widetilde{\beta}^{+}\tau_1}\right\}\Phi_1\Bigg] e^{-\int\limits_0^t \widetilde{\sigma}(\xi)\,d\xi}, \qquad t > 0,$$

где Φ_1, Φ_2, $\widetilde{\beta}(t)$, $\widetilde{\beta}^{+}$, $\widetilde{\beta}^{-}$ *определены в* (2.5.10), (2.5.28),

$$\widetilde{\sigma}(t) = \min\left\{\widetilde{\beta}(t),\ -\frac{1}{l\tau_1}\ln\|C^l\|\right\}.$$

Теорема 2.5.9 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.6 и*

$$e^{-l\widetilde{\beta}^{-}\tau_1} < \|C^l\| < 1.$$

Тогда для решения начальной задачи (2.5.25) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Bigg[\Phi_2\|C^l\|e^{l\widetilde{\beta}^{-}\tau_1}\left(\|C^l\|e^{l\widetilde{\beta}^{-}\tau_1} - 1\right)^{-1}\sum_{j=0}^{l-1}\|C^j\|e^{j\widetilde{\beta}^{-}\tau_1}$$

$$+\|C^l\|^{\frac{1}{l}-1}\max\left\{1, \|C\|, \ldots, \|C^{l-1}\|\right\}\Phi_1\Bigg]\exp\left(\frac{t}{l\tau_1}\ln\|C^l\|\right), \qquad t > 0,$$

где Φ_1, Φ_2, $\widetilde{\beta}^{-}$ *определены в* (2.5.10), (2.5.28).

Очевидно, утверждение теоремы 2.5.6 сразу следует из теорем 2.5.7–2.5.9.

Для доказательства этих теорем мы установим несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.5.4 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.6. Тогда для решения начальной задачи* (2.5.25) *имеет место оценка*

$$\|y(t) - Cy(t-\tau_1)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}\exp\left(-\int\limits_0^t \frac{\widetilde{\gamma}(\xi)}{2}d\xi\right),\ t > 0, \qquad (2.5.29)$$

где $V(0,\varphi)$ *и* $\widetilde{\gamma}(t)$ *определены в* (2.5.5) *и* (2.5.27) *соответственно,* $h_{\min}(t) > 0$ *— минимальное собственное значение матрицы* $H(t)$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (2.5.25). Как выше, рассмотрим функционал Ляпунова – Красовского (2.5.5) на решении. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv \left\langle \frac{d}{dt}H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\left(A(t)y(t)+\sum_{j=1}^{m}B_j(t)y(t-\tau_j)\right),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),\left(A(t)y(t)+\sum_{j=1}^{m}B_j(t)y(t-\tau_j)\right)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m)),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m))\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\langle K_j(0)y(t),y(t)\rangle-\sum_{j=1}^{m}\langle K_j(\tau_j)y(t-\tau_j),y(t-\tau_j)\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds.$$

Используя матрицу $Q(t)$ с элементами (2.5.3), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\equiv-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau_1)\\ z(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau_1)\\ z(t)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m)),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m))\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds,$$

где

$$z(t)=\begin{pmatrix} y(t-\tau_2)\\ \vdots\\ y(t-\tau_m)\end{pmatrix}.$$

В силу (2.5.14) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \equiv -\left\langle S(t)\begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m)),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m))\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds, \qquad (2.5.30)$$

где элементы матрицы $S(t)$ заданы в (2.5.16).

Рассмотрим второе и третье слагаемые в правой части (2.5.30). В силу (2.5.23) имеем

$$J_1(t)=\langle H(t)F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m)),(y(t)-Cy(t-\tau_1))\rangle$$

$$+\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)),F(t,y(t),y(t-\tau_1),\dots,y(t-\tau_m))\rangle$$

$$\le 2\|H(t)\|\left(q_0\|y(t)\|+\sum_{j=1}^{m}q_j\|y(t-\tau_j)\|\right)\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|$$

$$\le 2q_0\|H(t)\|\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2$$

$$+2(q_0\|C\|+q_1)\|H(t)\|\|y(t-\tau_1)\|\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|$$

$$+\sum_{j=2}^{m}2q_j\|H(t)\|\|y(t-\tau_j)\|\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|. \qquad (2.5.31)$$

Покажем, что справедливо неравенство

$$J_1(t)\le q(t)\left(\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2+\sum_{j=1}^{m}\|y(t-\tau_j)\|^2\right), \qquad (2.5.32)$$

где функция $q(t)$ определена в (2.5.24). Обозначим через $J_2(t)$ правую часть неравенства (2.5.31), которую можно записать следующим образом:

$$J_2(t)=\|H(t)\|\left\langle V_m\begin{pmatrix} \|y(t)-Cy(t-\tau_1)\| \\ \|y(t-\tau_1)\| \\ \|y(t-\tau_2)\| \\ \vdots \\ \|y(t-\tau_m)\| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \|y(t)-Cy(t-\tau_1)\| \\ \|y(t-\tau_1)\| \\ \|y(t-\tau_2)\| \\ \vdots \\ \|y(t-\tau_m)\| \end{pmatrix}\right\rangle,$$

где

$$V_m = \begin{pmatrix} 2q_0 & q_0\|C\| + q_1 & q_2 & \cdots & q_m \\ q_0\|C\| + q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_m & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\det(V_m - \lambda I) = (-\lambda)^{m+1} \left[\lambda^2 - 2q_0\lambda - (q_0\|C\| + q_1)^2 - q_2^2 - \cdots - q_m^2\right].$$

Собственные значения матрицы V_m имеют вид

$$\lambda_1 = q_0 + \sqrt{q_0^2 + (q_0\|C\| + q_1)^2 + \sum_{j=2}^{m} q_j^2},$$

$$\lambda_2 = q_0 - \sqrt{q_0^2 + (q_0\|C\| + q_1)^2 + \sum_{j=2}^{m} q_j^2}, \qquad \lambda_3 = \cdots = \lambda_{m+1} = 0.$$

Очевидно, λ_1 является максимальным собственным значением. Следовательно,

$$J_2(t) \le \lambda_1 \|H(t)\| \left(\|y(t) - Cy(t-\tau_1)\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \|y(t-\tau_j)\|^2 \right),$$

что дает оценку (2.5.32).

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle S^q(t) \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) - Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{t-\tau_j}^{t} \left\langle \frac{d}{dt} K_j(t-s) y(s), y(s) \right\rangle ds. \qquad (2.5.33)$$

В силу условий теоремы 2.5.6 матрица $S^q(t)$ является эрмитовой положительно определенной. Поскольку $S_{23}(t)$ — нулевая матрица, то в силу леммы 2.5.1 получаем

$$S^q(t) = \begin{pmatrix} I & S_{12}(t)(S_{22}(t)-q(t)I)^{-1} & S_{13}(t)(S_{33}(t)-q(t)I)^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \widetilde{P}(t) & 0 & 0 \\ 0 & S_{22}(t)-q(t)I & 0 \\ 0 & 0 & S_{33}(t)-q(t)I \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ (S_{22}(t)-q(t)I)^{-1}S_{12}^*(t) & I & 0 \\ (S_{33}(t)-q(t)I)^{-1}S_{13}^*(t) & 0 & I \end{pmatrix},$$

где

$$\widetilde{P}(t) = S_{11}(t) - q(t)I - S_{12}(t)(S_{22}(t)-q(t)I)^{-1}S_{12}^*(t)$$
$$-S_{13}(t)(S_{33}(t)-q(t)I)^{-1}S_{13}^*(t),$$

причем матрицы

$$\widetilde{P}(t), \quad S_{22}(t)-q(t)I \quad \text{и} \quad S_{33}(t)-q(t)I$$

являются положительно определенными. Следовательно,

$$\left\langle S^q(t)\begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t)-Cy(t-\tau_1) \\ y(t-\tau_1) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq \left\langle \widetilde{P}(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)), (y(t)-Cy(t-\tau_1))\right\rangle$$

$$\geq \widetilde{p}_{\min}(t)\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2, \tag{2.5.34}$$

где $\widetilde{p}_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $\widetilde{P}(t)$. С учетом (2.5.16) матрица $\widetilde{P}(t)$ имеет вид (2.5.26). Следовательно, в силу (2.5.34) из (2.5.33) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\widetilde{p}_{\min}(t)\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Используя матрицу $H(t)$, имеем

$$\|y(t)-Cy(t-\tau_1)\|^2 \geq \frac{1}{\|H(t)\|} \left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)), (y(t)-Cy(t-\tau_1)) \right\rangle.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{\widetilde{p}_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \left\langle H(t)(y(t)-Cy(t-\tau_1)), (y(t)-Cy(t-\tau_1)) \right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 2.5.2, мы получаем неравенство (2.5.29).

Лемма доказана.

Лемма 2.5.5 *Пусть выполнены условия теоремы 2.5.6. Тогда для решения начальной задачи* (2.5.25) *на каждом промежутке* $t \in [k\tau_1, (k+1)\tau_1)$, $k = 0, 1, \dots$, *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \sum_{j=0}^{k} \|C^j\| e^{-\int\limits_0^{t-j\tau_1} \widetilde{\beta}(\xi)\, d\xi} + \|C^{k+1}\|\Phi_1,$$

где Φ_1, Φ_2, $\widetilde{\beta}(t)$ *определены в* (2.5.10), (2.5.28).

Доказательство. Используя лемму 2.5.4, эта лемма доказывается по той же схеме, что лемма 2.5.3.

Доказательство теорем 2.5.7–2.5.9. В случае одного запаздывания в параграфе 2.2 аналоги теорем 2.5.7–2.5.9 (см. теоремы 2.2.2–2.2.4) были подробно доказаны с использованием вспомогательных утверждений (см. леммы 2.2.1, 2.2.2). Используя леммы 2.5.4, 2.5.5 и повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теорем 2.2.2–2.2.4, мы получаем требуемые оценки решений начальной задачи (2.5.25).

Принимая во внимание доказательство леммы 2.5.4, мы можем переформулировать условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (2.5.22) следующим образом.

Теорема 2.5.10 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$, $K_j(s)$, $j = 1, \dots, m$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (2.5.2), *такие, что матрицы*

$$K_1(\tau_1) - C^* \sum_{j=1}^{m} K_j(0) C - q(t) I, \qquad K_j(\tau_j) - q(t) I, \quad j = 2, \dots, m,$$

и матрица $\widetilde{P}(t)$, *заданная в* (2.5.26), *положительно определены при* $t \in [0, T]$. *Тогда нулевое решение системы* (2.5.22) *экспоненциально устойчиво.*

Замечание 1. Из полученных результатов вытекают утверждения о робастной устойчивости для линейных систем вида (2.5.1). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= A(t) y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t) y(t - \tau_j) + C \frac{d}{dt} y(t - \tau_1) \\ &+ \Delta A(t) y(t) + \sum_{j=1}^{m} \Delta B_j(t) y(t - \tau_j), \end{aligned} \tag{2.5.35}$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B_j(t)$ — произвольные матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \le q_0, \qquad \|\Delta B_j(t)\| \le q_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t, u, v_1, \dots, v_m) = \Delta A(t) u + \sum_{j=1}^{m} \Delta B_j(t) v_j$$

удовлетворяет неравенству (2.5.23). Тогда теорема 2.5.6 дает условия робастной устойчивости для линейных систем вида (2.5.1). Из теорем 2.5.7–2.5.9 мы имеем оценки экспоненциального убывания решений систем вида (2.5.35).

Замечание 2. Как в случае одного запаздывания (см. параграф 2.3), справедливы аналоги теорем 2.3.3–2.3.5.

Полученные в этой главе результаты можно распространить на системы с переменным запаздыванием. Соответствующие утверждения вытекают из результатов, установленных для более общего класса систем нейтрального типа в главах 3, 4. В параграфе 3.5 рассмотрены системы с ограниченным запаздыванием, в главе 4 — системы с переменным запаздыванием, которое может быть неограниченным.

Глава 3

Экспоненциальная устойчивость решений систем нейтрального типа с периодической матрицей при производной

3.1 Постановка задачи и содержание главы

В этой главе мы рассмотрим классы систем дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, т. е.

$$A(t+T) \equiv A(t), \quad B(t+T) \equiv B(t), \quad C(t+T) \equiv C(t).$$

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения и получим оценки, характеризующие скорость убывания решений систем вида (3.1.1) при $t \to \infty$.

В параграфе 3.2 мы исследуем линейные системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0. \tag{3.1.2}$$

В параграфе 3.3 мы установим условия робастной устойчивости для линейных систем (3.1.2) и исследуем экспоненциальную устойчивость решений систем вида (3.1.1) при

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \qquad q_j \ge 0, \quad j=1,2,3.$$

В параграфе 3.4 мы исследуем экспоненциальную устойчивость решений нелинейных систем вида (3.1.1) при

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3\|u_3\|^{1+\omega_3},$$

$$q_j \ge 0, \quad \omega_j \ge 0, \quad j=1,2,3.$$

Мы установим оценки на области притяжения и оценки решений, характеризующие экспоненциальное убывание на бесконечности. В параграфе 3.5 содержатся некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах, на случай нескольких постоянных запаздываний и переменного ограниченного запаздывания.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [61, 62, 63, 64, 142].

3.2 Линейные системы нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t>0, \qquad (3.2.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n\times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau>0$ — параметр запаздывания. Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (3.2.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (3.2.1) на бесконечности.

Перейдем к формулировке и доказательству результатов параграфа. Начнем с наиболее простого по формулировке утверждения.

Теорема 3.2.1 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$, $K(s)$, удовлетворяющие условиям (1.2.2), (1.2.3), и матрица $L(s)$:*

$$L(s) \in C^1([0,\tau]), \quad L(s) = L^*(s) > 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) < 0, \quad s \in [0,\tau], \qquad (3.2.2)$$

такие, что матрица

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \qquad (3.2.3)$$

с элементами

$$\begin{aligned} Q_{11}(t) &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) \\ &\quad - K(0) - A^*(t)L(0)A(t), \\ Q_{12}(t) &= -H(t)B(t) - A^*(t)L(0)B(t), \\ Q_{13}(t) &= -H(t)C(t) - A^*(t)L(0)C(t), \\ Q_{22}(t) &= K(\tau) - B^*(t)L(0)B(t), \\ Q_{23}(t) &= -B^*(t)L(0)C(t), \\ Q_{33}(t) &= L(\tau) - C^*(t)L(0)C(t), \end{aligned} \qquad (3.2.4)$$

положительно определена при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (3.2.1) экспоненциально устойчиво.

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.2.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \qquad (3.2.5)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau,\infty))$ такую, что $y(t) \in C^1([(k-1)\tau, k\tau])$, $k = 0,1,2,\ldots$. Ниже мы установим оценки для решений начальной задачи (3.2.5), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова вида (1.2.7). Тогда, как уже отмечалось ранее, из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2.1, рассмотрим на решении задачи (3.2.5) функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t, y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \tag{3.2.6}$$

введенный в работе [61]. Определим

$$V(0, \varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int\limits_{-\tau}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds$$

$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} \left\langle L(-s)\frac{d}{ds}\varphi(s), \frac{d}{ds}\varphi(s)\right\rangle ds \tag{3.2.7}$$

и матрицу

$$P(t) = Q_{11}(t) - \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]$$

$$\times \Big[Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]^{-1}$$

$$\times \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]^* - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{13}^*(t), \tag{3.2.8}$$

где матрицы $Q_{ij}(t)$ заданы в (3.2.4). Нетрудно показать, что $P(t)$ положительно определена, если $Q(t)$ в (3.2.3) положительно определена (см.

лемму 2.5.1 в параграфе 2.5). Обозначим через $p_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, через $h_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

Теорема 3.2.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.2.1. Пусть k, $l > 0$ — максимальные числа такие, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) + lL(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau]. \tag{3.2.9}$$

Тогда для решения задачи (3.2.5) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0, \varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.2.10}$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0. \tag{3.2.11}$$

Замечание. Существование k, $l > 0$ в теореме 3.2.2 обеспечивается условиями на $K(s)$, $L(s)$, указанными в формулировке теоремы 3.2.1.

Очевидно, утверждение теоремы 3.2.1 непосредственно вытекает из оценки (3.2.10). Поэтому достаточно доказать теорему 3.2.2.

Доказательство теоремы 3.2.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.2.5). Используя матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, указанные выше, рассмотрим на решении функционал (3.2.6). Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t, y) \equiv \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$
$$+\left\langle H(t)\left(A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), y(t)\right\rangle$$
$$+\left\langle H(t)y(t), \left(A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$
$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\left\langle L(0)\frac{d}{dt}y(t),\frac{d}{dt}y(t)\right\rangle-\left\langle L(\tau)\frac{d}{dt}y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds$$

$$=\left\langle\frac{d}{dt}H(t)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t),\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\langle K(\tau)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\left\langle L(0)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),A(t)y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),B(t)y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)\left(A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\rangle$$

$$-\left\langle L(\tau)\frac{d}{dt}y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\rangle+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds$$

$$=-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \qquad (3.2.12)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (3.2.3).

Для дальнейших преобразований воспользуемся леммой 2.5.1 из параграфа 2.5. Тогда для матрицы $Q(t)$ в (3.2.3) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (3.2.8). Очевидно,

$$\langle P(t)y(t), y(t)\rangle \geq \langle p_{\min}(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Следовательно, из (3.2.12) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\langle p_{\min}(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

В силу (1.2.15) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя условие (3.2.9), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds - l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.2.6) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (3.2.7). Используя (1.2.15), с учетом определения функционала (3.2.6) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}(t)}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (3.2.10).

Теорема 3.2.2 доказана.

Из доказательства теоремы 3.2.2 вытекает следующая переформулировка теоремы 3.2.1.

Теорема 3.2.3 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (1.2.3), (3.2.2) *и такие, что*

$$P(t) > 0, \quad Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t) > 0, \quad Q_{33}(t) > 0, \quad t \in [0,T].$$

Тогда нулевое решение системы (3.2.1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство теоремы 3.2.3. В силу леммы 2.5.1 матрица $Q(t)$ в (3.2.3) положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$, $Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)$ и $Q_{33}(t)$ положительно определены.

Замечание. Отметим, что требование положительной определенности матрицы $Q_{33}(t)$ влечет условие принадлежности спектра матрицы $C(t)$ при всех $t \in [0,T]$ единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |\lambda| < 1\}$, что согласуется с результатами для уравнений нейтрального типа с постоянной матрицей C. Действительно, если $Q_{33}(t) > 0$, то в силу условий (3.2.2) на $L(s)$ имеем

$$L(0) - C^*(t)L(0)C(t) > Q_{33}(t) > 0, \quad t \in [0,T],$$

т. е. при каждом $t \in [0,T]$ матрица $L(0) = L^*(0) > 0$ удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$L(0) - C^*(t)L(0)C(t) = G(t)$$

с положительно определенной эрмитовой правой частью. Тогда согласно критерию Ляпунова [28] все собственные значения матрицы $C(t)$ при каждом $t \in [0,T]$ лежат в единичном круге.

Условия (1.2.3), (3.2.2) на $K(s)$, $L(s)$ можно ослабить, при этом отказаться от требования положительной определенности $Q(t)$ в (3.2.3).

Теорема 3.2.4 *Предположим, что существуют матрица $H(t)$, удовлетворяющая условию* (1.2.2), *и матрицы $K(s)$, $L(s)$:*

$$K(s) \in C^1([0,\tau]), \quad K(s) = K^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}K(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \quad (3.2.13)$$

$$L(s) \in C^1([0,\tau]), \quad L(s) = L^*(s) \geq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) \leq 0, \quad s \in [0,\tau], \quad (3.2.14)$$

такие, что для матрицы $Q(t)$ в (3.2.3) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle S(t)u, u\rangle, \ u, v, w \in \mathbb{C}^n, \ t \in [0,T], \quad (3.2.15)$$

где $S(t) > 0$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существуют k, $l > 0$, удовлетворяющие (3.2.9), *тогда нулевое решение системы* (3.2.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (3.2.5) *имеет место оценка* (3.2.10), *где*

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\}, \quad (3.2.16)$$

$s_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $S(t)$.

В оценке (3.2.10) в данном случае используются T-периодические продолжения функции $s_{\min}(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство теоремы 3.2.4. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2.4, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \leq -S(t) - K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7). Как отмечалось выше, тогда $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим $H(t)$ и $S(t)$, сохраняя то же обозначение, T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2.4, рассмотрим на решении задачи (3.2.5) функционал (3.2.6). Как при доказательстве теоремы 3.2.2, после дифференцирования получаем (3.2.12). В силу (3.2.15)

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt} y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt} y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq \langle S(t)y(t), y(t) \rangle \geq \langle s_{\min}(t)y(t), y(t) \rangle.$$

Используя (3.2.9) и (1.2.15), из (3.2.12) имеем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|} \langle H(t)y(t), y(t) \rangle$$

$$-k \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s) \rangle \, ds - l \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s) \frac{d}{ds} y(s), \frac{d}{ds} y(s) \right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.2.6) получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\gamma(t) V(t, y),$$

где $\gamma(t) > 0$ определено в (3.2.16). Отсюда, как при доказательстве теоремы 3.2.2, имеем неравенство (3.2.10).

Теорема 3.2.4 доказана.

Замечание. Условия теоремы 3.2.4 являются менее ограничительными, но условия теоремы 3.2.1 позволяют указать матрицу $S(t)$, используемую в теореме 3.2.4, в явном виде; например, $S(t) = P(t)$, где $P(t)$ определено в (3.2.8). Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Условие положительной определенности матрицы $S(t)$ в теореме 3.2.4 можно ослабить.

Теорема 3.2.5 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$,$K(s)$, $L(s)$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.21), (3.2.13), (3.2.14) *и такие, что для матрицы* $Q(t)$ *в* (3.2.3) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t)\langle H(t)u, u\rangle, \tag{3.2.17}$$

$$u, v, w \in \mathbb{C}^n, \qquad t \in [0, T],$$

где $p(t) \in C([0,T])$. *Если существуют* k, $l > 0$, *удовлетворяющие* (3.2.9), *и*

$$\int\limits_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \quad \textit{где} \quad \gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k, l\}, \tag{3.2.18}$$

тогда нулевое решение системы (3.2.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (3.2.5) *имеет место оценка* (3.2.10).

В оценке (3.2.10) в данном случае используются T-периодические продолжения матрицы $H(t)$ и функции $p(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство теоремы 3.2.5. Используя матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2.5, рассмотрим на решении задачи (3.2.5) функционал (3.2.6). Продолжим T-периодическим образом матрицу $H(t)$ и функцию $p(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя обозначения. Как при доказательстве теоремы 3.2.2, после дифференцирования получаем (3.2.12). В силу (3.2.17) имеем

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \geq p(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle.$$

Используя (3.2.9), из (3.2.12) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p(t)\left\langle H(t)y(t), y(t)\right\rangle - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.2.6) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (3.2.18). Отсюда, как при доказательстве теоремы 3.2.2, имеем неравенство (3.2.10).

Как отмечалось в параграфе 1.2, оценка вида (3.2.10) при условии (3.2.18) гарантирует экспоненциальное убывание решений задачи (3.2.5) при $t \to \infty$, поскольку из нее вытекает оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}}\exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \frac{T(\gamma_1-\gamma_2)}{2}\right), \qquad (3.2.19)$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \qquad \gamma_2 = \min_{\xi\in[0,T]} \gamma(\xi).$$

Теорема 3.2.5 доказана.

3.3 Робастная устойчивость для систем нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \qquad (3.3.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t,u_1,u_2,u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0,\infty)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \leq q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \qquad t \geq 0, \qquad (3.3.2)$$

$$u_j \in \mathbb{R}^n, \qquad q_j \geq 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (3.3.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (3.3.1) на бесконечности. Из доказанных утверждений будут вытекать результаты о робастной устойчивости решений линейных систем (3.2.1).

Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа. Предполагая, что выполнены условия теоремы 3.2.1, ниже мы устанавливаем условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (3.3.1). Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова вида (1.2.7). В этом случае из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2.1, введем функции

$$\begin{aligned} \beta_1(t) = &\ 2\|H(t)\| + (2\|A(t)\| + q_1)\|L(0)\|, \\ \beta_2(t) = &\ (2\|B(t)\| + q_2)\|L(0)\|, \\ \beta_3(t) = &\ (2\|C(t)\| + q_3)\|L(0)\|, \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = &\ q_1\beta_1(t) + \frac{q_1\beta_2(t) + q_2\beta_1(t)}{2} + \frac{q_1\beta_3(t) + q_3\beta_1(t)}{2}, \\ \alpha_2(t) = &\ q_2\beta_2(t) + \frac{q_2\beta_1(t) + q_1\beta_2(t)}{2} + \frac{q_2\beta_3(t) + q_3\beta_2(t)}{2}, \\ \alpha_3(t) = &\ q_3\beta_3(t) + \frac{q_3\beta_1(t) + q_1\beta_3(t)}{2} + \frac{q_3\beta_2(t) + q_2\beta_3(t)}{2}, \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

и матрицу

$$Q^\alpha(t) = Q(t) - \begin{pmatrix} \alpha_1(t)I & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t)I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3(t)I \end{pmatrix}. \tag{3.3.5}$$

Теорема 3.3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Предположим, что матрица $Q^\alpha(t)$ положительно определена при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы* (3.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.3.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\
&\qquad + F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \quad t > 0, \\
&y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, \infty))$ такую, что $y(t) \in C^1([(k-1)\tau, k\tau])$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ниже мы укажем оценки для решений начальной задачи (3.3.6), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Введем матрицу

$$\begin{aligned}
P^\alpha(t) = Q_{11}(t) - \alpha_1(t)I - \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)\Big] \\
\times \Big[Q_{22}(t) - \alpha_2(t)I - Q_{23}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^{-1} \\
\times \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^* \\
-Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{13}^*(t),
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

где матрицы $Q_{ij}(t)$ определены в (3.2.4). Нетрудно показать, что $P^\alpha(t)$ положительно определена, если $Q^\alpha(t)$ в (3.3.5) положительно определена (см. лемму 2.5.1 в параграфе 2.5). Обозначим через $p^\alpha_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P^\alpha(t)$, через $h_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

Теорема 3.3.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.3.1. Пусть k, $l > 0$ — максимальные числа такие, что выполнены неравенства* (3.2.9). *Тогда для решения задачи* (3.3.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^\alpha(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.3.8}$$

где

$$\gamma^\alpha(t) = \min\left\{\frac{p^\alpha_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0,$$

$V(0,\varphi)$ *определено в* (3.2.7).

Замечание. Существование k, $l > 0$ в теореме 3.3.2 обеспечивается условиями (1.2.3), (3.2.2).

Очевидно, утверждение теоремы 3.3.1 непосредственно вытекает из оценки (3.3.8). Поэтому достаточно доказать теорему 3.3.2.

Доказательство теоремы 3.3.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.3.6). Используя матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, указанные выше, рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского (3.2.6). Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \langle K(\tau)y(t-\tau), y(t-\tau)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\left\langle L(0)\frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle - \left\langle L(\tau)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Обозначим

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau).$$

Тогда, учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (3.3.1), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)z(t), y(t)\rangle + \langle H(t)y(t), z(t)\rangle$$

$$+\left\langle H(t)F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t),F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\langle K(\tau)y(t-\tau),y(t-\tau)\rangle+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\langle L(0)z(t),z(t)\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),z(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)z(t),F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$-\left\langle L(\tau)\frac{d}{dt}y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\rangle+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t),F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),z(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)z(t),F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где матрица $Q(t)$ определена в (3.2.3). Рассмотрим группу слагаемых, содержащих

$$F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right),$$

и обозначим их через $W(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle+W(t)$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \tag{3.3.9}$$

Очевидно,

$$W(t)\le\Bigg(2\|H(t)\|\,\|y(t)\|+2\|L(0)\|\,\|z(t)\|$$

$$+\|L(0)\|\,\left\|F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|\Bigg)$$

$$\times\left\|F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|.$$

В силу условия (3.3.2) имеем

$$W(t)\le\left(\beta_1(t)\|y(t)\|+\beta_2(t)\|y(t-\tau)\|+\beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$\times\left(q_1\|y(t)\|+q_2\|y(t-\tau)\|+q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right), \tag{3.3.10}$$

где $\beta_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, определены в (3.3.3). Очевидно, имеет место оценка

$$W(t) \le \alpha_1(t)\|y(t)\|^2 + \alpha_2(t)\|y(t-\tau)\|^2 + \alpha_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^2, \quad (3.3.11)$$

где функции $\alpha_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, определены в (3.3.4). Из (3.3.9) в силу (3.3.11) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \quad (3.3.12)$$

где матрица $Q^\alpha(t)$ определена в (3.3.5).

Для дальнейших преобразований воспользуемся леммой 2.5.1 из параграфа 2.5). Тогда для матрицы $Q^\alpha(t)$ в (3.3.5) имеем

$$\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle \ge \langle P^\alpha(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P^\alpha(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (3.3.7). Тогда

$$\langle P^\alpha(t)y(t), y(t)\rangle \ge p^\alpha_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p^\alpha_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P^\alpha(t)$. Следовательно, из (3.3.12) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\langle p^\alpha_{\min}(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя (1.2.15), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя (1.2.3) и (3.2.2), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds - l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.2.6) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma^{\alpha}(t)V(t,y),$$

где $\gamma^{\alpha}(t) = \min\left\{\frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma^{\alpha}(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (3.2.7). Используя (1.2.15), с учетом определения функционала (3.2.6) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}(t)}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma^{\alpha}(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (3.3.8).

Теорема 3.3.2 доказана.

Из доказательства теоремы 3.3.2 вытекает следующая переформулировка теоремы 3.3.1.

Теорема 3.3.3 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (1.2.3), (3.2.2) *и такие, что*

$$P^\alpha(t) > 0, \quad Q_{22}(t) - \alpha_2(t)I - Q_{23}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t) > 0,$$
$$Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I > 0$$

при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (3.3.1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство теоремы 3.3.1. В силу леммы 2.5.1 в параграфе 2.5 матрица $Q^\alpha(t)$ в (3.3.5) положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы $P^\alpha(t)$, $Q_{22}(t) - \alpha_2(t)I - Q_{23}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)$ и $Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I$ положительно определены.

Замечание. Очевидно, правую часть неравенства (3.3.10) можно оценивать разными способами. Например, в оценке вида (3.3.11) в качестве функций $\alpha_j(t)$ можно взять следующие функции:

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t) = &\ q_1\beta_1(t) + \frac{(q_1\beta_2(t))^2}{4\varepsilon_1(t)} + \frac{(q_1\beta_3(t))^2}{4\varepsilon_2(t)} + \varepsilon_3(t) + \varepsilon_5(t),\\
\alpha_2(t) = &\ q_2\beta_2(t) + \frac{(q_2\beta_1(t))^2}{4\varepsilon_3(t)} + \frac{(q_2\beta_3(t))^2}{4\varepsilon_4(t)} + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_6(t),\\
\alpha_3(t) = &\ q_3\beta_3(t) + \frac{(q_3\beta_1(t))^2}{4\varepsilon_5(t)} + \frac{(q_3\beta_2(t))^2}{4\varepsilon_6(t)} + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_4(t),
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

где $\varepsilon_j(t)$ — положительные непрерывные функции, $j = 1, \dots, 6$. В этом случае мы будем иметь другую матрицу $Q^\alpha(t)$. За счет выбора $\varepsilon_j(t)$ можно управлять функцией $\gamma^\alpha(t)$, которая характеризует скорость убывания решений.

Проводя аналогичные рассуждения, как в параграфе 3.2, нетрудно сформулировать и доказать аналоги теорем 3.2.4 и 3.2.5, которые позволяют установить экспоненциальную устойчивость при менее ограничительных требованиях.

Теорема 3.3.4 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$,$K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (3.2.13), (3.2.14) *и такие, что для матрицы $Q^\alpha(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle S^\alpha(t)u, u\rangle,\ u, v, w \in \mathbb{C}^n,\ t \in [0,T], \tag{3.3.14}$$

где $S^\alpha(t) > 0$ *— положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существуют* $k,\ l > 0$*, удовлетворяющие* (3.2.9)*, тогда нулевое решение системы* (3.3.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (3.2.6) *имеет место оценка* (3.3.8)*, где*

$$\gamma^\alpha(t) = \min\left\{\frac{s^\alpha_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\}, \qquad (3.3.15)$$

$s^\alpha_{\min}(t)$ *— минимальное собственное значение матрицы* $S^\alpha(t)$*.*

В оценке (3.3.8) в данном случае используются T-периодические продолжения функции $s^\alpha_{\min}(t)$ и матрицы $H(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Теорема 3.3.5 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$,$K(s)$, $L(s)$*, удовлетворяющие условиям* (1.2.21), (3.2.13), (3.2.14) *и такие, что для матрицы* $Q^\alpha(t)$ *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right\rangle \geq p^\alpha(t)\langle H(t)u, u\rangle, \qquad (3.3.16)$$

$$u, v, w \in \mathbb{C}^n, \qquad t \in [0, T],$$

где $p^\alpha(t) \in C([0,T])$*. Если существуют* $k,\ l > 0$*, удовлетворяющие* (3.2.9)*, и*

$$\int\limits_0^T \gamma^\alpha(\xi)d\xi > 0, \quad \text{где} \quad \gamma^\alpha(\xi) = \min\{p^\alpha(\xi), k, l\}, \qquad (3.3.17)$$

тогда нулевое решение системы (3.3.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (3.3.6) *имеет место оценка* (3.3.8)*.*

В оценке (3.3.8) в данном случае используются T-периодические продолжения матрицы $H(t)$ и функции $p^\alpha(t)$ на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Замечание. Из полученных результатов вытекают утверждения о робастной устойчивости для линейных систем вида (3.3.1). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ \Delta A(t)y(t) + \Delta B(t)y(t-\tau) + \Delta C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad (3.3.18)\end{aligned}$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$ — произвольные матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \le q_1, \quad \|\Delta B(t)\| \le q_2, \quad \|\Delta C(t)\| \le q_3, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t, u_1, u_2, u_3) = \Delta A(t) u_1 + \Delta B(t) u_2 + \Delta C(t) u_3$$

удовлетворяет неравенству (3.3.2). Тогда теоремы 3.3.1–3.3.5 дают условия робастной устойчивости для линейных систем вида (3.2.1) и оценки экспоненциального убывания решений возмущенной системы (3.3.18) при $t \to \infty$.

3.4 Нелинейные системы нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} y(t) &= A(t) y(t) + B(t) y(t-\tau) + C(t) \frac{d}{dt} y(t-\tau) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt} y(t-\tau)\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \qquad (3.4.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\begin{gathered} \|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \le q_1 \|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2 \|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3 \|u_3\|^{1+\omega_3}, \qquad t \ge 0, \\ u_j \in \mathbb{R}^n, \qquad q_j \ge 0, \qquad \omega_j \ge 0 \qquad j = 1, 2, 3. \end{gathered} \qquad (3.4.2)$$

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений системы (3.4.1). Случай $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ был подробно исследован в параграфе 3.3. В этом параграфе мы рассмотрим системы (3.4.1) при

$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \neq 0$. Мы установим оценки на множества притяжения и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (3.4.1) на бесконечности. Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа.

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.4.1)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &\quad + F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \quad t > 0, \\ y(t) &= \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ y(+0) &= \varphi(0), \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Под решением начальной задачи мы будем понимать вектор-функцию $y(t) \in C([-\tau, t'))$, $t' > 0$, дифференцируемую при $t \in [-\tau, t')$ за исключением точек $k\tau$. Ниже мы укажем оценки для решений начальной задачи (3.4.3), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Далее мы будем предполагать, что выполнены условия теоремы 3.2.1. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением специальной краевой задачи для дифференциального уравнения Ляпунова вида (1.2.7). В этом случае, как уже отмечалось выше, $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2.1, рассмотрим матрицу $Q(t)$, определенную в (3.2.3), с элементами, заданными в (3.2.4). Используя лемму 2.5.1, получаем представление

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} P(t) & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{Q}_2(t) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad (3.4.4)$$

где

$$w_1 = (\widetilde{Q}_2(t))^{-1}\widetilde{Q}_1^*(t)v_1 + v_2,$$
$$w_2 = (Q_{33}(t))^{-1}Q_{13}^*(t)v_1 + (Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t)v_2 + v_3,$$

матрица $P(t)$ определена в (3.2.8),

$$\widetilde{Q}_1(t) = Q_{12}(t) - Q_{13}(t)(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t), \qquad (3.4.5)$$

$$\widetilde{Q}_2(t) = Q_{22}(t) - Q_{23}(t)(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t). \qquad (3.4.6)$$

Следовательно, из (3.4.4) вытекает неравенство

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq p_{\min}(t)\|v_1\|^2 + s_{\min}^1(t)\|w_1\|^2 + s_{\min}^2(t)\|w_2\|^2, \qquad (3.4.7)$$

где $p_{\min}(t)$, $s_{\min}^1(t)$, $s_{\min}^2(t)$ — минимальные собственные значения матриц $P(t)$, $\widetilde{Q}_2(t)$, $Q_{33}(t)$ соответственно, причем указанные собственные значения являются положительными.

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.4.3), определенное при $t \in [0, t')$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(t) & = & \|(\widetilde{Q}_2(t))^{-1}\widetilde{Q}_1^*(t)\|, \\ \alpha_2(t) & = & \|(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t)\|, \\ \alpha_3(t) & = & \|(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t)\|\|(\widetilde{Q}_2(t))^{-1}\widetilde{Q}_1^*(t)\| + \|Q_{33}(t))^{-1}Q_{13}^*(t)\|, \end{array} \qquad (3.4.8)$$

$$\begin{array}{rcl} a_1(t) & = & 2\|H(t)\| + 2\|L(0)\|(\|A(t)\| + \|B(t)\|\alpha_1(t) + \|C(t)\|\alpha_3(t)) \\ & & + \, q_2\|L(0)\|\alpha_1(t)\|y(t-\tau)\|^{\omega_2} + q_3\|L(0)\|\alpha_3(t)\left\|\dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}, \\ a_2(t) & = & 2\|L(0)\|(\|B(t)\| + \|C(t)\|\alpha_2(t)) \\ & & + \, q_2\|L(0)\|\|y(t-\tau)\|^{\omega_2} + q_3\|L(0)\|\alpha_2(t)\left\|\dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}, \\ a_3(t) & = & 2\|C(t)\|\|L(0)\| + q_3\|L(0)\|\left\|\dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}, \\ a_4(t) & = & q_1\|L(0)\|, \end{array} \qquad (3.4.9)$$

$$\begin{aligned} b_1(t) &= q_2\alpha_1(t)\|y(t-\tau)\|^{\omega_2} + q_3\alpha_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}, \\ b_2(t) &= q_2\|y(t-\tau)\|^{\omega_2} + q_3\alpha_2(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}, \qquad (3.4.10) \\ b_3(t) &= q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}, \\ b_4(t) &= q_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right) &= a_1(t)b_1(t) + 2(a_1(t)b_2(t) + b_1(t)a_2(t)) \\ &\quad + 2(a_1(t)b_3(t) + b_1(t)a_3(t)), \\ c_2\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right) &= a_2(t)b_2(t) + 2(a_1(t)b_2(t) + b_1(t)a_2(t)) \\ &\quad + 2(a_2(t)b_3(t) + b_2(t)a_3(t)) \\ &\quad + 2(a_4(t)b_2(t) + b_4(t)a_2(t)), \quad (3.4.11) \\ c_3\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right) &= a_3(t)b_3(t) + 2(a_1(t)b_3(t) + b_1(t)a_3(t)) \\ &\quad + 2(a_2(t)b_3(t) + b_2(t)a_3(t)) \\ &\quad + 2(a_4(t)b_3(t) + b_4(t)a_3(t)), \\ c_4\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right) &= (a_1(t)b_4(t) + b_1(t)a_4(t)), \\ c_5\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right) &= a_4(t)b_4(t) + 2(a_4(t)b_2(t) + b_4(t)a_2(t)) \\ &\quad + 2(a_4(t)b_3(t) + b_4(t)a_3(t)). \end{aligned}$$

Отметим, что при $q_3 = 0$ функции $c_j\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$, $j = 1, \ldots, 5$, не зависят от $\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|$.

Рассмотрим на решении $y(t)$ начальной задачи (3.4.3) функционал Ляпунова – Красовского (3.2.6) при $t \in [0, t')$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4.1 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Тогда для решения задачи* (3.4.3) *имеет место оценка*

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\Bigg[p_{\min}(t) - c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$-c_5\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2\omega_1}\Bigg]\|y(t)\|^2$$

$$-\left(s^1_{\min}(t)-c_2\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\right)\|z_1(t)\|^2$$

$$-\left(s^2_{\min}(t)-c_3\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\right)\|z_2(t)\|^2$$

$$+c_4\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)(h_{\min}(t))^{-1-\omega_1/2}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,\quad t\in[0,t'), \tag{3.4.12}$$

где

$$z_1(t)=(\widetilde{Q}_2(t))^{-1}\widetilde{Q}^*_1(t)y(t)+y(t-\tau), \tag{3.4.13}$$

$$z_2(t)=(Q_{33}(t))^{-1}Q^*_{13}(t)y(t)+(Q_{33}(t))^{-1}Q^*_{23}(t)y(t-\tau)+\frac{d}{dt}y(t-\tau), \tag{3.4.14}$$

k, $l>0$ *удовлетворяют* (3.2.9).

Доказательство. Продифференцируем функционал $V(t,y)$, заданный в (3.2.6). Как при доказательстве теоремы 3.3.2, учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (3.4.3), и используя матрицу $Q(t)$ из (3.2.3), при $t\in[0,t')$ имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle+W(t)$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \qquad (3.4.15)$$

где

$$W(t) = \left\langle H(t)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), z(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)z(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\rangle,$$

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau).$$

В силу (3.4.7) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq p_{\min}(t)\|y(t)\|^2 + s^1_{\min}(t)\|z_1(t)\|^2 + s^2_{\min}(t)\|z_2(t)\|^2, \qquad (3.4.16)$$

где функции $z_1(t)$, $z_2(t)$ определены в (3.4.13), (3.4.14), матрицы $\widetilde{Q}_1(t)$, $\widetilde{Q}_2(t)$ определены в (3.4.5), (3.4.6). Очевидно,

$$|W(t)| \leq \Bigg[2\|H(t)\|\,\|y(t)\| + 2\|L(0)\|\,\|z(t)\|$$

$$+\|L(0)\|\left\|F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|\Bigg]$$

$$\times\left\|F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|.$$

В силу условия (3.4.2) имеем

$$|W(t)| \leq \Bigg[2(\|H(t)\| + \|A(t)\|\|L(0)\|)\,\|y(t)\| + 2\|B(t)\|\|L(0)\|\|y(t-\tau)\|$$

$$+2\|C(t)\|\|L(0)\|\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|$$

$$+\|L(0)\|\left(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2} + q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{1+\omega_3}\right)\Bigg]$$

$$\times\left(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2\|y(t-\tau)\|^{1+\omega_2} + q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{1+\omega_3}\right).$$

В силу (3.4.13)

$$\|y(t-\tau)\| \leq \|z_1(t)\| + \|(\widetilde{Q}_2(t))^{-1}\widetilde{Q}_1^*(t)\|\|y(t)\|.$$

Используя (3.4.14), получаем

$$\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\| \leq \|z_2(t)\| + \|(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t)\|\|y(t-\tau)\|$$

$$+\|Q_{33}(t))^{-1}Q_{13}^*(t)\|\|y(t)\|$$

$$\leq \|z_2(t)\| + \|(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t)\|\|z_1(t)\|$$

$$+\left(\|(Q_{33}(t))^{-1}Q_{23}^*(t)\|\|(\widetilde{Q}_2(t))^{-1}\widetilde{Q}_1^*(t)\| + \|Q_{33}(t))^{-1}Q_{13}^*(t)\|\right)\|y(t)\|.$$

Тогда, используя функции $\alpha_j(t)$, $j = 1, \ldots, 3$, определенные в (3.4.8), получаем неравенство

$$|W(t)| \leq \Bigg[2(\|H(t)\| + \|A(t)\|\|L(0)\|)\,\|y(t)\|$$

$$+2\|B(t)\|\|L(0)\|(\|z_1(t)\| + \alpha_1(t)\|y(t)\|)$$

$$+2\|C(t)\|\|L(0)\|(\|z_2(t)\| + \alpha_2(t)\|z_1(t)\| + \alpha_3(t)\|y(t)\|)$$

$$+\|L(0)\|\Bigg(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2(\|z_1(t)\| + \alpha_1(t)\|y(t)\|)\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}$$

$$+q_3(\|z_2(t)\| + \alpha_2(t)\|z_1(t)\| + \alpha_3(t)\|y(t)\|)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}\Bigg)\Bigg]$$

$$\times\Bigg(q_1\|y(t)\|^{1+\omega_1} + q_2(\|z_1(t)\| + \alpha_1(t)\|y(t)\|)\|y(t-\tau)\|^{\omega_2}$$

$$+q_3(\|z_2(t)\| + \alpha_2(t)\|z_1(t)\| + \alpha_3(t)\|y(t)\|)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^{\omega_3}\Bigg)$$

$$= (a_1(t)\|y(t)\| + a_2(t)\|z_1(t)\| + a_3(t)\|z_2(t)\| + a_4(t)\|y(t)\|^{1+\omega_1})$$

$$\times(b_1(t)\|y(t)\| + b_2(t)\|z_1(t)\| + b_3(t)\|z_2(t)\| + b_4(t)\|y(t)\|^{1+\omega_1}),$$

где функции $a_j(t)$, $b_j(t)$, $j = 1, \dots, 4$, определены в (3.4.9), (3.4.10). Следовательно,

$$|W(t)| \leq a_1(t)b_1(t)\|y(t)\|^2 + a_2(t)b_2(t)\|z_1(t)\|^2$$

$$+a_3(t)b_3(t)\|z_2(t)\|^2$$

$$+(a_1(t)b_2(t) + b_1(t)a_2(t))\|y(t)\|\|z_1(t)\|$$

$$+(a_1(t)b_3(t) + b_1(t)a_3(t))\|y(t)\|\|z_2(t)\|$$

$$+(a_2(t)b_3(t) + b_2(t)a_3(t))\|z_1(t)\|\|z_2(t)\|$$

$$+(a_4(t)b_2(t) + b_4(t)a_2(t))\|y(t)\|^{1+\omega_1}\|z_1(t)\|$$

$$+(a_4(t)b_3(t) + b_4(t)a_3(t))\|y(t)\|^{1+\omega_1}\|z_2(t)\|$$

$$+(a_1(t)b_4(t) + b_1(t)a_4(t))\|y(t)\|^{2+\omega_1} + a_4(t)b_4(t)\|y(t)\|^{2+2\omega_1}$$

$$\leq c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^2$$

$$+c_2\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|z_1(t)\|^2$$

$$+c_3\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|z_2(t)\|^2$$

$$+c_4\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2+\omega_1}$$

$$+c_5\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2+2\omega_1},$$

где функции $c_j\left(t, y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)$, $j = 1, \dots, 5$, определены в (3.4.11). Используя (1.2.15), получаем

$$|W(t)| \leq \Bigg[c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$+c_5\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2\omega_1}\Bigg]\|y(t)\|^2$$

$$+c_2\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|z_1(t)\|^2$$

$$+c_3\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|z_2(t)\|^2$$

$$+c_4\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)(h_{\min}(t))^{-1-\omega_1/2}\langle Hy(t),y(t)\rangle^{1+\omega_1/2}.$$

Следовательно, из (3.4.15), используя (3.2.9), (3.4.16) и определение функционала (3.2.6), имеем неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq-\Bigg[p_{\min}(t)-c_1\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$-c_5\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2\omega_1}\Bigg]\|y(t)\|^2$$

$$-\left(s^1_{\min}(t)-c_2\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\right)\|z_1(t)\|^2$$

$$-\left(s^2_{\min}(t)-c_3\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\right)\|z_2(t)\|^2$$

$$+c_4\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)(h_{\min}(t))^{-1-\omega_1/2}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}$$

$$-k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds-l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Теорема 3.4.1 доказана.

Ниже, опираясь на данную теорему, мы получим оценку на решение начальной задачи (3.4.3) вида

$$\|y(t)\|\leq\widetilde{c}_1e^{-\widetilde{c}_2t},\quad t>0,\tag{3.4.17}$$

где $\widetilde{c}_1$, $\widetilde{c}_2>0$, причем $\widetilde{c}_1$ зависит от

$$\Phi_1=\max\left\{\max_{s\in[-\tau,0]}\|\varphi(s)\|,\ \max_{s\in[-\tau,0]}\|\varphi'(s)\|\right\}$$

и

$$\widetilde{c}_1 \to 0 \quad \text{при} \quad \Phi_1 \to 0.$$

Отметим, что на основе оценки (3.4.17) можно установить оценку на производную $\dfrac{d}{dt}y(t)$. Мы укажем один из способов получения такой оценки. Введем вектор-функцию $v(t) = \dfrac{d}{dt}y(t)$. Поскольку $y(t)$ — решение задачи (3.4.3), то $v(t)$ — решение начальной задачи для системы нелинейных функционально-разностных уравнений

$$\begin{aligned} &v(t) = C(t)v(t-\tau) + g(t, v(t-\tau)), \quad t > 0, \\ &v(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

где

$$g(t, v(t-\tau)) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau), v(t-\tau)),$$

$$\psi(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t).$$

Очевидно,

$$\|g(t, v(t-\tau))\| \le \widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t} + q_3 \|v(t-\tau))\|^{1+\omega_3}, \tag{3.4.19}$$

где

$$\widetilde{c}_3 = \left(\mathcal{A} + \mathcal{B}e^{\widetilde{c}_2\tau} + q_1(\widetilde{c}_1)^{\omega_1} + q_2(\widetilde{c}_1)^{\omega_2} e^{\widetilde{c}_2\tau(1+\omega_2)}\right)\widetilde{c}_1, \tag{3.4.20}$$

$$\mathcal{A} = \max_{t\in[0,T]} \|A(t)\|, \quad \mathcal{B} = \max_{t\in[0,T]} \|B(t)\|, \quad \mathcal{C} = \max_{t\in[0,T]} \|C(t)\|. \tag{3.4.21}$$

Используя подход для получения оценок решений обыкновенных разностных уравнений (см., например, [8]), нетрудно получить оценки на решение задачи (3.4.18). Как уже отмечалось в параграфе 3.2, если выполнены условия теоремы 3.2.1, то

$$L(\tau) - C^*(t)L(0)C(t) = Q_{33}(t) > 0, \quad t \in [0, T],$$

и это приводит к выводу, что спектр матрицы $C(t)$ при $t \in [0, T]$ принадлежит единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}$.

Пусть $v(t)$ — решение задачи (3.4.18). Рассмотрим функцию

$$\widetilde{V}(t, v) = \langle L(0)v(t), v(t)\rangle.$$

Введем следующие обозначения: l_0 — минимальное собственное значение матрицы $L(0)$, $s^2_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} s^2_{\min}(t)$, где $s^2_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $Q_{33}(t)$,

$$\delta(s) = 2\mathcal{C} + \frac{2q_3}{l_0^{\omega_3/2}} s^{\omega_3/2}. \tag{3.4.22}$$

Очевидно, $l_0 > 0$, $s^2_{\min} > 0$. Отметим, что по построению $\dfrac{s^2_{\min}}{\|L(0)\|} < 1$.

Теорема 3.4.2 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Тогда имеет место оценка*

$$\widetilde{V}(t,v) \le \left(1 - \frac{s^2_{\min}}{\|L(0)\|} + \frac{q_3\|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}} \delta(\widetilde{V}(t-\tau,v))(\widetilde{V}(t-\tau,v))^{\omega_3/2}\right)$$
$$\times \widetilde{V}(t-\tau,v) + \widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}$$
$$\times \left[\frac{1}{(l_0)^{1/2}} \delta(\widetilde{V}(t-\tau,v))\widetilde{V}(t-\tau,v)^{1/2} + \widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]. \tag{3.4.23}$$

Доказательство. Поскольку вектор-функция $v(t)$ является решением задачи (3.4.18), то

$$\widetilde{V}(t,v) = \langle L(0)(C(t)v(t-\tau) + g(t, v(t-\tau))), C(t)v(t-\tau) + g(t, v(t-\tau))\rangle$$
$$= \langle C^*(t)L(0)C(t)v(t-\tau), v(t-\tau)\rangle + \langle L(0)g(t, v(t-\tau)), C(t)v(t-\tau)\rangle$$
$$+\langle L(0)C(t)v(t-\tau), g(t, v(t-\tau))\rangle + \langle L(0)g(t, v(t-\tau)), g(t, v(t-\tau))\rangle$$
$$= \langle (L(\tau) - Q_{33}(t))v(t-\tau), v(t-\tau)\rangle$$
$$+\langle L(0)g(t, v(t-\tau)), C(t)v(t-\tau)\rangle$$
$$+\langle L(0)C(t)v(t-\tau), g(t, v(t-\tau))\rangle + \langle L(0)g(t, v(t-\tau)), g(t, v(t-\tau))\rangle$$
$$\le \langle (L(0)-Q_{33}(t))v(t-\tau), v(t-\tau)\rangle + 2\|L(0)\|\|C(t)\|\|g(t, v(t-\tau))\|\|v(t-\tau)\|$$
$$+\|L(0)\|\|g(t, v(t-\tau))\|^2.$$

Поскольку $\widetilde{V}(t-\tau,v) = \langle L(0)v(t-\tau), v(t-\tau)\rangle$, то в силу (3.4.19) имеем

$$\widetilde{V}(t,v) \le \left(1 - \frac{s^2_{\min}(t)}{\|L(0)\|}\right)\widetilde{V}(t-\tau,v)$$

$$+q_3\|L(0)\|\left(2\|C(t)\|+q_3\|v(t-\tau)\|^{\omega_3}\right)\|v(t-\tau)\|^{2+\omega_3}$$
$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\left(2\|C(t)\|+2q_3\|v(t-\tau)\|^{\omega_3}\right)\|v(t-\tau)\|+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$
$$\leq\left(1-\frac{s_{\min}^2(t)}{\|L(0)\|}+\frac{q_3\|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}}\delta(\widetilde{V}(t-\tau,v))(\widetilde{V}(t-\tau,v))^{\omega_3/2}\right)\widetilde{V}(t-\tau,v)$$
$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{1}{(l_0)^{1/2}}\delta(\widetilde{V}(t-\tau,v))\widetilde{V}(t-\tau,v)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right],$$

где l_0 — собственное значение матрицы $L(0)$, функция $\delta(s)$ определена в (3.4.22). Отсюда вытекает оценка (3.4.23).

Теорема 3.4.3 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Тогда существует* $\rho_0 > 0$ *такое, что при* $\max\{\widetilde{c}_1, \Phi_1\} \leq \rho_0$ *для решения задачи* (3.4.18) *имеет место оценка*

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{\|L(0)\|\rho_0^2}{l_0}e^{\frac{\ln\Delta}{\tau}t}+d(\rho_0)e^{-r\widetilde{c}_2 t},\ t>0, \tag{3.4.24}$$

где

$$\Delta = 1-\frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}+\frac{q_3\|L(0)\|^{1+\omega_3/2}\rho_0^{\omega_3}}{(l_0)^{1+\omega_3/2}}\delta(\|L(0)\|\rho_0^2), \tag{3.4.25}$$

$0<\Delta<1$, $d(\rho_0)>0$, $0<r\leq 1$.

Доказательство. Пусть $t\in[0,\tau]$. Тогда в силу (3.4.23) получаем

$$\widetilde{V}(t,v)\leq\left(1-\frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}+\frac{q_3\|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}}\delta(\widetilde{V}(t-\tau,\psi))(\widetilde{V}(t-\tau,\psi))^{\omega_3/2}\right)$$
$$\times\widetilde{V}(t-\tau,\psi)+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}$$
$$\times\left[\frac{1}{(l_0)^{1/2}}\delta(\widetilde{V}(t-\tau,\psi))\widetilde{V}(t-\tau,\psi)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right].$$

Рассмотрим выражение в круглых скобках. При $\Phi_1\leq\rho$, очевидно, имеем

$$1-\frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}+\frac{q_3\|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}}\delta(\widetilde{V}(t-\tau,\psi))(\widetilde{V}(t-\tau,\psi))^{\omega_3/2}$$
$$\leq 1-\frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}+\frac{q_3\|L(0)\|^{1+\omega_3/2}\rho^{\omega_3}}{(l_0)^{1+\omega_3/2}}\delta(\|L(0)\|\rho^2).$$

Поскольку

$$1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|} > 0,$$

то найдется $\rho_0 > 0$ такое, что

$$1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|} + \frac{q_3 \|L(0)\|^{1+\omega_3/2} \rho_0^{\omega_3}}{(l_0)^{1+\omega_3/2}} \delta(\|L(0)\|\rho_0^2) < 1. \tag{3.4.26}$$

Тогда при $\rho \leq \rho_0$ имеем

$$\widetilde{V}(t, v) \leq \Delta \widetilde{V}(t - \tau, \psi) + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 t}, \tag{3.4.27}$$

где Δ определено в (3.4.25).

Пусть $t \in [\tau, 2\tau]$. Тогда в силу (3.4.23) с учетом (3.4.27) получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{V}(t, v) \leq &\left(1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|} + \frac{q_3 \|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}} \delta(\widetilde{V}(t-\tau, v))(\widetilde{V}(t-\tau, v))^{\omega_3/2}\right) \\
&\times \widetilde{V}(t-\tau, v) + \widetilde{c}_3 \|L(0)\| e^{-\widetilde{c}_2 t} \\
&\times \left[\frac{1}{(l_0)^{1/2}} \delta(\widetilde{V}(t-\tau, v)) \widetilde{V}(t-\tau, v)^{1/2} + \widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right] \\
\leq &\left(1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|} + \frac{q_3 \|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}} \delta\left(\Delta \widetilde{V}(t - 2\tau, \psi) + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 (t-\tau)}\right)\right. \\
&\left.\times \left(\Delta \widetilde{V}(t - 2\tau, \psi) + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 (t-\tau)}\right)^{\omega_3/2}\right) \\
&\times \left(\Delta \widetilde{V}(t - 2\tau, \psi) + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 (t-\tau)}\right) \\
&+ \widetilde{c}_3 \|L(0)\| e^{-\widetilde{c}_2 t} \left[\frac{1}{(l_0)^{1/2}} \delta\left(\Delta \widetilde{V}(t - 2\tau, \psi) + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 (t-\tau)}\right)\right. \\
&\left.\times \left(\Delta \widetilde{V}(t - 2\tau, \psi) + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 (t-\tau)}\right)^{1/2} + \widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right] \\
\leq &\left(1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|} + \frac{q_3 \|L(0)\|}{(l_0)^{1+\omega_3/2}} \delta(\widetilde{V}(t - 2\tau, \psi))(\widetilde{V}(t - 2\tau, \psi))^{\omega_3/2}\right) \\
&\times \Delta \widetilde{V}(t - 2\tau, \psi) + d_2(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 t}
\end{aligned}$$

$$\leq \Delta^2 \widetilde{V}(t-2\tau,\psi) + d_2(\rho_0)e^{-\widetilde{c}_2 t}.$$

Повторяя рассуждения, при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\widetilde{V}(t,v) \leq \Delta^k \widetilde{V}(t-k\tau,\psi) + d_k(\rho_0)e^{-\widetilde{c}_2 t}.$$

Используя определение $\widetilde{V}(t,v)$, при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{\Delta^k \|L(0)\|}{l_0}\|\psi(t-k\tau)\|^2 + d(\rho_0)e^{-\widetilde{c}_2 t/2},$$

где $d(\rho_0) > 0$. Поскольку $t/\tau \leq k \leq t/\tau + 1$ и $\Delta < 1$, то

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{\Delta^{t/\tau}\|L(0)\|}{l_0}\rho_0^2 + d(\rho_0)e^{-\widetilde{c}_2 t/2}.$$

Отсюда вытекает оценка (3.4.24).

Теорема доказана.

Замечание 1. Поскольку $0 < \Delta < 1$, $\widetilde{c}_2 > 0$, оценка (3.4.24) гарантирует экспоненциальное убывание вектор-функции $\dfrac{d}{dt}y(t)$.

Замечание 2. В оценке (3.4.24) для $d(\rho_0)$ имеет место сходимость:

$$d(\rho_0) \to 0 \quad \text{при} \quad \rho_0 \to 0.$$

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1 и* $q_3 = 0$. *Тогда существует* $\rho_0 > 0$ *такое, что при* $\max\{\widetilde{c}_1, \Phi_1\} \leq \rho_0$ *для решения задачи* (3.4.18) *имеет место оценка*

$$\|v(t)\|^2 \leq \frac{\|L(0)\|\rho_0^2}{l_0}e^{\frac{\ln\Delta}{\tau}t} + d(\rho_0)e^{-r\widetilde{c}_2 t},\ t > 0, \tag{3.4.28}$$

где

$$\Delta = 1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}, \qquad 0 < \Delta < 1, \tag{3.4.29}$$

$d(\rho_0) > 0$, $0 < r \leq 1$.

При доказательстве указаны $d(\rho_0)$, r.

Доказательство. Поскольку $q_3 = 0$, то $\delta(s) = 2\mathcal{C}$. Пусть $t \in [0,\tau]$. Тогда в силу (3.4.23) получаем

$$\widetilde{V}(t,v) \leq \left(1 - \frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}\right)\widetilde{V}(t-\tau,\psi)$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\widetilde{V}(t-\tau,\psi)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right].$$

Тогда при $\Phi_1 \le \rho$ имеем

$$\widetilde{V}(t,v) \le \Delta\widetilde{V}(t-\tau,\psi)+d_1(\rho)e^{-\widetilde{c}_2 t},$$

где Δ определено в (3.4.29),

$$d_1(\rho)=\widetilde{c}_3\frac{2\mathcal{C}\|L(0)\|^{3/2}}{(l_0)^{1/2}}\rho+\widetilde{c}_3^2\|L(0)\|. \tag{3.4.30}$$

Пусть $t\in[\tau,2\tau]$. Тогда в силу (3.4.23) получаем

$$\widetilde{V}(t,v) \le \left(1-\frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}\right)\widetilde{V}(t-\tau,v)$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\widetilde{V}(t-\tau,v)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$

$$\le \Delta\left(\Delta\widetilde{V}(t-2\tau,\psi)+d_1(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}\right)$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\left(\Delta\widetilde{V}(t-2\tau,\psi)+d_1(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}\right)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$

$$\le \Delta^2\widetilde{V}(t-2\tau,\psi)+\Delta d_1(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\left(\Delta\widetilde{V}(t-2\tau,\psi)\right)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$

$$+\widetilde{c}_3\frac{2\|L(0)\|\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}e^{-\widetilde{c}_2 t}\left(d_1(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}\right)^{1/2}$$

$$\le \Delta^2\widetilde{V}(t-2\tau,\psi)+d_2(\rho)e^{-\widetilde{c}_2 t},$$

где

$$d_2(\rho)=\Delta d_1(\rho)e^{\widetilde{c}_2\tau}+d_1(\rho)+\alpha(d_1(\rho))^{1/2},$$

$$\alpha=\widetilde{c}_3\frac{2\|L(0)\|\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}. \tag{3.4.31}$$

Пусть $t\in[2\tau,3\tau]$. Тогда в силу (3.4.23) получаем

$$\widetilde{V}(t,v) \le \left(1-\frac{s_{\min}^2}{\|L(0)\|}\right)\widetilde{V}(t-\tau,v)$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\widetilde{V}(t-\tau,v)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$

$$\leq \Delta\left(\Delta^2\widetilde{V}(t-3\tau,\psi)+d_2(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}\right)$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\left(\Delta^2\widetilde{V}(t-3\tau,\psi)+d_2(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}\right)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$

$$\leq \Delta^3\widetilde{V}(t-3\tau,\psi)+\Delta d_2(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}$$

$$+\widetilde{c}_3\|L(0)\|e^{-\widetilde{c}_2 t}\left[\frac{2\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}\left(\Delta^2\widetilde{V}(t-3\tau,\psi)\right)^{1/2}+\widetilde{c}_3 e^{-\widetilde{c}_2 t}\right]$$

$$+\widetilde{c}_3\frac{2\|L(0)\|\mathcal{C}}{(l_0)^{1/2}}e^{-\widetilde{c}_2 t}\left(d_2(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(t-\tau)}\right)^{1/2}$$

$$\leq \Delta^3\widetilde{V}(t-3\tau,\psi)+d_3(\rho)e^{-\widetilde{c}_2 t},$$

где

$$d_3(\rho)=\Delta d_2(\rho)e^{\widetilde{c}_2\tau}+d_1(\rho)+\alpha(d_2(\rho)e^{-\widetilde{c}_2\tau})^{1/2}.$$

Повторяя рассуждения, при $t\in[(k-1)\tau,k\tau]$, $k=2,3,\dots,$ получаем

$$\widetilde{V}(t,v)\leq \Delta^k\widetilde{V}(t-k\tau,\psi)+d_k(\rho)e^{-\widetilde{c}_2 t},$$

где

$$d_k(\rho)=\Delta d_{k-1}(\rho)e^{\widetilde{c}_2\tau}+d_1(\rho)+\alpha(d_{k-1}(\rho)e^{-\widetilde{c}_2(k-2)\tau})^{1/2}.$$

Очевидно,

$$d_k(\rho)\leq \alpha_{k-1}d_{k-1}(\rho)+\beta_{k-1},$$

где

$$\alpha_{k-1}=\Delta e^{\widetilde{c}_2\tau}+\frac{\alpha e^{-\widetilde{c}_2(k-2)\tau/2}}{2},\quad \beta_{k-1}=d_1(\rho)+\frac{\alpha e^{-\widetilde{c}_2(k-2)\tau/2}}{2}.$$

Заметим, что при $k\geq 2$ имеют место неравенства:

$$\alpha_{k-1}\leq\widetilde{\alpha},\qquad \beta_{k-1}\leq\widetilde{\beta},$$

где

$$\widetilde{\alpha}=\Delta e^{\widetilde{c}_2\tau}+\frac{\alpha}{2},\quad \widetilde{\beta}=d_1(\rho)+\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, при $k\geq 2$ имеем

$$d_k(\rho)\leq\widetilde{\alpha}d_{k-1}(\rho)+\widetilde{\beta}\leq\widetilde{\alpha}(\widetilde{\alpha}d_{k-2}(\rho)+\widetilde{\beta})+\widetilde{\beta}$$

$$\leq \dots \leq (\widetilde{\alpha})^{k-1} d_1(\rho) + \sum_{j=1}^{k-1} (\widetilde{\alpha})^{k-1-j} \widetilde{\beta}.$$

По построению

$$\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \rho \to 0.$$

Следовательно, существует $\rho_0 > 0$ такое, что при $\rho \leq \rho_0$,

$$\frac{\alpha e^{-\widetilde{c}_2\tau}}{2} \leq \alpha_0 < 1 - \Delta.$$

Тогда

$$\widetilde{\alpha} \leq e^{\widetilde{c}_2\tau}(\Delta + \alpha_0), \quad \widetilde{\beta} \leq d_1(\rho_0) + \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2\tau}.$$

Следовательно,

$$d_k(\rho) \leq \sum_{j=0}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} d_1(\rho_0) + \sum_{j=1}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2\tau},$$

где

$$\widehat{\alpha} = e^{\widetilde{c}_2\tau}(\Delta + \alpha_0). \tag{3.4.32}$$

Если $\widehat{\alpha} = 1$, то

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} = k.$$

Тогда

$$d_k(\rho) \leq k d_1(\rho_0) + (k-1)\alpha_0 e^{\widetilde{c}_2\tau}.$$

Следовательно, при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 2, 3, \dots,$

$$d_k(\rho) e^{-\widetilde{c}_2 t} \leq \frac{t}{\tau} \left(d_1(\rho_0) + \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2\tau} \right) e^{-\widetilde{c}_2 t} + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 t}$$

$$\leq \frac{2e^{-1}}{\widetilde{c}_2\tau} \left(d_1(\rho_0) + \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2\tau} \right) e^{-\widetilde{c}_2 t/2} + d_1(\rho_0) e^{-\widetilde{c}_2 t}. \tag{3.4.33}$$

Если $\widehat{\alpha} < 1$, то

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} \leq \frac{1}{1 - \widehat{\alpha}}, \qquad \sum_{j=1}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} \leq \frac{\widehat{\alpha}}{1 - \widehat{\alpha}}.$$

Следовательно, при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 2, 3, \dots,$

$$d_k(\rho) e^{-\widetilde{c}_2 t} \leq \frac{1}{1 - \widehat{\alpha}} \left(d_1(\rho_0) + \widehat{\alpha}\alpha_0 e^{\widetilde{c}_2\tau} \right) e^{-\widetilde{c}_2 t}. \tag{3.4.34}$$

Если $\widehat{\alpha} > 1$, то

$$\sum_{j=0}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} = \frac{\widehat{\alpha}^k - 1}{\widehat{\alpha} - 1}, \qquad \sum_{j=1}^{k-1} (\widehat{\alpha})^{k-1-j} = \frac{\widehat{\alpha}^k - \widehat{\alpha}}{\widehat{\alpha} - 1}.$$

Следовательно, при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 2, 3, \dots,$

$$d_k(\rho) e^{-\widetilde{c}_2 t} \le \frac{1}{\widehat{\alpha} - 1} \left(d_1(\rho_0) + \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2 \tau} \right) (\Delta + \alpha_0)^k e^{-\widetilde{c}_2 (t - k\tau)}.$$

Поскольку $\Delta + \alpha_0 < 1$, то существует $0 < r < 1$ такое, что $(\Delta + \alpha_0) e^{r \widetilde{c}_2 \tau} = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} d_k(\rho) e^{-\widetilde{c}_2 t} &\le \frac{1}{\widehat{\alpha} - 1} \left(d_1(\rho_0) + \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2 \tau} \right) e^{-\widetilde{c}_2 (t - (1-r) k\tau)} \\ &\le \frac{e^{(1-r)\widetilde{c}_2 \tau}}{\widehat{\alpha} - 1} \left(d_1(\rho_0) + \alpha_0 e^{\widetilde{c}_2 \tau} \right) e^{-r \widetilde{c}_2 t}. \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

В силу (3.4.33)–(3.4.35), используя определение $\widetilde{V}(t, v)$, при $t \in [(k-1)\tau, k\tau]$, $k = 1, 2, \dots,$ имеем

$$\|v(t)\|^2 \le \frac{\Delta^k \|L(0)\|}{l_0} \|\psi(t - k\tau)\|^2 + d e^{-r \widetilde{c}_2 t},$$

где $d > 0$ зависит от ρ_0. Поскольку $t/\tau \le k \le t/\tau + 1$ и $\Delta < 1$, то

$$\|v(t)\|^2 \le \frac{\Delta^{t/\tau} \|L(0)\|}{l_0} \rho_0^2 + d e^{-r \widetilde{c}_2 t}.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка (3.4.28).

Следствие доказано.

Используя теоремы 3.4.1, 3.4.2, ниже мы установим оценки на решение начальной задачи (3.4.3).

Вначале рассмотрим случай $q_3 = 0$. Как отмечалось выше, тогда в оценке (3.4.12) функции $c_j \left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\| \frac{d}{dt} y(t-\tau) \right\| \right)$, $j = 1, \dots, 5$, не зависят от $\left\| \frac{d}{dt} y(t-\tau) \right\|$, т.е. $c_j = c_j(t, \|y(t-\tau)\|)$.

Определим $\rho_1 > 0$ такое, что

$$p_{\min}(t) - c_1(t, \rho_1) - c_5(t, \rho_1)(\rho_1)^{2\omega_1} > 0, \quad t \in [0, T]. \tag{3.4.36}$$

Предположим, что q_1 и $\rho_2 > 0$ такие, что

$$s^1_{\min}(t) - c_2(t, \rho_2) > 0, \quad t \in [0, T], \tag{3.4.37}$$

$$s_{\min}^2(t) - c_3(t,\rho_2) > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.4.38}$$

Введем следующие обозначения:

$$\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}, \tag{3.4.39}$$

$$\widetilde{q} = \max_{t\in[0,T]} \frac{c_4(t,\rho)}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}, \tag{3.4.40}$$

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t) - c_1(t,\rho) - c_5(t,\rho)\rho^{2\omega_1}}{\|H(t)\|}, k, l\right\}, \tag{3.4.41}$$

$$R^{\omega_1/2} = \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\right)$$

$$\times \left(\widetilde{q}\omega_1 \int\limits_0^T \frac{\|H(\xi)\|}{(h_{\min}(\xi))^{1+\omega_1/2}} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \frac{\gamma(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\right)^{-1}, \tag{3.4.42}$$

$$\Phi_1 = \max\left\{\max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi(s)\|, \max_{s\in[-\tau,0]} \|\varphi'(s)\|\right\}, \tag{3.4.43}$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}}}\left(1 - R^{-\omega_1/2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{-1/\omega_1}, \tag{3.4.44}$$

где $h_{\min} = \min\limits_{t\in[0,T]} h_{\min}(t) > 0$, $h_{\min}(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$, $V(0,\varphi)$ определено в (3.2.7).

Теорема 3.4.4 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1 и* $q_3 = 0$. *Предположим, что начальная функция* $\varphi(t)$ *в задаче* (3.4.3) *принадлежит множеству*

$$\mathcal{E} = \left\{\varphi(s) \in C^1([-\tau,0]) : \quad \max\{\Phi_1, \Phi_2\} < \rho, \quad V(0,\varphi) < R\right\}.$$

Тогда решение задачи (3.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \ge 0\}$, *и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.4.45}$$

где Φ_1, Φ_2, ρ, $V(0,\varphi)$, R, $\gamma(t)$ *определены в* (3.4.43), (3.4.44), (3.4.41), (3.2.7), (3.4.42), (3.4.41) *соответственно.*

Доказательство. Покажем, что решение начальной задачи (3.4.3) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и удовлетворяет оценке (3.4.45).

Пусть $t \in [0, \tau]$. Поскольку $\Phi_1 < \rho$, то

$$p_{\min}(t) - c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) - c_5\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) \|y(t)\|^{2\omega_1}$$

$$\geq p_{\min}(t) - c_1(t,\rho) - c_5(t,\rho)\|y(t)\|^{2\omega_1},$$

$$s^1_{\min}(t) - c_2\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) \geq s^1_{\min}(t) - c_2(t,\rho) > 0,$$

$$s^2_{\min}(t) - c_3\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) \geq s^2_{\min}(t) - c_3(t,\rho) > 0.$$

Тогда в силу (3.4.12) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -[p_{\min}(t) - c_1(t,\rho) - c_5(t,\rho)\|y(t)\|^{2\omega_1}]\|y(t)\|^2$$

$$+\frac{c_4(t,\rho)}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2} - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \tag{3.4.46}$$

Покажем, что из этой оценки следует, что

$$\|y(t)\| < \rho, \qquad t \in [0, \min\{t', \tau\}]. \tag{3.4.47}$$

Рассуждения будем проводить от противного. Предположим, что существует $t_1 \in (0, \min\{t', \tau\})$ такое, что $\|y(t_1)\| = \rho$. Тогда $\max\limits_{t\in[0,t_1]} \|y(t)\| \leq \rho$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -[p_{\min}(t) - c_1(t,\rho) - c_5(t,\rho)\rho^{2\omega_1}]\|y(t)\|^2$$

$$+\frac{c_4(t,\rho)}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2} - k\int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \quad t \in [0, t_1].$$

Тогда, учитывая определение функционала $V(t, y)$, обозначения (3.4.40) и (3.4.41), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) + \gamma(t)V(t,y) \leq \widetilde{q}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}. \tag{3.4.48}$$

Поскольку $V(0, \varphi) < R$, где $R > 0$ определено в (3.4.42), то в силу неравенства Гронуолла [90] получаем оценку

$$V(t,y) \leq \frac{V(0,\varphi)}{\left(1 - \left(R^{-1}V(0,\varphi)\right)^{\omega_1/2}\right)^{2/\omega_1}} \exp\left(-\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t \in [0, t_1],$$

где Φ_2 определено в (3.4.44). Поскольку $\Phi_2 < \rho$, $\gamma(t) > 0$, то $\|y(t_1)\| < \rho$ — противоречие. Следовательно, выполнено (3.4.47), более того, имеет место неравенство

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t \in [0, \min\{t', \tau\}]. \tag{3.4.49}$$

Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (3.4.3) определено на всем отрезке $[0, \tau]$, т. е. $t' > \tau$.

Из (3.4.49) вытекает, что если начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, \tau]$. Тогда при $t \in [\tau, 2\tau]$

$$\begin{gathered}
p_{\min}(t) - c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) - c_5\left(t, \|y(t-\tau)\|\right)\|y(t)\|^{2\omega_1} \\
\geq p_{\min}(t) - c_1(t,\rho) - c_5(t,\rho)\|y(t)\|^{2\omega_1}, \\
s^1_{\min}(t) - c_2\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) \geq s^1_{\min}(t) - c_2(t,\rho) > 0, \\
s^2_{\min}(t) - c_3\left(t, \|y(t-\tau)\|\right) \geq s^2_{\min}(t) - c_3(t,\rho) > 0.
\end{gathered}$$

Отсюда вытекает оценка (3.4.48) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Следовательно, как и выше, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t, y)$, получаем неравенство (3.4.49). Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (3.4.3) определено на всем отрезке $[0,2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0,2\tau]$.

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получаем, что решение задачи (3.4.3) определено при всех $t > 0$ и удовлетворяет оценке (3.4.45).

Теорема 3.4.4 доказана.

Замечание. Если $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ (линейный случай), утверждение теоремы 3.4.4 дает теорему 3.2.2.

Рассмотрим теперь случай $q_3 \neq 0$. Пусть $\rho_0 > 0$ удовлетворяет условиям теоремы 3.4.3. Введем функцию

$$\widetilde{\delta}(\rho) = \sqrt{\frac{\|L(0)\|\rho^2}{l_0} + d(\rho)}, \tag{3.4.50}$$

где $d(\rho) > 0$ определено в теореме 3.4.3, причем $d(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Очевидно, $\rho \leq \widetilde{\delta}(\rho)$. Определим $\rho_1 > 0$ такое, что

$$p_{\min}(t) - c_1(t,\rho_1,\widetilde{\delta}(\rho_1)) - c_5(t,\rho_1,\widetilde{\delta}(\rho_1))(\rho_1)^{2\omega_1} > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.4.51}$$

Предположим, что q_1 и $\rho_2 > 0$ такие, что

$$s^1_{\min}(t) - c_2(t,\rho_2,\widetilde{\delta}(\rho_2)) > 0, \quad t \in [0,T], \tag{3.4.52}$$

$$s^2_{\min}(t) - c_3(t,\rho_2,\widetilde{\delta}(\rho_2)) > 0, \quad t \in [0,T]. \tag{3.4.53}$$

Введем следующие обозначения:

$$\rho = \min\{\rho_0,\rho_1,\rho_2\}, \tag{3.4.54}$$

$$\widetilde{q} = \max_{t\in[0,T]} \frac{c_4(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}, \tag{3.4.55}$$

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) - c_5(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))\rho^{2\omega_1}}{\|H(t)\|}, k, l\right\}, \tag{3.4.56}$$

$$R^{\omega_1/2} = \left(1 - \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^T \frac{\gamma(s)}{\|H(s)\|}ds\right)\right)$$

$$\times\left(\widetilde{q}\omega_1 \int\limits_0^T \frac{\|H(\xi)\|}{(h_{\min}(\xi))^{1+\omega_1/2}} \exp\left(-\frac{\omega_1}{2}\int\limits_0^\xi \frac{\gamma(s)}{\|H(s)\|}ds\right)d\xi\right)^{-1}, \tag{3.4.57}$$

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}}} \left(1 - R^{-\omega_1/2}(V(0,\varphi))^{\omega_1/2}\right)^{-1/\omega_1}. \tag{3.4.58}$$

Теорема 3.4.5 *Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Предположим, что начальная функция* $\varphi(t)$ *в задаче* (3.4.3) *принадлежит множеству*

$$\mathcal{E} = \left\{\varphi(s) \in C^1([-\tau,0]) : \quad \max\{\Phi_1, \Phi_2\} < \rho, \quad V(0,\varphi) < R\right\}.$$

Тогда решение задачи (3.4.3) *определено на всей полуоси* $\{t \geq 0\}$, *и для него имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \Phi_2 \exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.4.59}$$

где Φ_1, Φ_2, ρ, $V(0,\varphi)$, R, $\gamma(t)$ *определены в* (3.4.43), (3.4.58), (3.4.54), (3.2.7), (3.4.57), (3.4.56) *соответственно.*

Доказательство. Мы покажем, что решение начальной задачи (3.4.3) определено на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ и удовлетворяет оценке (3.4.59).

Пусть $t \in [0,\tau]$. Поскольку $\Phi_1 < \rho$, то

$$p_{\min}(t) - c_1\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$-c_5\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2\omega_1}$$

$$\geq p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\rho) - c_5(t,\rho,\rho)\|y(t)\|^{2\omega_1}$$

$$\geq p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) - c_5(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))\|y(t)\|^{2\omega_1} > 0,$$

$$s^1_{\min}(t) - c_2\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$\geq s^1_{\min}(t) - c_2(t,\rho,\rho) \geq s^1_{\min}(t) - c_2(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) > 0,$$

$$s^2_{\min}(t) - c_3\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$\geq s^2_{\min}(t) - c_3(t,\rho,\rho) \geq s^2_{\min}(t) - c_3(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) > 0.$$

Тогда в силу (3.4.12) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -[p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\rho) - c_5(t,\rho,\rho)\|y(t)\|^{2\omega_1}]\|y(t)\|^2$$

$$+\frac{c_4(t,\rho,\rho)}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2} - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds$$

$$\le -[p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) - c_5(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))\|y(t)\|^{2\omega_1}]\|y(t)\|^2$$

$$+\frac{c_4(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2} - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \qquad (3.4.60)$$

Покажем, что из этой оценки следует, что

$$\|y(t)\| < \rho, \qquad t \in [0,\min\{t',\tau\}]. \qquad (3.4.61)$$

Рассуждения будем проводить от противного. Предположим, что существует $t_1 \in (0,\min\{t',\tau\})$ такое, что $\|y(t_1)\| = \rho$. Тогда $\max\limits_{t\in[0,t_1]}\|y(t)\| \le \rho$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -[p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) - c_5(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))\rho^{2\omega_1}]\|y(t)\|^2$$

$$+\frac{c_4(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))}{(h_{\min}(t))^{1+\omega_1/2}}(V(t,y))^{1+\omega_1/2} - k\int\limits_{t-\tau}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds$$

$$-l\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \quad t \in [0,t_1].$$

Тогда, учитывая определение функционала $V(t,y)$, обозначения (3.4.55) и (3.4.56), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)+\gamma(t)V(t,y)\le \widetilde{q}(V(t,y))^{1+\omega_1/2}. \tag{3.4.62}$$

Поскольку $V(0,\varphi)<R$, где $R>0$ определено в (3.4.57), то в силу неравенства Гронуолла [90] получаем оценку

$$V(t,y)\le \frac{V(0,\varphi)}{\Big(1-\big(R^{-1}V(0,\varphi)\big)^{\omega_1/2}\Big)^{2/\omega_1}}\exp\left(-\int\limits_0^t\gamma(\xi)d\xi\right),$$

откуда имеем неравенство

$$\|y(t)\|\le \Phi_2\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\gamma(\xi)d\xi\right),\quad t\in[0,t_1].$$

Поскольку $\Phi_2<\rho$, $\gamma(t)>0$, то $\|y(t_1)\|<\rho$ — противоречие. Следовательно, выполнено (3.4.61), более того, имеет место неравенство

$$\|y(t)\|\le \Phi_2\exp\left(-\frac{1}{2}\int\limits_0^t\gamma(\xi)d\xi\right),\quad t\in[0,\min\{t',\tau\}]. \tag{3.4.63}$$

Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (3.4.3) определено на всем отрезке $[0,\tau]$, т. е. $t'>\tau$.

Из (3.4.63) вытекает, что если начальная функция $\varphi(t)$ принадлежит множеству $\mathcal{E}$, то $\|y(t)\|<\rho$ при $t\in[0,\tau]$. Тогда в силу теоремы 3.4.3 имеет место оценка

$$\left\|\frac{d}{dt}y(t)\right\|\le\widetilde{\delta}(\rho),\quad t\in[0,\tau], \tag{3.4.64}$$

где $\widetilde{\delta}(\rho)$ определено в (3.4.50). Тогда при $t\in[\tau,2\tau]$ имеем неравенства

$$p_{\min}(t)-c_1\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$-c_5\left(t,\|y(t-\tau)\|,\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)\|y(t)\|^{2\omega_1}$$

$$\geq p_{\min}(t) - c_1(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) - c_5(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho))\|y(t)\|^{2\omega_1} > 0,$$

$$s^1_{\min}(t) - c_2\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$\geq s^1_{\min}(t) - c_2(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) > 0,$$

$$s^2_{\min}(t) - c_3\left(t, \|y(t-\tau)\|, \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$\geq s^2_{\min}(t) - c_3(t,\rho,\widetilde{\delta}(\rho)) > 0.$$

Отсюда вытекает оценка (3.4.62) при $t \in [\tau, t_2)$, где $t_2 = \min\{2\tau, t'\}$. Следовательно, как и выше, используя неравенство Гронуолла и определение функционала $V(t,y)$, получаем неравенство (3.4.63). Из этой оценки вытекает, что решение начальной задачи (3.4.3) определено на всем отрезке $[0, 2\tau]$, т. е. $t' > 2\tau$. Следовательно, если $\varphi(t) \in \mathcal{E}$, то $\|y(t)\| < \rho$ при $t \in [0, 2\tau]$.

Повторяя аналогичные рассуждения, мы получаем, что решение задачи (3.4.3) определено при всех $t > 0$ и удовлетворяет оценке (3.4.45).

Теорема 3.4.5 доказана.

3.5 Некоторые обобщения

В этом параграфе мы обсудим некоторые обобщения результатов, установленных в предыдущих параграфах.

Вначале отметим, что результаты, установленные в случае одного запаздывания, нетрудно распространить на системы с несколькими запаздываниями. Приведем некоторые результаты.

Рассмотрим линейную систему нейтрального типа следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j), \ t > 0, \quad (3.5.1)$$

где $A(t)$, $B_j(t)$, $C_j(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau_j > 0$ — параметры запаздывания, $j = 1, \dots, m$, $\tau_1 > \tau_k > 0$, $k = 2, \dots, m$. Случай одного запаздывания $(m = 1)$

был исследован в предыдущих параграфах. Поэтому всюду далее мы рассматриваем $m \geq 2$.

Теорема 3.5.1 *Предположим, что существуют матрицы $H(t)$, $K_j(s)$, удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (2.5.2), *и матрицы $L_j(s)$ такие, что*

$$L_j(s) \in C^1([0,\tau_j]),\ L_j(s) = L_j^*(s) > 0,\ \frac{d}{ds}L_j(s) < 0,\ s \in [0,\tau_j], \quad (3.5.2)$$

$j = 1, \ldots, m$, *и матрица*

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (3.5.3)$$

положительно определена при $t \in [0,T]$, где

$$Q_{11}(t) = -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - \widetilde{K} - A^*(t)\widetilde{L}A(t),$$

$$Q_{12}(t) = \Big((-H(t)B_1(t) - A^*(t)\widetilde{L}B_1(t)) \cdots (-H(t)B_m(t) - A^*(t)\widetilde{L}B_m(t))\Big),$$

$$Q_{13}(t) = \Big((-H(t)C_1(t) - A^*(t)\widetilde{L}C_1(t)) \cdots (-H(t)C_m(t) - A^*(t)\widetilde{L}C_m(t))\Big),$$

$$Q_{22}(t) = \begin{pmatrix} K_1(\tau_1) - B_1^*(t)\widetilde{L}B_1(t) & \cdots & -B_1^*(t)\widetilde{L}B_m(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_m^*(t)\widetilde{L}B_1(t) & \cdots & K_m(\tau_m) - B_m^*(t)\widetilde{L}B_m(t) \end{pmatrix},$$

$$Q_{23}(t) = \begin{pmatrix} -B_1^*(t)\widetilde{L}C_1(t) & \cdots & -B_1^*(t)\widetilde{L}C_m(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -B_m^*(t)\widetilde{L}C_1(t) & \cdots & -B_m^*(t)\widetilde{L}C_m(t) \end{pmatrix}, \quad (3.5.4)$$

$$Q_{33}(t) = \begin{pmatrix} L_1(\tau_1) - C_1^*(t)\widetilde{L}C_1(t) & \cdots & -C_1^*(t)\widetilde{L}C_m(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -C_m^*(t)\widetilde{L}C_1(t) & \cdots & L_m(\tau_m) - C_m^*(t)\widetilde{L}C_m(t) \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{K} = \sum_{j=1}^m K_j(0), \qquad \widetilde{L} = \sum_{j=1}^m L_j(0). \quad (3.5.5)$$

Тогда нулевое решение системы (3.5.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.5.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j) + \sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j), \quad t > 0,\\
&y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_1, 0],\\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений начальной задачи (3.5.6), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5.1, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -\widetilde{K} - A^*(t)\widetilde{L}A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7). Тогда, как уже отмечалось ранее, из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K_j(s)$, $L_j(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.5.1, введем

$$V(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \sum_{j=1}^{m} \int_{-\tau_j}^{0} \langle K_j(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \int_{-\tau_j}^{0} \left\langle L_j(-s)\frac{d}{ds}\varphi(s), \frac{d}{ds}\varphi(s)\right\rangle ds \tag{3.5.7}$$

и матрицу

$$P(t) = Q_{11}(t) - \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]$$

$$\times\Big[Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]^{-1}$$

$$\times\Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]^* - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{13}^*(t), \tag{3.5.8}$$

где матрицы $Q_{ij}(t)$ определены в (3.5.4). Нетрудно показать, что $P(t)$ положительно определена, если $Q(t)$ в (3.5.3) положительно определена (см. лемму 2.5.1 в параграфе 2.5). Обозначим через $p_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, через $h_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

Теорема 3.5.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.5.1. Пусть $k_j > 0$, $l_j > 0$ — максимальные числа такие, что*

$$\frac{d}{ds}K_j(s) + k_j K_j(s) \le 0, \quad \frac{d}{ds}L_j(s) + l_j L_j(s) \le 0, \quad s \in [0, \tau_j], \tag{3.5.9}$$

$j = 1, \ldots, m$. *Тогда для решения задачи* (3.5.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.5.10}$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k_1, \ldots, k_m, l_1, \ldots, l_m\right\} > 0.$$

Очевидно, утверждение теоремы 3.5.1 непосредственно вытекает из оценки (3.5.10). Поэтому достаточно доказать теорему 3.5.2.

Доказательство теоремы 3.5.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.5.6). Используя матрицу $H(t)$, указанную перед формулировкой теоремы 3.5.2, и матрицы $K_j(s)$, $L_j(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.5.1, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$V(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+ \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t} \left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \tag{3.5.11}$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)z(t),y(t)\rangle+\langle H(t)y(t),z(t)\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\langle K_j(0)y(t),y(t)\rangle-\sum_{j=1}^{m}\langle K_j(\tau_j)y(t-\tau_j),y(t-\tau_j)\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\sum_{j=1}^{m}\left\langle L_j(0)\frac{d}{dt}y(t),\frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\left\langle L_j(\tau_j)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j),\frac{d}{dt}y(t-\tau_j)\right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где

$$z(t)=A(t)y(t)+\sum_{j=1}^{m}B_j(t)y(t-\tau_j)+\sum_{j=1}^{m}C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j).$$

Учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (3.5.1), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=\left\langle\frac{d}{dt}H(t)y(t),y(t)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)z(t),y(t)\rangle+\langle H(t)y(t),z(t)\rangle$$

$$+\langle\widetilde{K}y(t),y(t)\rangle-\sum_{j=1}^{m}\langle K_j(\tau_j)y(t-\tau_j),y(t-\tau_j)\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\left\langle\widetilde{L}z(t),A(t)y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle\widetilde{L}z(t),\sum_{l=1}^{m}B_l(t)y(t-\tau_l)\right\rangle+\left\langle\widetilde{L}z(t),\sum_{l=1}^{m}C_l(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_l)\right\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\left\langle L_j(\tau_j)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j),\frac{d}{dt}y(t-\tau_j)\right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где $\widetilde{K}$, $\widetilde{L}$ заданы в (3.5.5). Используя матрицу $Q(t)$, определенную в (3.5.3), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \qquad (3.5.12)$$

где

$$z_1(t) = \begin{pmatrix} y(t-\tau_1) \\ \vdots \\ y(t-\tau_m) \end{pmatrix}, \qquad z_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}y(t-\tau_1) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau_m) \end{pmatrix}.$$

Для дальнейших преобразований воспользуемся леммой 2.5.1 (см. параграф 2.5). В силу указанной леммы для матрицы $Q(t)$ в (3.5.3) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (3.5.8). Тогда

$$\langle P(t)y(t), y(t)\rangle \geq p_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Следовательно, из (3.5.12) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p_{\min}(t)\|y(t)\|^2 + \sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Очевидно,

$$h_{\min}(t)\|y(t)\|^2 \le \langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \|H(t)\|\,\|y(t)\|^2, \qquad (3.5.13)$$

где $h_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K_j(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя условие (3.5.9), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{m}k_j\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$-\sum_{j=1}^{m}l_j\int\limits_{t-\tau_j}^{t}\left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.5.11) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) = \min\left\{\dfrac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_m\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0, \varphi)$ определено в (3.5.7). Используя (3.5.13), с учетом определения функционала (3.5.11) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h_{\min}(t)} \langle H(t)y(t), y(t) \rangle \le \frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)} \exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (3.5.10).

Теорема 3.5.2 доказана.

Замечание 1. Существование $k_j, l_j > 0$ в теореме 3.5.2 обеспечивается условиями на $K_j(s)$, $L_j(s)$, указанными в формулировке теоремы 3.5.1.

Замечание 2. Неравенство (3.5.10) дает оценки скорости экспоненциального убывания решений системы (3.5.1) на бесконечности, при этом мы не используем спектральную информацию (спектр оператора монодромии или корни квазимногочленов в случае постоянных коэффициентов).

Из доказательства теоремы 3.5.2 вытекает следующая переформулировка теоремы 3.5.1.

Теорема 3.5.3 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$ $K_j(s)$, $L_j(s)$ $j = 1, \dots, m$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (2.5.2), (3.5.2), *и такие, что*

$$P(t) > 0, \quad Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t) > 0, \quad Q_{33}(t) > 0, \qquad t \in [0, T].$$

Тогда нулевое решение системы (3.5.1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство теоремы 3.5.3. В силу леммы 2.5.1 (см. параграф 2.5) матрица $Q(t)$ в (3.5.3) положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$, $Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)$ и $Q_{33}(t)$ положительно определены.

Замечание. Отметим, что требование положительной определенности матрицы $Q_{33}(t)$ влечет условие принадлежности собственных значений матриц $C_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, при всех $t \in [0, T]$ единичному кругу $\{\lambda \in \mathbb{R} : \ |\lambda| < 1\}$, что согласуется с хорошо известными результатами для уравнений нейтрального типа с постоянной матрицей C. Действительно, если $Q_{33}(t) > 0$, то

$$L_k(\tau_k) - C_k^*(t) \left(\sum_{j=1}^{m} L_j(0) \right) C_k(t) = F_k(t) > 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad t \in [0, T].$$

В силу (3.5.21)

$$L_k(0) - C_k^*(t) L_k(0) C_k(t) > F_k(t) + C_k^*(t) \left(\sum_{\substack{j=1,\\ j \neq k}}^{m} L_j(0) \right) C_k(t),$$

т. е. при каждом $t \in [0, T]$ матрица $L_k(0) = L_k^*(0) > 0$ удовлетворяет дискретному уравнению Ляпунова

$$L_k(0) - C_k^*(t) L_k(0) C_k(t) = G_k(t)$$

с положительно определенной эрмитовой правой частью. Тогда согласно критерию Ляпунова [28] все собственные значения матрицы $C_k(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ лежат в единичном круге.

Условия (2.5.2), (3.5.2) на $K_j(s)$, $L_j(s)$ можно ослабить, при этом отказаться от требования положительной определенности матрицы $Q(t)$ в (3.5.3).

Теорема 3.5.4 *Предположим, что существует матрица $H(t)$, удовлетворяющая условию* (1.2.2), *и матрицы $K_j(s)$, $L_j(s)$ такие, что*

$$K_j(s) \in C^1([0, \tau_j]), \ K_j(s) = K_j^*(s) \geq 0, \ \frac{d}{ds} K_j(s) \leq 0, \ s \in [0, \tau_j],$$

$$L_j(s) \in C^1([0, \tau_j]), \ L_j(s) = L_j^*(s) \geq 0, \ \frac{d}{ds} L_j(s) \leq 0, \ s \in [0, \tau_j],$$

$j = 1, \dots, m$, и для матрицы $Q(t)$ в (3.5.3) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle S(t) u, u \rangle, \tag{3.5.14}$$

$$u \in \mathbb{C}^n, \quad v, w \in \mathbb{C}^{n \times m}, \qquad t \in [0, T],$$

где $S(t) > 0$ — положительно определенная эрмитова матрица с непрерывными элементами. Если существуют k_j, $l_j > 0$, удовлетворяющие

(3.5.9), *тогда нулевое решение системы* (3.5.1) *экспоненциально устойчиво, причем для решения задачи* (3.5.6) *имеет место оценка* (3.5.10), *где*

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k_1, \dots, k_m, l_1, \dots, l_m\right\}, \qquad (3.5.15)$$

$s_{\min}(t)$ — *минимальное собственное значение матрицы* $S(t)$.

Здесь $s_{\min}(t)$, $H(t)$ — T-периодические продолжения исходных функций на всю полуось $\{t \geq 0\}$.

Доказательство теоремы 3.5.4. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5.4, то в силу (3.5.14)

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) \leq -S(t) - \widetilde{K} - A^*(t)\widetilde{L}A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7). Тогда, как уже отмечалось ранее, из [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим $H(t)$ и $S(t)$, сохраняя то же обозначение, T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K_j(s)$, $L_j(s)$, $j = 1, \dots, m$, рассмотрим на решении задачи (3.5.6) функционал (3.5.11). Как при доказательстве теоремы 3.5.2, после дифференцирования получаем (3.5.12). В силу (3.5.14)

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle S(t)y(t), y(t)\rangle \geq s_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $s_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $S(t)$. Используя (3.5.9) и (3.5.13), из (3.5.12) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{s_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-\sum_{j=1}^{m} k_j \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds$$

$$-\sum_{j=1}^{m} l_j \int\limits_{t-\tau_j}^{t} \left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.5.11) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) > 0$ определено в (3.5.15). Отсюда, как при доказательстве теоремы 3.5.2, имеем неравенство (3.5.10).

Теорема 3.5.4 доказана.

Замечание. Условия теоремы 3.5.4 являются менее ограничительными, но условия теоремы 3.5.1 позволяют указать матрицу $S(t)$, используемую в этих теоремах, в явном виде; например, в качестве $S(t)$ можно взять матрицу $P(t)$, определенную в (3.5.8). Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Рассмотрим теперь системы нейтрального типа с переменным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \quad t > 0, \end{aligned} \tag{3.5.16}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau(t)$ — функция, определяющая запаздывание, $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$,

$$0 < \tau_1 \le \tau(t) \le \tau_2, \qquad \tau_3 \le \frac{d}{dt}\tau(t) \le \tau_4 < 1. \tag{3.5.17}$$

Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t,u_1,u_2,u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \qquad t \ge 0, \tag{3.5.18}$$

$$u_j \in \mathbb{R}^n, \quad q_j \ge 0, \quad j = 1,2,3.$$

Наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. Мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (3.5.16) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (3.5.16) на бесконечности. Из доказанных утверждений будут вытекать результаты о робастной устойчивости решений линейных систем ($q_j = 0$) с переменным запаздыванием

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)). \quad (3.5.19)$$

Вначале мы исследуем экспоненциальную устойчивость решений линейных систем вида (3.5.19).

Теорема 3.5.5 *Предположим, что существует матрица $H(t)$, удовлетворяющая условию (1.2.2), и матрицы $K(s)$, $L(s)$ такие, что*

$$K(s) \in C^1([0,\tau_2]),\ K(s) = K^*(s) > 0,\ \frac{d}{ds}K(s) < 0,\ s \in [0,\tau_2], \quad (3.5.20)$$

$$L(s) \in C^1([0,\tau_2]),\ L(s) = L^*(s) > 0,\ \frac{d}{ds}L(s) < 0,\ s \in [0,\tau_2], \quad (3.5.21)$$

и матрица

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \quad (3.5.22)$$

с элементами

$$\begin{aligned} Q_{11}(t) &= -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(0) - A^*(t)L(0)A(t), \\ Q_{12}(t) &= -H(t)B(t) - A^*(t)L(0)B(t), \\ Q_{13}(t) &= -H(t)C(t) - A^*(t)L(0)C(t), \\ Q_{22}(t) &= (1-\tau_4)K(\tau_2) - B^*(t)L(0)B(t), \\ Q_{23}(t) &= -B^*(t)L(0)C(t), \\ Q_{33}(t) &= (1-\tau_3)^{-1}L(\tau_2) - C^*(t)L(0)C(t), \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

положительно определена при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (3.5.19) экспоненциально устойчиво.

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.5.19):

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0])$ — заданная вектор-функция. Ниже мы указываем оценки для решений начальной задачи (3.5.24), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Если матрица $H(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.5.5, то

$$\frac{d}{dt}H(t) + H(t)A(t) + A^*(t)H(t) < -K(0) - A^*(t)L(0)A(t),$$

т. е. $H(t)$ является решением краевой задачи вида (1.2.7) для дифференциального уравнения Ляпунова. Тогда, как уже отмечалось ранее, из результатов работы [29] следует, что $H(t) > 0$ на всем отрезке $[0, T]$. Продолжим эту матрицу T-периодическим образом на всю полуось $\{t \geq 0\}$, сохраняя то же обозначение. Используя эту матрицу $H(t)$ и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.5.5, введем следующие обозначения:

$$V(0, \varphi) = \langle H(0)\varphi(0), \varphi(0)\rangle + \int_{-\tau(0)}^{0} \langle K(-s)\varphi(s), \varphi(s)\rangle ds$$

$$+ \int_{-\tau(0)}^{0} \left\langle L(-s)\frac{d}{ds}\varphi(s), \frac{d}{ds}\varphi(s)\right\rangle ds, \tag{3.5.25}$$

$$P(t) = Q_{11}(t) - \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}(t)Q_{23}^*(t)\Big]\Big[Q_{22}(t) - Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^{-1}$$

$$\times\Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^* - Q_{13}(t)Q_{33}^{-1}Q_{13}^*(t), \tag{3.5.26}$$

где матрицы $Q_{ij}(t)$ определены в (3.5.23). Нетрудно показать, что $P(t)$ положительно определена, если $Q(t)$ в (3.5.22) положительно определена (см. лемму 2.5.1 в параграфе 2.5). Обозначим через $p_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$, через $h_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $H(t)$.

Теорема 3.5.6 *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.5.5. Пусть k, $l > 0$ — максимальные числа такие, что*

$$\frac{d}{ds}K(s) + kK(s) \leq 0, \quad \frac{d}{ds}L(s) + lL(s) \leq 0, \quad s \in [0, \tau_2]. \tag{3.5.27}$$

Тогда для решения задачи (3.5.24) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t>0, \tag{3.5.28}$$

где

$$\gamma(t) = \min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0.$$

Очевидно, утверждение теоремы 3.5.5 непосредственно вытекает из оценки (3.5.28). Поэтому достаточно доказать теорему 3.5.6.

Доказательство теоремы 3.5.6. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.5.24). Используя матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, указанные выше, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$V(t,y) = \langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+ \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds. \tag{3.5.29}$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t)\right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)), y(t-\tau(t))\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \left\langle L(0)\frac{d}{dt}y(t), \frac{d}{dt}y(t)\right\rangle$$

$$-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда, учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (3.5.19), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=\left\langle\frac{d}{dt}H(t)y(t),y(t)\right\rangle$$
$$+\langle H(t)z(t),y(t)\rangle+\langle H(t)y(t),z(t)\rangle$$
$$+\langle K(0)y(t),y(t)\rangle-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\langle L(0)z(t),z(t)\rangle$$
$$-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$
$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где

$$z(t)=A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)).$$

В силу условий (3.5.17), (3.5.20) и (3.5.21) имеем

$$\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle$$
$$\geq(1-\tau_4)\langle K(\tau_2)y(t-\tau(t)),y(t-\tau(t))\rangle,$$
$$\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$
$$\geq(1-\tau_3)^{-1}\left\langle L(\tau_2)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \qquad (3.5.30)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (3.5.22).

В силу леммы 2.5.1 (см. параграф 2.5) для матрицы $Q(t)$ в (3.5.22) имеем

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P(t)y(t),y(t)\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (3.5.26). Тогда

$$\langle P(t)y(t),y(t)\rangle \geq p_{\min}(t)\|y(t)\|^2,$$

где $p_{\min}(t)>0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Следовательно, из (3.5.30) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq -\langle p_{\min}(t)y(t),y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Очевидно, для $H(t)$ справедливы неравенства (3.5.13). Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle\frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Используя условие (3.5.27), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\,ds-l\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (3.5.29) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le-\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)=\min\left\{\frac{p_{\min}(t)}{\|H(t)\|},k,l\right\}$. Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y)\le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t\gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (3.5.25). Используя (3.5.13), с учетом определения функционала (3.5.29) получаем

$$\|y(t)\|^2\le\frac{1}{h_{\min}(t)}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle\le\frac{V(t,y)}{h_{\min}(t)}\le\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t\gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда имеем требуемое неравенство (3.5.28).

Теорема 3.5.6 доказана.

Замечание. Существование k, $l>0$ в теореме 3.5.6 обеспечивается условиями (3.5.20), (3.5.21).

Опираясь на доказательство теоремы 3.5.6, можно переформулировать теорему 3.5.5 следующим образом.

Теорема 3.5.7 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (3.5.20), (3.5.21), *такие, что*

$$P(t)>0,\quad Q_{22}(t)-Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)>0,\quad Q_{33}(t)>0$$

при $t\in[0,T]$. *Тогда нулевое решение системы* (3.5.19) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу леммы 2.5.1 (см. параграф 2.5) матрица $Q(t)$ в (3.5.22) положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$, $Q_{22}(t)-Q_{23}(t)Q_{33}^{-1}Q_{23}^*(t)$ и $Q_{33}(t)$ положительно определены.

Замечание. Результаты легко обобщаются на случай систем с несколькими переменными запаздываниями

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t)+\sum_{j=1}^{m} B_j(t)y(t-\tau_j(t))+\sum_{j=1}^{m} C_j(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau_j(t)), \qquad t \ge 0,$$

где $A(t)$, $B_j(t)$, $C_j(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau_j(t) \in C^1([0,\infty))$ — функции, определяющие запаздывание,

$$0 < \tau_1 \le \tau_j(t) \le \tau_2, \quad \tau_3 \le \frac{d}{dt}\tau_j(t) \le \tau_4 < 1, \quad j = 1,\dots,m.$$

Для этого можно использовать функционал Ляпунова – Красовского следующего вида

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j(t)}^{t} \langle K_j(t-s)y(s), y(s)\rangle ds$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t-\tau_j(t)}^{t} \left\langle L_j(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

Предполагая, что выполнены условия теоремы 3.5.5, ниже мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения нелинейных систем вида (3.5.16). Используя матрицу $H(t)$, определенную выше на всей полуоси $\{t \ge 0\}$, и матрицы $K(s)$, $L(s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.5.5, введем функции

$$\begin{aligned} \beta_1(t) =&\ 2\|H(t)\| + (2\|A(t)\| + q_1)\|L(0)\|, \\ \beta_2(t) =&\ (2\|B(t)\| + q_2)\|L(0)\|, \\ \beta_3(t) =&\ (2\|C(t)\| + q_3)\|L(0)\|, \end{aligned} \qquad (3.5.31)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) =&\ q_1\beta_1(t) + \frac{q_1\beta_2(t) + q_2\beta_1(t)}{2} + \frac{q_1\beta_3(t) + q_3\beta_1(t)}{2}, \\ \alpha_2(t) =&\ q_2\beta_2(t) + \frac{q_2\beta_1(t) + q_1\beta_2(t)}{2} + \frac{q_2\beta_3(t) + q_3\beta_2(t)}{2}, \\ \alpha_3(t) =&\ q_3\beta_3(t) + \frac{q_3\beta_1(t) + q_1\beta_3(t)}{2} + \frac{q_3\beta_2(t) + q_2\beta_3(t)}{2}, \end{aligned} \qquad (3.5.32)$$

и матрицу

$$Q^{\alpha}(t) = Q(t) - \begin{pmatrix} \alpha_1(t)I & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t)I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3(t)I \end{pmatrix}. \qquad (3.5.33)$$

Теорема 3.5.8 *Пусть выполнены условия теоремы 3.5.5. Предположим, что q_1, q_2, q_3 такие, что матрица $Q^{\alpha}(t)$ положительно определена при $t \in [0,T]$. Тогда нулевое решение системы (3.5.16) экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (3.5.16)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\ &\qquad\qquad +F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \qquad (3.5.34)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Ниже мы укажем оценки для решений начальной задачи (3.5.34), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Введем матрицу

$$\begin{aligned} P^{\alpha}(t) = Q_{11}(t) - \alpha_1(t)I - \Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)\Big] \\ \times\Big[Q_{22}(t) - \alpha_2(t)I - Q_{23}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^{-1} \\ \times\Big[Q_{12}(t) - Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)\Big]^{*} \\ -Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \alpha_3(t)I)^{-1}Q_{13}^*(t), \end{aligned} \qquad (3.5.35)$$

где матрицы $Q_{ij}(t)$ определены в (3.5.23). Нетрудно показать, что $P^{\alpha}(t)$ положительно определена, если $Q^{\alpha}(t)$ в (3.3.5) положительно определена (см. лемму 2.5.1 в параграфе 2.5). Обозначим через $p^{\alpha}_{\min}(t) > 0$ минимальное собственное значение матрицы $P^{\alpha}(t)$.

Теорема 3.5.9 *Предположим, что выполнены условия теоремы 3.5.8. Пусть* k, $l > 0$ *— максимальные числа такие, что выполнены неравенства* (3.5.27). *Тогда для решения задачи* (3.5.34) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^\alpha(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{3.5.36}$$

где

$$\gamma^\alpha(t) = \min\left\{\frac{p^\alpha_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k, l\right\} > 0.$$

Очевидно, утверждение теоремы 3.5.8 непосредственно вытекает из оценки (3.5.36). Поэтому достаточно доказать теорему 3.5.9.

Доказательство теоремы 3.5.9. Будем следовать схеме, изложенной при доказательстве теоремы 3.3.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (3.5.34). Используя матрицы $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, указанные выше, рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского (3.5.29). Дифференцируя его и повторяя рассуждения из доказательства теоремы 3.3.2, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)z(t), y(t)\rangle + \left\langle H(t)F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), y(t)\right\rangle$$

$$+\langle H(t)y(t), z(t)\rangle + \left\langle H(t)y(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle$$

$$+\langle K(0)y(t), y(t)\rangle - \left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)\langle K(\tau(t))y(t-\tau(t)), y(t-\tau(t))\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\langle L(0)z(t), z(t)\rangle + \left\langle L(0)F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), z(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)z(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right),\right.$$

$$\left. F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle$$

$$-\left(1-\frac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1}\left\langle L(\tau(t))\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)).$$

Используя (3.5.17), (3.5.20) и (3.5.21), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle + W(t)$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds, \tag{3.5.37}$$

где $Q(t)$ определена в (3.5.22),

$$W(t) = \left\langle H(t)F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), y(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle H(t)y(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), z(t)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)z(t), F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle$$

$$+\left\langle L(0)F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right),\right.$$
$$\left. F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\right\rangle.$$

В силу (3.5.18) имеем

$$W(t) \leq \left(\beta_1(t)\|y(t)\| + \beta_2(t)\|y(t-\tau(t))\| + \beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|\right)$$
$$\times\left(q_1\|y(t)\| + q_2\|y(t-\tau(t))\| + q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|\right).$$

где функции $\beta_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, определены в (3.5.31). Очевидно, справедлива оценка

$$W(t) \leq \alpha_1(t)\|y(t)\|^2 + \alpha_2(t)\|y(t-\tau(t))\|^2 + \alpha_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|^2,$$

где функции $\alpha_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, заданы в (3.5.32). Тогда из (3.5.37) вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s), y(s)\right\rangle ds + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s), \frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где матрица $Q^\alpha(t)$ определена в (3.5.33). Используя лемму 2.5.1 из параграфа 2.5, получаем

$$\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle \geq \langle P^\alpha(t)y(t), y(t)\rangle,$$

где $P^\alpha(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (3.5.35). Тогда

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\langle p_{\min}(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}K(t-s)y(s),y(s)\right\rangle ds+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds,$$

где $p^{\alpha}_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P^{\alpha}(t)$. Используя (3.5.13) и (3.5.27), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -\frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}\langle H(t)y(t),y(t)\rangle$$

$$-k\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\langle K(t-s)y(s),y(s)\rangle\, ds-l\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle L(t-s)\frac{d}{ds}y(s),\frac{d}{ds}y(s)\right\rangle ds.$$

В силу определения функционала (3.5.29) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -\gamma^{\alpha}(t)V(t,y),$$

где $\gamma^{\alpha}(t)=\min\left\{\frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|H(t)\|},k,l\right\}$. Из этого дифференциального неравенства мы получаем оценку

$$V(t,y)\le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t\gamma^{\alpha}(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (3.5.25). Отсюда, рассуждая как выше, приходим к неравенству

$$\|y(t)\|^2\le\frac{V(0,\varphi)}{h_{\min}(t)}\exp\left(-\int_0^t\gamma^{\alpha}(\xi)d\xi\right),$$

из которого следует (3.5.36).

Теорема 3.5.9 доказана.

Теорему 3.5.8 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 3.5.10 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$, *удовлетворяющие условиям* (1.2.2), (3.5.20), (3.5.21) *и такие, что*

$$P^{\alpha}(t)>0,\quad Q_{22}(t)-\alpha_2(t)I-Q_{23}(t)(Q_{33}(t)-\alpha_3(t)I)^{-1}Q^{*}_{23}(t)>0,$$

$$Q_{33}(t)-\alpha_3(t)I>0$$

при $t\in[0,T]$. *Тогда нулевое решение системы* (3.5.19) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. В силу леммы 2.5.1 (см. параграф 2.5) матрица $Q^\alpha(t)$ в (3.5.33) положительно определена тогда и только тогда, когда матрицы $P^\alpha(t)$, $Q_{22}(t)-\alpha_2(t)I-Q_{23}(t)(Q_{33}(t)-\alpha_3(t)I)^{-1}Q_{23}^*(t)$, $Q_{33}(t)-\alpha_3(t)I$ положительно определены.

Замечание. Полученные выше результаты дают утверждения о робастной устойчивости для систем вида (3.5.16). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t)=A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau(t))+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))$$

$$+\Delta A(t)y(t)+\Delta B(t)y(t-\tau(t))+\Delta C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \qquad (3.5.38)$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$ — неизвестные $(n\times n)$ матрицы такие, что

$$\|\Delta A(t)\|\le q_1,\quad \|\Delta B(t)\|\le q_2,\quad \|\Delta C(t)\|\le q_3.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t,u_1,u_2,u_3)=\Delta A(t)u_1+\Delta B(t)u_2+\Delta C(t)u_3$$

удовлетворяет неравенству (3.5.18). Тогда теорема 3.5.8 дает условия робастной устойчивости для (3.5.16), теорема 3.5.9 — оценки экспоненциального убывания решений возмущенной системы (3.5.38).

Пример. Рассмотрим уравнение с запаздыванием вида (3.5.16)

$$\frac{d}{dt}y(t)=(0.1\cos t-2)y(t)-0.1y(t-\tau(t))$$

$$+q\cos\left(\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \qquad (3.5.39)$$

где $\tau(t)=0.5\sin t+1$. Очевидно, $\tau(t)$ удовлетворяет условиям (3.5.17) с

$$\tau_1=0.5,\quad \tau_2=1.5,\quad \tau_3=-0.5,\quad \tau_4=0.5,$$

функция $F(t,u_1,u_2,u_3)=q\cos(u_3)u_3$ — неравенству (3.5.18) с $q_1=q_2=0$, $q_3=q$.

Вначале рассмотрим линейный случай, т.е. $q=0$. Выберем функции $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$ следующим образом

$$H(t)=0.5-0.1\sin t,\quad K(s)=0.27e^{-1.65s},\quad L(s)=0.001e^{-1.65s}.$$

Очевидно, эти функции удовлетворяют (1.2.2), (3.5.20), (3.5.21) и (3.5.27) при $k = l = 1.65$. В этом случае элементы матрицы $Q(t)$ имеют вид

$$Q_{11}(t) = 1.73 - 0.4\sin t + 0.02\sin t\cos t - 0.001(2 - 0.1\cos t)^2,$$

$$Q_{12}(t) = 0.0498 - 0.01\sin t + 0.00001\cos t, \quad Q_{13}(t) = 0,$$

$$Q_{22}(t) = 0.135e^{-2.475} - 0.00001, \quad Q_{23}(t) = 0, \quad Q_{33}(t) = \frac{0.002}{3}e^{-2.475}.$$

Нетрудно проверить, что $Q(t)$ является положительно определенной при $t \in [0, 2\pi]$. Тогда в силу теоремы 3.5.5 нулевое решение уравнения (3.5.39) при $q = 0$ экспоненциально устойчиво. Согласно теореме 3.5.6, чтобы оценить скорость убывания решений уравнения (3.5.39), нужно вычислить функции $P(t)$ и $\gamma(t) = \min\left\{\frac{P(t)}{\|H(t)\|}, 1.65\right\}$. В нашем случае

$$P(t) = Q_{11}(t) - Q_{12}^2(t)(Q_{22}(t))^{-1}, \qquad \|H(t)\| = |0.5 - 0.1\sin t|.$$

Нетрудно показать, что

$$P(t) \geq 0.99047, \qquad \|H(t)\| \leq 0.6.$$

Следовательно, $\frac{P(t)}{\|H(t)\|} \geq 1.65078$ и $\gamma(t) = 1.65$. В силу (3.5.28) мы имеем оценку

$$\|y(t)\| \leq ce^{-0.825t}, \qquad c > 0,$$

для решений уравнения (3.5.39) при $q = 0$.

Рассмотрим теперь уравнение (3.5.39) при $q = 0.1$. Выберем функции $H(t)$, $K(s)$, $L(s)$ следующим образом

$$H(t) = 0.5 - 0.1\sin t, \quad K(s) = 0.06e^{-0.27s}, \quad L(s) = 0.28e^{-0.27s}.$$

Очевидно, эти функции удовлетворяют (1.2.2), (3.5.20), (3.5.21) и (3.5.27) при $k = l = 0.27$. В этом случае элементы матрицы $Q(t)$ имеют вид

$$Q_{11}(t) = 1.94 - 0.4\sin t + 0.02\sin t\cos t - 0.28(2 - 0.1\cos t)^2,$$

$$Q_{12}(t) = -0.006 - 0.01\sin t + 0.0028\cos t, \quad Q_{13}(t) = 0,$$

$$Q_{22}(t) = 0.03e^{-0.405} - 0.0028, \quad Q_{23}(t) = 0, \quad Q_{33}(t) = \frac{0.56}{3}e^{-0.405}$$

и

$$\beta_1(t) = |1 - 0.2\sin t| + |1.12 - 0.056\cos t|, \quad \beta_2(t) = 0.056, \quad \beta_3(t) = 0.028,$$

$$\alpha_1(t) = |0.05 - 0.01\sin t| + |0.056 - 0.0028\cos t|, \quad \alpha_2(t) = 0.0028,$$
$$\alpha_3(t) = |0.05 - 0.01\sin t| + |0.056 - 0.0028\cos t| + 0.0056.$$

Нетрудно проверить, что матрица $Q^\alpha(t)$, заданная в (3.5.33), является положительно определенной при $t \in [0, 2\pi]$. Тогда в силу теоремы 3.5.8 нулевое решение уравнения (3.5.39) при $q = 0.1$ экспоненциально устойчиво. Согласно теореме 3.5.9, чтобы оценить скорость убывания решений уравнения (3.5.39), нужно вычислить функции $P^\alpha(t)$ и $\gamma^\alpha(t) = \min\Big\{\frac{P^\alpha(t)}{\|H(t)\|}, 0.27\Big\}$. В нашем случае

$$P^\alpha(t) = Q_{11}(t) - \alpha_1(t) - Q_{12}^2(t)(Q_{22}(t) - \alpha_2(t))^{-1}.$$

Нетрудно показать, что $P^\alpha(t) \geq 0.16319$. Следовательно, $\frac{P^\alpha(t)}{\|H(t)\|} \geq 0.27198$ и $\gamma^\alpha(t) = 0.27$. В силу (3.5.36) мы имеем оценку

$$\|y(t)\| \leq ce^{-0.135t}, \qquad c > 0,$$

для решений уравнения (3.5.39) при $q = 0.1$.

Глава 4

Оценки решений неавтономных систем с запаздыванием

4.1 Постановка задачи и содержание главы

В этой главе мы рассмотрим классы систем дифференциальных уравнений нейтрального типа следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \qquad t>0, \quad (4.1.1)\end{aligned}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, т. е.

$$a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) \in C([0,\infty)), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

функция $\tau(t) > 0$, определяющая запаздывание, может быть постоянной, ограниченной или неограниченной. Наша цель — получить оценки для решений системы (4.1.1) на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости мы укажем скорость стабилизации решений на бесконечности.

При получении результатов мы будем использовать класс функционалов Ляпунова – Красовского, предложенный в [65], следующего вида

$$\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds. \qquad (4.1.2)$$

Этот класс включает в себя функционалы, использованные в предыдущих главах. В частности, он содержит функционал, предложенный в [32] и использованный в главе 1. Действительно, для этого достаточно положить

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t,s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Класс (4.1.2) содержит функционал, предложенный в [35] и использованный в главе 2. Действительно, для этого достаточно положить

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & -H(t)C \\ -C^*H(t) & C^*H(t)C \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t,s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что класс (4.1.2) содержит функционал, предложенный в [61] и использованный в главе 3. Действительно, для этого достаточно положить

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t,s) = \begin{pmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & L(s) \end{pmatrix}.$$

Класс функционалов Ляпунова – Красовского вида (4.1.2) позволяет исследовать экспоненциальную устойчивость решений для более широкого класса систем с периодическими коэффициентами в линейной части по сравнению с рассматриваемыми в предыдуших главах. Более того, с использованием функционалов из данного класса и их обобщений на случай переменного запаздывания можно получать оценки для решений систем вида (4.1.1) с переменными коэффициентами.

В параграфе 4.2 мы исследуем линейные системы

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \qquad (4.1.3)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы с T-периодическими элементами, запаздывание является постоянным. В параграфе 4.3 мы установим условия робастной устойчивости для линейных систем (4.1.3) и исследуем экспоненциальную устойчивость решений систем вида (4.1.1) с периодическими коэффициентами в линейной части при

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \; q_j \ge 0, \; j = 1,2,3. \quad (4.1.4)$$

В параграфе 4.4 мы получаем оценки на всей полуоси $\{t \geq 0\}$ для решений линейных систем

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \quad t > 0, \quad (4.1.5)$$

с произвольными переменными коэффициентами и переменным запаздыванием. На основе этих оценок мы сможем сделать вывод об устойчивости решений и скорости стабилизации на бесконечности. В параграфе 4.5 мы устанавливаем оценки для решений систем вида (4.1.1) с переменными коэффициентами в линейной части и переменным запаздыванием, если $F(t, u_1, u_2, u_3)$ удовлетворяет условию (4.1.4). В параграфе 4.6 аналогичные исследования проведены для систем вида (4.1.1), когда

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \leq q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3\|u_3\|^{1+\omega_3},$$
$$q_j \geq 0, \quad \omega_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

В параграфе 4.7 рассмотрен класс неавтономных систем с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [65, 67, 142, 143, 144].

4.2 Линейные периодические системы нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \quad (4.2.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Как в предыдущей главе, наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем, но при этом мы будем использовать функционал Ляпунова – Красовского вида (4.1.2).

С использованием функционала (4.1.2) мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (4.2.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (4.2.1) на бесконечности.

Введем обозначения для матриц размера $2n \times 2n$:

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t,s) = \begin{pmatrix} K_1(t,s) & K_2(t,s) \\ K_2^*(t,s) & K_3(t,s) \end{pmatrix}$$

такие, что

$$\mathcal{H}(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+) \cap C^1([lT,(l+1)T]), \quad l = 0,1,\dots, \tag{4.2.2}$$

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t), \quad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t+T), \quad t \geq 0, \tag{4.2.3}$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq h(t)\|u\|^2, \quad u, v \in \mathbb{C}^n, \quad t \geq 0, \tag{4.2.4}$$

где $h(t) > 0$ — непрерывная T-периодическая функция,

$$\mathcal{K}(t,s) \in C^1([0,\infty) \times [0,\tau]), \tag{4.2.5}$$

$$\mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}^*(t,s), \quad \mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}(t+T,s), \quad \mathcal{K}(t,s) \geq 0. \tag{4.2.6}$$

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{4.2.7}$$

с элементами

$$\begin{aligned}
Q_{11}(t) = {} & -\frac{d}{dt}H_1(t) - H_1(t)A(t) - A^*(t)H_1(t) \\
& -K_1(t,0) - K_2(t,0)A(t) - A^*(t)K_2(t,0) - A^*(t)K_3(t,0)A(t), \\
Q_{12}(t) = {} & -\frac{d}{dt}H_2(t) - H_1(t)B(t) - A^*(t)H_2(t) \\
& -K_2(t,0)B(t) - A^*(t)K_3(t,0)B(t), \\
Q_{13}(t) = {} & -H_1(t)C(t) - H_2(t) - K_2(t,0)C(t) - A^*(t)K_3(t,0)C(t), \\
Q_{22}(t) = {} & -\frac{d}{dt}H_3(t) - H_2^*(t)B(t) - B^*(t)H_2(t) \\
& +K_1(t,\tau) - B^*(t)K_3(t,0)B(t), \\
Q_{23}(t) = {} & -H_2^*(t)C(t) - H_3(t) + K_2(t,\tau) - B^*(t)K_3(t,0)C(t), \\
Q_{33}(t) = {} & K_3(t,\tau) - C^*(t)K_3(t,0)C(t).
\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Теорема 4.2.1 *Предположим, что существуют матрицы* $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (4.2.2)–(4.2.6), *такие, что для матрицы* $Q(t)$ *в* (4.2.7) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right\rangle \geq p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\rangle, \qquad (4.2.9)$$

$$u, v, w \in \mathbb{C}^n, \qquad t \geq 0,$$

где $p(t)$ — T*-периодическая функция,* $p(t) \in C([lT,(l+1)T])$, $l = 0, 1, \ldots$. *Если существует* T*-периодическая функция* $k(t)$ *такая, что*

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}K(t,s) + k(t)K(t,s) \leq 0, \quad t \geq 0, \quad s \in [0,\tau], \qquad (4.2.10)$$

и

$$\int\limits_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \quad \textit{где} \quad \gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k(\xi)\}, \qquad (4.2.11)$$

тогда нулевое решение системы (4.2.1) *экспоненциально устойчиво.*

Рассмотрим начальную задачу для системы (4.2.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \quad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \qquad (4.2.12)$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau,0])$ — заданная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений начальной задачи (4.2.12), характеризующие скорость экспоненциального убывания при $t \to \infty$.

Теорема 4.2.2 *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.2.1. Тогда для решения задачи* (4.2.12) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \qquad (4.2.13)$$

где

$$V(0,\varphi) = \left\langle \mathcal{H}(0)\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{-\tau}^{0}\left\langle \mathcal{K}(0,-s)\begin{pmatrix}\varphi(s)\\ \dfrac{d}{ds}\varphi(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\varphi(s)\\ \dfrac{d}{ds}\varphi(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \tag{4.2.14}$$

функции $h(t)$ *и* $\gamma(t)$ *определены в* (4.2.4) *и* (4.2.11) *соответственно.*

Нетрудно убедиться, что оценка (4.2.13) при условии (4.2.11) гарантирует экспоненциальное убывание решений задачи (4.2.12) при $t \to \infty$. Действительно, в силу T-периодичности $\gamma(t)$, при любом $t = jT + \eta$, $j = 0, 1, 2, \dots$, $0 \le \eta < T$, имеем

$$\int_0^t \gamma(\xi)d\xi = j\int_0^T \gamma(\xi)d\xi + \int_0^\eta \gamma(\xi)d\xi$$

$$= \frac{t}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi - \frac{\eta}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi + \int_0^\eta \gamma(\xi)d\xi \ge \gamma_1 t - (\gamma_1-\gamma_2)T,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma(\xi)d\xi > 0, \qquad \gamma_2 = \min_{\xi\in[0,T]}\gamma(\xi).$$

Тогда из (4.2.13) получаем

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \frac{(\gamma_1-\gamma_2)T}{2}\right). \tag{4.2.15}$$

Замечание. Неравенство (4.2.15) позволяет оценить скорость экспоненциального убывания решений системы (4.2.1) на бесконечности, при этом мы не используем спектральную информацию (спектр оператора монодромии или корни квазимногочленов в случае постоянных коэффициентов).

Очевидно, утверждение теоремы 4.2.1 непосредственно вытекает из оценки (4.2.15), которая следует из неравенства (4.2.13), как показано выше. Поэтому достаточно доказать теорему 4.2.2.

Доказательство теоремы 4.2.2. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.2.12). Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.2.1, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского

$$V(t,y) = \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds. \qquad (4.2.16)$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}y(t)\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}y(t)\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t)\\ \dfrac{d}{dt}y(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ \dfrac{d}{dt}y(t)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-\left\langle \mathcal{K}(t,\tau)\begin{pmatrix} y(t-\tau)\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t-\tau)\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (4.2.1), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)=-\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \qquad (4.2.17)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (4.2.7). Используя (4.2.9), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

В силу (4.2.10) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.2.16) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (4.2.11). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (4.2.14). Используя (4.2.4), с учетом определения функционала (4.2.16) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h(t)}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\le \frac{V(t,y)}{h(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем неравенство (4.2.13).

Теорема 4.2.2 доказана.

Скорость убывания в (4.2.13) зависит от функции $p(t)$. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении этой функции. Ниже при чуть более ограничительных условиях по сравнению с теоремой 4.2.1 мы укажем такую функцию в явном виде. Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.2.2)–(4.2.6), такие, что матрица $Q(t)$ в (4.2.7) положительно определена при $t \geq 0$. Перепишем матрицу $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^*(t) & Q_3(t) \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{pmatrix} Q_{13}(t) \\ Q_{23}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_3(t) = Q_{33}(t),$$

$Q_{ij}(t)$ определены в (4.2.8). Очевидно,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} I & Q_2(t)Q_3^{-1}(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & Q_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_3^{-1}Q_2^*(t) & I \end{pmatrix}, \quad (4.2.18)$$

где

$$P(t) = Q_1(t) - Q_2(t)Q_3^{-1}(t)Q_2^*(t). \quad (4.2.19)$$

Если $Q(t)$ положительно определена, то матрица $P(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.2.3 *Предположим, что существуют матрицы* $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (4.2.2)–(4.2.6), *такие, что матрица* $Q(t)$ *в* (4.2.7) *положительно определена при* $t \geq 0$. *Если существует* T-*периодическая функция* $k(t)$ *такая, что выполнены* (4.2.10) *и* (4.2.11) *при* $p(t) = \dfrac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}$, *тогда для решения задачи* (4.2.12) *имеет место оценка* (4.2.13).

Доказательство теоремы 4.2.3. Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.2.3, рассмотрим на решении задачи (4.2.12) функционал (4.2.16). Как при доказательстве теоремы **??**, после дифференцирования получаем (4.2.17). В силу представления (4.2.18)

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq \left\langle P(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (4.2.19). Тогда

$$\left\langle P(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq p_{\min}(t) \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Поскольку

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\leq \|\mathcal{H}(t)\| \left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

то

$$\left\langle Q(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt} y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt} y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq \frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|} \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Используя (4.2.10), из (4.2.17) имеем

$$\frac{d}{dt} V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|} \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-k(t) \int\limits_{t-\tau}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds} y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds} y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.2.16) получаем

$$\frac{d}{dt} V(t,y) \leq -\gamma(t) V(t,y),$$

где $\gamma(t) = \min \left\{ \dfrac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}, k(t) \right\}$. Отсюда, как при доказательстве теоремы 4.2.2, имеем неравенство (4.2.13).

Теорема 4.2.3 доказана.

Замечание 1. Отметим, что класс функционалов вида (4.2.16) содержит функционал (3.2.6). Поэтому использование этого класса функционалов позволяет исследовать экспоненциальную устойчивость для более широкого класса систем нейтрального типа и получать более точные оценки.

Замечание 2. В предыдущей главе условия теорем, гарантирующие экспоненциальную устойчивость, влекли требование, что спектр матрицы $C(t)$ должен принадлежать единичному кругу при $t \in [0, T]$. Использование функционалов вида (4.2.16) позволяет снять это ограничение.

4.3 Почти линейные периодические системы нейтрального типа

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t > 0, \qquad (4.3.1) \end{aligned}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными вещественнозначными T-периодическими элементами, $\tau > 0$ — параметр запаздывания. Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t, u_1, u_2, u_3)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \qquad t \ge 0, \qquad (4.3.2)$$

$$u_j \in \mathbb{R}^n, \qquad q_j \ge 0, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Как в предыдущей главе, наша цель — исследовать экспоненциальную устойчивость решений указанных систем. С использованием функционала Ляпунова – Красовского вида (4.2.16), мы установим условия экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (4.3.1) и получим оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (4.3.1) на бесконечности.

Предположим, что выполнены условия теоремы 4.2.1. Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Определим функции

$$\begin{aligned} \beta_1(t) = &\ 2\|H_1(t)\| + 2\|K_2(t,0)\| + (2\|A(t)\| + q_1)\|K_3(t,0)\|, \\ \beta_2(t) = &\ 2\|H_2(t)\| + (2\|B(t)\| + q_2)\|K_3(t,0)\|, \\ \beta_3(t) = &\ (2\|C(t)\| + q_3)\|K_3(t,0)\|, \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = &\ q_1\beta_1(t) + \frac{q_1\beta_2(t) + q_2\beta_1(t)}{2} + \frac{q_1\beta_3(t) + q_3\beta_1(t)}{2}, \\ \alpha_2(t) = &\ q_2\beta_2(t) + \frac{q_2\beta_1(t) + q_1\beta_2(t)}{2} + \frac{q_2\beta_3(t) + q_3\beta_2(t)}{2}, \\ \alpha_3(t) = &\ q_3\beta_3(t) + \frac{q_3\beta_1(t) + q_1\beta_3(t)}{2} + \frac{q_3\beta_2(t) + q_2\beta_3(t)}{2} \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

и матрицу

$$Q^\alpha(t) = Q(t) - \begin{pmatrix} \alpha_1(t)I & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t)I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3(t)I \end{pmatrix}, \tag{4.3.5}$$

где матрица $Q(t)$ определена в (4.2.7), (4.2.8).

Рассмотрим начальную задачу для системы (4.3.1)

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau) \\ &\qquad +F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right), \qquad t > 0, \\ &y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \\ &y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau, 0])$ — заданная вектор-функция. Имеет место следующая теорема.

Теорема 4.3.1 *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям* (4.2.2)–(4.2.6), *такие, что для матрицы $Q^\alpha(t)$ в* (4.3.5) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\alpha(t) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p^\alpha(t) \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{4.3.7}$$

$$u, v, w \in \mathbb{R}^n, \qquad t \geq 0,$$

где $p^\alpha(t)$ *—* T*-периодическая функция,* $p^\alpha(t) \in C([lT, (l+1)T])$, $l = 0, 1, \ldots$. *Если существует* T*-периодическая функция* $k(t)$ *такая, что выполнено* (4.2.10) *и*

$$\int\limits_0^T \gamma^\alpha(\xi) d\xi > 0, \quad \text{где} \quad \gamma^\alpha(\xi) = \min\{p^\alpha(\xi), k(\xi)\}, \tag{4.3.8}$$

тогда нулевое решение системы (4.3.1) *экспоненциально устойчиво. Более того, для решения задачи* (4.3.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^\alpha(\xi) d\xi\right), \quad t > 0, \tag{4.3.9}$$

где $h(t)$, $V(0,\varphi)$ *определены в* (4.2.4), (4.2.14) *соответственно.*

Нетрудно убедиться, что неравенство (4.3.9) при условии (4.3.8) гарантирует экспоненциальное убывание решений задачи (4.3.6) при $t \to \infty$. Действительно, из (4.3.9) вытекает оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \frac{(\gamma_1 - \gamma_2)T}{2}\right), \tag{4.3.10}$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma^\alpha(\xi) d\xi, \qquad \gamma_2 = \min_{\xi \in [0,T]} \gamma^\alpha(\xi).$$

Доказательство теоремы 4.3.1. Очевидно, экспоненциальная устойчивость нулевого решения системы (4.3.1) вытекает из оценки (4.3.10), которая следует из неравенства (4.3.9), как показано выше. Поэтому достаточно доказать (4.3.9).

Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.3.6). Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы, рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского (4.2.16). Дифференцируя этот функционал и учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (4.3.1), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+W(t)+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s)\\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(s)\\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \qquad (4.3.11)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (4.2.9),

$$W(t)=\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\\ 0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0\\ F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ z(t)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t)\\ z(t)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0\\ F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0\\ F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$z(t)=A(t)y(t)+B(t)y(t-\tau)+C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau).$$

В силу определения матриц $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, очевидно, имеем неравенство

$$W(t)\le\Bigg(2(\|H_1(t)\|+\|K_2(t,0)\|)\,\|y(t)\|+2\|H_2(t)\|\,\|y(t-\tau)\|$$

$$+2\|K_3(t,0)\|\,\|z(t)\|+\|K_3(t,0)\|\,\left\|F\left(t,y(t),y(t-\tau),\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right)\right\|\Bigg)$$

$$\times \left\| F\left(t, y(t), y(t-\tau), \frac{d}{dt}y(t-\tau)\right) \right\|.$$

В силу условия (4.3.2) получаем

$$W(t) \le \left(\beta_1(t)\|y(t)\| + \beta_2(t)\|y(t-\tau)\| + \beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right)$$

$$\times \left(q_1\|y(t)\| + q_2\|y(t-\tau)\| + q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|\right),$$

где функции $\beta_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, определены в (4.3.3). Очевидно, справедлива оценка

$$W(t) \le \alpha_1(t)\|y(t)\|^2 + \alpha_2(t)\|y(t-\tau)\|^2 + \alpha_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau)\right\|^2, \quad (4.3.12)$$

где функции $\alpha_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, определены в (4.3.4). Из (4.3.11) в силу (4.3.12) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \quad (4.3.13)$$

где матрица $Q^\alpha(t)$ определена в (4.3.5). Используя (4.3.7), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p^\alpha(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

В силу (4.2.10) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p^\alpha(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.2.16) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)\le -\gamma^{\alpha}(t)V(t,y),$$

где $\gamma^{\alpha}(t)$ определено в (4.3.8). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y)\le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma^{\alpha}(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (4.2.14). Используя (4.2.4), с учетом определения функционала (4.2.16) получаем

$$\|y(t)\|^2\le \frac{1}{h(t)}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau)\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\le \frac{V(t,y)}{h(t)}\le \frac{V(0,\varphi)}{h(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma^{\alpha}(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем неравенство (4.3.9).

Теорема 4.3.1 доказана.

Скорость убывания в (4.3.9) зависит от функции $p^{\alpha}(t)$. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении этой функции. Ниже при чуть более ограничительных условиях по сравнению с теоремой 4.3.1 мы укажем такую функцию в явном виде. Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.2.2)–(4.2.6), такие, что матрица $Q^{\alpha}(t)$ в (4.3.5) положительно определена при $t\ge 0$. Перепишем матрицу $Q^{\alpha}(t)$ в виде

$$Q^{\alpha}(t)=\begin{pmatrix} Q_1^{\alpha}(t) & Q_2^{\alpha}(t) \\ (Q_2^{\alpha}(t))^* & Q_3^{\alpha}(t)\end{pmatrix},$$

где

$$Q_1^{\alpha}(t)=\begin{pmatrix} Q_{11}(t)-\alpha_1(t)I & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t)-\alpha_2(t)I\end{pmatrix},$$

$$Q_2^\alpha(t) = \begin{pmatrix} Q_{13}(t) \\ Q_{23}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_3^\alpha(t) = Q_{33}(t) - \alpha_3(t) I,$$

$Q_{ij}(t)$, $\alpha_j(t)$ определены в (4.2.8), (4.3.4) соответственно. Очевидно,

$$Q^\alpha(t) = \begin{pmatrix} I & Q_2^\alpha(t)(Q_3^\alpha(t))^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P^\alpha(t) & 0 \\ 0 & Q_3^\alpha(t) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I & 0 \\ (Q_3^\alpha)^{-1}(Q_2^\alpha(t))^* & I \end{pmatrix}, \tag{4.3.14}$$

где

$$P^\alpha(t) = Q_1^\alpha(t) - Q_2^\alpha(t)(Q_3^\alpha)^{-1}(Q_2^\alpha(t))^*. \tag{4.3.15}$$

Если $Q^\alpha(t)$ положительно определена, то матрица $P^\alpha(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p^\alpha_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $P^\alpha(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.3.2 *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.2.2)–(4.2.6), такие, что матрица $Q^\alpha(t)$ в (4.3.5) положительно определена при $t \geq 0$. Если существует T-периодическая функция $k(t)$ такая, что выполнены (4.2.10) и (4.3.8) при $p^\alpha(t) = \dfrac{p^\alpha_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}$, тогда для решения задачи (4.3.6) имеет место оценка (4.3.9).*

Доказательство теоремы 4.3.2. Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.3.1, рассмотрим на решении задачи (4.3.6) функционал (4.2.16). После дифференцирования и проведения рассуждений как при доказательстве теоремы 4.3.1 имеем оценку (4.3.13). В силу представления (4.3.14)

$$\left\langle Q^\alpha(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt} y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt} y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\geq \left\langle P^\alpha(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

где $P^{\alpha}(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, определенная в (4.3.15). Тогда

$$\left\langle P^{\alpha}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq p^{\alpha}_{\min}(t)\left\langle \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle,$$

где $p^{\alpha}_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P^{\alpha}(t)$. Следовательно,

$$\left\langle Q^{\alpha}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq \frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle.$$

Используя (4.2.10), из (4.3.13) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.2.16) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma^{\alpha}(t)V(t,y),$$

где $\gamma^{\alpha}(t) = \min\left\{\dfrac{p^{\alpha}_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}, k(t)\right\}$. Отсюда, как при доказательстве теоремы 4.3.1, имеем неравенство (4.3.9).

Теорема 4.3.2 доказана.

Замечание. Из полученных результатов вытекает утверждение о робастной устойчивости для систем вида (4.2.1). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau)$$

$$+\Delta A(t)y(t) + \Delta B(t)y(t-\tau) + \Delta C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau), \qquad (4.3.16)$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$ и $\Delta C(t)$ — произвольные матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \le q_1, \quad \|\Delta B(t)\| \le q_2, \quad \|\Delta C(t)\| \le q_3, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t, u_1, u_2, u_3) = \Delta A(t)u_1 + \Delta B(t)u_2 + \Delta C(t)u_3$$

удовлетворяет неравенству (4.3.2). Тогда теоремы 4.3.1, 4.3.2 дают условия робастной устойчивости для (4.2.1) и оценки экспоненциального убывания решений возмущенной системы (4.3.16) при $t \to \infty$.

4.4 Линейные неавтономные системы нейтрального типа с переменным запаздыванием

В этом параграфе мы рассмотрим линейные системы дифференциальных уравнений с запаздыванием следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \quad t \ge 0, \quad (4.4.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, т. е.

$$a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) \in C([0,\infty)), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

$\tau(t)$ — функция, определяющая запаздывание, $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$,

$$0 < \tau_0 \le \tau(t) \le \tau_1 t + \tau_2, \quad 0 \le \tau_1 \le 1, \quad \tau_2 > 0, \quad \frac{d\tau(t)}{dt} \le \tau_3 < 1. \quad (4.4.2)$$

Наша цель — получить оценки для решений системы (4.4.1) на всей полуоси $\{t \ge 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений (в том числе экспоненциальной или асимптотической) и указать скорость стабилизации. При получении результатов мы будем использовать обобщение на случай переменного запаздывания функционалов Ляпунова – Красовского вида (4.1.2).

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Определим матрицы размера $2n \times 2n$

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H_1(t) & H_2(t) \\ H_2^*(t) & H_3(t) \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{K}(t,s) = \begin{pmatrix} K_1(t,s) & K_2(t,s) \\ K_2^*(t,s) & K_3(t,s) \end{pmatrix}$$

такие, что

$$\mathcal{H}(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+), \qquad \mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^*(t), \quad t \geq 0, \tag{4.4.3}$$

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle \geq h(t)\|u\|^2, \quad u, v \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \tag{4.4.4}$$

где $h(t) \in C([0,\infty))$, $h(t) \geq h_0 > 0$,

$$\mathcal{K}(t,s) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+^2),\ \mathcal{K}(t,s) = \mathcal{K}^*(t,s),\ \mathcal{K}(t,s) \geq 0,\ (t,s) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2. \tag{4.4.5}$$

Определим матрицу

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) & Q_{13}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) & Q_{23}(t) \\ Q_{13}^*(t) & Q_{23}^*(t) & Q_{33}(t) \end{pmatrix} \tag{4.4.6}$$

с элементами

$$\begin{aligned}
Q_{11}(t) = {} & -\frac{d}{dt}H_1(t) - H_1(t)A(t) - A^*(t)H_1(t) - K_1(t,0) \\
& -K_2(t,0)A(t) - A^*(t)K_2^*(t,0) - A^*(t)K_3(t,0)A(t), \\
Q_{12}(t) = {} & -\frac{d}{dt}H_2(t) - H_1(t)B(t) - A^*(t)H_2(t) \\
& -K_2(t,0)B(t) - A^*(t)K_3(t,0)B(t), \\
Q_{13}(t) = {} & -H_1(t)C(t) - H_2(t) - K_2(t,0)C(t) - A^*(t)K_3(t,0)C(t), \\
Q_{22}(t) = {} & -\frac{d}{dt}H_3(t) - H_2^*(t)B(t) - B^*(t)H_2(t) \\
& + \left(1 - \tfrac{d}{dt}\tau(t)\right) K_1(t,\tau(t)) - B^*(t)K_3(t,0)B(t), \\
Q_{23}(t) = {} & -H_2^*(t)C(t) - H_3(t) + K_2(t,\tau(t)) - B^*(t)K_3(t,0)C(t), \\
Q_{33}(t) = {} & \left(1 - \tfrac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1} K_3(t,\tau(t)) - C^*(t)K_3(t,0)C(t).
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (4.4.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)),\ t>0,\\
&y(t) = \varphi(t), \quad t\in[-\tau_2,0],\\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau_2,0])$ — заданная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки решений начальной задачи (4.4.8).

Теорема 4.4.1 *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.4.3)–(4.4.5), такие, что для матрицы $Q(t)$ справедливо неравенство*

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\\ v\\ w\end{pmatrix}\right\rangle \geq p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u\\ v\end{pmatrix}\right\rangle, \tag{4.4.9}$$

$$u,v,w\in\mathbb{R}^n, \quad t\geq 0,$$

где $p(t)\in C([0,\infty))$. Если существует непрерывная функция $k(t)$ такая, что

$$\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}K(t,s) + k(t)K(t,s) \leq 0, \quad (t,s)\in\overline{\mathbb{R}}_+^2, \tag{4.4.10}$$

тогда для решения задачи (4.4.8) имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t>0, \tag{4.4.11}$$

где

$$V(0,\varphi) = \left\langle \mathcal{H}(0)\begin{pmatrix} \varphi(0)\\ \varphi(-\tau(0))\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(0)\\ \varphi(-\tau(0))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{-\tau(0)}^{0}\left\langle \mathcal{K}(0,-s)\begin{pmatrix} \varphi(s)\\ \dfrac{d}{ds}\varphi(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi(s)\\ \dfrac{d}{ds}\varphi(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \tag{4.4.12}$$

$$\gamma(\xi) = \min\{p(\xi), k(\xi)\}, \tag{4.4.13}$$

функция $h(t)$ определена в (4.4.4).

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.4.8). Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского:

$$V(t,y) = \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t,t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds, \qquad (4.4.14)$$

который является обобщением функционала вида (4.1.2) на случай переменного запаздывания. Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}y(t) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}y(t) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \left\langle \mathcal{K}(t,0) \begin{pmatrix} y(t) \\ \dfrac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ \dfrac{d}{dt}y(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$- \left(1 - \frac{d}{dt}\tau(t)\right) \left\langle \mathcal{K}(t,\tau(t)) \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \left(1 - \dfrac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1} \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} y(t-\tau) \\ \left(1 - \dfrac{d}{dt}\tau(t)\right)^{-1} \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (4.4.1), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds, \qquad (4.4.15)$$

где матрица $Q(t)$ определена в (4.4.6). Используя (4.4.9), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

В силу (4.4.10) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.4.14) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (4.4.13). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (4.4.12). Используя (4.4.4), с учетом определения функционала (4.4.14) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h(t)}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\leq \frac{V(t,y)}{h(t)} \leq \frac{V(0,\varphi)}{h(t)} \exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем неравенство (4.4.11).

Теорема 4.4.1 доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.4.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \geq 0,$$

то нулевое решение системы (4.4.1) *устойчиво, при этом для решения задачи* (4.4.8) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}}, \qquad t > 0.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.4.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \to \infty, \quad t \to \infty,$$

то нулевое решение системы (4.4.1) *асимптотически устойчиво, при этом скорость стабилизации решения определяется функцией*

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.4.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \geq \gamma_1 t + \gamma_2, \qquad \gamma_1 > 0, \quad t > 0,$$

то нулевое решение системы (4.4.1) *экспоненциально устойчиво, при этом для решения задачи* (4.4.8) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \frac{\gamma_2}{2}\right)}, \quad t > 0.$$

Показатель экспоненты в (4.4.11) зависит от функции $p(t)$. Поэтому естественно возникает вопрос о нахождении этой функции. Ниже при чуть более ограничительных условиях по сравнению с теоремой 4.4.1 мы укажем такую функцию в явном виде. Этот факт может быть полезен при исследовании конкретных задач.

Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.4.3)–(4.4.5), такие, что матрица $Q(t)$ в (4.4.6) положительно определена при $t \geq 0$. Перепишем матрицу $Q(t)$ в виде

$$Q(t) = \begin{pmatrix} Q_1(t) & Q_2(t) \\ Q_2^*(t) & Q_3(t) \end{pmatrix},$$

где

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^*(t) & Q_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_2(t) = \begin{pmatrix} Q_{13}(t) \\ Q_{23}(t) \end{pmatrix}, \quad Q_3(t) = Q_{33}(t),$$

$Q_{ij}(t)$ определены в (4.4.7). Очевидно,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} I & Q_2(t)Q_3^{-1}(t) \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(t) & 0 \\ 0 & Q_3(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q_3^{-1}Q_2^*(t) & I \end{pmatrix}, \quad (4.4.16)$$

где

$$P(t) = Q_1(t) - Q_2(t)Q_3^{-1}(t)Q_2^*(t). \quad (4.4.17)$$

Если $Q(t)$ положительно определена, то матрица $P(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.4.2 *Предположим, что существуют матрицы* $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (4.4.3)–(4.4.5), *такие, что матрица* $Q(t)$ *в* (4.4.6) *положительно определена при* $t \geq 0$. *Если существует непрерывная функция* $k(t)$ *такая, что выполнено* (4.4.10), *тогда для решения задачи* (4.4.8) *имеет место оценка* (4.4.11) *при* $p(t) = \dfrac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}$.

Доказательство. Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.4.2, рассмотрим на решении задачи (4.4.8) функционал (4.4.14). Как при доказательстве теоремы 4.4.1, после дифференцирования получаем (4.4.15). В силу представления (4.4.16)

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq \left\langle P(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где $P(t)$ — положительно определенная эрмитова матрица, заданная в (4.4.17). Тогда

$$\left\langle P(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq p_{\min}(t)\left\langle \begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle,$$

где $p_{\min}(t) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $P(t)$. Поскольку

$$\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\leq \|\mathcal{H}(t)\|\left\langle \begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle,$$

то

$$\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\geq \frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Используя (4.4.10), из (4.4.15) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\frac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(t)\\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix},\begin{pmatrix} y(s)\\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.4.14) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t) = \min\left\{\dfrac{p_{\min}(t)}{\|\mathcal{H}(t)\|}, k(t)\right\}$. Отсюда, как при доказательстве теоремы 4.4.1, имеем неравенство (4.4.11).

Теорема 4.4.2 доказана.

4.5 Почти линейные неавтономные системы нейтрального типа с переменным запаздыванием

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}y(t) &= A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\ &+ F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \qquad t > 0, \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, т. е.

$$a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) \in C([0,\infty)), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

функция $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$, определяющая запаздывание, удовлетворяет условиям (4.4.2). Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t,u_1,u_2,u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q_1\|u_1\| + q_2\|u_2\| + q_3\|u_3\|, \qquad t \ge 0, \tag{4.5.2}$$

$$u_j \in \mathbb{R}^n, \qquad q_j \ge 0, \qquad j = 1,2,3.$$

Наша цель — получить оценки для решений системы (4.5.1) на всей полуоси $\{t \ge 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений и указать скорость стабилизации. При получении результатов мы будем использовать функционал Ляпунова – Красовского (4.4.14).

Предполагая, что выполнены условия теоремы 4.4.1, введем функции

$$\begin{aligned} \beta_1(t) = {} & 2\|H_1(t)\| + 2\|K_2(t,0)\| + (2\|A(t)\| + q_1)\|K_3(t,0)\|, \\ \beta_2(t) = {} & 2\|H_2(t)\| + (2\|B(t)\| + q_2)\|K_3(t,0)\|, \\ \beta_3(t) = {} & (2\|C(t)\| + q_3)\|K_3(t,0)\|. \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

Пусть $\varepsilon_j(t) \in C([0,\infty))$ и $\varepsilon_j(t) > 0$, $j = 1, \dots, 6$. Определим функции

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) = {} & q_1\beta_1(t) + \frac{(q_1\beta_2(t))^2}{4\varepsilon_1(t)} + \frac{(q_1\beta_3(t))^2}{4\varepsilon_2(t)} + \varepsilon_3(t) + \varepsilon_5(t), \\ \alpha_2(t) = {} & q_2\beta_2(t) + \frac{(q_2\beta_1(t))^2}{4\varepsilon_3(t)} + \frac{(q_2\beta_3(t))^2}{4\varepsilon_4(t)} + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_6(t), \\ \alpha_3(t) = {} & q_3\beta_3(t) + \frac{(q_3\beta_1(t))^2}{4\varepsilon_5(t)} + \frac{(q_3\beta_2(t))^2}{4\varepsilon_6(t)} + \varepsilon_2(t) + \varepsilon_4(t) \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

и матрицу

$$Q^\alpha(t) = Q(t) - \begin{pmatrix} \alpha_1(t)I & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2(t)I & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3(t)I \end{pmatrix}, \tag{4.5.5}$$

где матрица $Q(t)$ задана в (4.4.6).

Рассмотрим начальную задачу для системы (4.5.1)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\ & \qquad + F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \qquad t > 0, \\ & y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \\ & y(+0) = \varphi(0), \end{aligned} \tag{4.5.6}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0])$ — заданная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки для решений начальной задачи (4.5.6).

Теорема 4.5.1 *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.4.3)–(4.4.5), такие, что для матрицы $Q^\alpha(t)$ в (4.5.5) справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right\rangle \geq p^\alpha(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{4.5.7}$$

$$u, v, w \in \mathbb{R}^n, \qquad t \geq 0,$$

где $p^\alpha(t) \in C([0,\infty))$. *Если существует непрерывная функция* $k(t)$ *такая, что выполнено* (4.4.10), *тогда для решения задачи* (4.5.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^\alpha(\xi)d\xi\right), \quad t > 0, \tag{4.5.8}$$

где

$$\gamma^\alpha(t) = \min\{p^\alpha(t), k(t)\}, \tag{4.5.9}$$

$h(t)$, $V(0,\varphi)$ *определены в* (4.4.4), (4.4.12) *соответственно.*

Доказательство теоремы 4.5.1. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.5.6). Используя матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы, рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского (4.4.14). Дифференцируя этот функционал и учитывая, что $y(t)$ удовлетворяет системе (4.5.1), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = -\left\langle Q(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \dfrac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+W(t) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds, \tag{4.5.10}$$

где $Q(t)$ определена в (4.4.6),

$$W(t) = \left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} G(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} G(t) \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}\right\rangle + \left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\left\langle \mathcal{K}(t,0)\begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ G(t) \end{pmatrix} \right\rangle, \tag{4.5.11}$$

$$G(t) = F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \tag{4.5.12}$$

$$z(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)). \tag{4.5.13}$$

В силу определений $\mathcal{H}(t)$ и $\mathcal{K}(t,s)$ имеем

$$W(t) \le \Bigg(2(\|H_1(t)\| + \|K_2(t,0)\|)\,\|y(t)\| + 2\|H_2(t)\|\,\|y(t-\tau(t))\|$$

$$+2\|K_3(t,0)\|\,\|z(t)\| + \|K_3(t,0)\|\ \|G(t)\|\Bigg)\,\|G(t)\|\,. \tag{4.5.14}$$

С учетом (4.5.2) получаем

$$W(t) \le \left(\beta_1(t)\|y(t)\| + \beta_2(t)\|y(t-\tau(t))\| + \beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|\right)$$

$$\times\left(q_1\|y(t)\| + q_2\|y(t-\tau(t))\| + q_3\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|\right),$$

где $\beta_j(t)$, $j = 1,2,3$, определены в (4.5.3). Нетрудно показать, что для произвольных непрерывных функций $\varepsilon_j(t) > 0$, $j = 1,\dots,6$, справедливы неравенства:

$$W(t) \le \alpha_1(t)\|y(t)\|^2 + \alpha_2(t)\|y(t-\tau(t))\|^2 + \alpha_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|^2, \tag{4.5.15}$$

где функции $\alpha_j(t)$, $j = 1,2,3$, указаны в (4.5.4). Из (4.5.10) с учетом (4.5.15) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle Q^\alpha(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds,$$

где матрица $Q^\alpha(t)$ определена в (4.5.5). Используя (4.5.7)), мы имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p^\alpha(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

В силу (4.4.10) мы получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p^\alpha(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds}y(s) \end{pmatrix}\right\rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.4.14) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma^\alpha(t)V(t,y),$$

где $\gamma^\alpha(t)$ определено в (4.5.9). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma^\alpha(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (4.4.12). Используя (4.4.4), с учетом определения функционала (4.4.14) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h(t)}\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\le \frac{V(t,y)}{h(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h(t)}\exp\left(-\int_0^t \gamma^\alpha(\xi)d\xi\right).$$

Отсюда получаем неравенство (4.5.8).

Теорема 4.5.1 доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.5.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma^\alpha(s)ds \ge 0, \qquad t > 0,$$

то нулевое решение системы (4.5.1) *устойчиво, при этом для решения задачи* (4.5.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}}, \qquad t > 0.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.5.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma^\alpha(s)ds \to \infty, \quad t \to \infty,$$

то нулевое решение системы (4.5.1) *асимптотически устойчиво, при этом скорость стабилизации решения определяется функцией*

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma^\alpha(\xi)d\xi\right).$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.5.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma^\alpha(s)ds \ge \gamma_1 t + \gamma_2, \qquad \gamma_1 > 0, \quad t > 0,$$

то нулевое решение системы (4.5.1) *экспоненциально устойчиво, при этом для решения задачи* (4.5.6) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}} \exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2} + \frac{\gamma_2}{2}\right), \quad t > 0.$$

Замечание 1. Как в параграфе 4.4 можно сформулировать и доказать аналог теоремы 4.4.2.

Замечание 2. Из полученных результатов вытекает утверждение о робастной устойчивости для систем вида (4.4.1). Действительно, рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))$$

$$+\Delta A(t)y(t) + \Delta B(t)y(t-\tau(t)) + \Delta C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)), \qquad (4.5.16)$$

где $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$ — произвольные матрицы размера $n\times n$ с непрерывными элементами такие, что

$$\|\Delta A(t)\| \le q_1, \quad \|\Delta B(t)\| \le q_2, \quad \|\Delta C(t)\| \le q_3, \quad t \ge 0.$$

Очевидно, в этом случае вектор-функция

$$F(t, u_1, u_2, u_3) = \Delta A(t)u_1 + \Delta B(t)u_2 + \Delta C(t)u_3$$

удовлетворяет неравенству (4.5.2). Тогда теорема 4.5.1 и следствия дают условия робастной устойчивости для системы (4.4.1) и оценки убывания решений возмущенной системы (4.5.16) при $t \to \infty$ в случае асимптотической или экспоненциальной устойчивости.

Замечание 3. Если запаздывание является ограниченным ($\tau_1 = 0$), то достаточно требовать выполнение условий (4.4.5) и (4.4.10) при $t \ge 0$, $s \in [0, \tau_2]$.

Замечание 4. Меняя $\varepsilon_j(t)$, мы получаем различные функции $\alpha_j(t)$. Выбирая $\varepsilon_j(t)$, мы можем управлять функцией $\gamma^\alpha(t)$.

Замечание 5. Если один из параметров q_j равен нулю, то мы можем взять

$$\varepsilon_{2j-1}(t) \equiv 0, \quad \varepsilon_{2j}(t) \equiv 0.$$

Замечание 6. Если $q_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, то $\beta_j(t) \equiv 0$, $\alpha_j(t) \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$. В этом случае мы получаем линейную систему (4.4.1) и утверждение теоремы 4.5.1 переходит в утверждение теоремы 4.4.1.

4.6 Нелинейные неавтономные системы нейтрального типа с переменным запаздыванием

В этом параграфе мы рассмотрим нелинейные системы следующего вида:

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))$$
$$+ F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \qquad t > 0, \quad (4.6.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, т. е.

$$a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t) \in C([0,\infty)), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

функция $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$, определяющая запаздывание, удовлетворяет условиям (4.4.2). Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t, u_1, u_2, u_3)$ липшицева по u_1 на любом компакте $G \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q_1\|u_1\|^{1+\omega_1} + q_2\|u_2\|^{1+\omega_2} + q_3\|u_3\|^{1+\omega_2}, \quad t \ge 0, \quad (4.6.2)$$
$$u_j \in \mathbb{R}^n, \qquad q_j \ge 0, \qquad \omega_j \ge 0, \qquad j = 1,2,3.$$

Наша цель — получить оценки для решений системы (4.6.1) на всей полуоси $\{t \ge 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений, указать скорость стабилизации и получить оценки на множества притяжения. Случай $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ был подробно исследован в параграфе 4.5. В этом параграфе мы рассмотрим системы (4.6.1) при $\omega_1+\omega_2+\omega_3 \ne 0$. При получении результатов мы будем использовать функционал Ляпунова – Красовского (4.4.14). Для простоты рассмотрим случай $q_1 = q > 0$, $\omega_1 = \omega > 0$, $q_2 = q_3 = 0$, т.е.

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q\|u_1\|^{1+\omega}. \quad (4.6.3)$$

Предполагая, что выполнены условия теоремы 4.4.1, введем функции

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= 2q(\|H_1(t)\| + \|K_2(t,0)\| + \|A(t)\|\|K_3(t,0)\|),\\ \beta_2(t) &= 2q(\|H_2(t)\| + \|B(t)\|\|K_3(t,0)\|),\\ \beta_3(t) &= 2q\|C(t)\|\|K_3(t,0)\|,\\ \beta_4(t) &= q^2\|K_3(t,0)\|. \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

Пусть $\sigma(t) \in C([0,\infty))$, $\sigma(t) > 0$. Определим функцию

$$\beta(t) = \frac{1}{4\sigma(t)}\left(\beta_1^2(t) + \beta_2^2(t) + \beta_3^2(t)\right) + \beta_4^2(t) \quad (4.6.5)$$

и матрицу

$$Q^{\sigma}(t) = Q(t) - \sigma(t)I. \tag{4.6.6}$$

Рассмотрим начальную задачу для системы (4.6.1)

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + C(t)\frac{d}{dt}y(t-\tau(t)) \\
&\qquad +F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right), \qquad t > 0, \\
&y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau_2, 0], \\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

где $\varphi(t) \in C^1([-\tau_2, 0])$ — заданная вектор-функция.

Теорема 4.6.1 *Предположим, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям* (4.4.3)–(4.4.5), (4.4.10)*, такие, что для матрицы $Q^{\sigma}(t)$ в* (4.6.6) *справедливо неравенство*

$$\left\langle Q^{\sigma}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}\right\rangle \geq p^{\sigma}(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\rangle, \tag{4.6.8}$$

$$u, v, w \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

и сходится интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} \beta(\xi)\exp\left(-\omega\int_0^{\xi}\alpha_1(s)ds\right)d\xi, \tag{4.6.9}$$

где $p^{\sigma}(t) \in C([0,\infty))$,

$$\alpha_1(t) = \min\{p^{\sigma}(t), k(t)\}, \tag{4.6.10}$$

$k(t)$ определено в (4.4.10)*. Тогда для решения начальной задачи* (4.6.7) *с начальной функцией $\varphi(t)$ такой, что*

$$V(0,\varphi) < h_0\left(\frac{h_0}{\omega R}\right)^{1/\omega}, \tag{4.6.11}$$

имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \alpha_1(\xi)d\xi\right)$$

$$\times \left(1 - \omega V^{\omega}(0,\varphi) h_0^{-1-\omega} R\right)^{-1/(2\omega)}, \quad t > 0, \tag{4.6.12}$$

где

$$R = \int\limits_0^{\infty} \beta(\xi) \exp\left(-\omega \int_0^{\xi} \alpha_1(s) ds\right) d\xi. \tag{4.6.13}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение задачи (4.6.7). Рассмотрим на решении этой задачи функционал Ляпунова – Красовского $V(t,y)$, определенный в (4.4.14). Дифференцируя его и рассуждая как при доказательстве теоремы 4.5.1, имеем (4.5.10), где $W(t)$ и $z(t)$ определены в (4.5.11) и (4.5.13) соответственно. В силу оценки (4.5.14) и условия (4.6.3) имеем

$$W(t) \le \Bigg(\beta_1(t)\|y(t)\| + \beta_2(t)\|y(t-\tau(t))\|$$

$$+\beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\| + \beta_4(t)\|y(t)\|^{1+\omega}\Bigg)\|y(t)\|^{1+\omega},$$

где $\beta_j(t)$, $j = 1,2,3$, определены в (4.6.4). Очевидно, для любой непрерывной функции $\sigma(t) > 0$ имеет место оценка

$$\left(\beta_1(t)\|y(t)\| + \beta_2(t)\|y(t-\tau(t))\| + \beta_3(t)\left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\| + \beta_4(t)\|y(t)\|^{1+\omega}\right)$$

$$\times\|y(t)\|^{1+\omega} \le \sigma(t)\left(\|y(t)\|^2 + \|y(t-\tau(t))\|^2 + \left\|\frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\right\|^2\right)$$

$$+\beta(t)\|y(t)\|^{2+2\omega}, \tag{4.6.14}$$

где функция $\beta(t)$ определена в (4.6.5). В силу (4.6.13) из (4.5.10) вытекает оценка

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\left\langle Q^{\sigma}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ \frac{d}{dt}y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$+\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \frac{d}{dt}\mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds + \beta(t)\|y(t)\|^{2+2\omega}, \tag{4.6.15}$$

где матрица $Q^\sigma(t)$ определена в (4.6.6). Используя (4.4.10) и (4.6.8), из (4.6.15) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -p^\sigma(t)\left\langle \mathcal{H}(t)\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t))\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau(t)}^{t}\left\langle \mathcal{K}(t,t-s)\begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \frac{d}{ds}y(s)\end{pmatrix}\right\rangle ds + \beta(t)\|y(t)\|^{2+2\omega}.$$

Тогда в силу определения функционала (4.4.14) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\alpha_1(t)V(t,y) + \beta(t)\|y(t)\|^{2+2\omega},$$

где $\alpha_1(t)$ определено в (4.6.10). Как уже отмечалось выше, используя (4.4.4), с учетом определения функционала (4.4.14) получаем

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{V(t,y)}{h(t)}.$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\alpha_1(t)V(t,y) + \alpha_2(t)(V(t,y))^{1+\omega},$$

где

$$\alpha_2(t) = \beta(t)(h(t))^{-1-\omega}.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла (см., например, [90]) получаем оценку

$$V(t,y) \le e^{-\int\limits_0^t \alpha_1(\xi)\,d\xi} V(0,\varphi)$$

$$\times\left(1-\omega V^\omega(0,\varphi)\int\limits_0^t \alpha_2(\xi)e^{-\omega\int\limits_0^\xi \alpha_1(s)\,ds}d\xi\right)^{-1/\omega}, \qquad (4.6.16)$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (4.4.12). Оценим функцию, стоящую в круглых скобках:

$$U(t) = 1-\omega V^\omega(0,\varphi)\int\limits_0^t \alpha_2(\xi)e^{-\omega\int\limits_0^\xi \alpha_1(s)\,ds}d\xi$$

$$\geq 1 - \omega V^{\omega}(0,\varphi)\int\limits_0^{\infty}\alpha_2(\xi)e^{-\omega\int\limits_0^{\xi}\alpha_1(s)\,ds}d\xi \geq 1 - \omega V^{\omega}(0,\varphi)h_0^{-1-\omega}R,$$

где R определено в (4.6.13). Если $\varphi(t)$ такая, что выполнено (4.6.11), то $U(t) > 0$. Следовательно, из (4.6.16) имеем неравенство

$$V(t,y) \leq e^{-\int\limits_0^{t}\alpha_1(\xi)\,d\xi} V(0,\varphi)\left(1 - \omega V^{\omega}(0,\varphi)h_0^{-1-\omega}R\right)^{-1/\omega}.$$

В силу определения функционала (4.4.14) отсюда для решения начальной задачи (4.6.7) получаем оценку (4.6.12).

Теорема 4.6.1 доказана.

В предположении, что существуют матрицы $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, удовлетворяющие условиям (4.4.3)–(4.4.5), такие, что матрица $Q^{\sigma}(t)$ в (4.6.6) положительно определена при $t \geq 0$, как в параграфе 4.4 можно сформулировать и доказать аналог теоремы 4.4.2. Определим матрицу

$$P^{\sigma}(t) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t) - \sigma(t)I & Q_{12}(t) \\ Q_{12}^{*}(t) & Q_{22}(t) - \sigma(t)I \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \sigma(t)I)^{-1}Q_{13}^{*}(t) & Q_{13}(t)(Q_{33}(t) - \sigma(t)I)^{-1}Q_{23}^{*}(t) \\ Q_{23}(t)(Q_{33}(t) - \sigma(t)I)^{-1}Q_{13}^{*}(t) & Q_{23}(t)(Q_{33}(t) - \sigma(t)I)^{-1}Q_{23}^{*}(t) \end{pmatrix},$$

где $Q_{ij}(t)$ определены в (4.4.7). Если $Q^{\sigma}(t)$ положительно определена, то матрица $P^{\sigma}(t)$ также положительно определена. Обозначим через $p^{\sigma}_{\min}(t)$ минимальное собственное значение матрицы $P^{\sigma}(t)$. Имеет место следующий результат.

Теорема 4.6.2 *Предположим, что существуют матрицы* $\mathcal{H}(t)$, $\mathcal{K}(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (4.4.3)–(4.4.5), (4.4.10), *такие, что матрица* $Q^{\sigma}(t)$ *в* (4.6.6) *положительно определена при* $t \geq 0$ *и сходится интеграл* (4.6.9), *где*

$$\alpha_1(t) = \min\left\{\frac{p^{\sigma}_{\min}(t)}{\|H(t)\|}, k(t)\right\},$$

$k(t)$ *определено в* (4.4.10). *Тогда для решения начальной задачи* (4.6.7) *с начальной функцией* $\varphi(t)$ *такой, что выполнено* (4.6.11), *имеет место оценка* (4.6.12).

Замечание 1. Выбирая $\sigma(t)$, можно управлять функцией $\alpha_1(t)$, которая характеризует поведение решения начальной задачи (4.6.7).

Замечание 2. Если $q = 0$, то $\beta_j(t) \equiv 0$, $j = 1, \ldots, 4$. Тогда на начальную функцию $\varphi(t)$ не возникает ограничений вида (4.6.11) и утверждения теорем 4.6.1, 4.6.2 переходят в утверждения теорем 4.4.1, 4.4.2.

Замечание 3. Пусть выполнены условия следствий 2 и 3 из параграфа 4.4, которые гарантируют асимптотическую или экспоненциальную устойчивость нулевого решения системы (4.4.1). Тогда теоремы 4.6.1, 4.6.2 дают оценки на область притяжения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (4.6.1) при $t \to \infty$.

Замечание 4. Если $q_2 \neq 0$ или $q_3 \neq 0$, то для получения соответствующих результатов нужно провести аналогичные рассуждения, как в параграфе 3.4.

4.7 Неавтономные системы с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями

Отметим, что класс функционалов Ляпунова – Красовского вида (4.1.2), предложенный в [65], может быть использован также при изучении устойчивости систем с распределенным запаздыванием. В частности, при изучении систем с периодическими коэффициентами

$$\frac{d}{dt}(y(t) + D(t)y(t-\tau)) = A(t)y(t) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B(t, t-s)y(s)ds$$

$$+F\left(t, y(t), \int\limits_{t-\tau}^{t} y(s)ds\right), \qquad t > 0,$$

показал свою эффективность следующий функционал (см., например, [98, 100]):

$$\langle H(t)\big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big), \big(y(t) + D(t)y(t-\tau)\big)\rangle$$

$$+\int_0^\tau \int_{t-\eta}^t \langle L(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds d\eta + \int_{t-\tau}^t \langle M(t-s,s)y(s), y(s)\rangle\, ds.$$

Нетрудно заметить, что этот функционал входит в класс (4.1.2):

$$\left\langle \mathcal{H}(t) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau) \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$+\int_{t-\tau}^t \left\langle \mathcal{K}(t, t-s) \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds} y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(s) \\ \dfrac{d}{ds} y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds$$

при

$$\mathcal{H}(t) = \begin{pmatrix} H(t) & H(t)D(t) \\ D^*(t)H(t) & D^*(t)H(t)D(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{K}(t,\xi) = \begin{pmatrix} (\tau-\xi)L(\xi) + M(\xi, t-\xi) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Функционалы Ляпунова – Красовского вида (4.1.2) и их обобщения (4.4.14) могут быть использованы также для изучения асимптотических свойств решений неавтономных систем с переменными сосредоточенным и распределенным запаздываниями. Продемонстрируем это на примере следующей системы:

$$\frac{d}{dt} y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t D(t, t-s)y(s)\, ds$$

$$+F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \int_{t-\tau(t)}^t D(t,t-s)y(s)\, ds\right), \quad t \ge 0, \quad (4.7.1)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $D(t,s)$ — матрицы размера $n \times n$ с непрерывными элементами, т. е.

$$a_{ij}(t),\ b_{ij}(t) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+), \quad d_{ij}(t,s) \in C(\overline{\mathbb{R}}_+^2) \quad i,j = 1,\dots,n,$$

функция $\tau(t) \in C^1([0,\infty))$, определяющая запаздывание, удовлетворяет условиям (4.4.2). Мы предполагаем, что непрерывная вещественнозначная вектор-функция $F(t,u_1,u_2,u_3)$ липшицева по u_1, u_3 на любом компакте $G \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет неравенству

$$\|F(t,u_1,u_2,u_3)\| \le q\|u_1\|^{1+\omega}, \qquad t \ge 0, \quad u_1,u_2,u_3 \in \mathbb{R}^n, \qquad (4.7.2)$$

где q, $\omega \geq 0$.

Наша цель — получить оценки для решений системы (4.7.1) на всей полуоси $\{t \geq 0\}$, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений и указать скорость стабилизации. При получении результатов мы будем использовать функционал Ляпунова – Красовского из класса (4.4.14).

Для формулировки результатов введем ряд обозначений. Определим матрицы размера $(n \times n)$ $H(t)$, $K(t,s)$ такие, что

$$H(t) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+), \qquad H(t) = H^*(t) > 0, \quad t \geq 0, \tag{4.7.3}$$

причем минимальное собственное значение $h(t)$ матрицы $H(t)$ удовлетворяет неравенству

$$h(t) \geq h_0 > 0, \tag{4.7.4}$$

$$K(t,s) \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+^2),\ K(t,s) = K^*(t,s),\ K(t,s) \geq 0,\ (t,s) \in \overline{\mathbb{R}}_+^2. \tag{4.7.5}$$

Определим матрицу

$$Q(t,s) = \begin{pmatrix} Q_{11}(t,s) & Q_{12}(t,s) & Q_{13}(t,s) \\ Q_{12}^*(t,s) & Q_{22}(t,s) & Q_{23}(t,s) \\ Q_{13}^*(t,s) & Q_{23}^*(t,s) & Q_{33}(t,s) \end{pmatrix} \tag{4.7.6}$$

с элементами

$$\begin{aligned} Q_{11}(t,s) = &\ -\frac{d}{dt}H(t) - H(t)A(t) - A^*(t)H(t) - K(t,0), \\ Q_{12}(t,s) = &\ -H(t)B(t), \\ Q_{13}(t,s) = &\ -\tau(t)H(t)D(t,s), \\ Q_{22}(t,s) = &\ \left(1 - \frac{d}{dt}\tau(t)\right) K(t,\tau(t)), \\ Q_{23}(t,s) = &\ 0, \\ Q_{33}(t,s) = &\ -\tau(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}K(t,s) + \frac{\partial}{\partial s}K(t,s)\right). \end{aligned} \tag{4.7.7}$$

Вначале для линейной системы ($F(t,u_1,u_2,u_3) \equiv 0$) рассмотрим следующую начальную задачу:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds, \qquad t>0,\\
&y(t) = \varphi(t), \quad t\in[-\tau_2,0],\\
&y(+0) = \varphi(0),
\end{aligned}
\tag{4.7.8}
$$

где $\varphi(t) \in C([-\tau_2,0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки решений задачи (4.7.8).

Теорема 4.7.1 *Предположим, что существуют матрицы* $H(t)$, $K(t,s)$, *удовлетворяющие условиям* (4.7.3)–(4.7.5), *такие, что справедливо неравенство*

$$
\left\langle Q(t,s)\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix},\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}\right\rangle \ge p(t)\langle H(t)u,u\rangle + k(t)\tau(t)\langle K(t,s)w,w\rangle,
\tag{4.7.9}
$$

$$
u,v,w\in\mathbb{R}^n, \qquad (t,s)\in\overline{\mathbb{R}}_+^2,
$$

где $p(t)$, $k(t)\in C(\overline{\mathbb{R}}_+)$. *Тогда для решения задачи* (4.7.8) *имеет место оценка*

$$
\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right), \quad t>0,
\tag{4.7.10}
$$

где

$$
V(0,\varphi) = \langle H(0)\varphi(0),\varphi(0)\rangle + \int\limits_{-\tau(0)}^{0} \langle K(0,-s)\varphi(s),\varphi(s)\rangle ds,
\tag{4.7.11}
$$

$$
\gamma(t) = \min\{p(t),k(t)\}.
\tag{4.7.12}
$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.7.8). Используя матрицы $H(t)$, $K(t,s)$, удовлетворяющие условиям теоремы 4.7.1, рассмотрим на решении следующий функционал Ляпунова – Красовского из семейства (4.4.14):

$$
V(t,y) = \langle H(t)y(t),y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t,t-s)y(s),y(s)\rangle ds.
\tag{4.7.13}
$$

Дифференцируя его, получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) = \left\langle \frac{d}{dt}H(t)y(t), y(t) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t)\frac{d}{dt}y(t), y(t) \right\rangle + \left\langle H(t)y(t), \frac{d}{dt}y(t) \right\rangle$$

$$+\langle K(t,0)y(t), y(t)\rangle - \left(1 - \frac{d}{dt}\tau(t)\right) \langle K(t,\tau(t))y(t-\tau(t)), y(t-\tau(t))\rangle$$

$$+ \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle \frac{d}{dt}K(t,t-s)y(s), y(s) \right\rangle ds.$$

Учитывая, что $y(t)$ — решение задачи (4.7.8) и используя матрицу $Q(t,s)$, определенную в (4.7.6), (4.7.7), имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)$$

$$= -\frac{1}{\tau(t)} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle Q(t,t-s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds.$$

Используя (4.7.9), получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle - k(t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t,t-s)y(s), y(s)\rangle ds.$$

В силу определения функционала (4.7.13) имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y),$$

где $\gamma(t)$ определено в (4.7.12). Из этого дифференциального неравенства имеем оценку

$$V(t,y) \leq V(0,\varphi) \exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

где $V(0,\varphi)$ задано в (4.7.11). Очевидно,

$$h(t)\|y(t)\|^2 \leq \langle H(t)y(t), y(t)\rangle \leq \|H(t)\|\|y(t)\|^2, \tag{4.7.14}$$

где $h(t)$ — минимальное собственное значение матрицы $H(t)$. Тогда

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{1}{h(t)}\langle H(t)y(t), y(t)\rangle \le \frac{V(t,y)}{h(t)} \le \frac{V(0,\varphi)}{h(t)} \exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right),$$

откуда следует (4.7.10).

Теорема 4.7.1 доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 4.7.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \ge 0, \qquad t > 0,$$

то нулевое решение системы (4.7.1) *при* $F(t,u_1,u_2,u_3) \equiv 0$ *устойчиво, при этом для решения задачи* (4.7.8) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}}, \qquad t > 0,$$

где h_0 *определено в* (4.7.4).

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.7.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \to \infty, \quad t \to \infty,$$

то нулевое решение системы (4.7.1) *при* $F(t,u_1,u_2,u_3) \equiv 0$ *асимптотически устойчиво, при этом скорость стабилизации решения определяется функцией*

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \gamma(\xi)d\xi\right).$$

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 4.7.1. Если*

$$\int\limits_0^t \gamma(s)ds \ge \gamma_1 t + \gamma_2, \qquad \gamma_1 > 0, \quad t > 0,$$

то нулевое решение системы (4.7.1) *при* $F(t,u_1,u_2,u_3)\equiv 0$ *экспоненциально устойчиво, при этом для решения задачи* (4.7.8) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h_0}}\exp\left(-\frac{\gamma_1 t}{2}-\frac{\gamma_2}{2}\right),\quad t>0.$$

Перейдем теперь к изучению решений нелинейной системы (4.7.1). Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau(t)) + \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds\\
&\qquad +F\left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} D(t,t-s)y(s)\,ds\right),\qquad t>0,\\
&y(t)=\varphi(t),\quad t\in[-\tau_2,0],\\
&y(+0)=\varphi(0),
\end{aligned}\tag{4.7.15}$$

где $\varphi(t)\in C([-\tau_2,0])$ — заданная вещественнозначная вектор-функция. Ниже мы устанавливаем оценки решений начальной задачи (4.7.15).

Теорема 4.7.2 *Пусть выполнены условия теоремы 4.7.1 и* $\omega=0$ *в* (4.7.2)*. Тогда для решения задачи* (4.7.15) *имеет место оценка*

$$\|y(t)\| \le \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma_q(\xi)d\xi\right),\quad t>0,\tag{4.7.16}$$

где

$$\gamma_q(t)=\min\left\{\left(p(t)-\frac{2q\|H(t)\|}{h(t)}\right),k(t)\right\}.\tag{4.7.17}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.7.15). Рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского (4.7.13). Как при доказательстве теоремы 4.7.1, после дифференцирования получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y)$$

$$= -\frac{1}{\tau(t)} \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \left\langle Q(t, t-s) \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ y(s) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-\tau(t)) \\ y(s) \end{pmatrix} \right\rangle ds + W(t), \tag{4.7.18}$$

где матрица $Q(t,s)$ определена в (4.7.6), (4.7.7),

$$W(t) = \left\langle H(t) F \left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} D(t, t-s) y(s)\, ds \right), y(t) \right\rangle$$

$$+ \left\langle H(t) y(t), F \left(t, y(t), y(t-\tau(t)), \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} D(t, t-s) y(s)\, ds \right) \right\rangle. \tag{4.7.19}$$

В силу (4.7.2) при $\omega = 0$ имеем

$$\|W(t)\| \leq 2q \|H(t)\| \|y(t)\|^2.$$

Используя (4.7.9), мы получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -p(t) \langle H(t) y(t), y(t) \rangle$$

$$-k(t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t, t-s) y(s), y(s) \rangle ds + 2q \|H(t)\| \|y(t)\|^2.$$

В силу (4.7.14) имеем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\left(p(t) - \frac{2q\|H(t)\|}{h(t)} \right) \langle H(t) y(t), y(t) \rangle$$

$$-k(t) \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} \langle K(t, t-s) y(s), y(s) \rangle ds.$$

Тогда в силу определения функционала (4.7.13) получаем

$$\frac{d}{dt} V(t, y) \leq -\gamma_q(t) V(t, y),$$

где $\gamma_q(t)$ задано в (4.7.17). Повторяя аналогичные рассуждения как при доказательстве теоремы 4.7.1, мы получаем (4.7.16).

Теорема 4.7.2 доказана.

Теорема 4.7.3 *Пусть выполнены условия теоремы 4.7.1 и* $\omega > 0$ *в* (4.7.2). *Предположим, что интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \omega q \|H(\xi)\| (h(\xi))^{-1-\omega/2} \exp\left(-\frac{\omega}{2}\int_0^\xi \gamma(s)ds\right) d\xi$$

сходится. Тогда для решения задачи (4.7.15) *с начальной функцией* $\varphi(t)$ *такой, что*

$$V(0,\varphi) < R^{-2/\omega}, \tag{4.7.20}$$

имеет место оценка

$$\|y(t)\| \leq \sqrt{\frac{V(0,\varphi)}{h(t)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right)\left(1 - V^{\omega/2}(0,\varphi)R\right)^{-1/\omega}, \quad t > 0, \tag{4.7.21}$$

где

$$R = \int\limits_0^\infty \omega q \|H(\xi)\| (h(\xi))^{-1-\omega/2} \exp\left(-\frac{\omega}{2}\int_0^\xi \gamma(s)ds\right) d\xi. \tag{4.7.22}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ — решение начальной задачи (4.7.15). Рассмотрим на решении функционал Ляпунова – Красовского (4.7.13). Как при доказательстве теоремы 4.7.2, после дифференцирования получаем (4.7.18), где $W(t)$ определено в (4.7.19). В силу (4.7.2) при $\omega > 0$ имеем

$$\|W(t)\| \leq 2q\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega}.$$

Используя (4.7.9), мы приходим к неравенству

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -p(t)\langle H(t)y(t), y(t)\rangle$$

$$-k(t)\int\limits_{t-\tau(t)}^t \langle K(t,t-s)y(s), y(s)\rangle ds + 2q\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega}.$$

Тогда в силу определения функционала (4.7.13) получаем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \leq -\gamma(t)V(t,y) + 2q\|H(t)\|\|y(t)\|^{2+\omega},$$

где $\gamma(t)$ задано в (4.7.12). Принимая во внимание неравенство

$$\|y(t)\|^2 \le \frac{V(t,y)}{h(t)},$$

имеем

$$\frac{d}{dt}V(t,y) \le -\gamma(t)V(t,y) + \beta(t)(V(t,y))^{1+\omega/2},$$

где

$$\beta(t) = 2q\|H(t)\|(h(t))^{-1-\omega/2}.$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла (см., например, [90]) получаем оценку

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right)$$

$$\times\left(1-\frac{\omega}{2}V^{\omega/2}(0,\varphi)\int\limits_0^t \beta(\xi)e^{-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^{\xi}\gamma(s)\,ds}d\xi\right)^{-2/\omega}, \quad t>0, \qquad (4.7.23)$$

где $V(0,\varphi)$ определено в (4.7.11). Оценивая функцию, стоящую в круглых скобках, имеем

$$U(t) = 1-\frac{\omega}{2}V^{\omega/2}(0,\varphi)\int\limits_0^t \beta(\xi)e^{-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^{\xi}\gamma(s)\,ds}d\xi$$

$$\ge 1-\frac{\omega}{2}V^{\omega/2}(0,\varphi)\int\limits_0^{\infty} \beta(\xi)e^{-\frac{\omega}{2}\int\limits_0^{\xi}\gamma(s)\,ds}d\xi \ge 1-V^{\omega/2}(0,\varphi)R,$$

где R задано в (4.7.22). Если начальная функция $\varphi(t)$ удовлетворяет неравенству (4.7.20), то $U(t)>0$. Следовательно, из (4.7.23) вытекает оценка

$$V(t,y) \le V(0,\varphi)\exp\left(-\int_0^t \gamma(\xi)d\xi\right)\left(1-V^{\omega/2}(0,\varphi)R\right)^{-2/\omega}.$$

Тогда в силу определения функционала (4.7.13) получаем (4.7.21).

Теорема 4.7.3 доказана.

Замечание 1. Если $q = 0$, утверждения теорем 4.7.2 и 4.7.3 переходят в утверждение теоремы 4.7.1.

Замечание 2. Пусть выполнены условия следствий 2 и 3, которые гарантируют асимптотическую или экспоненциальную устойчивость нулевого решения линейных систем. Тогда теорема 4.7.3 дает оценки на области притяжения нулевого решения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений системы (4.7.1) при $t \to \infty$.

Заключение

Диссертация посвящена исследованию устойчивости решений классов неавтономных систем дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов.

В главе 1 рассмотрены классы систем запаздывающего типа с периодическими коэффициентами в линейной части. С использованием функционала Ляпунова – Красовского первого типа установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений, получены оценки экспоненциального убывания решений, исследована робастная устойчивость, указаны оценки на множества притяжения.

В главе 2 с использованием функционала Ляпунова – Красовского второго типа получены аналогичные результаты для систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейной части и постоянной матрицей при производной решения с запаздыванием. Результаты обобщены на системы с несколькими запаздываниями в решении.

В главе 3 рассмотрены системы дифференциальных уравнений нейтрального типа, когда все матрицы в линейной части могут быть периодическими. С использованием функционала Ляпунова – Красовского третьего типа установлены достаточные условия экспоненциальной устойчивости решений, получены оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности, исследована робастная устойчивость, указаны оценки на множества притяжения. Результаты обобщены на системы с несколькими запаздываниями в решении и в производных, а также на системы с переменным ограниченным запаздыванием.

В главе 4 вводится широкий класс функционалов Ляпунова – Красовского, включающий функционалы первых трех типов, используемые в предыдущих главах. Рассмотрены системы с периодическими и произвольными переменными коэффициентами в линейной части. Установлены оценки решений на полупрямой, на основе которых можно сделать вывод об устойчивости решений. В случае асимптотической устойчивости указана скорость стабилизации решений на бесконечности. Для нелинейных систем указаны множества притяжения. Результаты обобщены на различные классы систем: системы с переменным запаздыванием, которое может быть неограниченным; системы с распределенным и сосредоточенным запаздываниями.

Литература

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991.

[2] Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. I // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 5. С. 745–754.

[3] Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. II // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 4. С. 555–562.

[4] Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. III // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 10. С. 1659–1668.

[5] Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием. IV // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 2. С. 196–204.

[6] Азбелев Н.В., Симонов П.М. Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными. Пермь: Изд-во Перм. ун-та, 2001.

[7] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Симонов П.М. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения // Вестник Удмуртского университета. 2009. вып. 1. С. 3–23.

[8] Айдын К., Булгаков А.Я., Демиденко Г.В. Оценка области притяжения разностных уравнений с периодическими линейными членами // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, №6. С. 1199–1208.

[9] Алексенко Н.В., Романовский Р.К. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 2. С. 147–153.

[10] Андреев А.С. Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автомат. и телемех. 2009. № 9. С. 4–55.

[11] Андреев А.С., Седова Н.О. Метод функций Ляпунова – Разумихина в задаче об устойчивости систем с запаздыванием // Автомат. и телемех. 2019. Т. 7. С. 3–60.

[12] Андронов А.А., Майер А.Г. Простейшие линейные системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1946. Т. 7, № 2–3. С. 95–106.

[13] Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных тел. М.: Наука, 1983.

[14] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

[15] Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967.

[16] Белоцерковский С.М., Кочетков Ю.А., Красовский А.А., Новицкий В.В. Введение в аэроавтоупругость. М.: Наука, 1980.

[17] Белых Л.Н. Анализ математических моделей в иммунологии. М.: Наука, 1988.

[18] Березанский Л.М. Развитие W-метода Н.В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22, № 5. С. 739–750.

[19] Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. 1966.

[20] Власов В.В., Медведев Д.А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. фундам. направл. 2008. Т. 30. С. 1–173.

[21] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.

[22] Гасилов Г.Л. О характеристическом уравнении системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами и запаздываниями // Изв. вузов. Матем. 1972. № 4. С. 60–66.

[23] Германович О.П. Линейные периодические уравнения нейтрального типа и их приложения. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1986.

[24] Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та. 1994.

[25] Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997.

[26] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977.

[27] Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1974.

[28] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

[29] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 2. С. 332–348.

[30] Демиденко Г.В., Колчанов Н.А., Лихошвай В.А., Матушкин Ю.Г., Фадеев С.И. Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. матем. матем. физ. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

[31] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об устойчивости решений квазилинейных периодических систем дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1271–1284.

[32] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестник НГУ. Серия: математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

[33] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

[34] Демиденко Г.В. Матричные уравнения. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2009.

[35] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.

[36] Демиденко Г.В., Матвеева И.И. О робастной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2015. Т. 18, № 4. С. 18–29.

[37] Демиденко Г.В., Матвеева И.И., Скворцова М.А. Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.

[38] Долгий Ю.Ф. Устойчивость периодических дифференциально-разностных уравнений. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1996.

[39] Дэй У.А. Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974.

[40] Зверкин А.М., Каменский Г.А., Норкин С.Б., Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом // УМН. 1962. Т. 17, вып. 2. С. 77–164.

[41] Зверкин А.М. Дифференциально-разностные уравнения с периодическими коэффициентами // В кн.: Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. С. 498–535.

[42] Зубов В.И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959.

[43] Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во Ленинградского ун-та, 1983.

[44] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992.

[45] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.

[46] Комленко Ю.В., Тонков Е.Л. Представление Ляпунова–Флоке для дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Матем. 1995. № 10. С. 40–45.

[47] Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.

[48] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М. Ляпунова для уравнений с запаздываниями времени // Прикл. мат. мех. 1956. Т. 20, № 3. С. 315–327.

[49] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1959.

[50] Курбатов В.Г. Линейные дифференциально-разностные уравнения. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1990.

[51] Любич Ю.И., Ткаченко В.А. К теории Флоке для уравнений с запаздывающим аргументом // Дифференц. уравнения. 1969. Т. 5, № 4. С. 648–656.

[52] Мазко А.Г. Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Труды Института математики НАН Украины. Т. 28. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999.

[53] Малыгина В.В. Об устойчивости уравнений с периодическими параметрами // Функционально-дифференциальные уравнения. Пермь, 1987. С. 41–43.

[54] Малыгина В.В. Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием // Изв. вузов. Матем. 1993. № 5. С. 72–85.

[55] Малыгина В.В., Чудинов К.М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. I, II, III // Изв. вузов. Матем. 2013. № 6. С. 25–36; № 7. С. 3–15; № 8. С. 44–56.

[56] Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. Об устойчивости линейного дифференциального уравнения с ограниченным последействием // Изв. вузов. Матем. 2014. № 4. С. 25–41.

[57] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. М.: Мир, 1983.

[58] Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. М.: Наука, 1980.

[59] Матвеева И.И., Щеглова А.А. Оценки решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Сиб. журн. индустр. матем. 2011. Т. 14, № 1. С. 83–92.

[60] Матвеева И.И. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.

[61] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.

[62] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа с несколькими запаздываниями // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53, № 6. С. 730–740.

[63] Матвеева И.И. О робастной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. журн. индустр. матем. 2018. Т. 21, № 4. С. 86–95.

[64] Матвеева И.И. Об экспоненциальной устойчивости решений линейных периодических систем нейтрального типа с переменным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 748–756.

[65] Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 96–103.

[66] Матвеева И.И. Оценки экспоненциального убывания решений одного класса нелинейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Журн. выч. матем. матем. физ. 2020. Т. 60, № 4. С. 612–620.

[67] Матвеева И.И. Оценки решений класса неавтономных систем нейтрального типа с неограниченным запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 579–594.

[68] Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием. Киев: Вища школа, 1979.

[69] Михалевич В.С., Козорез В.В., Рашкован В.М., Хусаинов Д.Я., Чеборин О.Г. “Магнитная потенциальная яма” — эффект стабилизации сверхпроводящих динамических систем. Киев: Наукова думка, 1991.

[70] Мулюков М.В. Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Ч. I // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 2019–2054.

[71] Мулюков М.В. Устойчивость трехпараметрических систем двух линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. Ч. II // Сиб. электрон. матем. изв. 2019. Т. 16. С. 2055–2079.

[72] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.-Л.: Гостехиздат, 1951; 2-е изд. М.: Наука, 1972.

[73] Мышкис А.Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Матем. сб. 1951. Т. 28, № 3. С. 641–658.

[74] Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем (дискретных и распределенных). Л.: ЛКВВИА, 1949.

[75] Перцев Н.В. Применение монотонного метода и М-матриц к анализу поведения решений некоторых моделей биологических процессов // Сиб. журн. индустр. матем. 2002. Т. 5, № 4. С. 110–122.

[76] Перцев Н.В., Пичугин Б.Ю., Пичугина А.Н. Исследование асимптотического поведения решений некоторых моделей эпидемических процессов // Матем. биология и биоинформ. 2013. Т. 8, № 1. С. 21–48.

[77] Пинни Э. Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения. М.: ИЛ, 1961.

[78] Понтрягин Л.С. О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1942. Т. 6, № 3. С. 115–134.

[79] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех. 1956. Т. 20, № 4. С. 500–512.

[80] Разумихин Б.С. Прямой метод исследования устойчивости систем с последействием. Препринт. М.: ВНИИ системных исследований, 1984. 75 с.

[81] Репин Ю.М. Квадратичные функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех. 1965. Т. 29, вып. 3. С. 564–566.

[82] Рехлицкий З.И. Об устойчивости решений дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Изв. АН СССР. 1966. Т. 30, № 5. С. 981–992.

[83] Романовский Р.К., Троценко Г.А. Метод функционалов Ляпунова для линейных дифференциально-разностных систем нейтрального типа с почти периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 2. С. 444–453.

[84] Рубаник В.П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием. М.: Наука, 1969.

[85] Свирежев Ю.М., Пасеков В.П. Основы математической генетики. М.: Наука, 1982.

[86] Скворцова М.А. Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 1697-1718.

[87] Уилкинсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1970.

[88] Халанай А. Теория устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием // Acad. Répub. Popul. Roum., Rev. Math. Pures Appl. 1961. V. 6. P. 633–653.

[89] Халанай А., Векслер Д. Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.

[90] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[91] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984.

[92] Хусаинов Д.Я., Шатырко А.В. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем. Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1997.

[93] Хусаинов Д.Я., Иванов А.Ф., Кожаметов А.Т. Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.

[94] Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.

[95] Чеботарёв Н.Г., Мейман Н.Н. Проблема Рауса – Гурвица для полиномов и целых функций // Тр. МИАН СССР. 1949. Т. 26. С. 3–331.

[96] Шильман С.В. Метод производящих функций в теории динамических систем. М.: Наука, 1978.

[97] Шиманов С.Н. Устойчивость линейных систем с периодическими коэффициентами и запаздыванием. Свердловск: Изд-во Уральского ун-та, 1983.

[98] Ыскак Т. Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. журн. индустр. матем. 2019. Т. 22, № 3. С. 118–127.

[99] Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 2204–2215.

[100] Ыскак Т. Оценки решений одного класса систем уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 416–427.

[101] Эльсгольц Л.Э. Качественные методы в математическом анализе. М.: ГИТТЛ, 1955.

[102] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964.

[103] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.

[104] Alexandrova I.V., Zhabko A.P. Stability of neutral type delay systems: a joint Lyapunov-Krasovskii and Razumikhin approach // Automatica J. IFAC. 2019. V. 106. P. 83–90.

[105] Agarwal R.P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. New York: Springer, 2012.

[106] Agarwal R., O'Regan D., Saker S. Oscillation and stability of delay models in biology. Cham: Springer, 2014.

[107] Alexandrova I.V., Zhabko A.P. A new LKF approach to stability analysis of linear systems with uncertain delays // Automatica. 2018. V. 91. P. 173–178.

[108] Baštinec J., Diblík J., Khusainov D.Ya., Ryvolová A. Exponential stability and estimation of solutions of linear differential systems of neutral type with constant coefficients // Bound. Value Probl. 2010, Art. ID 956121, 20 pp.

[109] Berezansky L., Domoshnitsky A., Koplatadze R. Oscillation, nonoscillation, stability and asymptotic properties for second and higher order functional differential equations. Boca Raton: CRC Press, 2020.

[110] Bulgak A., Bulgak H. Linear algebra. Konya: Selcuk University, 2001.

[111] Cooke K. L., Grossman Z. Discrete delay, distributed delay and stability switches // J. Math. Anal. Appl. 1982. V. 86, No. 2. P. 592–627.

[112] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to linear systems of neutral type with several delays // Journal of Analysis and Applications. 2014. V. 12, No. 1 & 2. P. 37–52.

[113] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to a class of nonlinear time-delay systems of neutral type // Electronic Journal of Differential Equations. 2015. V. 2015, No. 34. P. 1–14.

[114] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Asymptotic stability of solutions to a class of linear time-delay systems with periodic coefficients and a large parameter // Journal of Inequalities and Applications. 2015. V. 2015, No. 331. P. 1–10.

[115] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Estimates for solutions to a class of time-delay systems of neutral type with periodic coefficients and several delays // Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations. 2015. V. 2015, No. 83. P. 1–22.

[116] Demidenko G.V,, Matveeva I.I. The second Lyapunov method for time-delay systems // Functional Differential Equations and Applications (Editors: Domoshnitsky A., Rasin A., Padhi S.). Series: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Singapore: Springer Nature, 2021. V. 379. P. 145–167.

[117] Demidenko G.V., Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-delay systems of neutral type // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. V. 2016, No. 19. P. 1–20.

[118] Egorov A.V., Mondi'e S. Necessary stability conditions for linear delay systems // Automatica. 2014. V. 50, No. 12. P. 3204–3208.

[119] Egorov A.V., Cuvas C., Mondi'e S. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica. 2017. V. 80. P. 218–224.

[120] Erneux T. Applied delay differential equations. Surveys and Tutorials in the Applied Mathematical Sciences, V. 3. New York: Springer, 2009.

[121] Fridman E. Tutorial on Lyapunov-based methods for time-delay systems // European J. Control. 2014. V. 20. P. 271–283.

[122] Gil' M.I. Stability of neutral functional differential equations, Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 3. Paris: Atlantis Press, 2014.

[123] Gomez M.A., Egorov A.V., Mondi'e S., Zhabko A.P. Computation of the Lyapunov matrix for periodic time-delay systems and its application to robust stability analysis // Syst. Control Lett. 2019. V. 132, Article ID 104501. P. 1–9.

[124] Gopalsamy K. Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics. Mathematics and its Applications, V. 74. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

[125] Gu K., Kharitonov V.L., Chen J. Stability of time-delay systems. Control Engineering. Boston: Birkhäuser, 2003.

[126] Hahn W. On difference differential equations with periodic coefficients // J. Math. Anal. Appl. 1961. V. 3, No. 1. P. 70–101.

[127] Hua C., Zhang L., Guan X. Robust control for nonlinear time-delay systems. Singapore: Springer, 2018.

[128] Kato J. On Lyapunov–Razumikhin type theorems for functional differential equations. Funkcial. Ekvac. 1973. V. 16, No. 3. P. 225–239.

[129] Kharitonov V.L., Zhabko A.P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2003. V. 39, No. 1. P. 15–20.

[130] Kharitonov V.L., Hinrichsen D. Exponential estimates for time delay systems // Systems Control Lett. 2004. V. 53, No. 5. P. 395–405.

[131] Kharitonov V., Mondié S., Collado J. Exponential estimates for neutral time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 5. P. 666–670.

[132] Kharitonov V.L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Syst. Control Lett. 2006. V. 55, No. 7. P. 610–617.

[133] Kharitonov V.L. Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems // Int. J. Control. 2008. V. 81, No. 6. P. 883–893.

[134] Kharitonov V.L. Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Control Engineering. New York: Birkhäuser/Springer, 2013.

[135] Kipnis M.M., Levitskaya I.S. Stability of delay difference and differential equations: similarities and distinctions // Proc. Internat. Conf. Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polinomials, Munich, Germany, 2005. New Jersey: World Scientific, 2007. P. 315–324.

[136] Kolmanovskii V.B., Myshkis A.D. Introduction to the theory and applications of functional-differential equations. Mathematics and its Applications, V. 463. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999.

[137] Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional differential equations // Funkc. Ekvacioj. 1991. V. 34, No. 2. P. 241–256.

[138] Kuang Y. Delay differential equations with applications in population dynamics. Mathematics in Science and Engineering, V. 191. Boston: Academic Press, 1993.

[139] Liu X.-x., Xu B. A further note on stability criterion of linear neutral delay-differential systems // J. Franklin Inst. 2006. V. 343. P. 630–634.

[140] MacDonald N. Biological delay systems: linear stability theory. Cambridge Studies in Mathematical Biology, V. 8. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.

[141] Mahaffy J.M., Busken T.C. Regions of stability for a linear differential equation with two rationally dependent delays // Discrete and continous dynamical systems. 2015. V. 35. No. 10.

[142] Matveeva I.I. Exponential stability of solutions to nonlinear time-varying delay systems of neutral type equations with periodic coefficients // Electronic Journal of Differential Equations. 2020. V. 2020, No. 20. P. 1–12.

[143] Matveeva I.I. Estimates for solutions to one class of nonlinear nonautonomous systems with time-varying concentrated and distributed delays // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2021. V. 18, No. 2. P. 1689-1697.

[144] Matveeva I.I. Estimates for solutions to a class of nonlinear time-varying delay systems // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42, No. 14. P. 3497–3504.

[145] Medvedeva I.V., Zhabko A.P. Synthesis of Razumikhin and Lyapunov-Krasovskii approaches to stability analysis of time-delay systems // Automatica. 2015. V. 51. P. 372–377.

[146] Michiels W., Niculescu S.I. Stability, control, and computation for time-delay systems. An eigenvalue-based approach, Advances in Design and Control, vol. 27. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2014.

[147] Mondié S., Kharitonov V.L. Exponential estimates for retarded time-delay systems: an LMI approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2005. V. 50, No. 2. P. 268–273.

[148] Park J.H., Won S. A note on stability of neutral delay-differential systems // J. Franklin Inst. 1999. V. 336. P. 543–548.

[149] Park J.H., Lee T.H., Liu Y., Chen J. Dynamic systems with time delays: stability and control. Singapore: Springer, 2019.

[150] Richard J.P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems // Automatica. 2003. V. 39. P. 1667–1694.

[151] Seifert G. Lyapunov–Razumikhin conditions for stability and boundedness of functional differential equations of Volterra type. J. Differential Equations. 1973. V. 14, No 3. P. 424–430.

[152] Skvortsova M.A. Asymptotic properties of solutions to a system describing the spread of avian influenza // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. V. 13. P. 782-798.

[153] Skvortsova M.A. Asymptotic behavior of solutions in a model of immune response in plants // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. V. 42, No. 14. P. 3505-3517.

[154] Stokes A.P. A Floquet theory for functional differential equations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48, No. 8. P. 1330–1334.

[155] Yorke J.A. Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations // J. Differ. Equations. 1970. V. 7. P. 189–202.

[156] Zhabko A.P., Alexandrova I.V. Complete type functionals for homogeneous time delay systems // Automatica. 2021. V. 125, Article ID 109456. P. 1–7.