

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Новосибирский государственный архитектурно–строительный университет (Сибстрин)»

На правах рукописи

Пикмуллина Елена Олеговна

**Групповой анализ усложненных нестационарных моделей механики сплошной среды**

Специальность 01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и  
оптимальное управление

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:  
доктор физ.–мат. наук, доцент  
Чиркунов Юрий Александрович

Новосибирск — 2022

## Оглавление

Введение .....	3
Глава 1. Групповой анализ нестационарных моделей распространения газа в разреженном пространстве .....	9
1.1 Описание модели.....	10
1.2 Групповое свойство уравнения .....	11
1.3 Инвариантные подмодели ранга 1 .....	15
1.4. Выводы по главе.....	46
Глава 2. Групповой анализ нелинейной модели продольных колебаний упругого неоднородного стержня .....	48
2.1 Описание модели.....	48
2.2 Групповая классификация уравнения модели .....	49
2.3 Групповое свойство уравнения .....	50
2.4 Инвариантные подмодели и решения .....	52
2.5. Выводы по главе.....	90
Глава 3. Групповой анализ моделей динамического трансверсально-изотропного термоупругого тела.....	91
3.1 Описание модели.....	91
3.2 Групповое расслоение уравнений модели .....	93
3.3 Групповое свойство разрешающей системы (3.10) .....	94
3.4 Инвариантные подмодели и решения .....	97
3.5. Выводы по главе.....	132
Заключение .....	134
Список литературы.....	136

## Введение

**Актуальность темы исследования.** Первое упоминание о теории непрерывных групп преобразований и их использование в теории дифференциальных уравнений, встречается в XIX веке, в работах норвежского математика Софуса Ли [88-92]. Однако наиболее существенное развитие и широкое применение к дифференциальным уравнениям механики сплошной среды и математической физике теория групп Ли получила с середины XX века, в работах академика Л. В. Овсянникова, его учеников и последователей: Н. Х. Ибрагимов, В. В. Пухначева, Ю. Н. Павловского, С. В. Хабилова, Ю. А. Чиркунова, А. Г. Меграбова, А. А. Тальшева, О. В. Капцова, А. П. Чупахина, С. В. Головина, А. А. Чеснокова, Б. Д. Аннина, А. В. Аксенова, С. В. Мелешко, В. О. Бытева, П. Олвера, Р. Л. Андерсона и др.

В настоящее время этот раздел математики получил название групповой (симметричный) анализ дифференциальных уравнений. Он является одним из самых мощных способов получения количественных и качественных характеристик математических моделей физики и механики сплошной среды. Главной задачей группового анализа дифференциальных уравнений является получение и исследование множества точных решений этих уравнений. Все алгоритмы этого мощного инструмента заточены для достижения этой цели. Полученные решения могут быть использованы в качестве тестовых решений в численных расчетах, которые позволят оценить степень адекватности данной математической модели реальным физическим процессам после проведения экспериментов, соответствующих этим решениям, и оценки возникающих отклонений. Академик Л. В. Овсянников в 1994 году опубликовал статью, в которой заложил основы уникальной научной программы «Подмодели» [26], которая описывает общий теоретико-групповой подход к изучению математических моделей механики сплошной среды с целью наиболее полного использования заложенных в них свойств симметрии и тем самым поставил задачу: описать подмодели и точные решения дифференциальных уравнений математических моделей механики сплошной среды. Предлагаемая диссертационная работа вносит свой вклад в выполнение этой программы.

В связи с исследованием, выполненным в настоящей работе, следует отметить следующие работы: Л. В. Овсянников [21-26], Б. Д. Аннин [2-5], В. О. Бытев [1], Н. Х. Ибрагимов [9, 82, 84], О. В. Капцов [11-13, 63, 85], А. Г. Меграбов [16, 17, 94, 95], С. В. Мелешко [82, 83, 96], П. Олвер [98], В. В. Пухначев [30-34, 63, 96], А. А. Тальшев [39-41], С. В. Хабилов [45, 62], Н. Г. Чеботарев [46], А. А. Чесноков [48-50], Ю. А. Чиркунов [27-29, 51-60, 62, 65-76, 80].

Данная диссертация посвящена построению и исследованию методами группового анализа, общими методами дифференциальных уравнений и численными методами следующих усложненных нестационарных моделей механики сплошной среды: модели распространения газа в разреженном пространстве, модели продольных колебаний упругого неоднородного стержня и динамической модели трансверсально-изотропного термоупругого тела.

**Степень разработанности темы исследования.** Первая из рассматриваемых в диссертации моделей используется при изучении процессов, происходящих при движении газа в космическом пространстве, внутри торнадо, а также при изучении состояния среды за фронтом ударной волны после очень сильного взрыва. Модель распространения газа в разреженном пространстве в работе Л. В. Овсянникова [26] была указана под номером 13. Одномерный случай был рассмотрен при решении задачи о сильном взрыве в работах [37, 97, 100]. Ю. А. Чиркуновым [53, 62, 65] был рассмотрен  $n$ -мерный случай ( $n \geq 2$ ) этой модели, для которой, в частности, было выполнено групповое расслоение относительно бесконечной подгруппы основной группы системы уравнений, описывающих эту модель. Также был осуществлен переход к редуцированной системе дифференциальных уравнений для заданного начального распределения давления, с помощью специального выбора массовых лагранжевых переменных. В результате число независимых переменных в новой системе стало на единицу меньше, чем у исходной. Рассмотрение трехмерного случая было начато в работе [66] Ю. А. Чиркуновым, в которой были найдены все нетривиальные законы сохранения первого порядка, а также получен ряд имеющих физический смысл точных решений.

Вторая, рассмотренная в диссертации модель продольных колебаний упругого стержня из неоднородного материала, которая рассматривалась в работе [44], может быть использована при проектировании объектов строительства, робототехники, аэронавтики и судостроения.

Третья из рассматриваемых в диссертации моделей является модель трансверсально-изотропного термоупругого тела, которая широко используется при описании процессов, происходящих термоупругих слоистых и композитных материалах. Такие материалы применяются в машиностроении, авиастроении, кораблестроении и строительстве. Групповой анализ дифференциальных уравнений трансверсально-изотропной упругой среды рассматривался в работах [2, 74]. Термодинамика при этом не учитывалась. Актуальность исследования динамической деформации в термоупругой трансверсально-изотропной среде в последнее время начала все больше возрастать, в том числе, в связи с большой популярностью использования 3D принтера в строительстве.

**Цели и задачи исследования.** Моим научным руководителем, Ю. А. Чиркуновым, были поставлены следующие цели данной диссертационной работы: методами группового анализа дифференциальных уравнений выполнить исследование трехмерной модели распространения

газа в разреженном пространстве, модели продольных колебаний упругого неоднородного стержня и трехмерной динамической модели трансверсально-изотропного термоупругого тела. **Задачами** исследования являлись: построение и исследование подмоделей этих усложненных нестационарных моделей механики сплошной среды.

**Методология и методы исследования.** Для исследования подмоделей и построения точных решений дифференциальных уравнений рассматриваемых нестационарных моделей механики сплошной среды использовался метод группового анализа дифференциальных уравнений, который хорошо представлен в монографиях [22, 24, 53, 62], общие методы теории дифференциальных уравнений и численные методы. А именно, поиск основной группы Ли преобразований, допускаемой дифференциальными уравнениями, групповая классификация уравнений модели, содержащей произвольный элемент, групповое расслоение уравнений, построение оптимальных систем подгрупп, получение универсальных инвариантов, построение и классификация полученных инвариантных подмоделей, получение их фактор уравнений и построение их аналитических или численных решений. В первой и второй главе для исследования подмоделей и их фактор уравнений, при различных начальных условиях и значениях параметров в задачах Коши был использован численный метод Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности [35, 64], с использованием библиотеки с открытым исходным кодом SciPy ([www.scipy.org](http://www.scipy.org)). Все расчеты выполнены на языке программирования Python (версия 3.7) комплекса программ Anaconda в среде разработки программного обеспечения Spyder.

**Научная новизна.** Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем:

1. Методами группового анализа системы дифференциальных уравнений найдены все существенно различные подмодели нестационарной модели распространения газа в разреженном пространстве, отличные от моделей, исследованных ранее. Для инвариантных подмоделей ранга 1 получены основные механические характеристики описываемого ими течения газа. Приведены условия существования этих подмоделей. Проведено численное решение краевых задач для уравнений подмоделей ранга 1. Построены траектории движения частиц газа. Указан физический смысл этих решений.
2. Для модели продольных колебаний упругого неоднородного стержня методом, предложенным Ю. А. Чиркуновым [67], выполнена групповая классификация дифференциального уравнения, описывающего эти колебания. В результате получены все базисные модели с различными свойствами симметрии. Найдены все существенно различные нестационарные инвариантные подмодели для этих базисных моделей. Получено единственное нетривиальное точное решение, описывающее инвариантную

подмодель ранга 0. Построены инвариантные подмодели ранга 1. Проведено численное решение задачи Коши для уравнений подмоделей ранга 1. Указан физический смысл этих решений.

3. Для трехмерной динамической модели термоупругой трансверсально–изотропной среды выполнено групповое расслоение системы дифференциальных уравнений второго порядка, задающей эту модель. Получена система дифференциальных уравнений первого порядка, которая эквивалентна уравнениям исходной модели. Выполнена классификация по признаку подобия всех инвариантных решений полученной системы первого порядка, а, следовательно, и всех подмоделей исходной модели. Найдены инвариантные подмодели ранга 1. Численными методами получены графики, характеризующие изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально–изотропной среде сферы единичного радиуса и куба с ребром равным 2 в результате их деформации под действием найденных перемещений и температуры. Указан физический смысл полученных решений.

**Теоретическая и практическая значимость.** Работа носит теоретический характер. Полученные результаты являются вкладом в программу «Подмодели», предложенную академиком Л. В. Овсянниковым [26]. Полученные нетривиальные точные и численные решения для рассматриваемых моделей могут использоваться в качестве тестовых решений в численных расчетах, а также позволяют оценивать степень адекватности математической модели и ее подмоделей по отношению к реальным физическим процессам после проведения экспериментов, соответствующих этим решениям, и оценки возникающих отклонений.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Для нестационарной модели распространения газа в разреженном пространстве с помощью методов группового анализа дифференциальных уравнений получены все существенно различные подмодели, которые ранее не были найдены. Для инвариантных подмоделей ранга 1 получены основные механические характеристики описываемого ими течения газа. Приведены условия существования этих подмоделей. Численными методами построены траектории движения частиц газа при заданных в начальный момент их местоположениях и скоростях. Указан физический смысл.
2. Выполнена групповая классификация дифференциального уравнения модели продольных колебаний упругого неоднородного стержня. Получены все базисные модели с различными симметричными свойствами. Найдены инвариантные подмодели для этих базисных моделей. Получено единственное нетривиальное точное решение, описывающее инвариантную подмодель ранга 0. Построены инвариантные подмодели ранга 1. Для инвариантных подмоделей получены описывающие их фактор уравнения,

для которых при некоторых значениях параметров, определяющих эти подмодели численно решены краевые задачи, для которых продольное перемещение и скорость его изменения заданы на некоторой линии уровня. Указан физический смысл этих решений.

3. Выполнено групповое расслоение уравнений трехмерной динамической модели термоупругой трансверсально–изотропной среды. С его помощью получена, равносильная исходным уравнениям модели, система дифференциальных уравнений первого порядка. Проведен групповой анализ полученной системы уравнений. А именно: классификация по признаку подобия всех инвариантных решений полученной системы первого порядка, а, следовательно, и всех подмоделей исходной модели, построены инвариантные подмодели ранга 1. Получены точные решения описывающие найденные подмодели, которые зависят от произвольной функции. Для некоторых конкретных видов этой функции построены графики, характеризующие изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально–изотропной среде поверхностей в результате их деформации под действием найденных перемещений и температуры. Указан физический смысл полученных решений.

**Личный вклад автора.** Содержание данного диссертационного исследования и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации были представлены в виде докладов на семинарах: «Избранные вопросы математического анализа» в Институте математики имени С. Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.–м.н. Г. В. Демиденко (Новосибирск, март 2022 г.); «Прикладная гидродинамика» в Институте гидродинамики имени М. А. Лаврентьева СО РАН под руководством чл.–корр. РАН В. В. Пухначева и д.ф.–м.н. Е. В. Ерманюка (Новосибирск, март 2022 г.); «Обратные задачи математической физики» в Институте математики имени С. Л. Соболева СО РАН под руководством д.ф.–м.н. М. В. Нецадима (Новосибирск, март 2022 г.) и на 13 международных и всероссийских научных конференциях: «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (Новосибирск, сентябрь 2020 г.); «Математические проблемы механики сплошных» (Новосибирск, май 2019 г.); «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Уфа, март 2018 г.); «Соболевские чтения» (Новосибирск, декабрь 2016 г., август 2017 г.); «Математика в современном мире» (Новосибирск, август 2017 г.); «Задачи со свободными границами: теория, эксперимент и приложения» (Барнаул, август 2017 г.); «Наука. Промышленность. Оборона» (Новосибирск, апрель 2015 г.); «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015» (Новосибирск, октябрь 2015 г.); «VII международная конференция по математическому моделированию» (Якутск, июль 2014 г.); «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики 2014» (Новосибирск, июнь

2014 г.); «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, июнь 2014 г.); «Нелинейные уравнения и комплексный анализ» (Уфа, март 2014 г.).

**Публикации.** Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 3 статьях [77-79] в иностранных рецензируемых научных изданиях, индексируемых в Web of Science [77] и Scopus [77-79], одна из которых [77] входит в квартиль Q1, 1 статья опубликована в рецензируемом издании, индексируемом в РИНЦ [61] и 13 тезисов международных и всероссийских конференций. Во всех работах, выполненных в соавторстве с научным руководителем, последнему принадлежат постановка задач и общее руководство. В работе [79], в которой одним из соавторов является И. И. Гасенко, последнему принадлежит обсуждение полученных результатов.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 142 страницы, включая 157 рисунков, 11 таблиц. Список литературы содержит 100 наименований.



## Глава 1. Групповой анализ нестационарных моделей распространения газа в разреженном пространстве

Данная глава посвящена групповому анализу системы дифференциальных уравнений, описывающих тепловое движение газа в сильно разреженном пространстве. Основные модели движения газа в трехмерном пространстве были получены в работе [26]. В списке этих моделей модель, описывающая тепловое движение газа в разреженном пространстве, получила несчастливый номер 13. Одномерная версия этой модели была использована для решения задачи о сильном взрыве в работах [37, 97, 100]. В работах [53, 62, 65], рассматривался  $n$ -мерный случай ( $n \geq 2$ ) этой модели, для которого было выполнено групповое расслоение относительно бесконечной подгруппы основной группы системы уравнений, описывающих эту модель. Для заданного начального распределения давления, с помощью специального выбора массовых лагранжевых переменных, был осуществлен переход к редуцированной системе дифференциальных уравнений, у которой число независимых переменных на единицу меньше, чем у исходной системы. В работе [66] подробно исследовался трехмерный случай ( $n = 3$ ). Были найдены все нетривиальные законы сохранения первого порядка и получены следующие точные решения: 1) решение, описывающие состояние среды за фронтом ударной волны после очень сильного взрыва, 2) решение, которое зависит от времени по экспоненциальному закону, и описывает следующие динамические процессы в сильно разреженной среде: или рассеяние частиц газа до бесконечности, или локализацию частиц газа вблизи неподвижной поверхности, 3) решение, которое описывает в сильно разреженном пространстве динамический процесс, в котором каждая частица совершает периодические колебания, 4) решение, которое описывает состояние среды после проведения серии очень сильных взрывов, 5) решения, которые описывают процессы, происходящие внутри торнадо. Установлено, что, в сильно разреженном пространстве для каждого заданного начального распределения давления, в каждый момент времени все частицы газа локализованы на  $n-1$  мерной поверхности, движущейся в этом пространстве. В каждой точке этой поверхности вектор ускорения коллинеарен ее вектору нормали. В данной главе будут найдены все существенно различные инвариантные подмодели, отличные от моделей, исследованных в работах [53, 62, 65, 66].

Основные результаты, приведенные в данной главе, получены в работе [77].

### 1.1 Описание модели

Модель теплового движения газа в трехмерном разреженном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений [26, 53, 62, 65, 66]:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \mathbf{0}, \\ \rho_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ p_t + \mathbf{u} \cdot \nabla p &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $t$  – время,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z) \in R^3$  – пространственные координаты,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in R^3$  –  
 $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$  – плотность,  $p = p(t, \mathbf{x})$  – давление.

В работах Ю. А. Чиркунова [53, 62, 65, 66] эта система преобразована к более удобному для исследования виду. Пусть переменные  $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$  суть начальные значения переменных  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi) = (x, y, z)$ , т. е.  $\mathbf{x}(0, \xi) = \xi$ .

С помощью этих переменных система (1.1) записывается в виде векторных уравнений

$$\left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right|^{-1} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right)^T \mathbf{x}_{tt} + \frac{1}{\rho_0} p_\xi = \mathbf{0}, \quad \rho = \rho_0 \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right|^{-1}, \quad p_t = 0, \quad (1.2)$$

где  $\rho_0 = \rho_0(\xi)$  – начальное распределение плотности. Решением последнего уравнения системы (1.2) является  $p = p(\xi)$ , где  $p(\xi)$  – заданная функция, определяющая начальное распределение давления. Так как давление сохраняется в частице, то это переменная Лагранжа.

После замены переменных:

$$\xi' = \xi'(\xi), \quad \eta' = \eta'(\xi), \quad \zeta' = p(\xi), \quad (1.3)$$

такой, что

$$\frac{\partial(\xi', \eta', p)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \rho_0(\xi), \quad (1.4)$$

система уравнений (1.2) преобразуется к эквивалентной системе (штрихи опущены)

$$\mathbf{x}_{tt} + \mathbf{x}_\xi \times \mathbf{x}_\eta = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Вектор скорости и плотность определяются по формулам:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}_t, \quad \frac{1}{\rho} = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right|.$$

Уравнения (1.5) не содержит переменную  $\zeta'$  и производные  $\partial_{\zeta'} \mathbf{x}$ . Таким образом, специальный выбор массовых переменных Лагранжа, по формулам (1.3) и (1.4) позволяет преобразовать систему (1.1) к уравнениям (1.5), содержащим только три независимые переменные. Переменная  $\zeta' = p$  является параметром, который, с учетом (1.3) и (1.4), определяет переменные уравнений (1.5). Это означает, что имеет место расслоение сильно разреженного газа по отношению к давлению. А именно, в сильно разреженном пространстве для каждого заданного начального распределения давления, в каждый момент времени все частицы газа локализованы на двумерной поверхности  $S_t$ , определяемой уравнением  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi, \eta)$ . Поверхность  $S_t$  с течением времени движется в этом пространстве. В каждой точке поверхности  $S_t$ , вектор ускорения коллинеарен вектору нормали к этой поверхности.

Далее предполагается, что начальное распределение давления в сильно разреженном газе задано.

Система уравнений (1.5) является основным объектом исследования в данной главе.

## 1.2 Групповое свойство уравнения

Основная группа Ли преобразований уравнений (1.5) бесконечна, и порождается операторами [53, 62, 65, 66]:

$$\begin{aligned} P_0 &= \partial_t, \quad R_1 = t\partial_t + \xi\partial_\xi + \eta\partial_\eta, \quad R_2 = t\partial_t - 2\mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}}, \quad Q = g_\eta\partial_\xi - g_\xi\partial_\eta, \\ X &= \partial_{\mathbf{x}}, \quad Y = t\partial_{\mathbf{x}}, \quad Z = \mathbf{x} \times \partial_{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

где  $g = g(\xi, \eta)$  – произвольная функция. Для  $g(\xi, \eta) = \eta$  оператор  $Q$  является инфинитезимальным оператором переноса  $P_1 = \partial_\xi$ , а для  $g(\xi, \eta) = \xi$  – инфинитезимальным оператором переноса  $P_2 = \partial_\eta$ . Для  $g(\xi, \eta) = \xi\eta$  оператор  $Q$  является инфинитезимальным оператором растяжения  $R_3 = \xi\partial_\xi - \eta\partial_\eta$ . Для  $g(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta^2 + \xi^2)$  оператор  $Q$  является инфинитезимальным оператором вращения  $Q_1 = \eta\partial_\xi - \xi\partial_\eta$  а для  $g(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)$  – инфинитезимальным оператором Лоренца  $Q_2 = \eta\partial_\xi + \xi\partial_\eta$ .

Далее рассматривается инвариантность системы (1.5) относительно группы Ли преобразований  $G_8$ , порождаемой операторами

$$P_0, P_1, P_2, R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2 \quad (1.6)$$

Будут получены все инвариантные относительно преобразований группы  $G_8$  подмодели модели теплового движения газа в разреженном пространстве, задаваемой уравнениями (1.5). Эти подмодели описываются инвариантными решениями этого уравнения. Они отличны от подмоделей, исследованных в работе [66].

Для классификации инвариантных и частично инвариантных подмоделей модели, задаваемой системой (1.5), т. е. для получения существенно различных (не связанных точечными преобразованиями) инвариантных подмоделей строятся оптимальные системы неподобных подалгебр алгебры Ли  $A_8$  с базисом (1.6).

Действие группы внутренних автоморфизмов алгебры Ли  $A_8$  на эту алгебру Ли разбивает ее на непересекающиеся классы подобных подалгебр. Выбор в каждом таком классе простейшего представителя дает оптимальную систему неподобных подалгебр алгебры Ли  $A_8$ . Каждой подалгебре из оптимальной системы подалгебр соответствует порождаемая ею подгруппа группы  $G_8$ , допускаемой системой (1.5). Применение критерия инвариантности функции относительно группы Ли преобразований [21-25, 62] позволяет получить в пространстве  $R^6(t, \xi, \eta, x, y, z)$  универсальный инвариант каждой подгруппы из построенной оптимальной системы подгрупп.

Рассмотрим следующие решения системы (1.5)

$$\mathbf{x} = t\mathbf{u}(\xi, \eta) + \mathbf{x}_0(\xi, \eta), \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi, \eta)$  и  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0(\xi, \eta)$  – произвольные функции. Подмодель, задаваемая решением (1.7), описывает течение газа, при котором каждая частица движется с постоянной скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi, \eta)$  и имеет нулевое ускорение. Эта подмодель будет называться тривиальной.

Приведенные ниже оптимальные системы подгрупп содержат только такие подгруппы  $H$ , для которых инвариантные подмодели, определяемые инвариантными  $H$  – решениями уравнений (1.5), не являются тривиальными.

Подмодель, описываемую инвариантным решением ранга  $k$  ( $k=0, 1, 2$ ) будем называть инвариантной подмоделью ранга  $k$ .

В последующих формулах мы будем использовать следующие обозначения:  $c_1$  – произвольная положительная вещественная постоянная;  $\alpha, \beta, \gamma, c_2, c_3, t_0, \xi_0, \eta_0$  – произвольные вещественные постоянные;  $\mathbf{u}$  – вектор скорости частиц газа;  $\mathbf{a}$  – вектор

ускорения частиц газа;  $\varphi$  – угол между векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{u}$ ;  $\mathbf{x}_0(\tau)$ ,  $\mathbf{u}_0(\tau)$ ,  $\mathbf{f}(\tau)$  и  $\mathbf{g}(\tau)$  – произвольные гладкие вектор-функции своего аргумента.

Все инвариантные подмодели ранга 0 системы (1.5) являются тривиальными.

Для классификации инвариантных подмоделей ранга 2 системы уравнений (1.5) строится оптимальная система неподобных однопараметрических подгрупп группы Ли  $G_8$ . Она приведена в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Однопараметрические подгруппы  $\theta_{1k}$  и их универсальные инварианты.

$k$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$P_1 + R_2$	$t \exp(-\xi), \eta, t^2 \mathbf{x}$
2	$R_2$	$\xi, \eta, t^2 \mathbf{x}$
3	$P_0 + P_1$	$t - \xi, \eta, \mathbf{x}$
4	$R_1 + \alpha R_2 (\alpha \neq -1)$	$t \xi^{-\alpha-1}, \eta \xi^{-1}, t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
5	$R_1 - R_2$	$t, \eta \xi^{-1}, \xi^{-2} \mathbf{x}$
6	$R_1 + \alpha R_2 + R_3 (\alpha \neq -1)$	$t \xi^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \eta, t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
7	$R_1 - R_2 + R_3$	$t, \eta, \xi^{-1} \mathbf{x}$
8	$R_1 + \alpha R_2 + R_3 + Q_1 (\alpha \neq -1)$	$t \exp\left(\frac{(\alpha+1)\eta}{\xi+\eta}\right), (\xi+\eta) \exp\frac{\eta}{\xi+\eta}, t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
9	$R_1 - R_2 + R_3 + Q_1$	$t, (\xi+\eta) \exp\frac{\eta}{\xi+\eta}, \exp\left(\frac{2\eta}{\xi+\eta}\right) \mathbf{x}$
10	$R_2 + Q_1$	$t \exp\left(\arcsin \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\right), \xi^2 + \eta^2, t^2 \mathbf{x}$
11	$R_2 + Q_1 + Q_2$	$t \exp\left(-\frac{\xi}{2\eta}\right), \eta, t^2 \mathbf{x}$
12	$R_2 + Q_2$	$t(\xi - \eta), \xi^2 - \eta^2, t^2 \mathbf{x}$
13	$R_1 + \alpha R_2 + Q_1 (\alpha \neq -1)$	$t(\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{\alpha-1}{2}}, (\xi^2 + \eta^2) \exp\left(2 \arctg\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right), t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
14	$R_1 - R_2 + Q_1$	$t, (\xi^2 + \eta^2) \exp\left(2 \arctg\left(\frac{\xi}{\eta}\right)\right), (\xi^2 + \eta^2)^{-1} \mathbf{x}$
15	$R_2 + R_3 + Q_2$	$t\left(\eta + \xi(1 + \sqrt{2})\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}, \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2, t^2 \mathbf{x}$

16	$R_1 + \alpha R_2 + R_3 + Q_2 \ (\alpha \neq -1)$	$t \left( \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 \right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \left( \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 \right) \left( \frac{\xi - \eta(1+\sqrt{2})}{\xi - \eta(1-\sqrt{2})} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$ $t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
17	$R_1 - R_2 + R_3 + Q_2$	$t, \left( \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 \right) \left( \frac{\xi - \eta(1+\sqrt{2})}{\xi - \eta(1-\sqrt{2})} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \left( \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 \right)^{-1} \mathbf{x}$
18	$P_0$	$\xi, \eta, \mathbf{x}$
19	$P_1$	$t, \eta, \mathbf{x}$
20	$R_1 + \alpha R_2 + R_3 + Q_1 + Q_2$	$t^2 (\xi + \eta)^{-\alpha-1}, \eta, t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
21	$R_1 + \alpha R_2 + Q_1 + Q_2$	$t \exp\left(-\frac{(\alpha+1)\xi}{2\eta}\right), \eta \exp\left(-\frac{\xi}{2\eta}\right), t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
22	$R_1 + \alpha R_2 + Q_2$	$t^{\frac{2}{\alpha+1}} (\xi + \eta)^{-1}, \xi - \eta, t^{\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{x}$
23	$R_2 + R_3$	$t\eta, \xi\eta, t^2 \mathbf{x}$
24	$R_2 + R_3 + Q_1 + Q_2$	$t\eta, \xi\eta + \eta^2, t^2 \mathbf{x}$
25	$R_2 + R_3 + Q_2$	$t \left( \frac{\eta + \xi(1-\sqrt{2})}{\eta + \xi(1+\sqrt{2})} \right)^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}, 2\xi\eta - \xi^2 + \eta^2, t^2 \mathbf{x}$
26	$R_3$	$t, \xi\eta, \mathbf{x}$
27	$R_3 + Q_1$	$t, \xi + \eta, \mathbf{x}$
28	$R_3 + Q_1 + Q_2$	$t, \xi\eta + \eta^2, \mathbf{x}$
29	$R_3 + Q_2$	$t, \ln(\xi^2 + \eta^2) + 2\arctg \frac{\eta}{\xi}, \mathbf{x}$
30	$Q_1$	$t, \xi^2 + \eta^2, \mathbf{x}$
31	$Q_1 + Q_2$	$t, \eta, \mathbf{x}$
32	$Q_2$	$t, \xi^2 - \eta^2, \mathbf{x}$

В силу таблицы 1.1 мы можем записать общий вид всех универсальных решений ранга 2. Проиллюстрируем это на примере  $\theta_{1.16} \langle R_1 + \alpha R_2 + R_3 + Q_2 \ (\alpha \neq -1) \rangle$ . Подмодель, инвариантная относительно этой подгруппы, задается инвариантным решением вида

$$\mathbf{x} = t^{-\frac{2\alpha}{\alpha+1}} \mathbf{w}(\lambda, \mu), \lambda = t \left( \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 \right)^{-\frac{\alpha+1}{2}}, \mu = \left( \eta^2 + 2\xi\eta - \xi^2 \right) \left( \frac{\xi - \eta(1+\sqrt{2})}{\xi - \eta(1-\sqrt{2})} \right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

где функция  $\mathbf{w}$  определяется из соответствующей фактор системы:

$$\lambda^2 \mathbf{w}_{\lambda\lambda} - \frac{4\alpha\lambda}{\alpha+1} \mathbf{w}_{\lambda} + \frac{6\alpha^2 + 2\alpha}{(\alpha+1)^2} \mathbf{w} - 2(\alpha+1)\lambda^{\frac{\alpha+3}{\alpha+1}} \mu \mathbf{w}_{\lambda} \times \mathbf{w}_{\mu} = \mathbf{0}.$$

Для классификации инвариантных подмоделей ранга 1 уравнений (1.5) строится оптимальная система неподобных двухпараметрических подгрупп группы Ли  $G_8$ . Она приведена в таблице 1.2.

Таблица 1.2. Двухпараметрические подгруппы  $\theta_{2,k}$  и их универсальные инварианты.

$k$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$P_0 + P_1,$ $R_1 + \alpha(R_2 + R_3) + Q_1 + Q_2$ $(\alpha(\alpha-1) \neq 0)$	$(\alpha(t-\xi) - \eta)\eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \eta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \mathbf{x}$
2	$P_0 + P_1, R_2 + R_3$	$(t-\xi)\eta, \eta^{-2} \mathbf{x}$
3	$R_1 + \alpha R_2, \beta R_2 + Q_1$	$t(\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}} \exp(\beta \arctg(\xi^{-1}\eta)),$ $(\xi^2 + \eta^2)^{\alpha} \exp(-2\beta \arctg(\xi^{-1}\eta)) \mathbf{x}$
4	$P_2 + R_2, R_1 + R_3$	$t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta), \exp(2\eta) \mathbf{x}$
5	$P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3) (\alpha \neq 1)$	$(t-\xi)\eta^{\frac{1+\alpha}{\alpha-1}}, \eta^{\frac{2\alpha}{1-\alpha}} \mathbf{x}$
6	$R_1 + \alpha R_2, \beta R_2 + Q_1 + Q_2$	$t\eta^{-\alpha-1} \exp(-\beta\xi(2\eta)^{-1}), \eta^{2\alpha} \exp(\beta\xi\eta^{-1}) \mathbf{x}$
7	$R_1 + \alpha R_2, 2\beta R_2 + R_3$	$t\xi^{-\frac{\alpha+1+2\beta}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}}, \xi^{\alpha+2\beta} \eta^{\alpha-2\beta} \mathbf{x}$

В силу таблицы 1.2 мы можем записать общий вид всех универсальных решений ранга 1. Исследуем все эти решения.

### 1.3 Инвариантные подмодели ранга 1

#### 1.3.1. Инвариантная $\theta_{2,1} \langle P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3) + Q_1 + Q_2 (\alpha(\alpha-1) \neq 0) \rangle$ - подмодель

Данная подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = (\alpha(t-\xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}},$$

Подстановка в уравнения (1.5) дает фактор систему

$$\mathbf{w}'' - \frac{2}{\alpha-1} \mathbf{w}' \times \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (1.8)$$

Из (1.8) следует, что основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|\mathbf{x}| = \left| \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (\alpha(t-\xi) - \eta)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (\alpha(t-\xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|, \quad |\mathbf{u}| = c_1 \left| \alpha \eta^{\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}} \right|,$$

$$|\mathbf{a}| = \frac{2c_1 \alpha^2 \sin \varphi}{|\alpha-1|} \left| \eta^{\frac{4\alpha+2}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (\alpha(t-\xi) - \eta)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (\alpha(t-\xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$(\alpha(t-\xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$(\alpha(t-\xi) - \eta) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t, \xi, \eta$ .

Решим уравнения (1.8) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при  $\alpha = 2$  и условиях Коши:

$$w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 10, \quad w_3(0) = 0, \quad w_1'(0) = 1, \quad w_2'(0) = 2, \quad w_3'(0) = 3.$$

Рисунок 1.1 показывает результат численного решения для  $w_1$ .



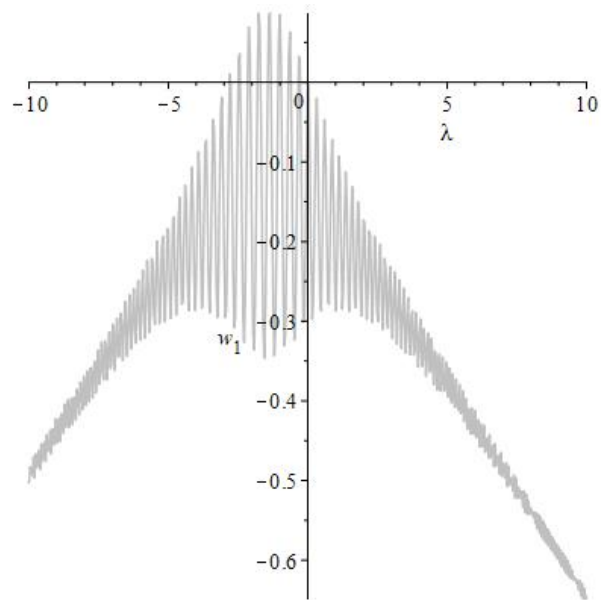


Рисунок 1.1. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.2 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

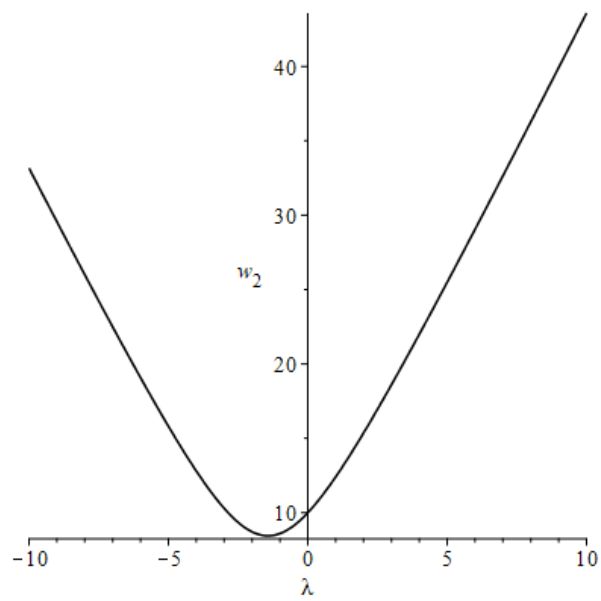


Рисунок 1.2. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.3 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

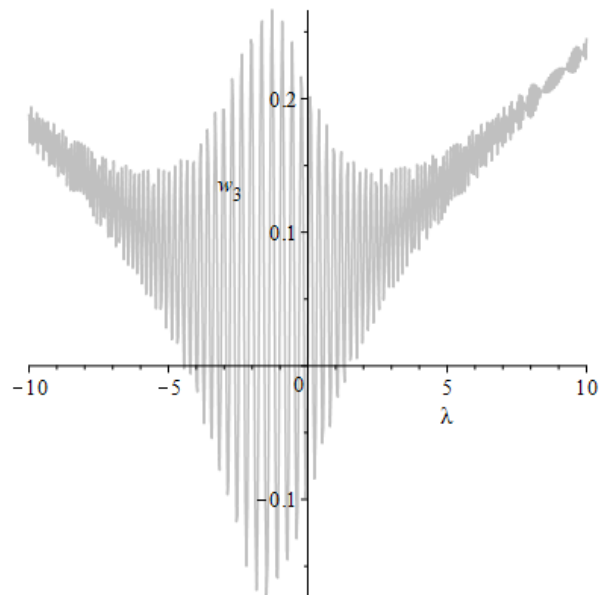


Рисунок 1.3. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.4 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 15]$ .

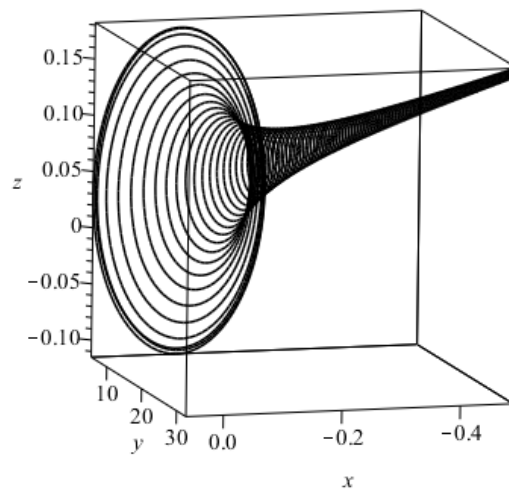


Рисунок 1.4. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 15]$ .

Рисунок 1.5 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 15]$ .

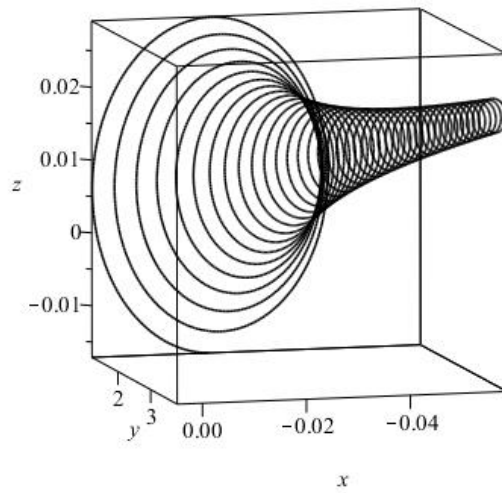


Рисунок 1.5. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 15]$ .

Рисунок 1.6 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 15]$ .

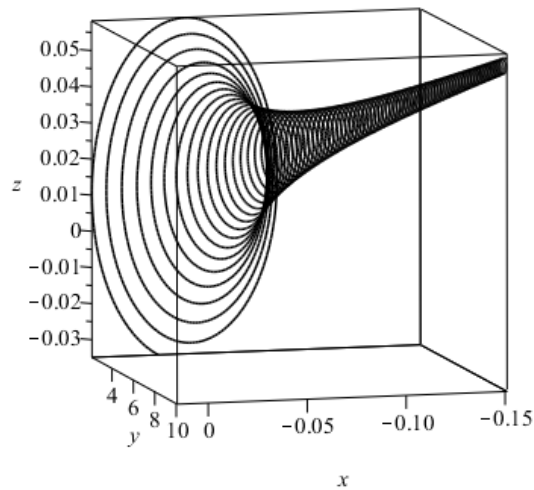


Рисунок 1.6. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 15]$ .

Рисунок 1.7 показывает траекторию движения 3 рассмотренных выше частиц при  $t \in [0, 15]$ .

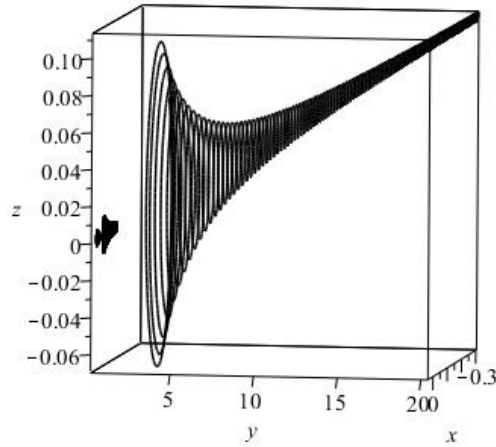


Рисунок 1.7. Траектории движения трех частиц.

Рисунки 1.4–1.7 показывают, что данная подмодель описывает движение частиц в торнадо.

### 1.3.2. Инвариантная $\theta_{2,2}\langle P_0+P_1, R_2+R_3 \rangle$ -подмодель

Инвариантная  $\theta_{2,2}\langle P_0+P_1, R_2+R_3 \rangle$ -подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = \eta^2 \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = (t - \xi)\eta.$$

Функция  $\mathbf{w}$  является решением системы уравнений

$$\mathbf{w}'' - 2\mathbf{w}' \times \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Основные механические характеристики этого течения газа имеют вид:

$$|\mathbf{x}| = \eta^2 \sqrt{c_1^2 (t - \xi)^2 \eta^2 + c_2 (t - \xi)\eta + c_3}, \quad |\mathbf{u}| = c_1 |\eta^3|,$$

$$|\mathbf{a}| = 2c_1 \eta^4 \sin \varphi \sqrt{c_1^2 (t - \xi)^2 \eta^2 + c_2 (t - \xi)\eta + c_3}.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$(t - \xi)\eta < -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$(t-\xi)\eta > -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ .

Решим уравнения (1.9) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при условиях Коши:

$$w_1(0) = 0, w_2(0) = 10, w_3(0) = 0, w_1'(0) = 2, w_2'(0) = 3, w_3'(0) = 4.$$

Рисунок 1.8 показывает результат численного решения для  $w_1$ .

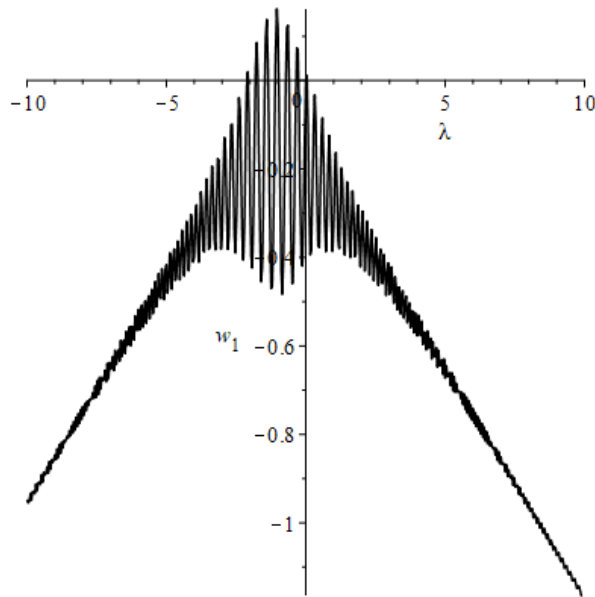


Рисунок 1.8. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.9 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

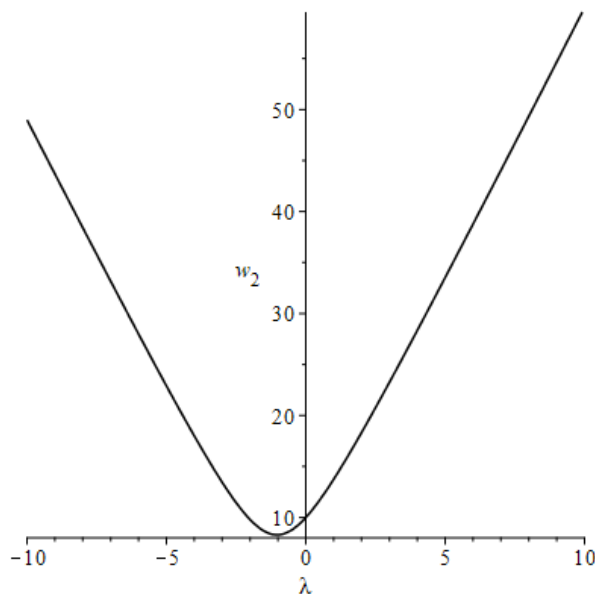


Рисунок 1.9. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.10 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

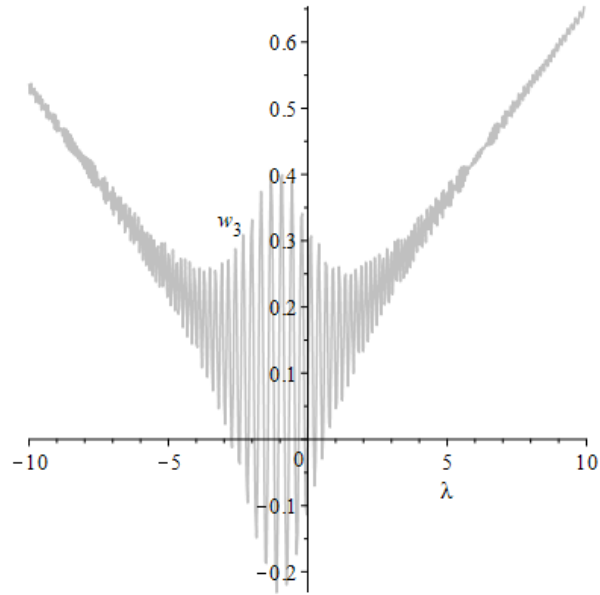


Рисунок 1.10. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.11 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

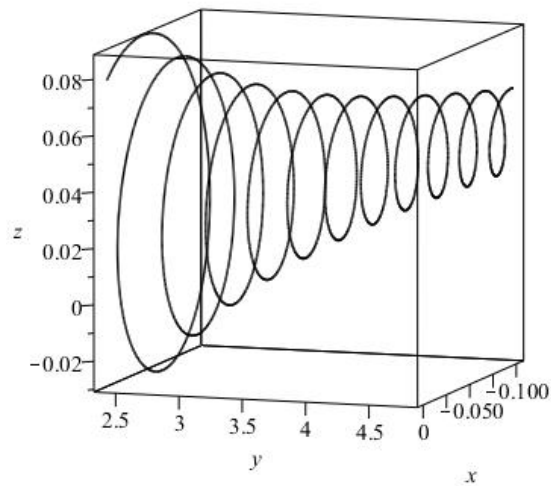


Рисунок 1.11. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

Рисунок 1.12 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 5]$ .

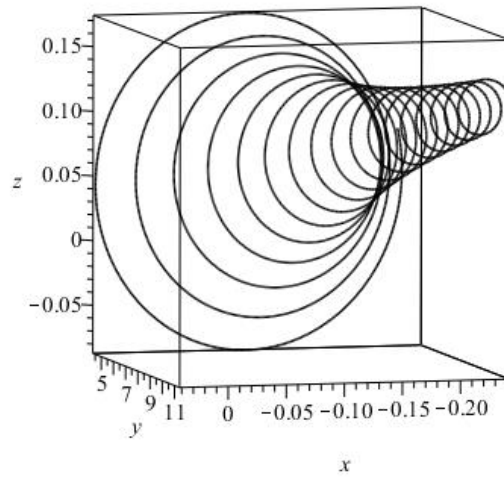


Рисунок 1.12. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 5]$ .

Рисунок 1.13 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

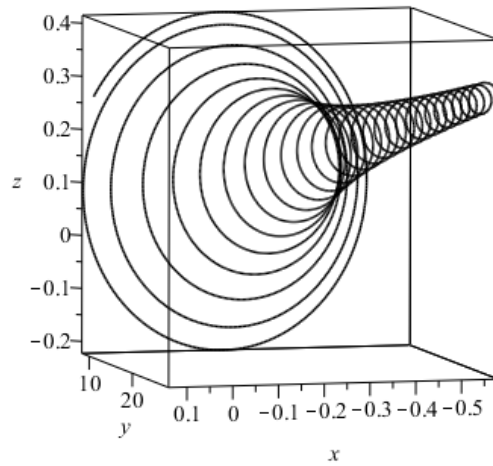


Рисунок 1.13. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

Рисунок 1.14 показывает траекторию движения 3 рассмотренных выше частиц при  $t \in [0, 5]$ .

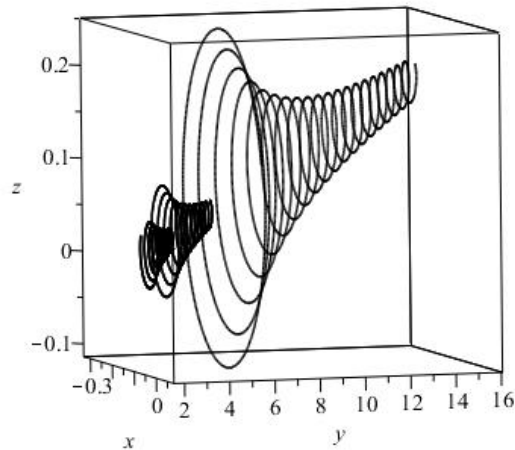


Рисунок 1.14. Траектории движения трех частиц.

Рисунки 1.11–1.14 показывают, что данная подмодель также описывает движение частицы в торнадо.

### 1.3.3. Инвариантная $\theta_{2,3}\langle R_1 + \alpha R_2, \beta R_2 + Q_1 \rangle$ -подмодель

Инвариантная  $\theta_{2,3}\langle R_1 + \alpha R_2, \beta R_2 + Q_1 \rangle$ -подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = (\xi^2 + \eta^2)^{-\alpha} \exp\left(2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right) \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right) (\xi^2 + \eta^2)^{-\frac{\alpha+1}{2}}.$$

Функция  $\mathbf{w}$  является решением системы

$$\mathbf{w}'' + 2\beta\lambda \mathbf{w}' \times \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (1.10)$$

Основные механические характеристики этого течения газа имеют вид:

$$|\mathbf{x}| = \frac{\exp\left(2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^\alpha} \sqrt{\frac{c_1^2 t^2 \exp\left(2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\alpha+1}} + \frac{c_2 t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}} + c_3},$$

$$|\mathbf{u}| = \frac{c_1 \exp\left(3\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{(\xi^2 + \eta^2)^{\frac{3\alpha+1}{2}}},$$



$$|a| = \frac{2c_1 |\beta| t \exp\left(5\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right) \sin \varphi}{\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{\frac{5\alpha+3}{2}}} \sqrt{\frac{c_1^2 t^2 \exp\left(2\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{\alpha+1}} + \frac{c_2 t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}} + c_3}.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$\frac{t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right),$$

либо при

$$\frac{t \exp\left(\beta \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\xi}\right)}{\left(\xi^2 + \eta^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right).$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t, \xi, \eta$ .

Решим систему (1.10) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при  $\alpha = 1, \beta = 2$  и условиях Коши:

$$w_1(0) = 1, w_2(0) = 10, w_3(0) = 1, w_1'(0) = 0.2, w_2'(0) = 0.3, w_3'(0) = 0.4.$$

Рисунок 1.15 показывает результат численного решения для  $w_1$ .

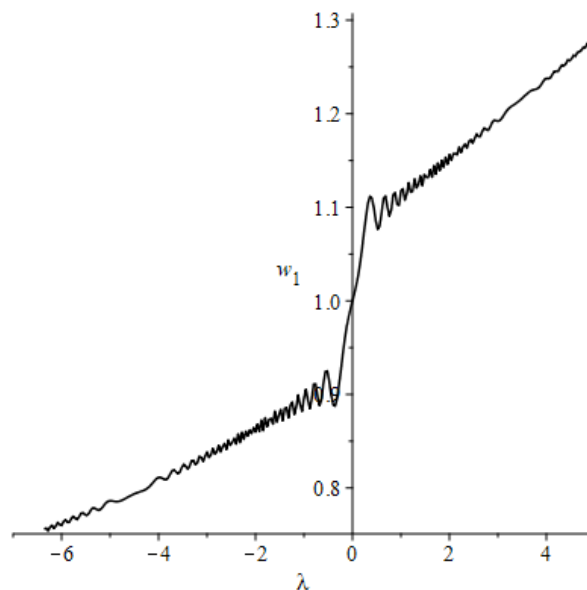


Рисунок 1.15. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.16 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

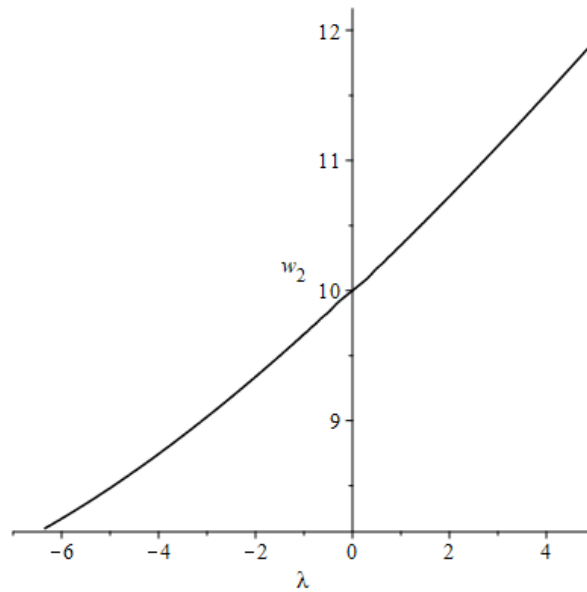


Рисунок 1.16. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.17 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

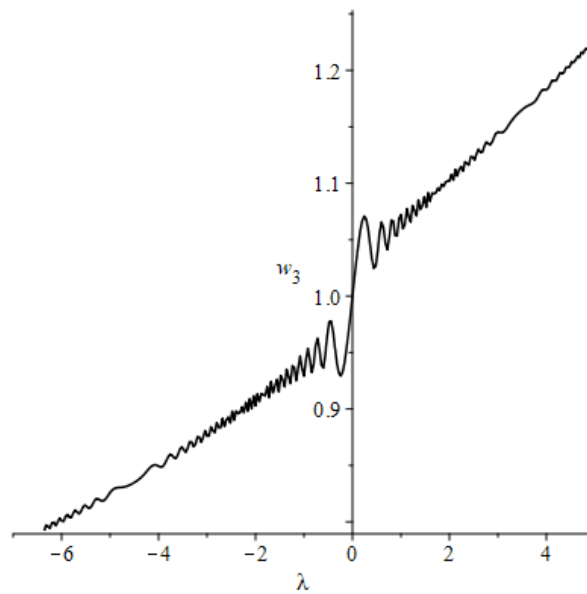


Рисунок 1.17. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.18 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 0.5]$ .

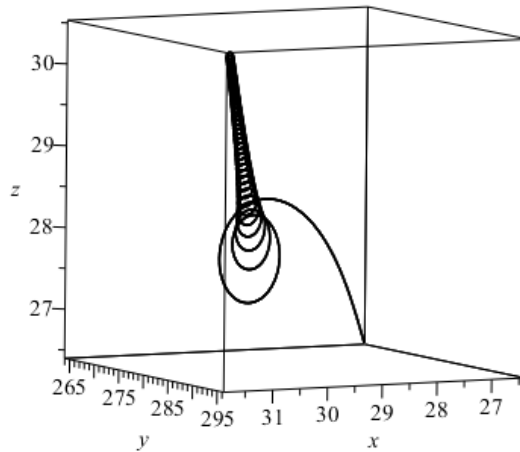


Рисунок 1.18. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 0.5]$ .

Рисунок 1.19 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 0.5]$ .

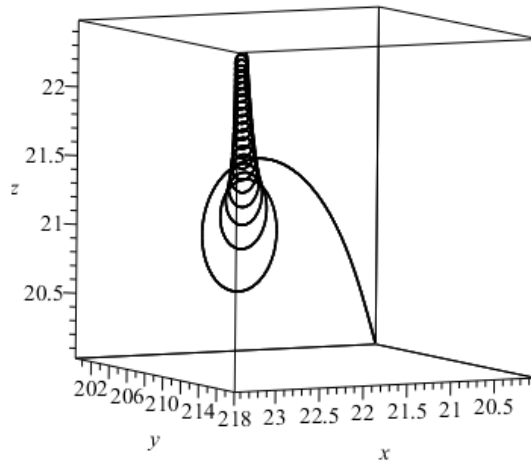


Рисунок 1.19. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 0.5]$ .

Рисунок 1.20 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 0.5]$ .

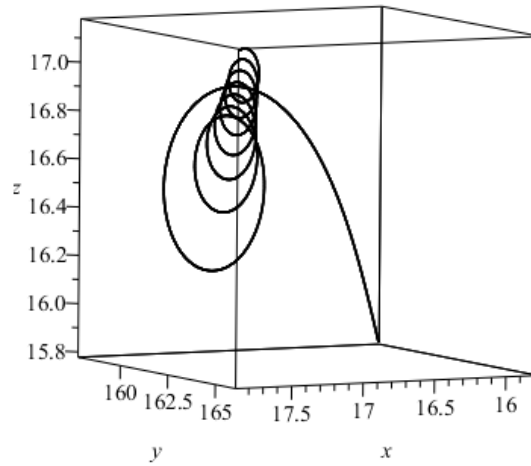


Рисунок 1.20. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 0.5]$ .

Рисунки 1.18–1.19 описывают движение частицы в торнадо.

### 1.3.4. Инвариантная $\theta_{2,4} \langle P_2 + R_2, R_1 + R_3 \rangle$ - подмодель

Инвариантная  $\theta_{2,4} \langle P_2 + R_2, R_1 + R_3 \rangle$ -подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = \exp(-2\eta) \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta).$$

Функция  $\mathbf{w}$  является решением уравнений (1.10) при  $\beta = \frac{1}{2}$ .

Основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|\mathbf{x}| = \exp(-2\eta) \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-1} \exp(-2\eta) + c_2 t \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) + c_3}, \quad |\mathbf{u}| = c_1 \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-3\eta),$$

$$|\mathbf{a}| = c_1 t \xi^{-\frac{3}{2}} \exp(-5\eta) \sin \varphi \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-1} \exp(-2\eta) + c_2 t \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) + c_3}.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$t \xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) < -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$t\xi^{-\frac{1}{2}} \exp(-\eta) > -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ .

Решим уравнения (1.10) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при  $\beta = \frac{1}{2}$ , условия Коши имеют вид:

$$w_1(0) = 0, w_2(0) = 10, w_3(0) = 0, w_1'(0) = 2, w_2'(0) = 3, w_3'(0) = 4.$$

Рисунок 1.21 показывает результат численного решения для  $w_1$ .

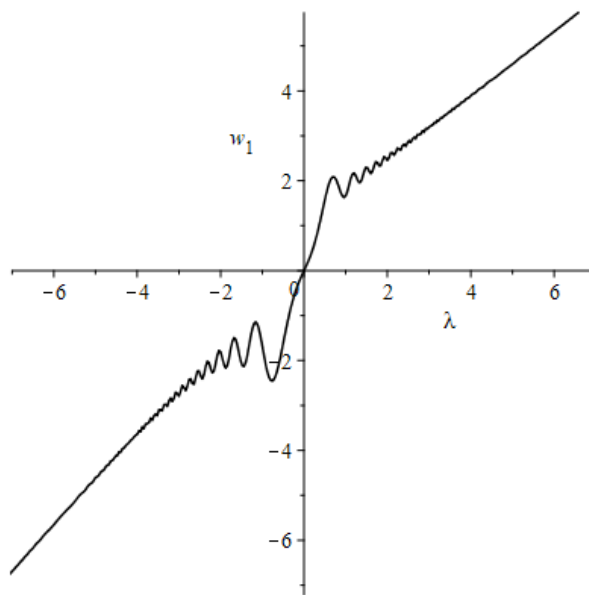


Рисунок 1.21. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.22 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

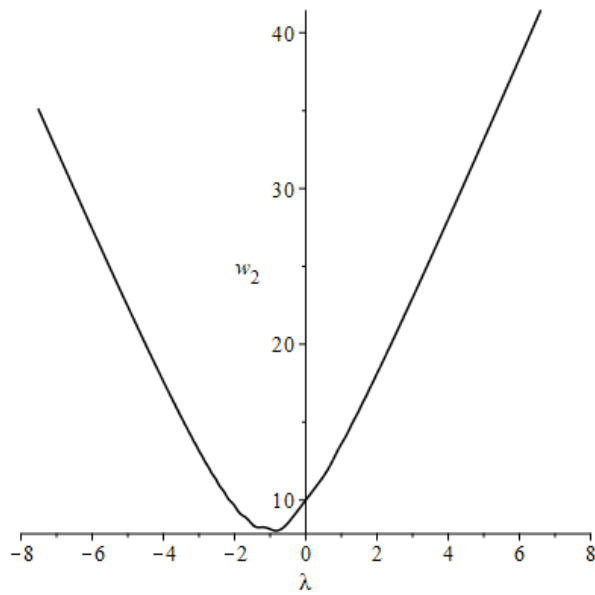


Рисунок 1.22. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.23 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

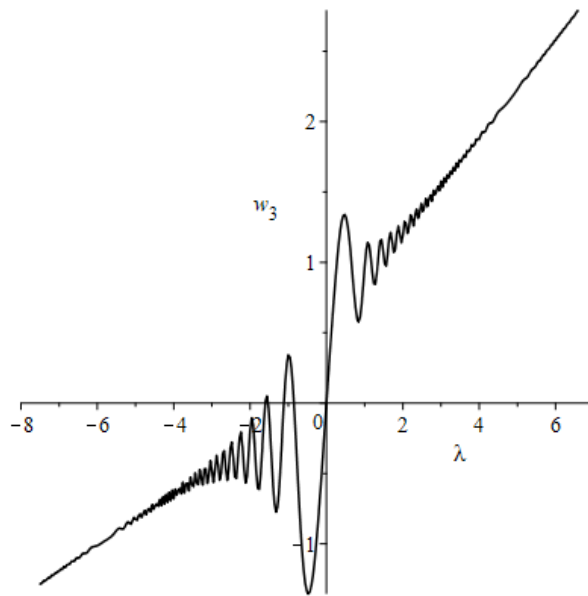


Рисунок 1.23. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.24 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

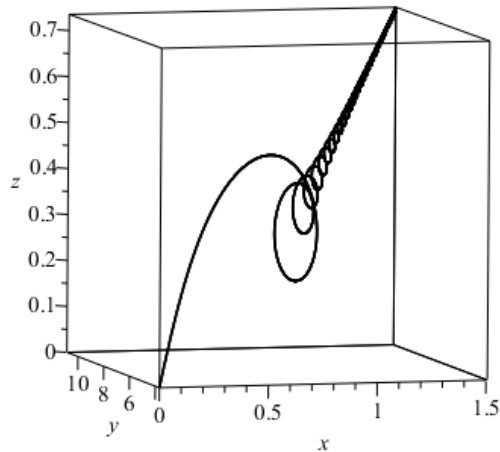


Рисунок 1.24. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

Рисунок 1.25 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 5]$ .

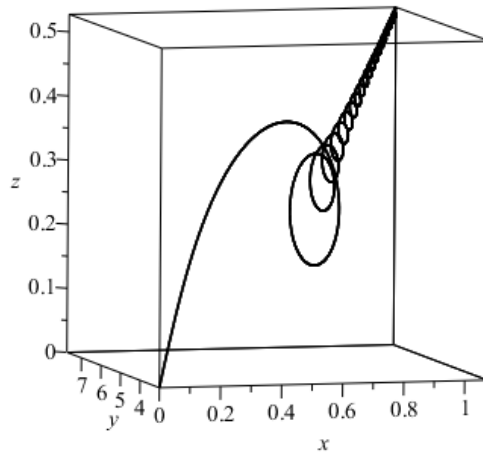


Рисунок 1.25. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 5]$ .

Рисунок 1.26 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

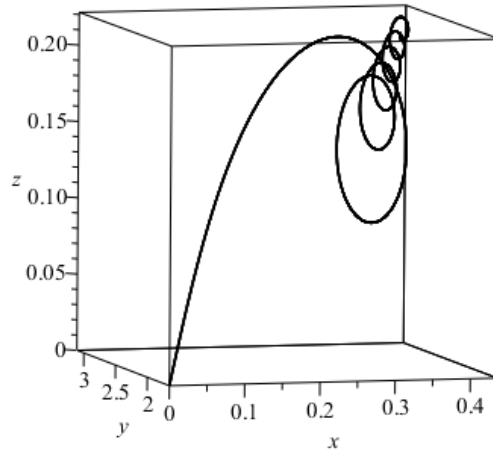


Рисунок 1.26. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 5]$ .

Рисунок 1.27 показывает траекторию движения 3 рассмотренных выше частиц при  $t \in [0, 5]$ .

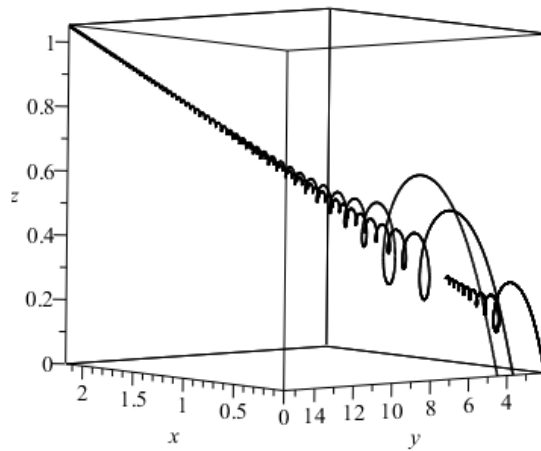


Рисунок 1.27. Траектории движения трех частиц.

Рисунки 1.24–1.27 описывают движение частицы в торнадо.

### 1.3.5. Инвариантная $\theta_{2,5} \langle P_0 + P_1, R_1 + \alpha(R_2 + R_3) \ (\alpha \neq 1) \rangle$ - подмодель

Данная подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = (t - \xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}.$$



Подстановка в систему уравнений (1.5) дает фактор систему

$$\mathbf{w}'' - \frac{2\alpha}{\alpha-1} \mathbf{w}' \times \mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (1.11)$$

Основные механические характеристики этого течения газа имеют вид:

$$|\mathbf{x}| = \left| \eta^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (t-\xi)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (t-\xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|, \quad |\mathbf{u}| = c_1 \left| \eta^{\frac{3\alpha+1}{\alpha-1}} \right|,$$

$$|\mathbf{a}| = 2c_1 \sin \varphi \left| \frac{\alpha}{\alpha-1} \eta^{\frac{4\alpha+2}{\alpha-1}} \sqrt{c_1^2 (t-\xi)^2 \eta^{\frac{2\alpha+2}{\alpha-1}} + c_2 (t-\xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} + c_3} \right|.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$(t-\xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$(t-\xi) \eta^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right).$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t, \xi, \eta$ .

Решим уравнения (1.11) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при  $\alpha = 2$  и условиях Коши:

$$w_1(0) = 0, w_2(0) = 10, w_3(0) = 0, w_1'(0) = 0.2, w_2'(0) = 0.3, w_3'(0) = 0.4.$$

Рисунок 1.28 показывает результат численного решения для  $w_1$ .

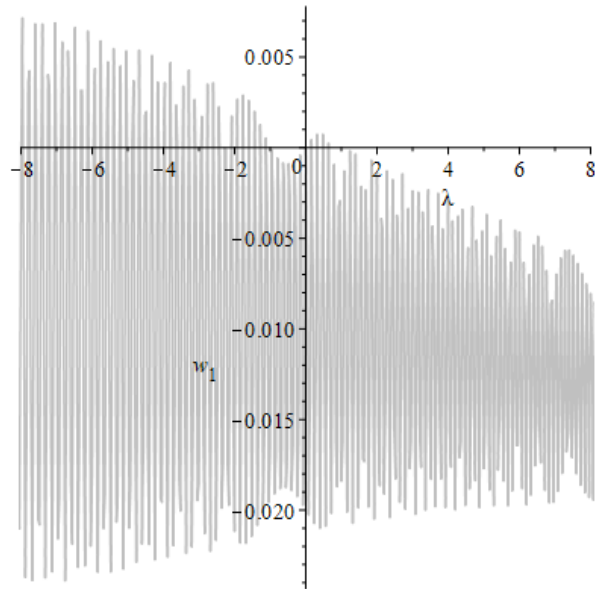


Рисунок 1.28. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.29 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

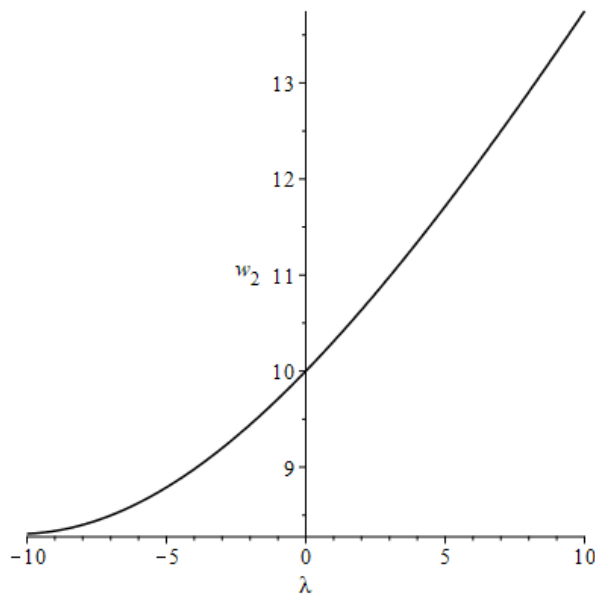


Рисунок 1.29. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.30 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

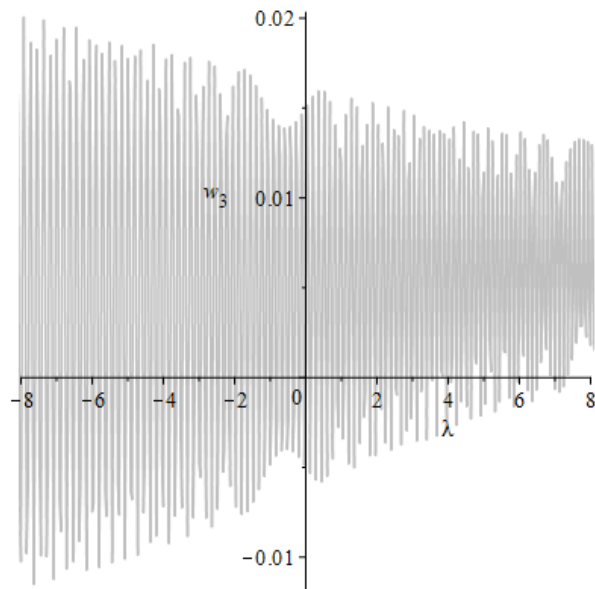


Рисунок 1.30. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.31 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

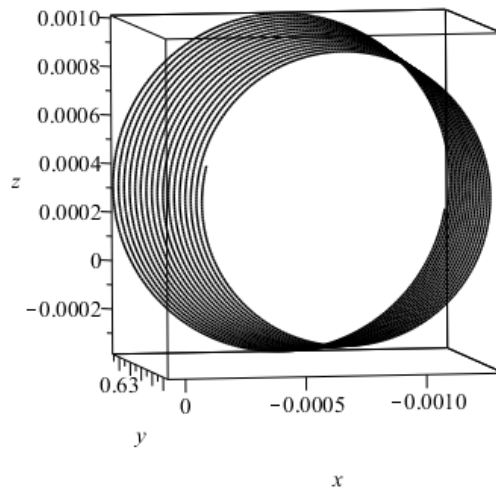


Рисунок 1.31. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

Рисунок 1.32 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 20]$ .

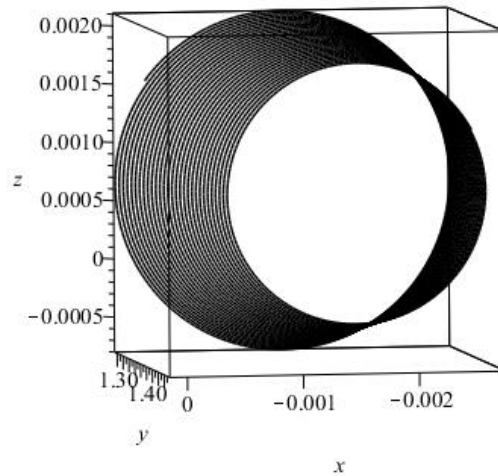


Рисунок 1.32. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 20]$ .

Рисунок 1.33 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

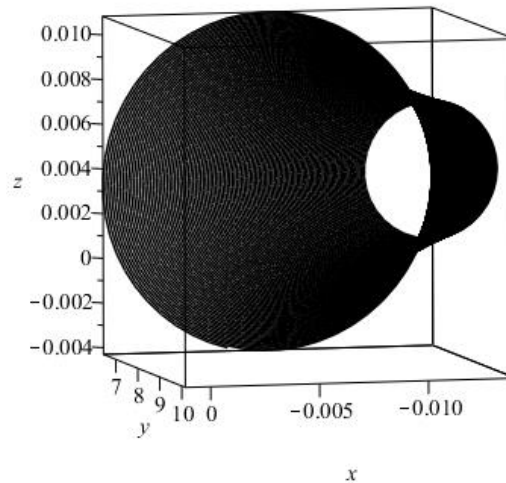


Рисунок 1.33. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

Рисунок 1.34 показывает траекторию движения 3 рассмотренных выше частиц при  $t \in [0, 20]$ .

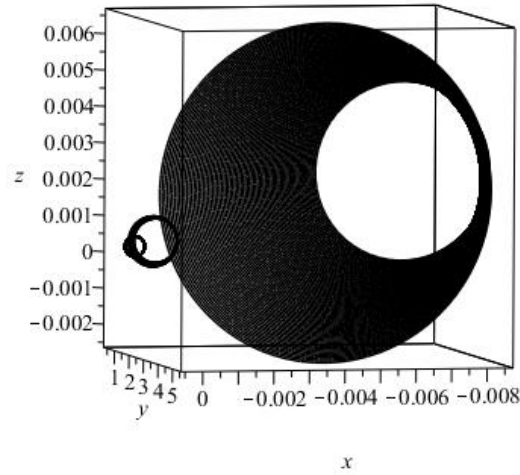


Рисунок 1.34. Траектории движения трех частиц.

Рисунки 131–1.34 показывают, что данная подмодель описывает движение частицы в торнадо.

### 1.3.6. Инвариантная $\theta_{2,6} \langle R_1 + \alpha R_2, \gamma R_2 + Q_1 + Q_2 \rangle$ -подмодель

Инвариантная  $\theta_{2,6} \langle R_1 + \alpha R_2, \gamma R_2 + Q_1 + Q_2 \rangle$ -подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = \eta^{-2\alpha} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{\eta}\right) \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = t\eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2\eta}\right).$$

Функция  $\mathbf{w}$  является решением уравнений (1.10) при  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha\gamma - \gamma)$ .

Основные механические характеристики этого течения газа определяются по формулам:

$$|\mathbf{x}| = \eta^{-2\alpha} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{\eta}\right) \sqrt{c_1^2 t^2 \eta^{-2\alpha-2} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{\eta}\right) + c_2 t \eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2\eta}\right) + c_3},$$

$$|\mathbf{u}| = c_1 \left| \eta^{-3\alpha-1} \exp\left(-\frac{3\gamma\xi}{2\eta}\right) \right|,$$

$$|\mathbf{a}| = c_1 t \sin \varphi \left| (\alpha\gamma + \gamma - \alpha) \eta^{-5\alpha-3} \exp\left(-\frac{5\gamma\xi}{2\eta}\right) \sqrt{c_1^2 t^2 \eta^{-2\alpha-2} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{\eta}\right) + c_2 t \eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2\eta}\right) + c_3} \right|.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$t\eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2\eta}\right) < -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right),$$

либо при

$$t\eta^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\gamma\xi}{2\eta}\right) > -\frac{1}{2c_1^2} \left(c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3}\right).$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t, \xi, \eta$ .

Решим систему уравнений (1.10) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при  $\beta = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha\gamma - \gamma)$ ,  $\alpha = 3$ ,  $\gamma = 2$  численно, условия Коши имеют вид:

$$w_1(0) = 10, w_2(0) = 0, w_3(0) = 0, w_1'(0) = 2, w_2'(0) = 3, w_3'(0) = 4.$$

Рисунок 1.35 показывает результат численного решения для  $w_1$ .

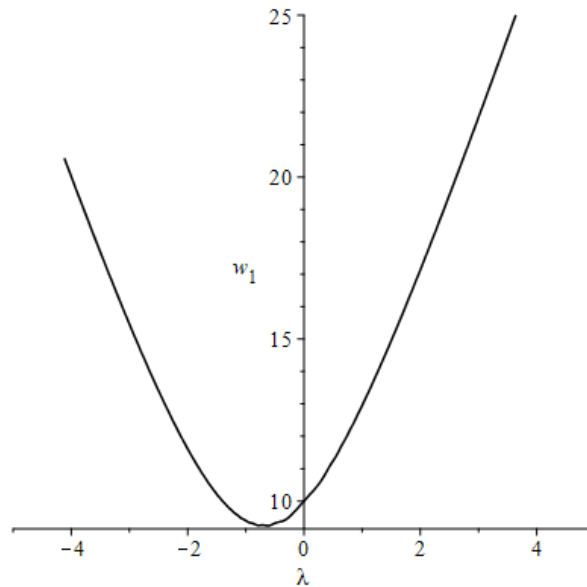


Рисунок 1.35. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.36 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

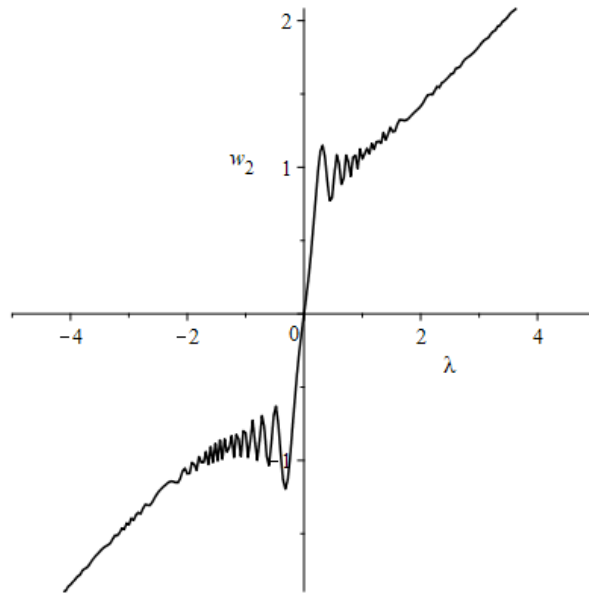


Рисунок 1.36. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.37 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

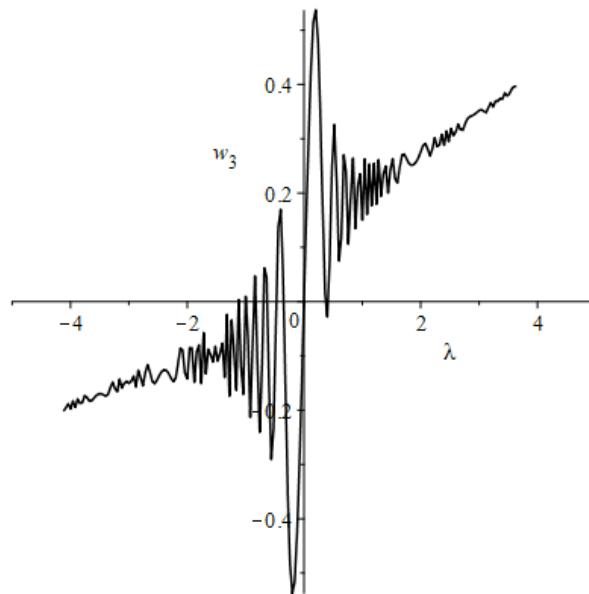


Рисунок 1.37. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.38 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

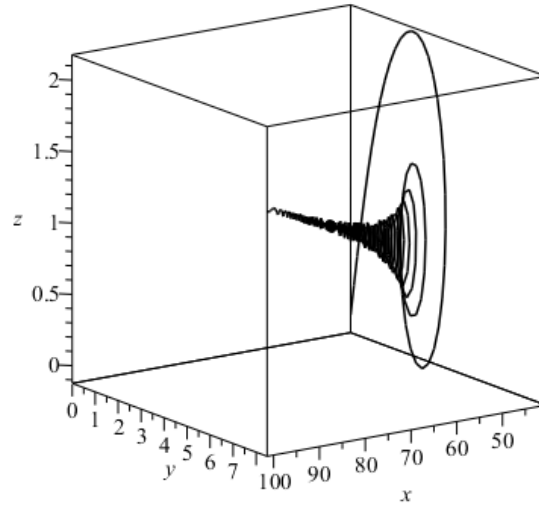


Рисунок 1.38. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

Рисунок 1.39 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 20]$ .

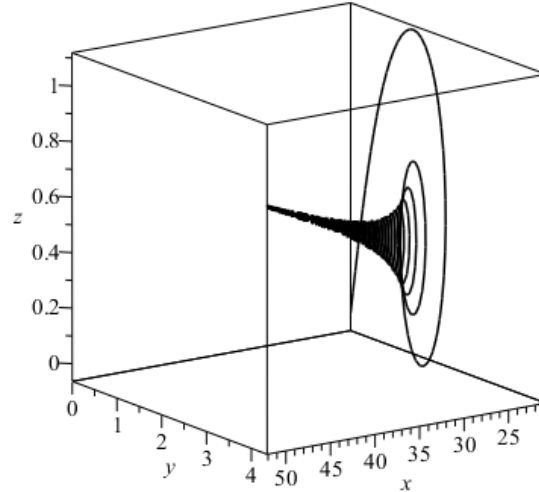


Рисунок 1.39 Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 20]$ .

Рисунок 1.40 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .



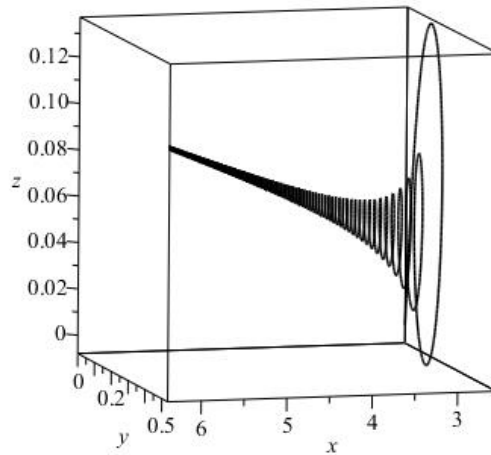


Рисунок 1.40. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 20]$ .

Рисунок 1.41 показывает траекторию движения 3 рассмотренных выше частиц при  $t \in [0, 20]$ .

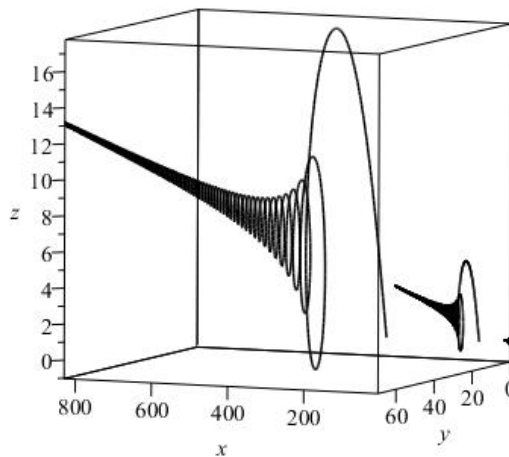


Рисунок 1.41. Траектории движения трех частиц.

Рисунки 1.38–1.41 показывают, что данная подмодель описывает движение частицы в торнадо.

### 1.3.7. Инвариантная $\theta_{2,7} \langle R_1 + \alpha R_2, 2\beta R_2 + R_3 \rangle$ -подмодель

Инвариантная  $\theta_{2,7} \langle R_1 + \alpha R_2, 2\beta R_2 + R_3 \rangle$ -подмодель описывает течение газа, при котором эйлеровы координаты каждой частицы газа изменяются по закону

$$\mathbf{x} = \xi^{-\alpha-2\beta} \eta^{2\beta-\alpha} \mathbf{w}(\lambda), \quad \lambda = t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}}.$$

Функция  $\mathbf{w}$  является решением уравнений (1.10).

Основные механические характеристики этого течения газа имеют вид:

$$|\mathbf{x}| = \xi^{-\alpha-2\beta} \eta^{2\beta-\alpha} \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-\alpha-2\beta-1} \eta^{2\beta-\alpha-1} + c_2 t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} + c_3},$$

$$|\mathbf{u}| = c_1 \xi^{\frac{-3\alpha-6\beta-1}{2}} \eta^{\frac{6\beta-3\alpha-1}{2}},$$

$$|\mathbf{a}| = 2c_1 |\beta| t \xi^{\frac{-5\alpha-10\beta-3}{2}} \eta^{\frac{10\beta-5\alpha-3}{2}} \sin \varphi \sqrt{c_1^2 t^2 \xi^{-\alpha-2\beta-1} \eta^{2\beta-\alpha-1} + c_2 t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} + c_3}.$$

Вектор скорости перпендикулярен вектору ускорения.

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 > 0$ , то эта подмодель существует только в двух случаях:

либо при

$$t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} < -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 + \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),$$

либо при

$$t \xi^{-\frac{\alpha+2\beta+1}{2}} \eta^{\frac{2\beta-\alpha-1}{2}} > -\frac{1}{2c_1^2} \left( c_2 - \sqrt{c_2^2 - 4c_1^2 c_3} \right),.$$

Если  $c_2^2 - 4c_1^2 c_3 < 0$ , то эта подмодель существует при всех  $t, \xi, \eta$ .

Решим уравнения (1.10) численно методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности, при  $\alpha=1, \beta=2$  и условиях Коши:

$$w_1(0) = 0, w_2(0) = 10, w_3(0) = 0, w_1'(0) = 2, w_2'(0) = 3, w_3'(0) = 4.$$

Рисунок 1.42 показывает результат численного решения для  $w_1$ .

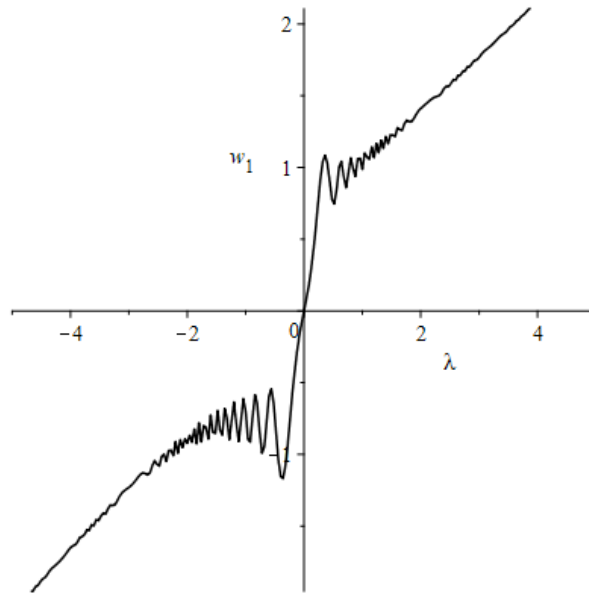


Рисунок 1.43. Численное решение для  $w_1$ .

Рисунок 1.44 показывает результат численного решения для  $w_2$ .

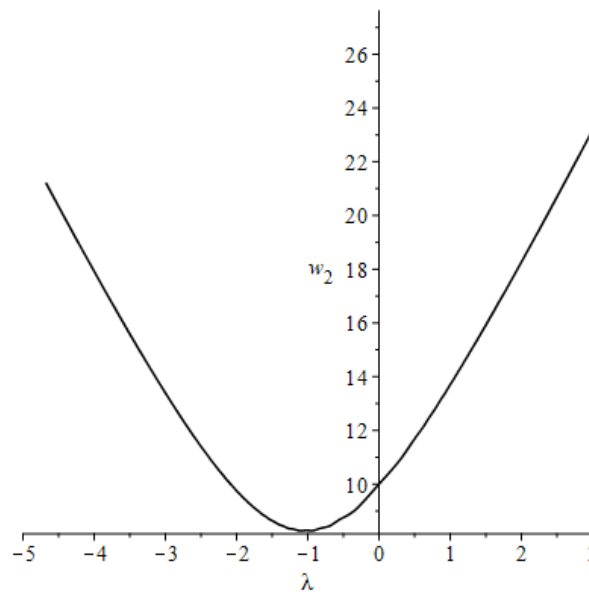


Рисунок 1.44. Численное решение для  $w_2$ .

Рисунок 1.45 показывает результат численного решения для  $w_3$ .

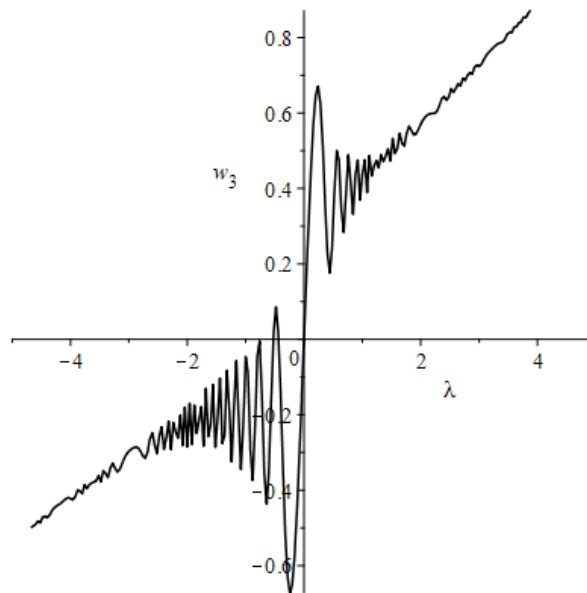


Рисунок 1.45. Численное решение для  $w_3$ .

Рисунок 1.46 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 3]$ .

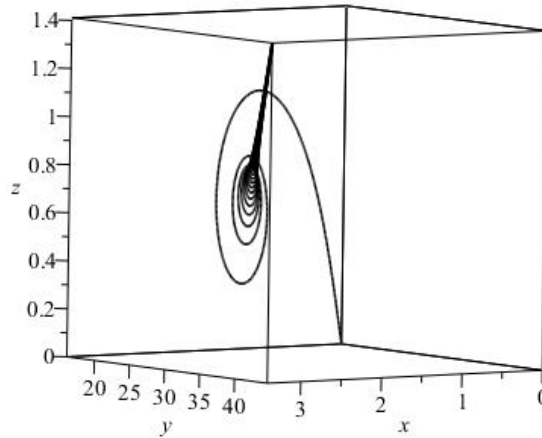


Рисунок 1.46. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{2}{5}; \eta = \frac{2}{5}; \zeta = \frac{2}{5}$  при  $t \in [0, 3]$ .

Рисунок 1.47 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 3]$ .

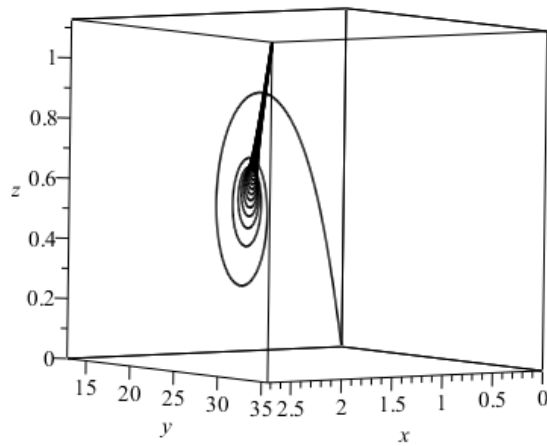


Рисунок 1.47. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{1}{2}; \eta = \frac{1}{2}; \zeta = \frac{1}{2}$  при  $t \in [0, 3]$ .

Рисунок 1.48 показывает траекторию движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 3]$ .

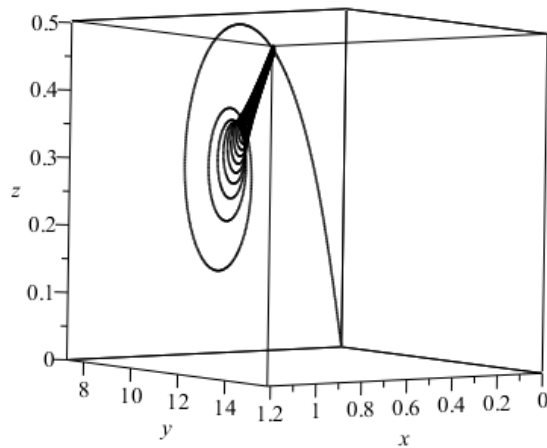


Рисунок 1.48. Траектория движения частицы  $\xi = \frac{4}{5}; \eta = \frac{4}{5}; \zeta = \frac{4}{5}$  при  $t \in [0, 3]$ .

Рисунок 1.49 показывает траекторию движения 3 рассмотренных выше частиц при  $t \in [0, 3]$ .

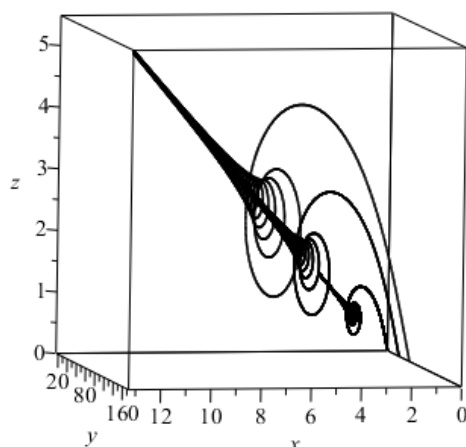


Рисунок 1.49. Траектории движения трех частиц.

Рисунки 1.46–1.49 показывают, что данная подмодель описывает движение частицы в торнадо.

#### 1.4. Выводы по главе

Основные модели движения газа в трехмерном пространстве были получены академиком Л.В. Овсянниковым в работе [26]. В этой работе, модель, описывающая тепловое движение газа в сильно разреженном пространстве, получила номер 13. Эта модель может быть использована при изучении движения газа в космическом пространстве, при изучении процессов, происходящих внутри торнадо, при изучении состояния среды за фронтом ударной волны после очень сильного взрыва. Ю. А. Чиркуновым был рассмотрен  $n$ -мерный случай данной модели ( $n \geq 2$ ). Для заданного начального распределения давления выполнено групповое расслоение относительно бесконечной подгруппы основной группы данной модели. Специальный выбор лагранжевых переменных привел к уменьшению на единицу числа независимых переменных в исходной системе. Это означает, что происходит расслоение сильно разреженного газа по отношению к давлению. В сильно разреженном пространстве, при заданном начальном распределении давления, все частицы газа локализованы на двумерной поверхности, которая с течением времени движется в этом пространстве. В каждой точке поверхности вектор ускорения коллинеарен вектору нормали к этой поверхности. В настоящей главе, в трехмерном случае ( $n = 3$ ), найдены все существенно различные подмодели, отличные от полученных в работах [53, 62, 65, 66], инвариантные относительно подгрупп ее восьмипараметрической подгруппы, порождаемой операторами переноса, растяжения, вращения и гиперболического вращения (оператор Лоренца). Для инвариантных подмоделей

ранга 1 получены основные механические характеристики описываемого ими течения газа. Для некоторых подмоделей исследована задача, описывающая течение газа по заданному в начальный момент времени местоположению его частиц и распределения их скоростей. Приведены условия существования этих подмоделей. Для каждой подмодели ранга 1 численно были найдены траектории движения частиц газа при заданных в начальный момент их местоположениях и скоростях. Приведены соответствующие графики.

## Глава 2. Групповой анализ нелинейной модели продольных колебаний упругого неоднородного стержня

Данная глава посвящена исследованию нелинейного дифференциального уравнения, описывающего продольные колебания упругого неоднородного стержня [78]. Выполнена групповая классификация этого нелинейного дифференциального уравнения, получены все базисные модели с различными свойствами симметрии. Найдены все существенно различные нестационарные инвариантные подмодели для этих базисных моделей. Получено единственное нетривиальное точное решение, описывающее инвариантную подмодель ранга 0. Для инвариантных подмоделей ранга 1 получены, описывающие их, фактор уравнения, для которых при некоторых значениях параметров, определяющих эти подмодели, численно решены, имеющие физический смысл краевые задачи, показывающие специфические особенности деформации стержня. Актуальность выполненного исследования обусловлена использованием рассмотренной модели для расчета балок при проектировании объектов строительства, робототехники, авиации, судостроения.

### 2.1 Описание модели

В технике и строительстве широко применяются балки из неоднородного материала. Неоднородность материала, из которого изготовлены эти балки, значительно усложняет анализ их деформации. Мы предполагаем, что поперечное сечение балки является однородным. Это позволяет в качестве модели, описывающей продольные колебания таких балок, использовать неоднородный стержень.

Модель нелинейной упругой динамической деформации стержня из неоднородного материала описывается следующим дифференциальным уравнением [44]:

$$u_{tt} = [f(x)g(u)u_x]_x, \quad (2.1)$$

где  $t$  – время,  $x$  – координата поперечного сечения балки,  $u = u(t, x)$  – продольное перемещение,  $f = f(x)$  – характеризует неоднородность стержня, а  $g = g(u)$  – характер нелинейности его продольных колебаний. Предполагается, что:

$$f'(x)g'(u) \neq 0.$$

Это означает, что стержень неоднородный, а колебания нелинейны.

Уравнение (2.1) является объектом исследования в данной главе.



## 2.2 Групповая классификация уравнения модели

Оператор, допускаемый уравнением (2.1), ищется в виде:

$$\xi(t, x, u) \partial_t + \eta(t, x, u) \partial_x + \mu(t, x, u) \partial_u + \mu(t, x, u, f, g) \partial_f + \mu(t, x, u, f, g) \partial_g.$$

Для отыскания всех базисных моделей, обладающих нетривиальными симметриями, для общей модели (2.1) использовался метод групповой классификации, предложенный в [67] и развитый в [66, 68, 70-73, 76, 80]. Этот алгоритм позволяет избежать значительных аналитических трудностей, связанных с анализом классифицирующих уравнений, возникающих при применении классического алгоритма, и существенно сокращает объем вычислений.

В результате мы получаем следующие базисные модели, обладающие разными групповыми свойствами:

- Ядро основных групп порождается оператором  $X_0 = \partial_t$ .

Далее во всех формулах:  $\alpha, \beta, \gamma$  – произвольные вещественные постоянные.

- При

$$f(x) = x^2, g(u) = \exp(u) + \beta \quad (2.2)$$

основная группа Ли уравнения (2.1) порождается операторами:

$$X_0 = \partial_t, X_1 = x \partial_x.$$

- При

$$f(x) = \exp(x), g(u) = \exp(u) + \beta \quad (2.3)$$

основная группа Ли уравнения (2.1) порождается операторами:

$$X_0 = \partial_t, X_2 = t \partial_t - 2 \partial_x.$$

- При

$$f(x) = x^2, g(u) = u \quad (2.4)$$

основная группа Ли уравнения (2.1) порождается операторами:

$$X_0 = \partial_t, X_1 = x \partial_x, X_3 = t \partial_t - 2u \partial_u.$$

- При

$$f(x) = \gamma x^\beta, g(u) = u \quad (2.5)$$

основная группа Ли уравнения (2.1) порождается операторами:

$$X_0 = \partial_t, X_3 = t \partial_t - 2u \partial_u, X_4 = x \partial_x - (\beta - 2)u \partial_u.$$

### 2.3 Групповое свойство уравнения

Для классификации инвариантных подмоделей каждой базисной модели, т. е. для получения существенно различных (не связанных точечными преобразованиями) инвариантных подмоделей, строятся оптимальные системы неподобных подалгебр алгебр Ли для каждой базисной модели. Каждой подалгебре из этой оптимальной системы подалгебр соответствует порождаемая ею подгруппа основной группы базисной модели. Применение критерия инвариантности функции относительно группы Ли преобразований [21-25, 53, 62] позволяет получить в пространстве  $R^3(t, x, u)$  универсальный инвариант каждой подгруппы из построенной оптимальной системы подгрупп. Оптимальные системы подгрупп для базисных моделей приведены: в таблице 2.1 – для модели (2.2), в таблице 2.2 – для модели (2.3), в таблицах 2.3 и 2.4 – для модели (2.4), в таблицах 2.5 и 2.6 – для модели (2.5).

Таблица 2.1. Однопараметрические подгруппы  $\Theta_{1,k}$  и их универсальные инварианты.

$\Theta_{1,k}$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$X_0 + \alpha X_1$	$x \exp(-\alpha t), u$
2	$X_1$	$t, u$

Таблица 2.2. Однопараметрические подгруппы  $T_{1,k}$  и их универсальные инварианты.

$T_{1,k}$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$X_0$	$x, u$
2	$X_2$	$t^2 \exp(x), u$

Таблица 2.3. Однопараметрические подгруппы  $\Sigma_{1,k}$  и их универсальные инварианты.

$\Sigma_{1,k}$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$X_0$	$x, u$

2	$X_0 + X_1$	$xe^{-t}, u$
3	$X_1$	$t, u$
4	$\alpha X_1 + X_3$	$x(t+1)^{-\alpha}, ux^{\frac{2}{\alpha}}$

Таблица 2.4. Двухпараметрические подгруппы  $\Sigma_{2,k}$  и их универсальные инварианты.

$\Sigma_{2,k}$	Базис подалгебры		Универсальные инварианты
	1 оператор	2 оператор	
1	$X_0$	$X_1 + \alpha X_3$	$x^{2\alpha}u$
2	$X_0$	$\alpha X_1 + X_3$	$x^{\frac{2}{\alpha}}u, \alpha \neq 0$
3	$X_0$	$X_3$	$u$
4	$X_1$	$X_3$	$t^2u$

Таблица 2.5. Однопараметрические подгруппы  $\Omega_{1,k}$  и их универсальные инварианты.

$\Omega_{1,k}$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$X_0$	$x, u$
2	$X_0 + X_4$	$xe^{-t}, x^{\beta-2}u$
3	$X_3 + \alpha X_4$	$xt^{-\alpha}, x^{\alpha\beta-2\alpha+2}u, \alpha \neq 0.$
4	$X_4$	$t, x^{\beta-2}u$

Таблица 2.6. Двухпараметрические подгруппы  $\Omega_{2,k}$  и их универсальные инварианты.

$\Omega_{2,k}$	Базис подалгебры		Универсальные инварианты
	1 оператор	2 оператор	
1	$X_0$	$X_3 + \alpha X_4$	$x^{2+\beta\alpha-2\alpha} u^\alpha$
2	$X_0$	$X_4$	$x^{\beta-2} u$
3	$X_0 + X_3$	$X_4$	$x^{\beta-2} (t+1)^2 u$

## 2.4 Инвариантные подмодели и решения

Подмодели, определяемые стационарными решениями и решениями вида  $u = C_1 t + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  - константы, являются тривиальными. Далее рассматриваем только не тривиальные подмодели, модели, задаваемой уравнением (2.1).

### 2.4.1. Инвариантные подмодели ранга 0

Среди инвариантных подмоделей, описываемых инвариантными решениями ранга 0, подмодели, инвариантные относительно подгрупп  $\Sigma_{2,k}$ , ( $k = 1, 2, 3, 4$ ),  $\Omega_{2,1}$  и  $\Omega_{2,2}$  являются тривиальными. Единственной нетривиальной подмоделью ранга 0 является только подмодель, описываемая инвариантным  $\Omega_{2,3}$  - решением. Рассмотрим это решение.

Из Таблицы 2.6 следует, что решение уравнения (2.1), инвариантное относительно подгруппы  $\Omega_{2,3} \langle X_0 + X_3, X_4 \rangle$ , с учетом (2.5) определяется по формуле:

$$u(t, x) = c_1 x^{2-\beta} (t+1)^{-2},$$

где  $\beta = \frac{5c_1\gamma \pm \sqrt{c_1^2\gamma^2 + 24c_1\gamma}}{2c_1\gamma}$ ;  $c_1, \gamma$  - произвольные вещественные постоянные.

Рассмотрим случай, когда  $\beta = \frac{5c_1\gamma - \sqrt{c_1^2\gamma^2 + 24c_1\gamma}}{2c_1\gamma}$ .

Рисунок 2.1 описывает продольные колебания стержня при  $c_1 = 1, \gamma = 1, (\beta = 0)$ .

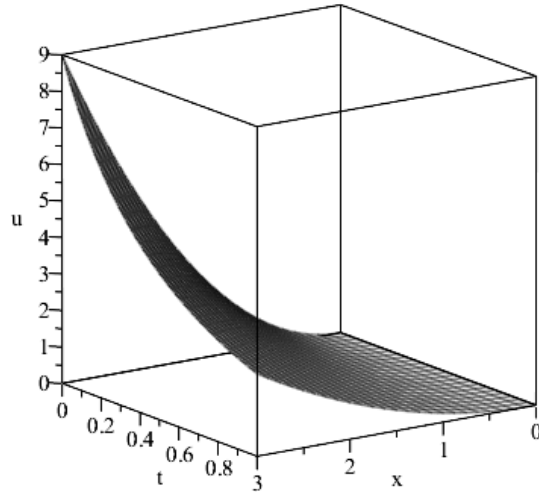


Рисунок 2.1. Продольные колебания стержня при  $c_1 = 1$ ,  $\gamma = 1$ , ( $\beta = 0$ ).

Рассмотрим второй случай  $\beta = \frac{5c_1\gamma + \sqrt{c_1^2\gamma^2 + 24c_1\gamma}}{2c_1\gamma}$ .

Рисунок 2.2 описывает продольные колебания стержня при  $c_1 = 1$ ,  $\gamma = 3$ , ( $\beta = 4$ ).

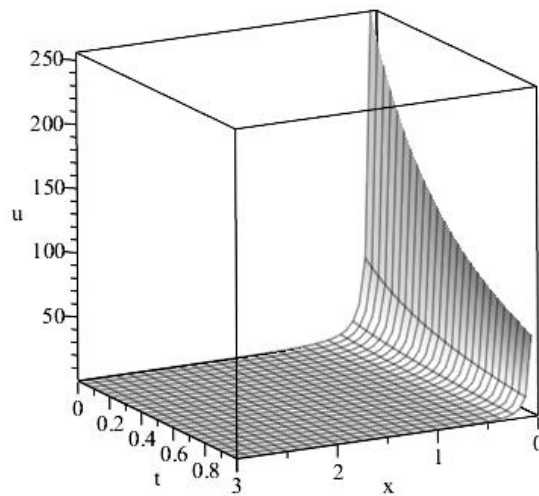


Рисунок 2.2. Продольные колебания стержня при  $c_1 = 1$ ,  $\gamma = 3$ , ( $\beta = 4$ ).

Из приведенных графиков, для данных значений параметров, следует, что для всех  $x$  максимальное продольное перемещение будет при  $t = 0$ . С ростом  $t$  перемещение убывает и стремится к 0 при  $t \rightarrow \infty$ . Это означает, что при данной деформации стержень не разрушится.

#### 2.4.2. Инвариантные подмодели ранга 1

Рассмотрим некоторые инвариантные подмодели ранга 1.

**2.4.2.1.** Инвариантная  $\Theta_{1,1}\langle X_0 + \alpha X_1 \rangle$  - подмодель модели (2.2) описывает продольные колебания стержня, при которых перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = \varphi(y), \quad y = x \exp(-\alpha t). \quad (2.7)$$

Рисунок 2.3 показывает линии уровня  $x \exp(-t) = c, c = const$ , при  $\alpha = 1$ .

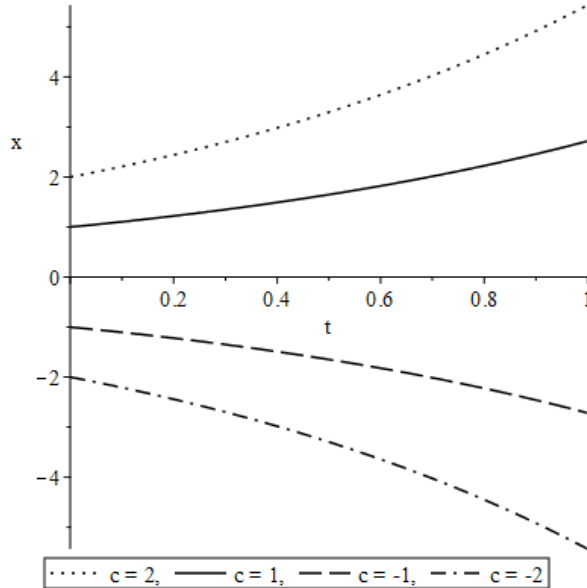


Рисунок 2.3. Линии уровня при  $\alpha = 1$ .

Подстановка (2.7) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение

$$y^2 (\alpha^2 - \exp(\varphi) - \beta) \varphi'' + y (\alpha^2 - 2(\exp(\varphi) + \beta)) \varphi' - y^2 \exp(\varphi) \varphi'^2 = 0. \quad (2.8)$$

Приведем численное решение данного фактор уравнения методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности при условиях Коши  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi'(1) = 1$  и разных значениях  $\alpha$  и  $\beta = 2$ .

Рассмотрим случаи  $\alpha > 0$ .

Рисунок 2.4 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.8) при  $\alpha = 1, \beta = 2$ .

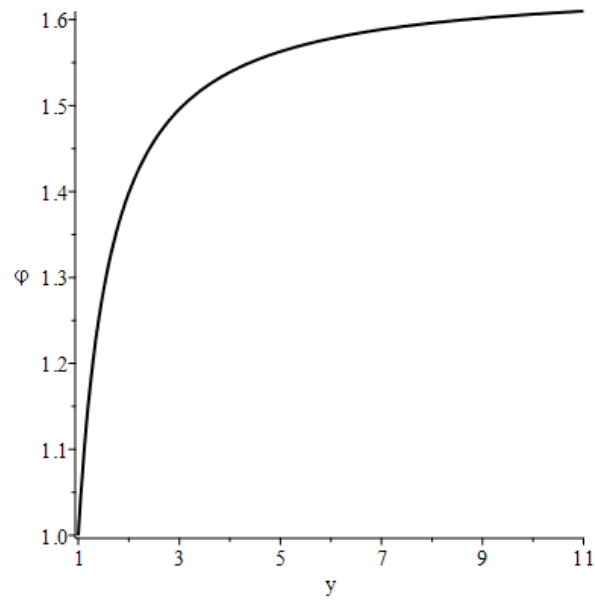


Рисунок 2.4. Численное решение уравнения (2.8) при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.5 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

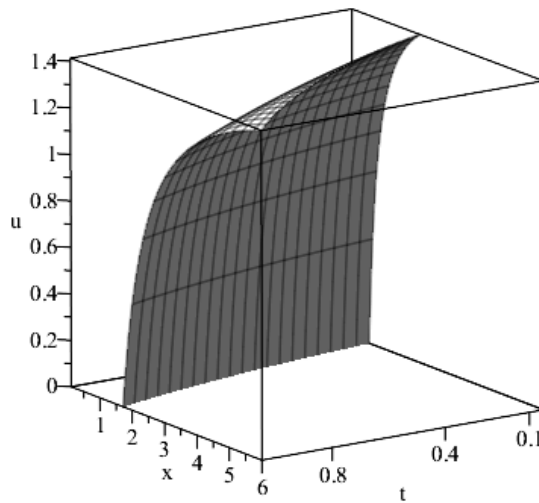


Рисунок 2.5. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.6 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.8) при  $\alpha = 2.5$ ,  $\beta = 2$ .

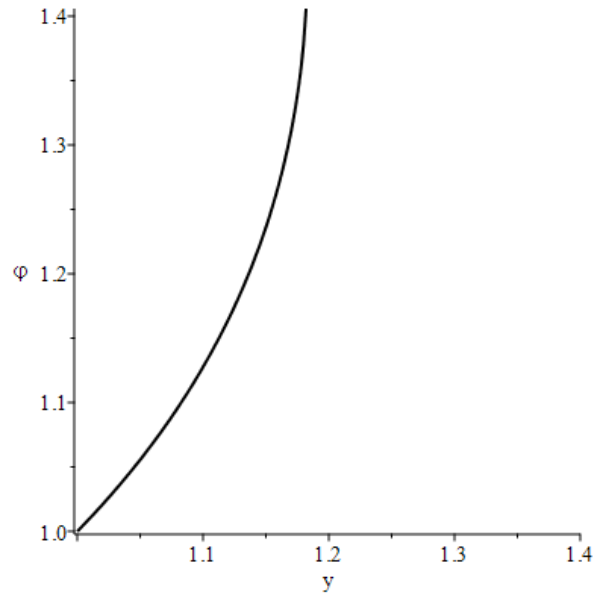


Рисунок 2.6. Численное решение уравнения (2.8) при  $\alpha = 2.5$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.7 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

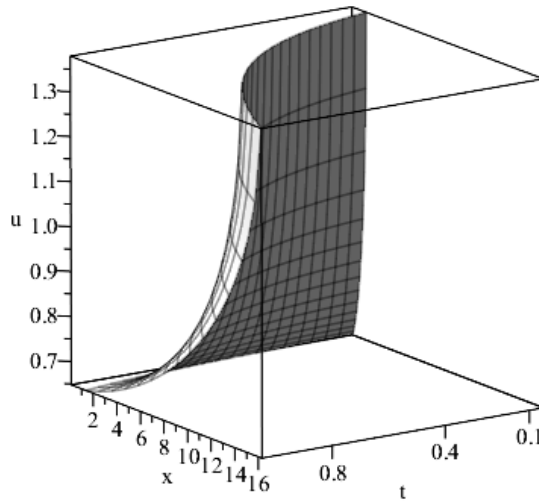


Рисунок 2.7. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 2.5$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.8 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.8) при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ .



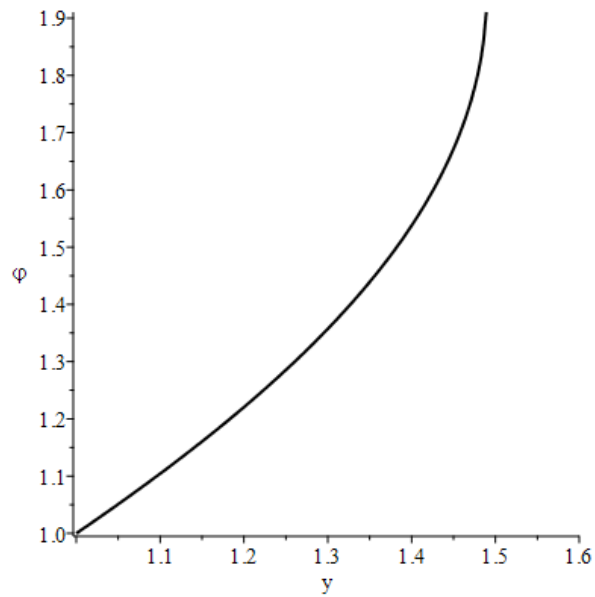


Рисунок 2.8. Численное решение уравнения (2.8) при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.9 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

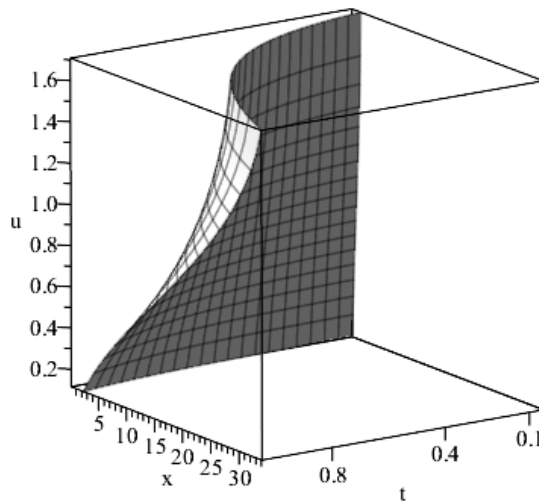


Рисунок 2.9. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.10 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.8) при  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 2$ .

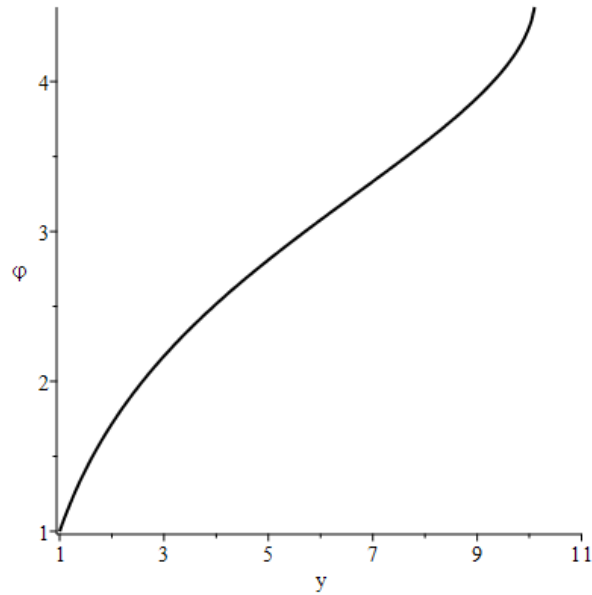


Рисунок 2.10. Численное решение уравнения (2.8) при  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.11 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

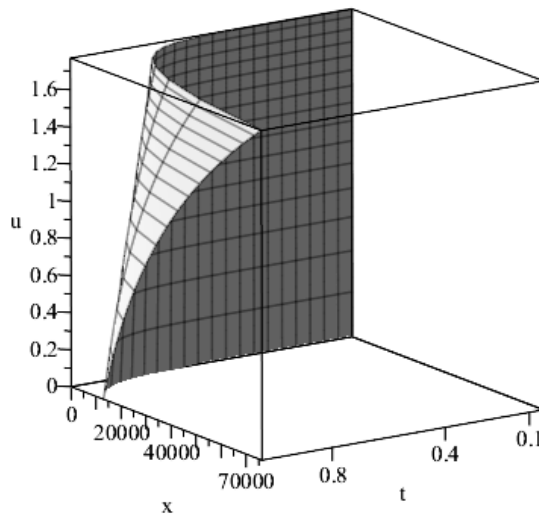


Рисунок 2.11. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 2$ .

Из графиков 2.5, 2.7, 2.9, 2.11, для рассмотренных значениях параметров  $\alpha$  следует, что для любого фиксированного  $x$ , с ростом  $t$  перемещение убывает. Следовательно, при данных деформациях не будет происходить разрушение стержня.

Рассмотрим случаи  $\alpha < 0$ .

Рисунок 2.12 показывает продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$  при  $\alpha = -10$ ,  $\beta = 2$ .

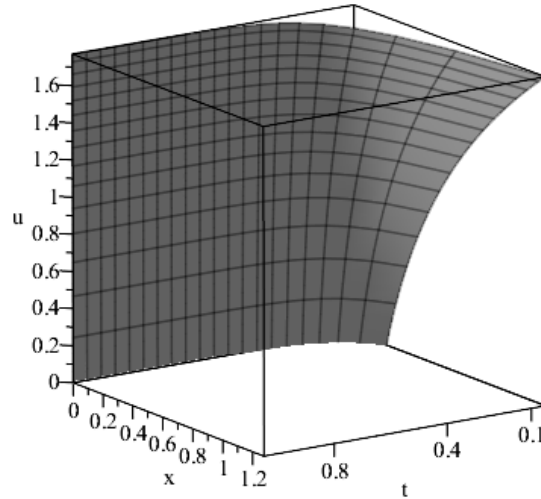


Рисунок 2.12. Продольные колебания стержня при  $\alpha = -10$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.13 показывает продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$  при  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 2$ .

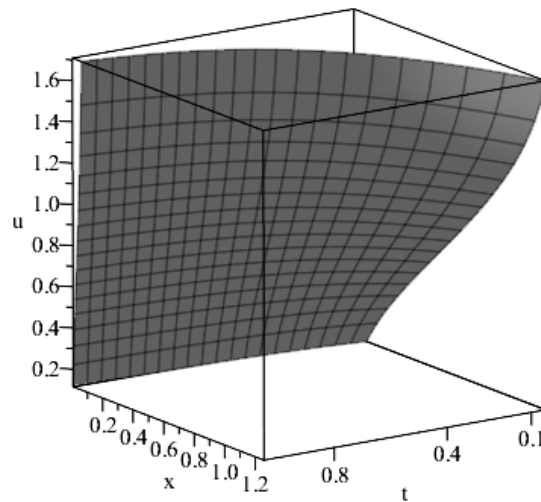


Рисунок 2.13. Продольные колебания стержня при  $\alpha = -3$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.14 показывает продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$  при  $\alpha = -2.5$ ,  $\beta = 2$ .

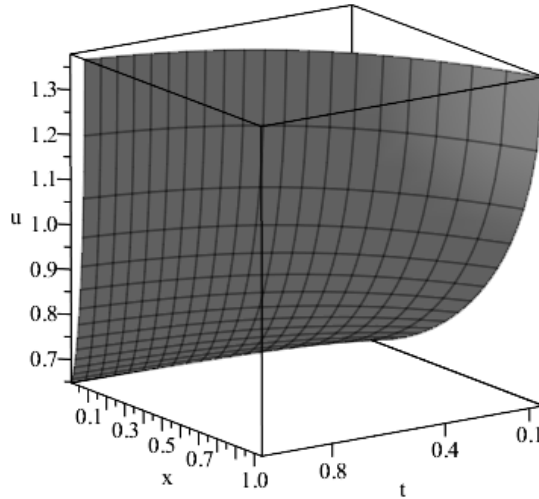


Рисунок 2.14. Продольные колебания стержня при  $\alpha = -2.5$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.15 показывает продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$  при  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ .

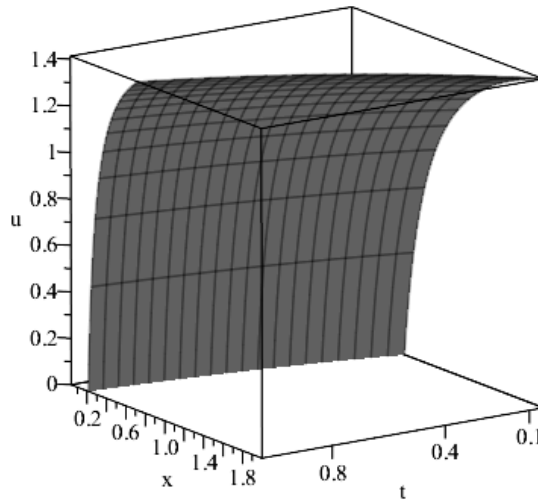


Рисунок 2.15. Продольные колебания стержня при  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ .

Из графиков 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, для рассмотренных значениях параметров  $\alpha$ , следует, что для любого фиксированного  $x$ , с ростом  $t$  перемещение возрастает. Следовательно, при данных деформациях можно ожидать разрушение стержня.

Подмодель  $\Theta_{1,2}\langle X_1 \rangle$  является тривиальной и интереса для исследования не представляет.

**2.4.2.2.** Инвариантная подмодель  $T_{1,1}\langle X_0 \rangle$  модели (2.3) является стационарной и также интереса для исследования не представляет.

Инвариантная  $\Gamma_{1,2}\langle X_2 \rangle$  - подмодель модели (2.3) описывает деформацию, при которой перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = \varphi(y), \quad y = t^2 \exp(x). \quad (2.9)$$

Рисунок 2.16 показывает линии уровня  $t^2 \exp(x) = c, c = const$ .

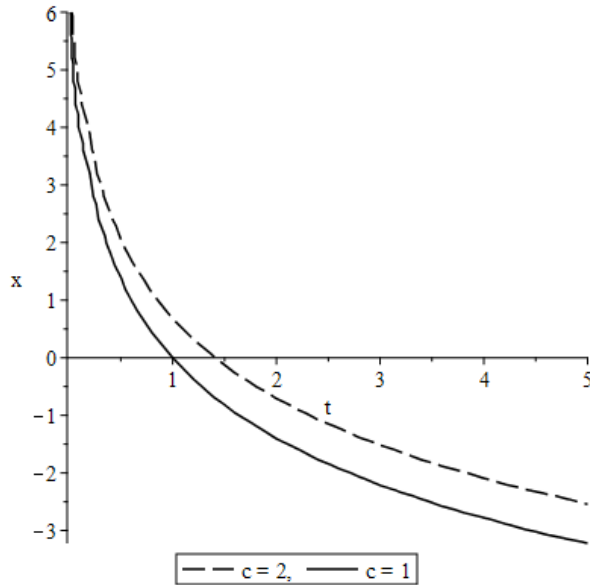


Рисунок 2.16. Линии уровня.

Подстановка (2.9) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение

$$(4y^2 - y^3(\exp(\varphi) + \beta))\varphi'' + (2y - 2y^2(\exp(\varphi) + \beta))\varphi' - y^3 \exp(\varphi)\varphi'^2 = 0. \quad (2.10)$$

Приведем численное решение данного фактор уравнения методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности при условиях Коши  $\varphi(1) = 0, \varphi'(1) = 1$  и различных значениях  $\beta$ .

Рассмотрим случаи  $\beta > 0$ .

Рисунок 2.17 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.10) при  $\beta = 1$ .

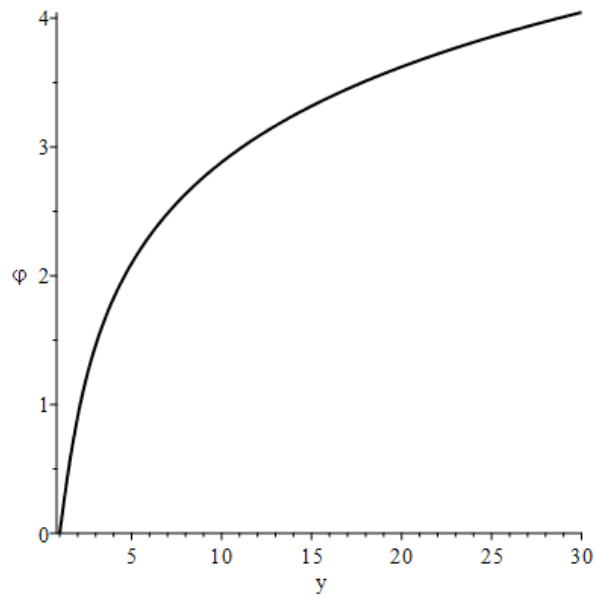


Рисунок 2.17. Численное решение уравнения (2.10) при  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.18 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

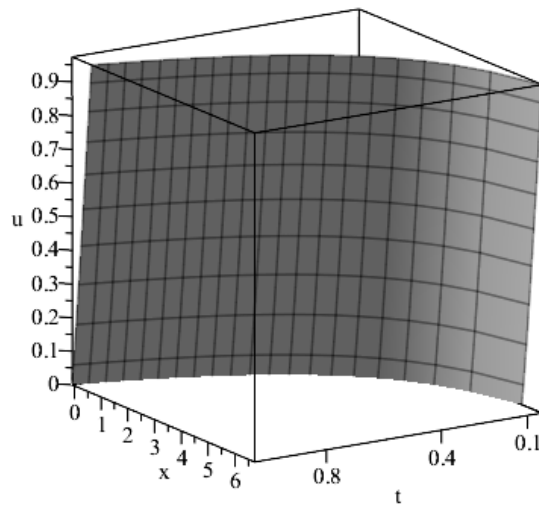


Рисунок 2.18. Продольные колебания стержня при  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.19 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.10) при  $\beta = 5$ .

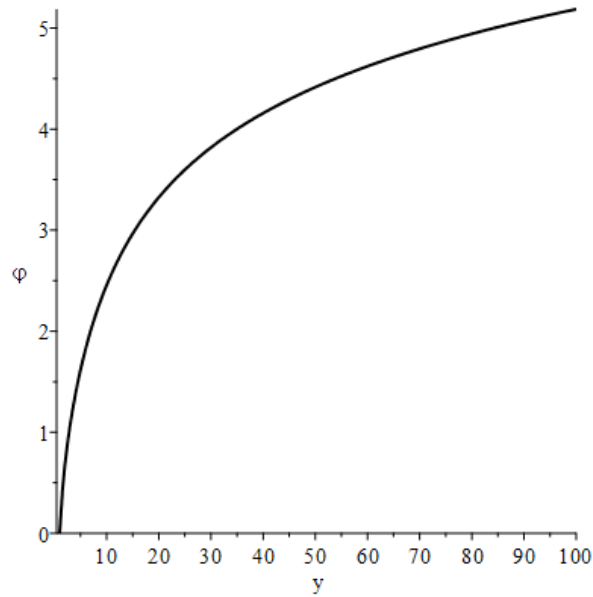


Рисунок 2.19. Численное решение уравнения (2.10) при  $\beta = 5$ .

Рисунок 2.20 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

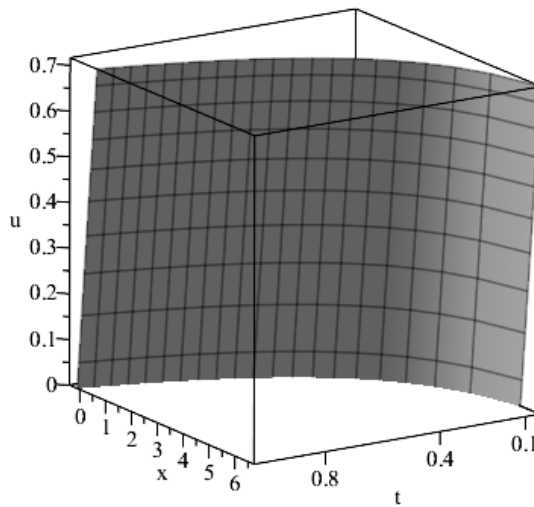


Рисунок 2.20. Продольные колебания стержня при  $\beta = 5$ .

Из графиков 2.18 и 2.20 следует, что при фиксированном  $x$ , с ростом  $t$  перемещение возрастает. Это означает, что данные деформации могут привести к разрушению стержня.

Пусть  $\beta < 0$ .

Рисунок 2.21 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.10) при  $\beta = -5$ .

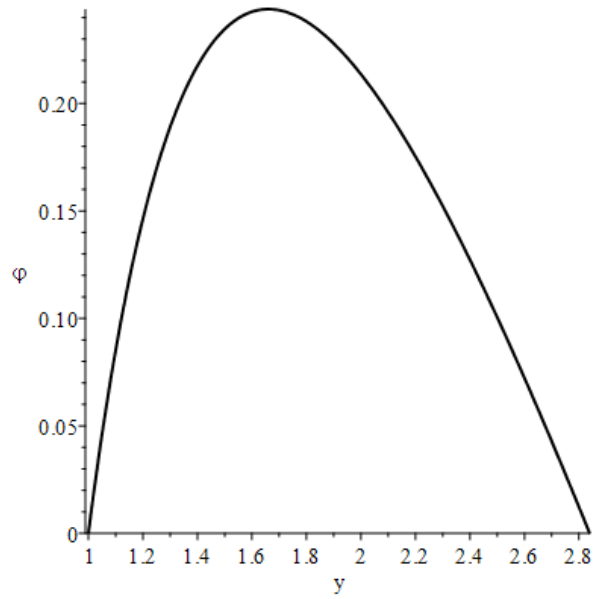


Рисунок 2.21. Численное решение уравнения (2.10) при  $\beta = -5$ .

Рисунок 2.22 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

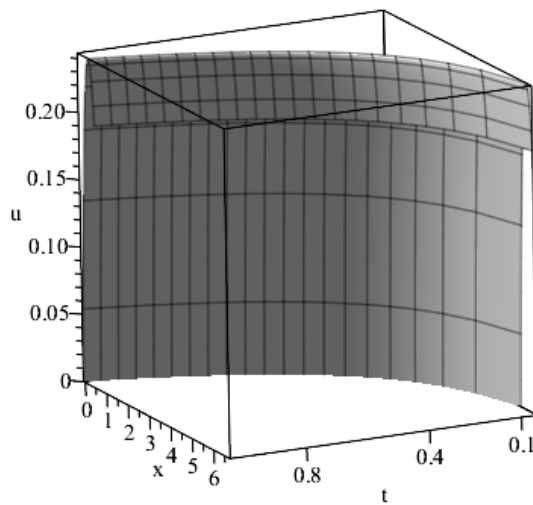


Рисунок 2.22. Продольные колебания стержня при  $\beta = -5$ .

Рисунок 2.23 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.10) при  $\beta = -3$ .



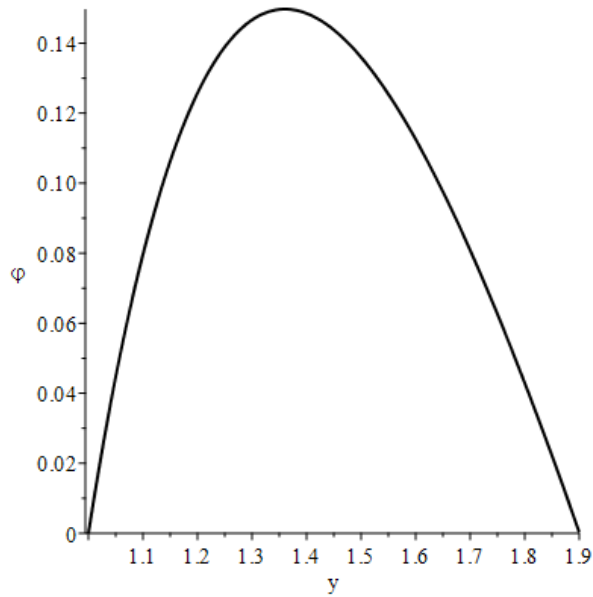


Рисунок 2.23. Численное решение уравнения (2.10) при  $\beta = -3$ .

Рисунок 2.24 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

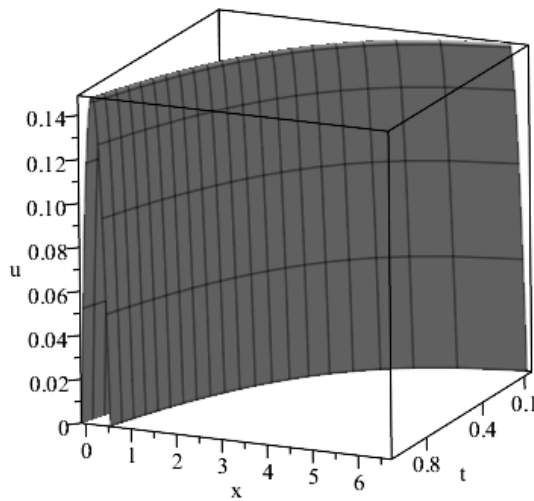


Рисунок 2.24. Продольные колебания стержня при  $\beta = -3$ .

Из графиков 2.22 и 2.24 для указанных значений параметров следует, что сначала перемещение резко возрастает, достигается максимальное значение, затем также резко перемещение начинает убывать. Это означает, что, если максимальное значение продольного перемещения не превосходит критического значения, при котором начинается разрушение стержня из данного материала, то при данной деформации разрушения стержня не произойдет. В противном случае стержень разрушится.

**2.4.2.3.** Инвариантные подмодели  $\Sigma_{1.1}\langle X_0 \rangle$  и  $\Sigma_{1.3}\langle X_1 \rangle$  модели (2.4) являются тривиальными и интереса для исследования не представляют.

**2.4.2.3.1.** Инвариантная  $\Sigma_{1.2}\langle X_0 + X_1 \rangle$  - подмодель модели (2.4) описывает деформацию, при которой продольное перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = \varphi(y), \quad y = x \exp(-t). \quad (2.10)$$

Подстановка (2.10) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение для динамической составляющей продольного перемещения

$$y(\varphi(y) - 1)\varphi''(y) + (2\varphi(y) - 1)\varphi'(y) + y\varphi'(y)^2 = 0. \quad (2.11)$$

Приведем численное решение фактор уравнения (2.11) методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности при условиях Коши  $\varphi(1) = 0.75$ ,  $\varphi'(1) = 1$ .

Рисунок 2.43 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.11) при задаче Коши  $\varphi(1) = 0.75$ ,  $\varphi'(1) = 1$ .

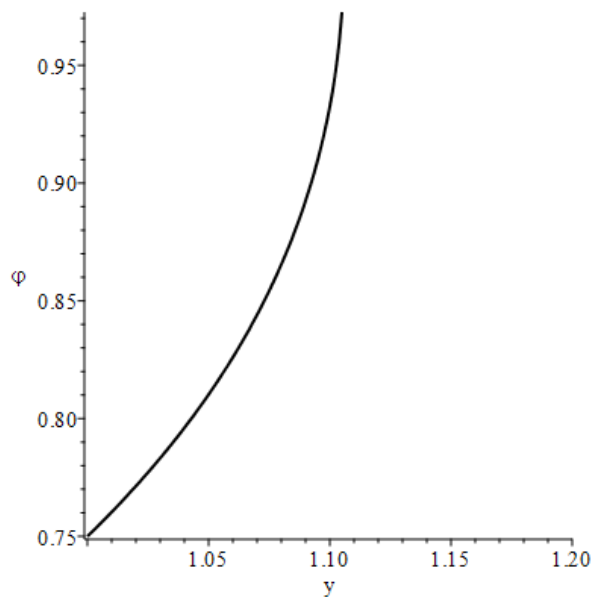


Рисунок 2.43. Численное решение уравнения (2.11).

Рисунок 2.44 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

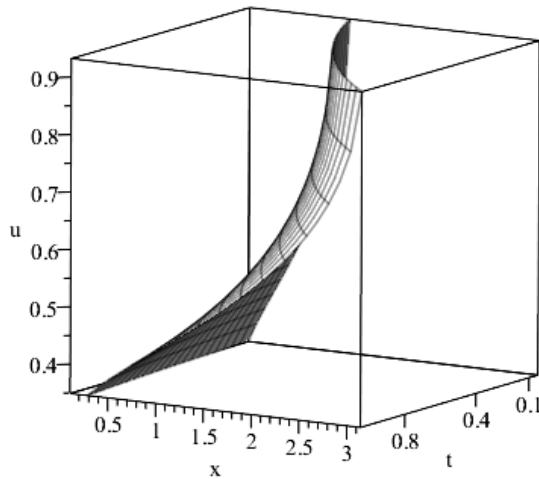


Рисунок 2.44. Продольные колебания стержня.

Из рисунка 2.44 следует, что при фиксированном  $x$  с ростом  $t$  перемещение убывает. Это означает, что данная деформация не может привести к разрушению стержня.

**2.4.2.3.2.** Инвариантная  $\Sigma_{1,4} \langle \alpha X_1 + X_3 \rangle$  - подмодель модели (2.4) описывает деформацию, при которой продольное перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = x^{\frac{2}{\alpha}} \varphi(y), \quad y = x(t+1)^{-\alpha} \quad (\alpha \neq 0). \quad (2.12)$$

При  $\alpha = 0$  получим нулевое решение  $\varphi = 0$ .

Рисунок 2.45 показывает линии уровня  $xt^{-1.5} = c, c = const$ , при  $\alpha = 1.5$ .

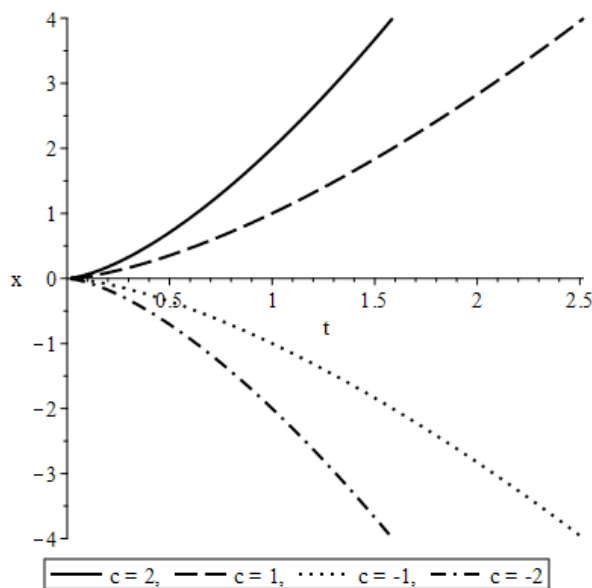


Рисунок 2.45. Линии уровня при  $\alpha = 1.5$ .

Подстановка (2.12) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение для динамической

составляющей продольного перемещения

$$y^2 \left( \alpha^2 y^{\frac{2}{\alpha}} - \varphi \right) \varphi'' - y^2 \varphi'^2 + y \left( \alpha(\alpha+1) y^{\frac{2}{\alpha}} - \frac{2\alpha-8}{\alpha} \varphi \right) \varphi' + \frac{2\alpha-8}{\alpha^2} \varphi^2 = 0. \quad (2.13)$$

Приведем численное решение данного фактор уравнения методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности при условиях Коши  $\varphi(1) = 1$ ,  $\varphi'(1) = 1$  и различных значениях  $\alpha$ .

Рисунок 2.46 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.13), при  $\alpha = 0.5$ .

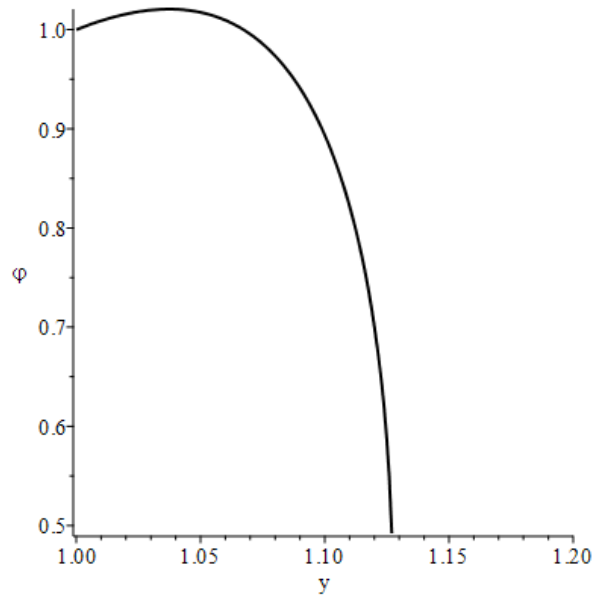


Рисунок 2.46. Численное решение уравнения (2.13) при  $\alpha = 0.5$ .

Рисунок 2.47 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

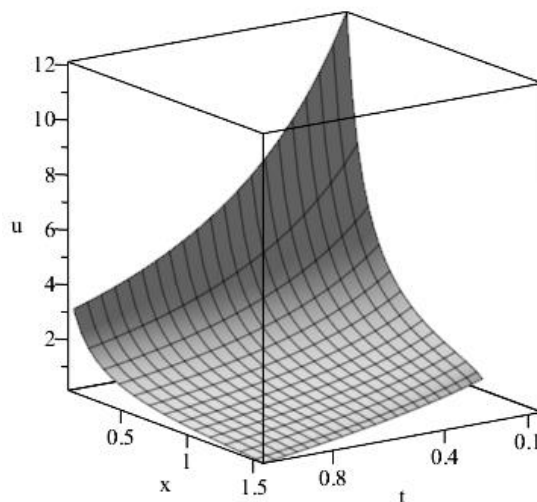


Рисунок 2.47. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 0.5$ .

Рисунок 2.48 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.13), при

$\alpha = 1.5$ .

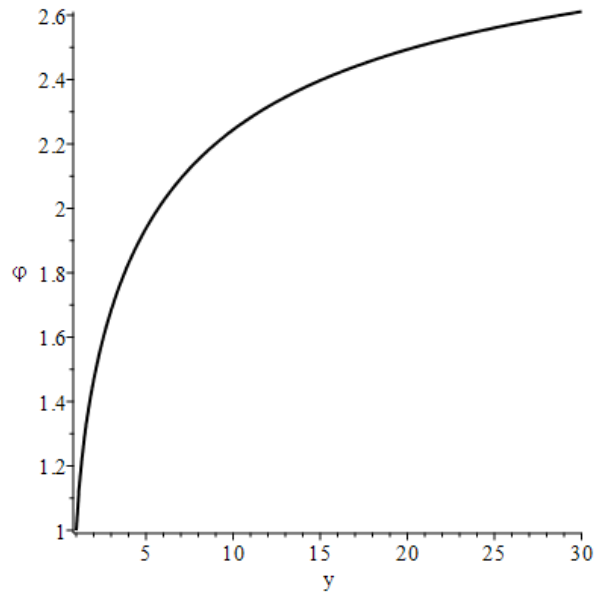


Рисунок 2.48. Численное решение уравнения (2.13) при  $\alpha = 1.5$ .

Рисунок 2.49 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

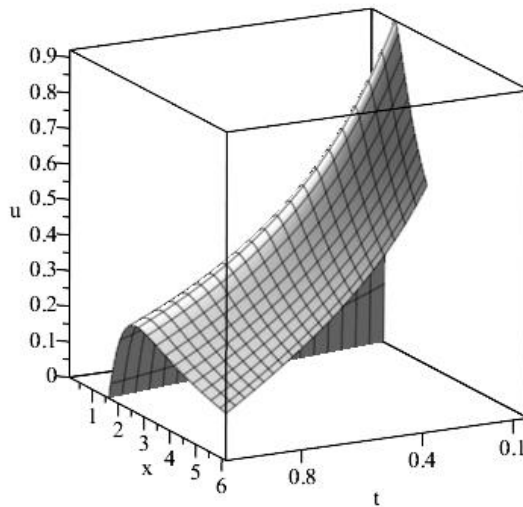


Рисунок 2.49. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 1.5$ .

Рисунок 2.50 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.13), при  $\alpha = 5$ .

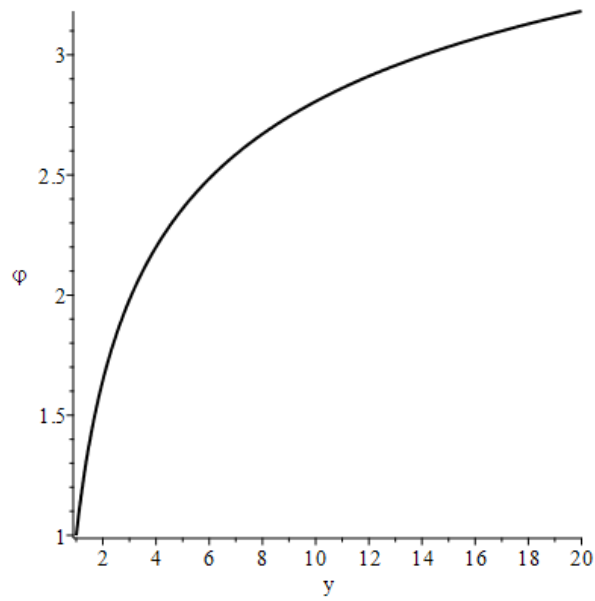


Рисунок 2.50. Численное решение уравнения (2.13), при  $\alpha = 5$ .

Рисунок 2.51 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

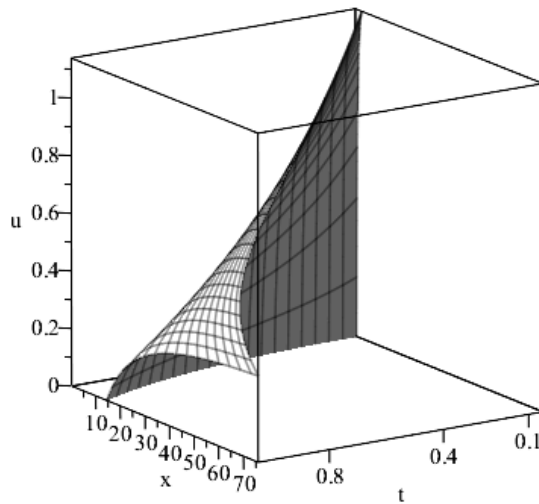


Рисунок 2.51. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 5$ .

Рисунок 2.52 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.13), при  $\alpha = 10$ .

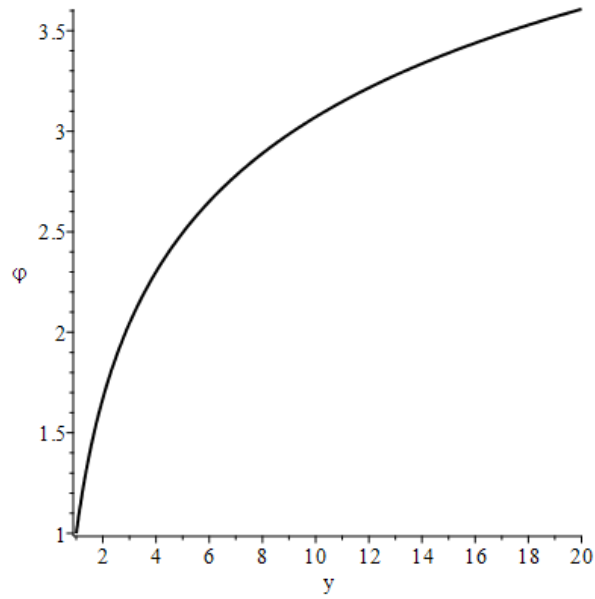


Рисунок 2.52. Численное решение уравнения (2.13), при  $\alpha = 10$ .

Рисунок 2.53 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

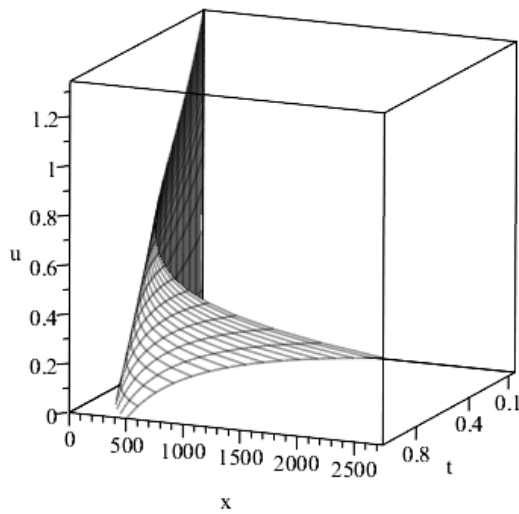


Рисунок 2.53. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 10$ .

Рисунок 2.54 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.13), при  $\alpha = -5$ .

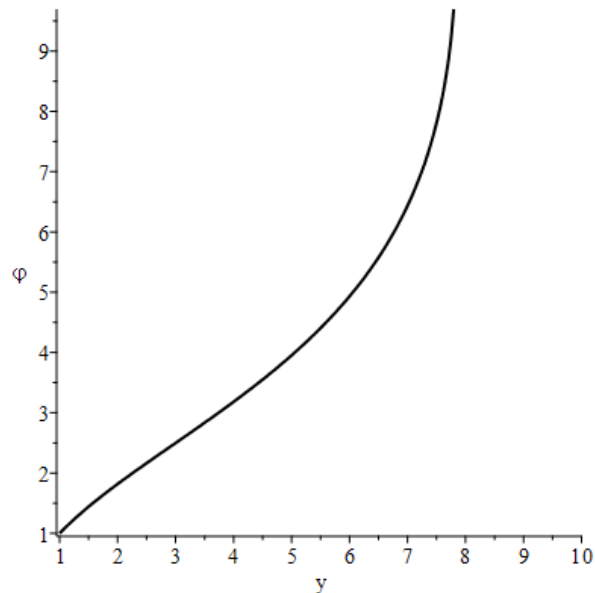


Рисунок 2.54. Численное решение уравнения (2.13), при  $\alpha = -5$ .

Рисунок 2.55 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

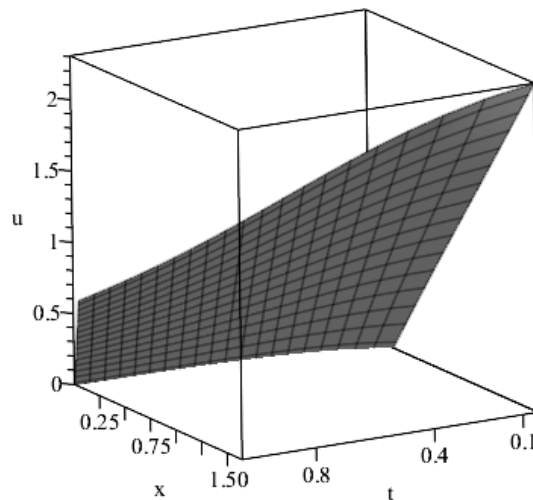


Рисунок 2.55. Продольные колебания стержня при  $\alpha = -5$ .

Из графиков 2.47, 2.49, 2.51, 2.53 и 2.55, для указанных значений параметров, следует, что максимальное продольное перемещение будет достигаться при  $t = 0$ . С ростом  $t$  перемещение убывает. Это означает, что, при данной деформации разрушения стержня не произойдет.

**2.4.2.4.** Инвариантная подмодель  $\Omega_{1.1}\langle X_0 \rangle$  модели (2.5) является стационарной и интереса для исследования не представляет.

**2.4.2.4.1.** Инвариантная  $\Omega_{1.2}\langle X_0 + X_4 \rangle$  -подмодель модели (2.5) описывает деформацию,



при которой продольное перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = x^{2-\beta} \varphi(y), \quad y = x \exp(-t). \quad (2.14)$$

Подстановка (2.14) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение для динамической составляющей продольного перемещения

$$y^2(1-\gamma\varphi)\varphi'' + y(1+3\beta\gamma\varphi-8\gamma\varphi)\varphi' - y^2\gamma\varphi'^2 + \gamma(5\beta-\beta^2-6)\varphi^2 = 0. \quad (2.15)$$

Приведем численное решение данного фактор уравнения методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности при условиях Коши  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi'(1) = 1$  и различных значениях  $\gamma$ ,  $\beta$ .

Рассмотрим случаи  $\beta < 2$ .

Рисунок 2.56 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0$ .

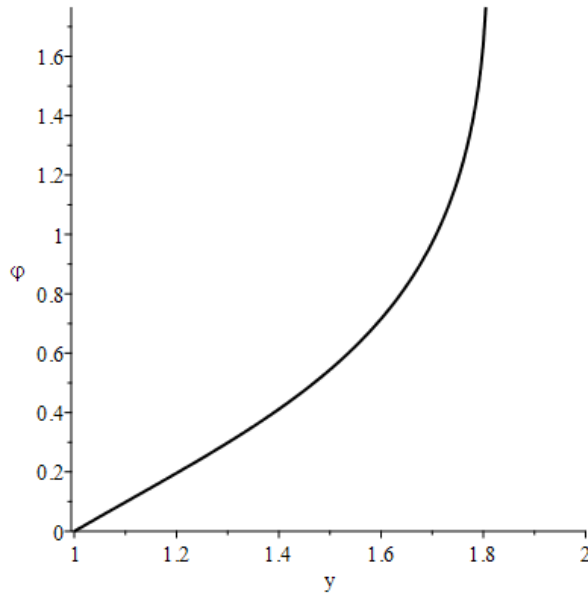


Рисунок 2.56. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0$ .

Рисунок 2.57 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

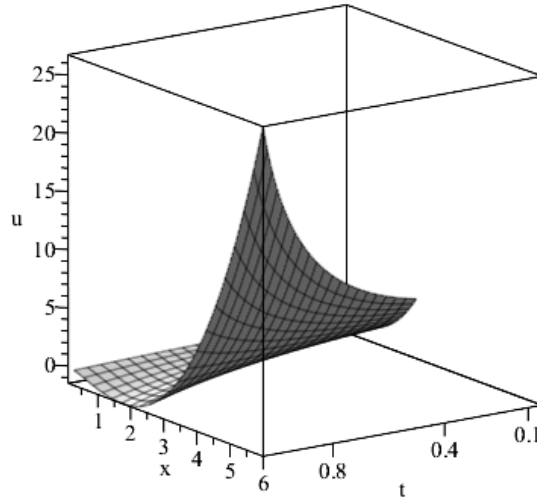


Рисунок 2.57. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 0$ .

Рисунок 2.58 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 1$ .

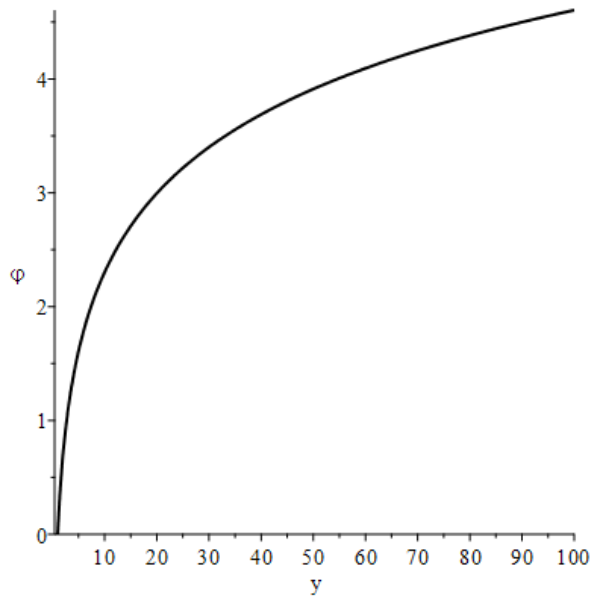


Рисунок 2.58. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.59 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

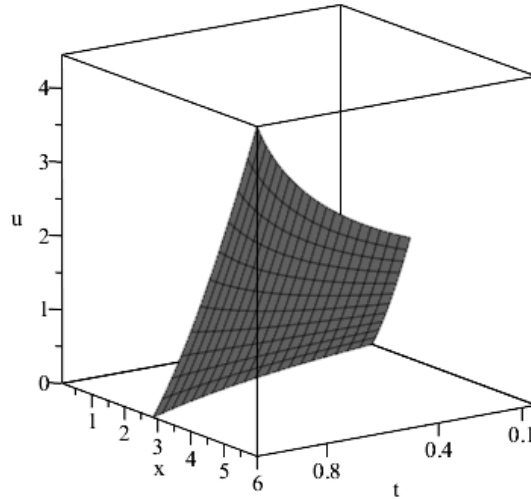


Рисунок 2.59. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 0$ ,  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.60 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 1$ .

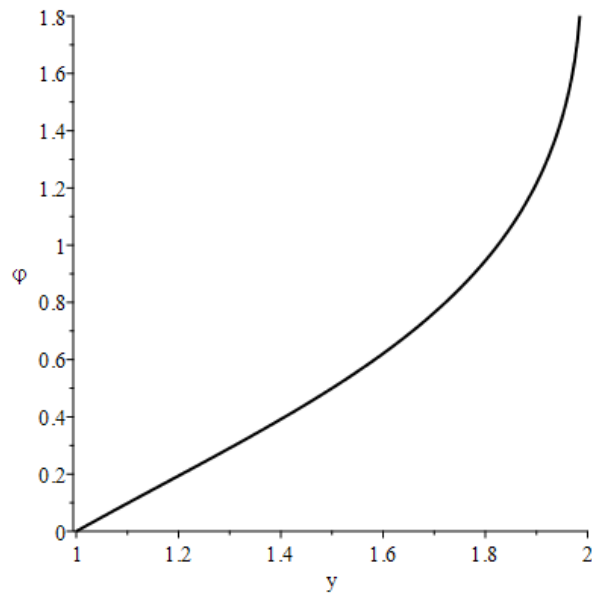


Рисунок 2.60. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.61 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

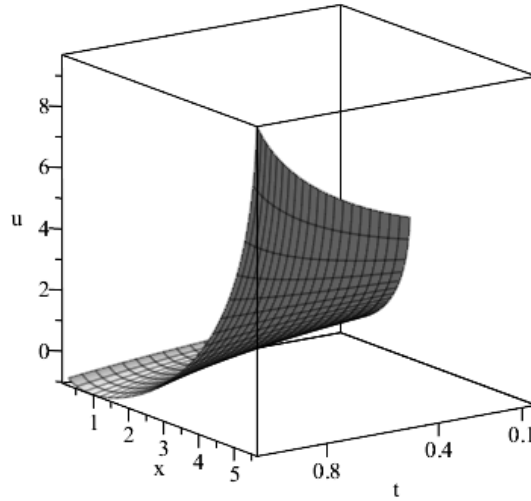


Рисунок 2.61. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.62 показывает результат численного решения уравнения (2.15) при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 1$ .

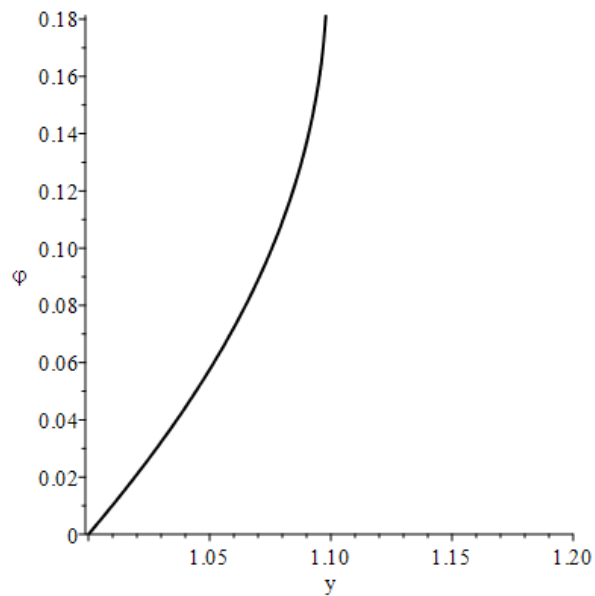


Рисунок 2.62. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 1$ .

Рисунок 2.63 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

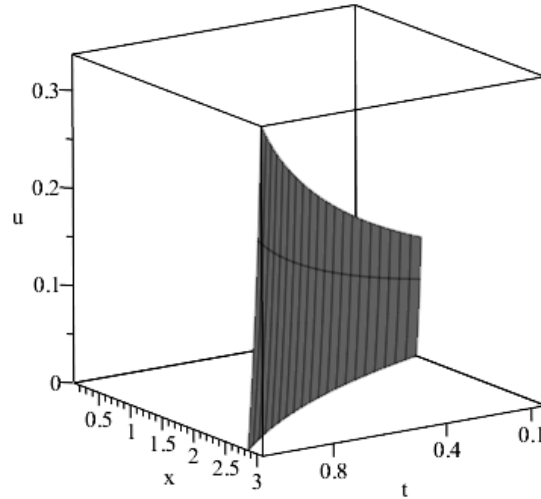


Рисунок 2.63. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 1$ .

Из графиков 2.47, 2.49, 2.51, 2.53 и 2.55 для указанных значений параметров, следует, что минимальное продольное перемещение будет достигаться при  $t = 0$ . С ростом  $t$  перемещение возрастает. Это означает, что при данной деформации возможно разрушение стержня.

Рассмотрим случаи  $\beta > 2$ .

Рисунок 2.64 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 2$ .

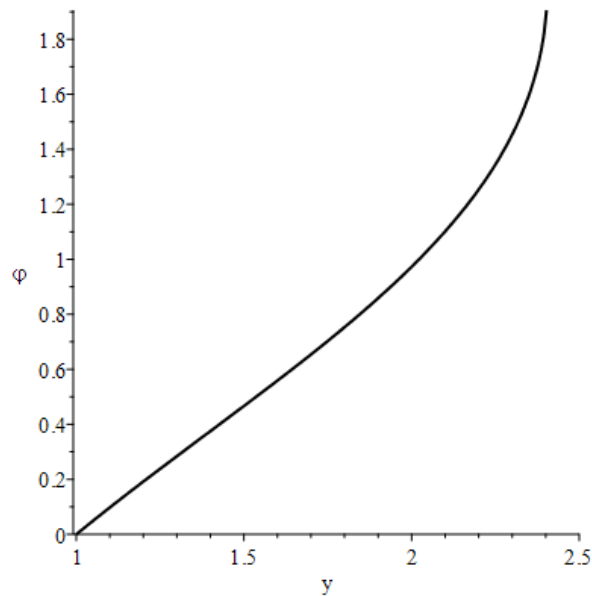


Рисунок 2.64. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.65 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

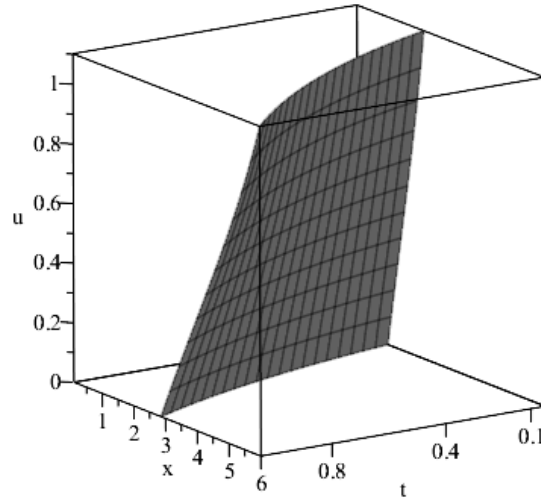


Рисунок 2.65. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 2$ .

Рисунок 2.66 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 3$ .

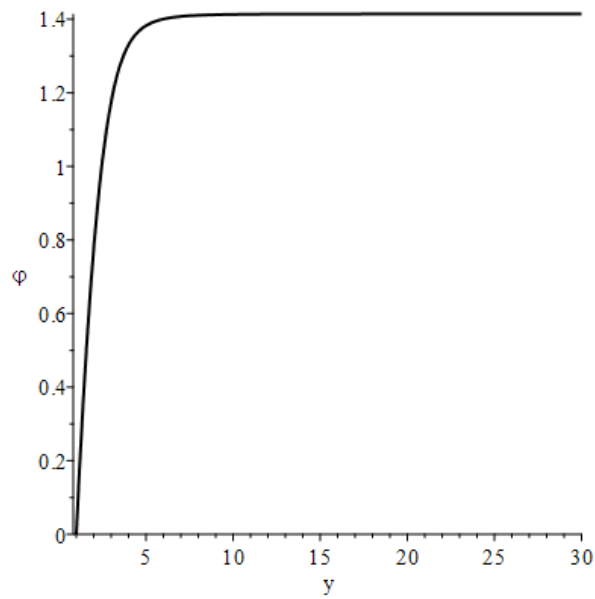


Рисунок 2.66. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 3$ .

Рисунок 2.67 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

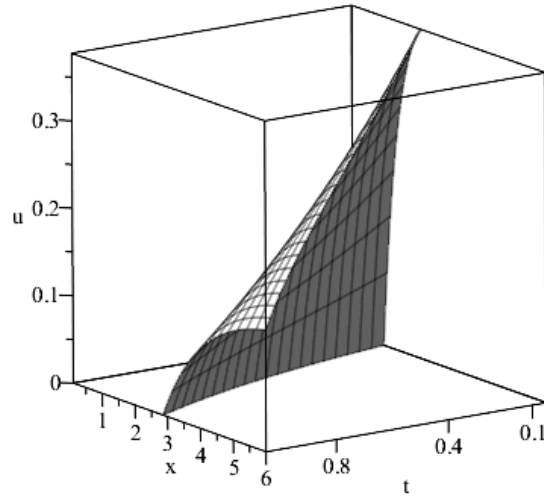


Рисунок 2.67. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 3$ .

Рисунок 2.68 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 3$ .

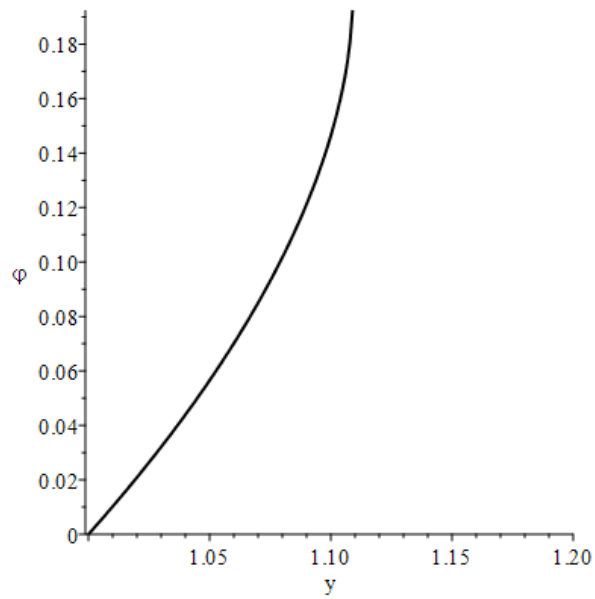


Рисунок 2.68. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 3$ .

Рисунок 2.69 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

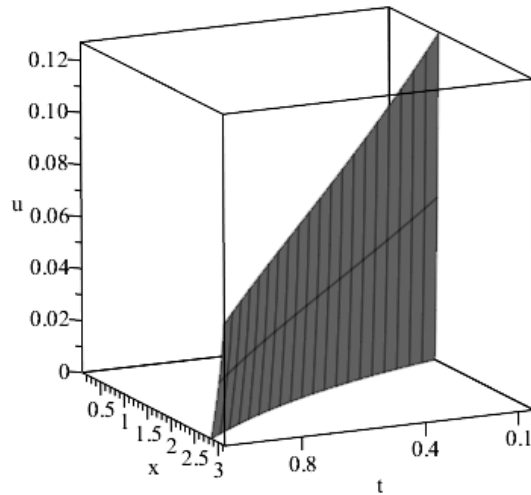


Рисунок 2.69. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 5$ ,  $\beta = 3$ .

Рисунок 2.70 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 6$ .

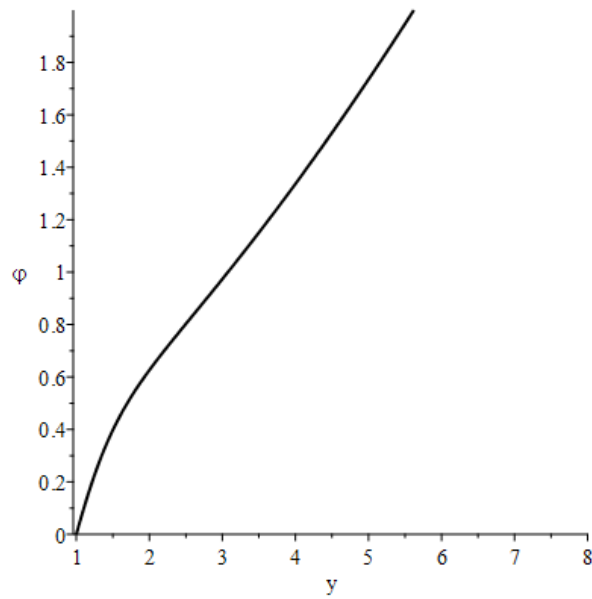


Рисунок 2.70. Численное решение уравнения (2.15) при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 6$ .

Рисунок 2.71 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .



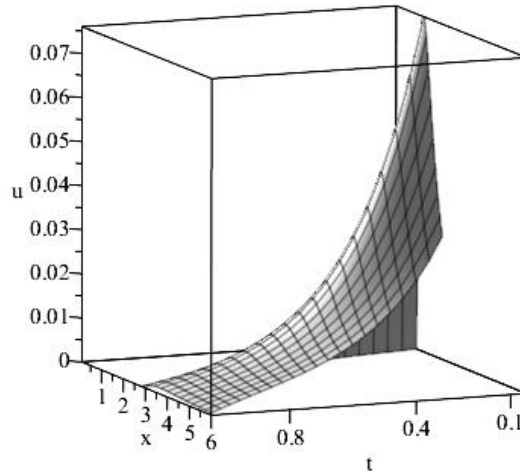


Рисунок 2.71. Продольные колебания стержня при  $\gamma = 0.5$ ,  $\beta = 6$ .

Из графиков 2.65, 2.67, 2.69 и 2.71 для указанных значений параметров следует, что максимальное продольное перемещение будет достигаться при  $t = 0$ . С ростом  $t$  перемещение убывает. Это означает, что данная деформация не приведет к разрушению стержня.

**2.4.2.4.2.** Инвариантная  $\Omega_{1,3} \langle X_3 + \alpha X_4 \rangle$ -подмодель модели (2.5) описывает деформацию, при которой продольное перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = x^{2\alpha - \alpha\beta - 2} \varphi(y), \quad y = xt^{-\alpha}, \quad (2.16)$$

Рисунок 2.72 показывает линии уровня  $x(t+1)^{-3} = c = const$ , при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

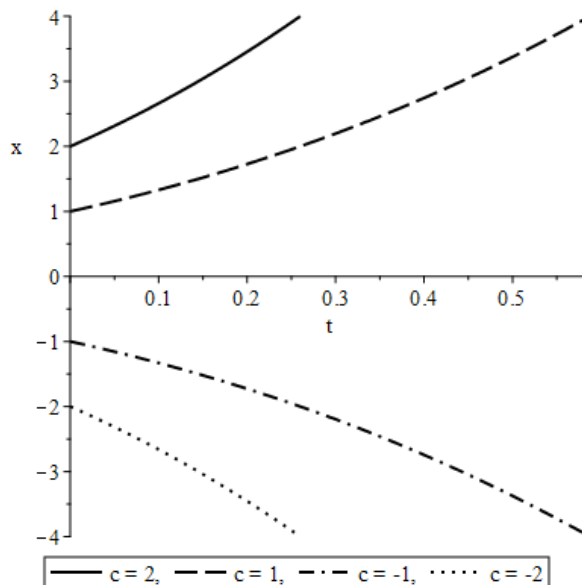


Рисунок 2.72. Линии уровня при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Подстановка (2.16) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение для динамической составляющей продольного перемещения

$$\begin{aligned} & (\alpha^2 y^2 - \gamma y^\beta \varphi) \varphi'' + ((2\beta - 3)\alpha^2 y + 5\alpha y - \beta \gamma y^{\beta-1} \varphi) \varphi' - \gamma y^\beta \varphi'^2 + \\ & + (\alpha^2 (2 - \beta)^2 + 6 + 5\alpha\beta - 10\alpha) \varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Приведем численное решение фактор уравнения (2.17) методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности при условиях Коши  $\varphi(1) = 0$ ,  $\varphi'(1) = 1$  и различных значениях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Рисунок 2.73 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.17), при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

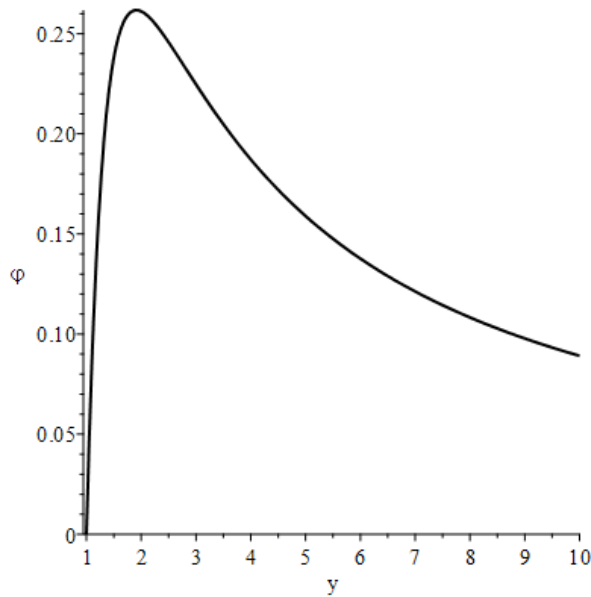


Рисунок 2.73. Численное решение уравнения (2.17) при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Рисунок 2.74 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

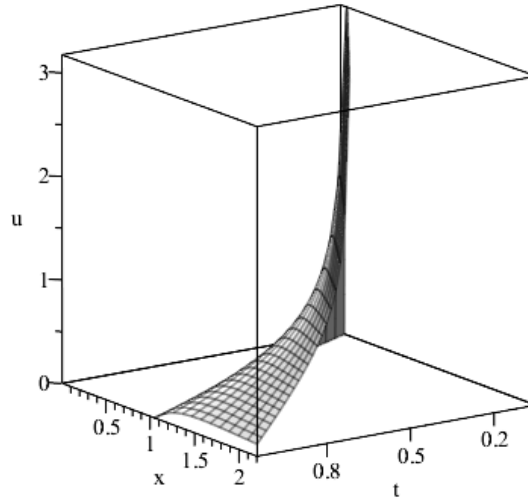


Рисунок 2.74. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Из этого рисунка следует, что максимальное продольное перемещение будет достигаться при  $t = 0$ . С ростом  $t$  перемещение убывает. Это означает, что, данная деформация не приведет к разрушению стержня.

Рисунок 2.75 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.17) при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

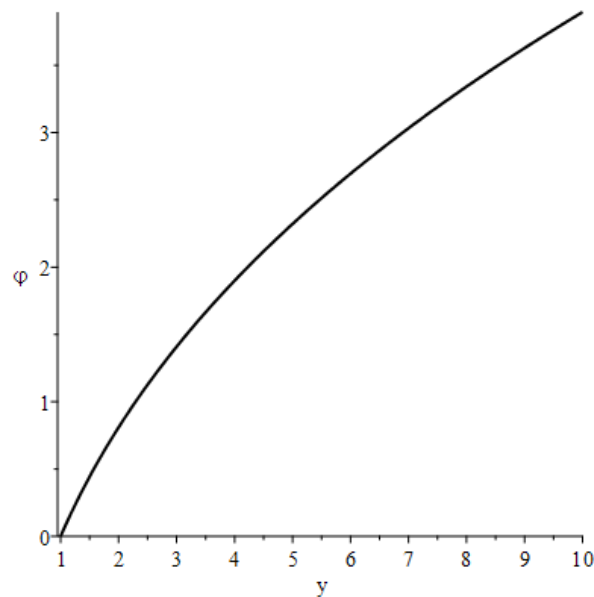


Рисунок 2.75. Численное решение уравнения (2.17) при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Рисунок 2.76 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

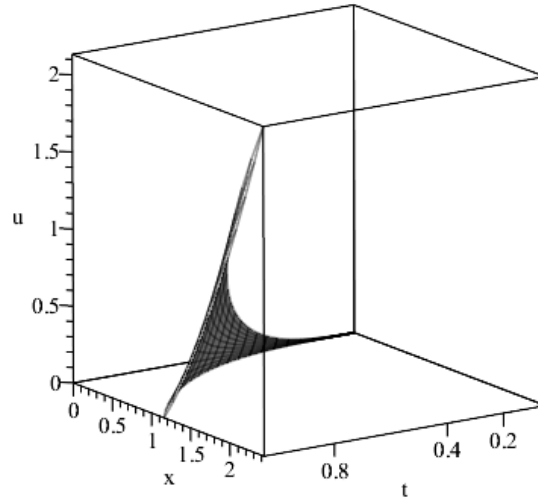


Рисунок 2.76. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Рисунок 2.77 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.17), при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 5$ .

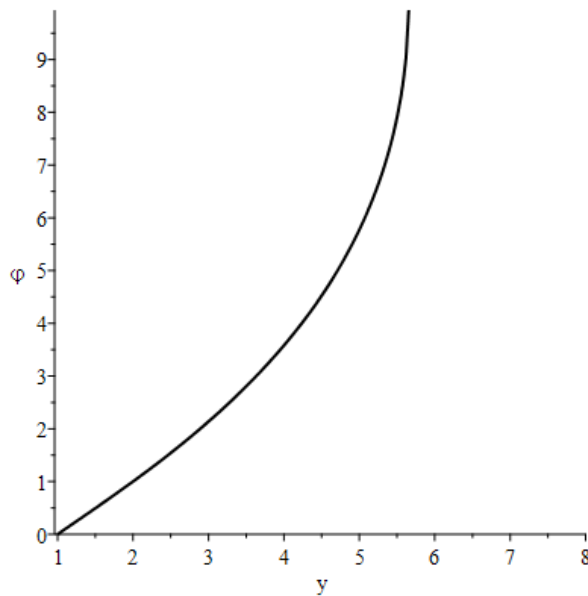


Рисунок 2.77. Численное решение уравнения (2.17) при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 5$ .

Рисунок 2.78 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

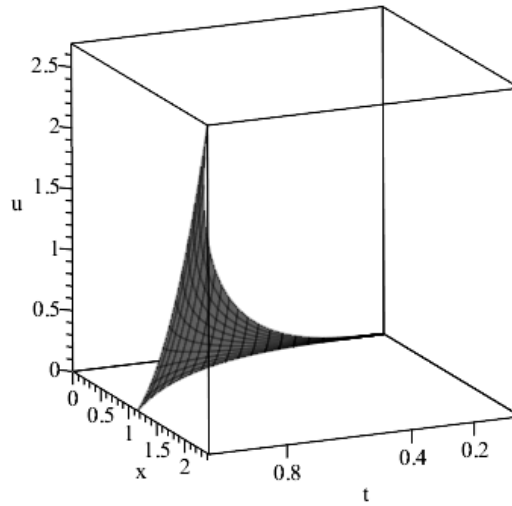


Рисунок 2.78. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 5$ .

Рисунок 2.79 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.17), при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 5$ .

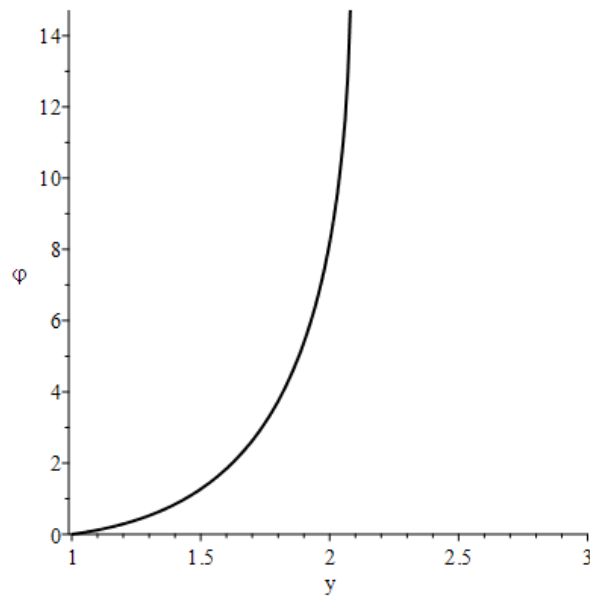


Рисунок 2.79. Численное решение уравнения (2.17) при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 5$ .

Рисунок 2.80 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

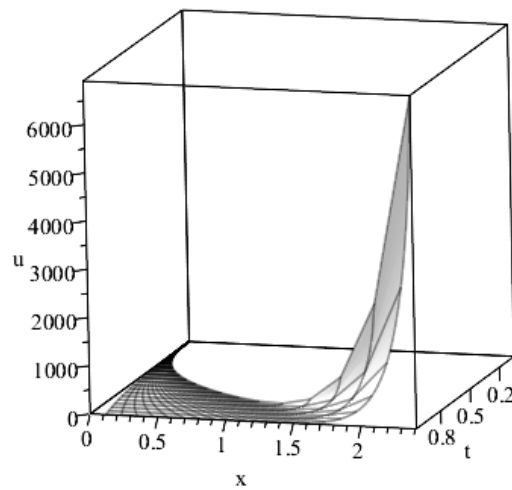


Рисунок 2.80. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 3$ ,  $\beta = -1$ ,  $\gamma = 5$ .

Рисунок 2.81 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.17), при  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

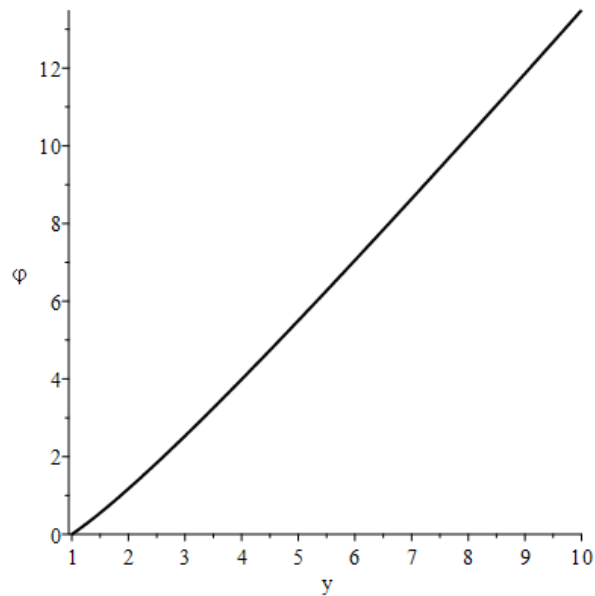


Рисунок 2.81. Численное решение уравнения (2.17) при  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Рисунок 2.82 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

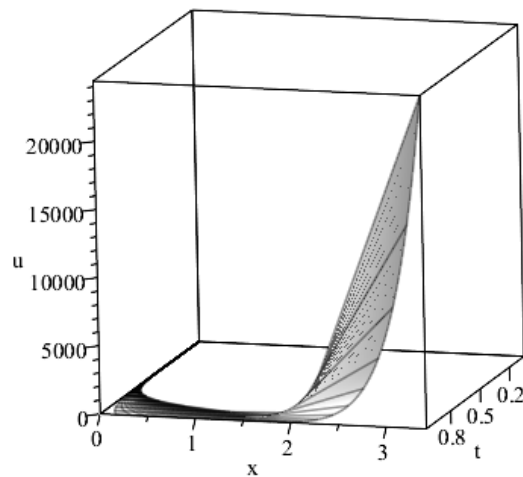


Рисунок 2.82. Продольные колебания стержня при  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ .

Рисунок 2.83 показывает результат численного решения фактор уравнения (2.17), при  $\alpha = -0.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -3$ .

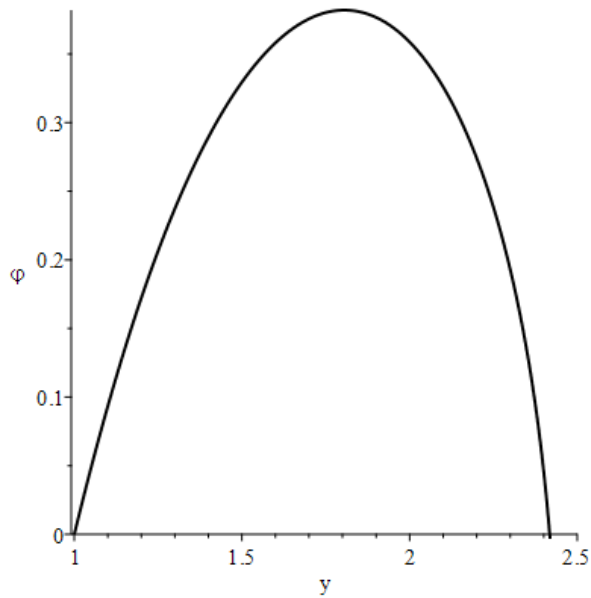


Рисунок 2.83. Численное решение уравнения (2.17) при  $\alpha = -0.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -3$ .

Рисунок 2.84 показывает соответствующее продольное перемещение для каждого поперечного сечения  $x$  в момент времени  $t$ .

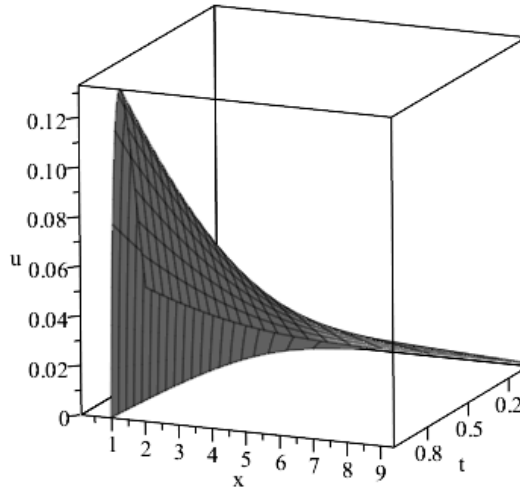


Рисунок 2.84. Продольные колебания стержня при  $\alpha = -0.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = -3$ .

Из графиков 2.76, 2.78, 2.80, 2.82 и 2.84 для указанных значений параметров следует, что минимальное продольное перемещение будет достигаться при  $t = 0$ . С ростом  $t$  перемещение возрастает. Это означает, что если максимальное значение продольного перемещения не превосходит критического значения, при котором начинается разрушение стержня из данного материала, то при данной деформации разрушения стержня не произойдет. В противном случае стержень разрушится.

**2.4.2.4.3.** Инвариантная  $\Omega_{1.4}\langle X_4 \rangle$  -подмодель модели (2.5) описывает деформацию, при которой продольное перемещение изменяется по закону:

$$u(t, x) = x^{2-\beta} \varphi(t). \quad (2.18)$$

Подстановка (2.18) в уравнение (2.1) дает фактор уравнение для динамической составляющей продольного перемещения

$$\varphi'' - \gamma(\beta^2 - 5\beta + 6)\varphi^2 = 0. \quad (2.19)$$

Точное решение уравнения (2.19) определяется по формуле [8]:

$$\varphi(t) = \frac{6W(t+c_1, 0, c_2)}{\gamma(\beta^2 - 5\beta + 6)}, \quad (2.20)$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные, а  $W(z, 0, c_2)$  – эллиптическая функция Вейерштрасса комплексной переменной  $z$  с инвариантами  $g_2 = 0$  и  $g_3 = c_2$ .

Если  $c_2 = 0$ , то решение (2.20) имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{6(c_1 + t)^{-2}}{\gamma(\beta^2 - 5\beta + 6)}. \quad (2.21)$$



Если  $c_2 \neq 0$ , то функция  $W(z, 0, c_2)$  является периодической функцией второго порядка [86] с двумя периодами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , которые определяются с помощью полного эллиптического интеграла первого рода. Она имеет полюсы второго порядка в точках  $z_{m,n} = 2m\omega_1 + 2n\omega_2$ , где  $m, n$  - любые целые числа.

Рисунок 2.85 описывает график функции  $\varphi(t)$  (2.20) для вещественного аргумента  $t$  при следующих значениях параметров  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_1 = -3.5$ ,  $c_2 = \pi$ .

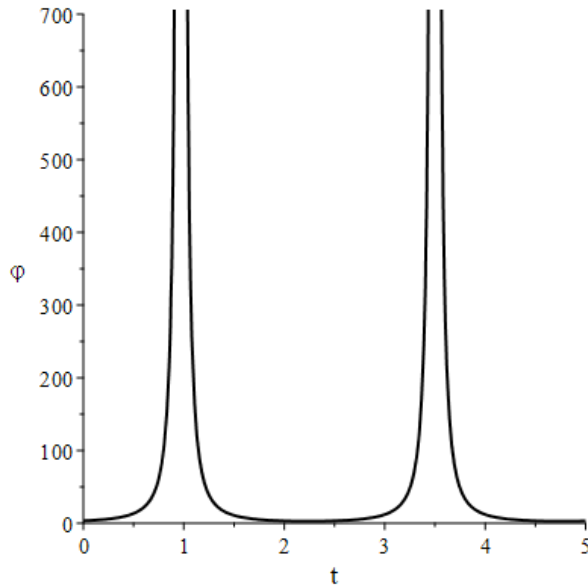


Рисунок 2.85. График динамической составляющей  $\varphi(t)$  продольного перемещения при  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_1 = -3.5$ ,  $c_2 = \pi$ .

Решения (2.20) и (2.21) описывают разрушение стержня за конечное время (в течение периода).

Рисунок 2.86 описывает продольные колебания стержня при  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_1 = -3.5$ ,  $c_2 = \pi$ .

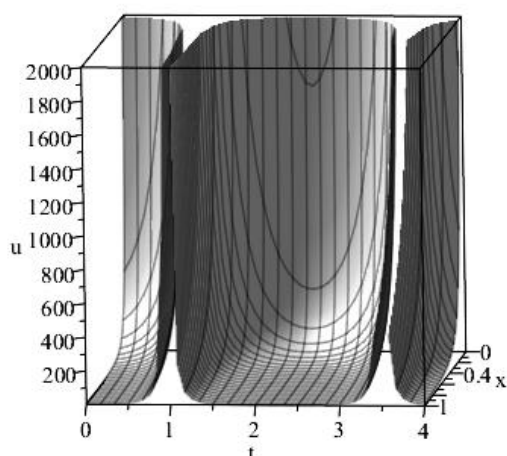


Рисунок 2.86. Продольные колебания стержня при  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 1$ ,  $c_1 = -3.5$ ,  $c_2 = \pi$ .

## 2.5. Выводы по главе

Модель, описывающая нелинейную продольную упругую динамическую деформацию неоднородного стержня, задается нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка и используется в сфере строительства, архитектуры, робототехники и других инновационных областях. Эта модель исследуется методами группового анализа дифференциальных уравнений и общими методами математической физики. С помощью метода групповой классификации найдены все базисные модели, обладающие разными симметричными свойствами. Для каждой базисной модели найдены все существенно различные инвариантные подмодели. Для инвариантных подмоделей получены описывающие их фактор уравнения, для которых при некоторых значениях параметров, определяющих эти подмодели численно решены краевые задачи, для которых продольное перемещение и скорость его изменения заданы на некоторой линии уровня. Если для модели в каждой фиксированной точке стержня с течением времени происходит возрастание продольного колебания, то при данном характере деформации со временем может произойти разрушение стержня. Если для подмодели происходит убывание продольных колебаний, то разрушение данного стержня не произойдет.

### Глава 3. Групповой анализ моделей динамического трансверсально-изотропного термоупругого тела

Настоящая глава посвящена групповому анализу системы дифференциальных уравнений динамического трансверсально-изотропного термоупругого тела [79]. Выполнено групповое расслоение данной системы относительно бесконечной подгруппы, порождаемой градиентом гармонической функции. Получена система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, эквивалентная системе уравнений для модели трансверсально-изотропного термоупругого тела. Найдена основная группа Ли преобразований разрешающей системы, построена оптимальная система, получены универсальные инварианты. Для некоторых инвариантных подмоделей ранга 1, содержащие произвольную гладкую функцию найдены точные решения. Для этих решений, при различных видах указанной произвольной функции, построены графики, характеризующие изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально-изотропной среде сферы и куба под действием найденных перемещений и температуры. Указан физический смысл полученных решений.

#### 3.1 Описание модели

Для модели трансверсально-изотропного термоупругого тела [10, 14, 15, 19, 20, 36, 38, 42, 47, 81, 93, 99] компоненты деформации  $\varepsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) определяются соотношениями:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u^1}{\partial x'}, \varepsilon_{22} = \frac{\partial u^2}{\partial y'}, \varepsilon_{33} = \frac{\partial u^3}{\partial z'}, 2\varepsilon_{23} = \frac{\partial u^2}{\partial z'} + \frac{\partial u^3}{\partial y'}, 2\varepsilon_{13} = \frac{\partial u^1}{\partial z'} + \frac{\partial u^3}{\partial x'}, 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u^1}{\partial y'} + \frac{\partial u^2}{\partial x'}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(x', y', z') \in R^3$  – пространственные координаты,  $t'$  – время,  $u^1 = u^1(t', x', y', z')$ ,  $u^2 = u^2(t', x', y', z')$ ,  $u^3 = u^3(t', x', y', z')$  – компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$ .

Закон Гука для термоупругого трансверсально-изотропного тела запишем в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \lambda'\varepsilon_{33} - \beta\theta', \\ \sigma_{22} &= \lambda\varepsilon_{11} + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{22} + \lambda'\varepsilon_{33} - \beta\theta', \\ \sigma_{33} &= \lambda'(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (\lambda' + 2\mu')\varepsilon_{33} - \beta'\theta', \\ \sigma_{23} &= 2G'\varepsilon_{23}, \sigma_{13} = 2G'\varepsilon_{13}, \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\lambda, \mu, \lambda', \mu', G'$  – коэффициенты трансверсально-изотропной среды,  $\beta, \beta'$  – коэффициенты теплового расширения,  $\theta' = \theta'(t', \mathbf{x}')$  – температура.

Систему уравнений для динамического трансверсально-изотропного термоупругого тела, с учетом (3.1), (3.2), запишем в виде [14, 15, 19, 20, 38 42, 87]:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{x'x'}^1 + \mu u_{y'y'}^1 + G'u_{z'z'}^1 + (\lambda + \mu)u_{x'y'}^2 + (\lambda' + G')u_{x'z'}^3 - \beta\theta_{x'}' &= \rho u_{t't'}^1, \\ (\lambda + \mu)u_{x'y'}^1 + \mu u_{x'x'}^2 + (\lambda + 2\mu)u_{y'y'}^2 + G'u_{z'z'}^2 + (\lambda' + G')u_{y'z'}^3 - \beta\theta_{y'}' &= \rho u_{t't'}^2, \\ (\lambda' + G')u_{x'z'}^1 + (\lambda' + G')u_{y'z'}^2 + G'u_{x'x'}^3 + G'u_{y'y'}^3 + (\lambda' + 2\mu')u_{z'z'}^3 - \beta'\theta_{z'}' &= \rho u_{t't'}^3, \end{aligned} \quad (3.3)$$

Система замыкается уравнением теплопроводности

$$c_0\theta_{t'}' + \theta_0'(\beta u_{t'x'}^1 + \beta u_{t'y'}^2 + \beta' u_{t'z'}^3) = k\theta_{x'x'}' + k'\theta_{y'y'}' + k''\theta_{z'z'}', \quad (3.4)$$

где  $k, k'$  – коэффициенты теплопроводности,  $c_0$  – коэффициент теплоёмкости,  $\theta_0'$  – температура, при отсутствии деформации и напряжения,  $\rho$  – плотность. Не ограничивая общности считаем  $\rho = 1$  (это всегда можно добиться с помощью преобразования растяжения).

### Теорема.

Пусть  $h(x', y', z')$  – гармоническая функция. Тогда функция  $\mathbf{u} = \nabla h(x', y', z')$  является частным решением системы (3.3) и (3.4) в следующих 4 случаях:

1.  $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G', \mu' = G'$ ;

2.  $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G', h(x', y', z') = \frac{1}{2}F_1(x', y')z^2 + F_2(x', y')z' + F_3(x', y')$ ,

где  $F_i(x', y')$ , ( $i = 1..3$ ) – произвольные гармонические функции;

3.  $h(x', y', z') = \frac{1}{2}C_1 z'^2 + F_1(x', y')z' + F_2(x', y')$ ,

где  $F_i(x', y')$ , ( $i = 1, 2$ ) – произвольные гармонические функции;

4.  $\mu' = G', h(x', y', z') = F_1(x', y') + F_2(x', y')z' + F_3(y') + F_4(y')z' + F_5(z')$ ,

где  $F_1(x', y')$ ,  $F_2(x', y')$ ,  $F_3(y')$ ,  $F_4(y')$ ,  $F_5(z')$  – произвольные гармонические функции.

Теорема доказывается непосредственной подстановкой  $\mathbf{u} = \nabla h(x', y', z')$  в системы (3.3), (3.4).

С физической точки зрения, наибольший интерес представляет первый случай, в котором накладываются ограничения лишь на модули упругости. В дальнейшем рассматриваем только этот случай.

Пусть  $\beta' = \beta = 1$ ,  $k' = k$ ,  $\theta'_0 = c_0$ . Подставим ограничения на параметры тензора модулей упругости  $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G'$ , и  $\mu' = G'$  в исходную систему уравнений (3.3) и (3.4). тогда система (3.3) и (3.4) принимает вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{xx}^1 + \mu u_{yy}^1 + G'u_{zz}^1 + (\lambda + \mu)u_{xy}^2 + (\lambda + 2\mu - G')u_{xz}^3 - \theta_x &= u_{tt}^1, \\ (\lambda + \mu)u_{xy}^1 + \mu u_{xx}^2 + (\lambda + 2\mu)u_{yy}^2 + G'u_{zz}^2 + (\lambda + 2\mu - G')u_{yz}^3 - \theta_y &= u_{tt}^2, \\ (\lambda + 2\mu - G')u_{xz}^1 + (\lambda + 2\mu - G')u_{yz}^2 + G'u_{xx}^3 + G'u_{yy}^3 + (\lambda + 2\mu)u_{zz}^3 - \theta_z &= u_{tt}^3, \\ \theta_t + u_{tx}^1 + u_{ty}^2 + u_{tz}^3 &= \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

После введения безразмерных переменных  $t = \frac{c_0}{k\rho} t'$ ,  $\mathbf{x} = \frac{c_0}{k\sqrt{\rho}} \mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ ,  $\theta = \frac{k\sqrt{\rho}}{c_0} \theta'$ ,

система (3.5) определяется по формулам:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)u_{xx}^1 + \mu u_{yy}^1 + G'u_{zz}^1 + (\lambda + \mu)u_{xy}^2 + (\lambda + 2\mu - G')u_{xz}^3 - \theta_x &= u_{tt}^1, \\ (\lambda + \mu)u_{xy}^1 + \mu u_{xx}^2 + (\lambda + 2\mu)u_{yy}^2 + G'u_{zz}^2 + (\lambda + 2\mu - G')u_{yz}^3 - \theta_y &= u_{tt}^2, \\ (\lambda + 2\mu - G')u_{xz}^1 + (\lambda + 2\mu - G')u_{yz}^2 + G'u_{xx}^3 + G'u_{yy}^3 + (\lambda + 2\mu)u_{zz}^3 - \theta_z &= u_{tt}^3, \\ \theta_t + u_{tx}^1 + u_{ty}^2 + u_{tz}^3 &= \theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Система (3.6) является объектом исследования в данной главе.

### 3.2 Групповое расслоение уравнений модели

Ввиду линейности и однородности система (3.6) допускает бесконечную группу Ли преобразований. Группа, порождаемая операторами:

$$X = \nabla h \cdot \partial_{\mathbf{u}} + \partial_{\theta}, \quad (3.7)$$

является нормальным делителем этой основной группы, где  $h(x, y, z)$  произвольная гармоническая функция.

Дифференциальные инварианты первого порядка для подгруппы, порождаемой операторами (3.7), суть:

$$\begin{aligned} I_1 &= t, \quad I_2 = \mathbf{x}, \quad I_3 = \text{rot } \mathbf{u}, \quad I_4 = \text{div } \mathbf{u}, \\ I_5 &= u^1 - h_x \theta, \quad I_6 = u^2 - h_y \theta, \quad I_7 = u^3 - h_z \theta, \\ I_8 &= u_z^1 - h_{xz} \theta, \quad I_9 = u_x^2 - h_{xy} \theta, \quad I_{10} = u_y^3 - h_{yz} \theta, \\ I_{11} &= \mathbf{u}_t, \quad I_{12} = \theta_t, \quad I_{13} = \theta_x, \quad I_{14} = \theta_y, \quad I_{15} = \theta_z. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Эти инварианты позволяют выполнить групповое расслоение уравнений системы (3.6).

Автоморфная система имеет вид:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad \text{rot } \mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}(t, \mathbf{x}), \quad \text{div } \mathbf{u} = q(t, \mathbf{x}), \quad \nabla \theta = \boldsymbol{\varphi}(t, \mathbf{x}), \quad \theta_t = \psi(t, \mathbf{x}), \quad (3.9)$$

где  $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)^T$ ,  $q$ ,  $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3)^T$ ,  $\psi$  – дополнительные функции от переменных  $t$ ,  $\mathbf{x}$ , определяемые из разрешающей системы. На эту систему группа, порождаемая оператором (3.7), действует транзитивно.

Разрешающая система имеет вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\nabla q - \text{rot}(M\boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}_t, \quad \text{div}(k\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}) = \psi, \quad \boldsymbol{\omega}_t = \text{rot } \mathbf{v}, \\ q_t = \text{div } \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}_t = \text{grad } \psi, \quad \text{div } \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \text{rot } \boldsymbol{\varphi} = 0, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $M = \text{diag}(G', G', \mu)$  – диагональная матрица.

Исходная система (3.6) равносильна [21-25, 53, 62] системе первого порядка (3.9) и (3.10), где искомыми функциями являются вектор перемещений  $\mathbf{u}$  и функция температуры  $\theta$ , а также дополнительные функции  $\boldsymbol{\varphi}$ ,  $q$ ,  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\psi$ . Если из решения системы (3.10) взять пару  $\mathbf{v}$  и  $\psi$ , то это соответственно  $\mathbf{u}$  и  $\theta'$  решение системы (3.3) и (3.4).

Рассмотрим частные случаи системы (3.10).

1) При  $\boldsymbol{\omega} = \text{const}$  – система (3.10) совпадает с системой уравнений безвихревой акустики с термодинамикой [6, 7]:

$$\mathbf{v}_t = (\lambda + 2\mu)\nabla q - \boldsymbol{\varphi}, \quad \psi = \text{div}(k\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}), \quad \text{rot } \mathbf{v} = 0, \quad \boldsymbol{\varphi}_t = \text{grad } \psi, \quad q_t = \text{div } \mathbf{v}, \quad \text{rot } \boldsymbol{\varphi} = 0.$$

2) При  $q = \text{const}$  – система (3.10) совпадает с уравнениями Максвелла [43] в неоднородной среде с термодинамикой.

$$\mathbf{v}_t = -\text{rot}(M\boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}_t = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{\omega} = 0, \quad k \text{div } \boldsymbol{\varphi} = \psi, \quad \boldsymbol{\varphi}_t = \text{grad } \psi, \quad \text{rot } \boldsymbol{\varphi} = 0.$$

3) При  $\psi = \text{const}$  – получим постоянную термодинамику.

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)\nabla q - \text{rot}(M\boldsymbol{\omega}) - \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}_t, \quad \text{div}(k\boldsymbol{\varphi} - \mathbf{v}) = \text{const}, \quad \boldsymbol{\omega}_t = \text{rot } \mathbf{v}, \quad q_t = \text{div } \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\varphi}_t = 0, \\ \text{div } \boldsymbol{\omega} = 0, \quad \text{rot } \boldsymbol{\varphi} = 0. \end{aligned}$$

4) При  $\boldsymbol{\varphi} = c_1 = \text{const}$ :

$$(\lambda + 2\mu)\nabla q - \text{rot}(M\boldsymbol{\omega}) - c_1 = \mathbf{v}_t, \quad -\text{div } \mathbf{v} = \psi, \quad \boldsymbol{\omega}_t = \text{rot } \mathbf{v}, \quad q_t = \text{div } \mathbf{v}, \quad \text{grad } \psi = 0, \quad \text{div } \boldsymbol{\omega} = 0.$$

### 3.3 Групповое свойство разрешающей системы (3.10)

Оператор, допускаемый системой (3.10), ищется в виде:

$$\begin{aligned} X = \xi(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \partial_t + \boldsymbol{\eta}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \cdot \partial_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\tau}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \cdot \partial_{\mathbf{v}} + \\ + \boldsymbol{\rho}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \cdot \partial_{\boldsymbol{\varphi}} + \gamma(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \cdot \partial_{\boldsymbol{\omega}} + \sigma_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \partial_q + \sigma_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\omega}, q, \psi) \partial_{\psi}. \end{aligned}$$

Действие продолжения этого оператора на многообразии, задаваемое системой уравнений (3.10), переход на это многообразие и расщепление по параметрическим

производным дает систему определяющих уравнений. Второе продолжение этой системы приводит ее в инволюцию. Интегрирование, приведенной в инволюцию системы, дает операторы основной группы разрешающей системы (3.10).

Основная группа разрешающей системы порождается операторами переноса:

$$X_1 = \partial_t, X_2 = \partial_x, X_3 = \partial_y, X_4 = \partial_z.$$

Аналогично устанавливается, что при условиях  $\phi = \mathbf{0}$ ,  $\psi = \theta_t$  система (3.10) допускает оператор растяжения:

$$R = t\partial_t + \mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}}.$$

В этом случае система (3.10) записывается в виде:

$$(\lambda + 2\mu)\nabla q - \text{rot}(M\omega) = \mathbf{v}_t, \quad \text{div } \mathbf{v} = -\theta_t, \quad \omega_t = \text{rot } \mathbf{v}, \quad q_t = \text{div } \mathbf{v}, \quad \text{div } \omega = 0. \quad (3.11)$$

Для классификации инвариантных решений системы (3.11) построим оптимальную систему [21-25, 53, 62] подгрупп  $\tau_{i,k}$  ( $i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots$ ) группы  $G_5 \langle X_1, X_2, X_3, X_4, R \rangle$ . Получим их универсальные инварианты.

Результаты представлены в таблицах 3.1–3.3, где  $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$  - произвольные постоянные, параметр  $i$  определяет размерность соответствующей  $\tau_{i,k}$  подалгебры Ли.

Таблица 3.1. Однопараметрические подгруппы  $\tau_{1,k}$  и их универсальные инварианты.

$\tau_{1,k}$	Базис подалгебры	Универсальные инварианты
1	$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3 + \gamma X_4$	$\alpha t - x, \beta t - y, \gamma t - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
2	$X_2 + \alpha X_3 + \beta X_4$	$t, \alpha t - y, \beta t - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
3	$X_3 + \alpha X_4$	$t, x, \alpha y - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
4	$X_4$	$t, x, y, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
5	$R$	$\frac{t}{x}, \frac{t}{y}, \frac{t}{z}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$

Таблица 3.2. Двухпараметрические подгруппы  $\tau_{2,k}$  и их универсальные инварианты.

$\tau_{2,k}$	Базис подалгебры		Универсальные инварианты
	1 оператор	2 оператор	
1	$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3$	$X_4$	$\alpha t - x, \beta t - y, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
2	$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_4$	$X_3 + \gamma X_4$	$\alpha t - x, \beta t + \gamma y - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
3	$X_1 + \alpha X_3 + \beta X_4$	$X_2 + \gamma X_3 + \sigma X_4$	$\alpha t - y + \gamma x, \beta t + \sigma x - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
4	$X_2 + \alpha X_3$	$X_3 + \beta X_4$	$t, \alpha \beta x - \beta y + z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
5	$X_2 + \alpha X_3$	$X_4$	$t, \alpha x - y, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
6	$X_2 + \alpha X_3 + \beta X_4$	$R$	$\frac{t}{\alpha x - y}, \frac{t}{\beta x - z}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
7	$X_2 + \alpha X_4$	$X_3 + \beta X_4$	$t, \alpha x + \beta y - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
8	$X_2$	$X_4$	$t, y, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
9	$X_3$	$X_4$	$t, x, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
10	$X_3 + \alpha X_4$	$R$	$\frac{t}{x}, \frac{t}{\alpha y - z}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$

Таблица 3.3. Трехпараметрические подгруппы  $\tau_{3,k}$  и их универсальные инварианты.

$\tau_{3,k}$	Базис подалгебры			Универсальные инварианты
	1 оператор	2 оператор	3 оператор	
1	$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_3$	$X_4$	$R$	$\frac{\alpha t - x}{\beta t - y}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
2	$X_1 + \alpha X_2 + \beta X_4$	$X_3 + \gamma X_4$	$R$	$\frac{\alpha t - x}{\beta t + \gamma y - z}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$



3	$X_1 + \alpha X_2$	$X_3$	$X_4$	$\alpha t - x, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
4	$X_1 + \alpha X_3 + \beta X_4$	$X_2 + \gamma X_3 + \sigma X_4$	$R$	$\frac{\alpha t + \gamma x - y}{\beta t + \sigma x - z}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
5	$X_1 + \alpha X_3$	$X_2 + \beta X_3$	$X_4$	$\alpha t + \beta x - y, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
6	$X_1 + \alpha X_4$	$X_2 + \beta X_4$	$X_3 + \gamma X_4$	$\alpha t + \beta x + \gamma y - z, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
7	$X_2 + \alpha X_3$	$X_4$	$R$	$\frac{t}{\alpha x - y}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
8	$X_2 + \alpha X_4$	$X_3 + \beta X_4$	$R$	$\frac{t}{\alpha x + \beta y - z}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
9	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$t, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$
10	$X_3$	$X_4$	$R$	$\frac{t}{x}, \varepsilon, \theta, \mathbf{v}, \omega$

### 3.4 Инвариантные подмодели и решения

Рассмотрим некоторые инвариантные подмодели ранга 1.

**3.4.1.** Инвариантная  $\tau_{3,3} \langle X_1 + \alpha X_2, X_3, X_4 \rangle$ - подмодель описывается инвариантным  $\tau_{3,3} \langle X_1 + \alpha X_2, X_3, X_4 \rangle$  решением. Из Таблицы 3.3 следует, что это решение системы (3.11) имеет вид:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{v} = \mathbf{f}(\xi), \quad \omega = \mathbf{g}(\xi), \quad \theta = \Theta(\xi), \quad q = E(\xi), \quad \xi = \alpha t - x. \quad (3.12)$$

Оно описывает волну, бегущую вдоль оси  $Ox$ .

Подстановка (3.12) в (3.11) дает фактор систему:

$$\begin{aligned} \alpha f_\xi^1 + (\lambda + 2\mu)E_\xi = 0, \quad \alpha f_\xi^2 + \mu g_\xi^3 = 0, \quad \alpha f_\xi^3 - G'g_\xi^2 = 0, \quad \alpha \Theta_\xi - f_\xi^1 = 0, \quad \alpha g_\xi^1 = 0, \\ \alpha g_\xi^2 - f_\xi^3 = 0, \quad \alpha g_\xi^3 + f_\xi^2 = 0, \quad \alpha E_\xi + f_\xi^1 = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Известно, что постоянные Ламе удовлетворяют соотношениям [14, 15, 19, 20, 38 42]:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad \mu > 0.$$

Система (3.13) и автоморфная система (3.9) имеет физический смысл только при  $\lambda = \alpha^2 - 2\mu$ ,  $0 < \mu < \frac{3}{4}\alpha^2$ . Решаем систему (3.13), находим выражения для

$$g^1(\xi), g^2(\xi), g^3(\xi), \theta(\xi), q(\xi), f^1(\xi), f^2(\xi), f^3(\xi).$$

Перемещение находится по формуле:

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{v} dt + \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$ . В силу автоморфной системы (3.9) получаем:

$$\begin{aligned} f^1(\xi) &= f(\xi), u^1(\xi) = \int f(\xi) dt + c_6 t + A^1(\mathbf{x}), \\ u^2(\xi) &= c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, u^3(\xi) = c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\ \theta(\xi) &= \frac{f(\xi)}{\alpha} + c_5, q(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\alpha} + c_4, \omega^1(\xi) = c_1, \omega^2(\xi) = c_2, \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $f(\xi) = f(\alpha t - x)$  – произвольная функция,  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11$ ) – произвольные постоянные, а вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$  удовлетворяет системе уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = (c_1, c_2, c_3), \text{div } \mathbf{A}(\mathbf{x}) = -\frac{f(\alpha t - x)}{\alpha} + c_4 - \int f_x(\alpha t - x) dt. \quad (3.15)$$

Общее решение системы (3.15) имеет вид [18 53, 62]:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 s ((c_1, c_2, c_3) \times \mathbf{x}) ds + \\ &- \nabla \left( |\mathbf{x}|^2 \int_0^1 (s - \sqrt{s}) \left( -\frac{f(\alpha t - sx)}{\alpha} + c_4 - \int f_x(\alpha t - sx) dt \right) ds \right) + \nabla h(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Далее получим решения для специально взятой функции  $f(\alpha t - x)$ . Приведем иллюстрации изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально–изотропной среде замкнутых поверхностей в результате их деформации под действием найденных перемещений и температуры. Укажем их физический смысл.

**3.4.1.1.** Предположим, что функция  $f(\alpha t - x)$ , входящая в решение (3.14), имеет вид:

$$f(\alpha t - x) = k(\alpha t - x) + l \quad (kl \neq 0).$$

В этом случае из (3.14) следует:

$$\begin{aligned}
u^1(\xi) &= \frac{1}{2}\alpha kt^2 - kxt + (l + c_6)t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \quad u^2(\xi) = c_8t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\
u^3(\xi) &= c_{10}t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \quad \theta(\xi) = \frac{k(\alpha t - x) + l}{\alpha} + c_5, \\
q(\xi) &= -\frac{k(\alpha t - x) + l}{\alpha} + c_4, \quad \omega^1(\xi) = c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

где  $c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 11$ ) – произвольные постоянные, а  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.16), имеют вид:

$$\begin{aligned}
A^1(\mathbf{x}) &= \frac{3kx^2}{10\alpha} + \frac{k(y^2 + z^2)}{6\alpha} + \frac{(c_4\alpha - l)x}{3\alpha} + \frac{c_2z}{2} - \frac{c_3y}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^2(\mathbf{x}) &= \frac{c_3x}{2} + \frac{2kxy}{15\alpha} + \frac{(c_4\alpha - l)y}{3\alpha} - \frac{c_1z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^3(\mathbf{x}) &= -\frac{c_2x}{2} + \frac{2kxz}{15\alpha} + \frac{c_1y}{2} + \frac{(c_4\alpha - l)z}{3\alpha} + \nabla h(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

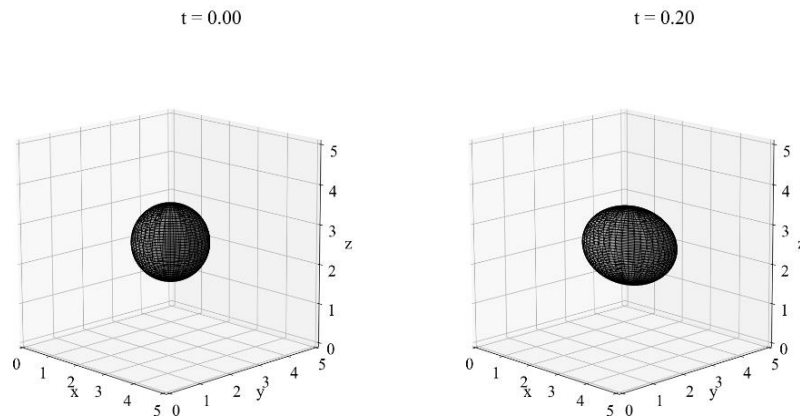
Для графического представления решения (3.17) здесь и далее, предположим, что  $\nabla h(\mathbf{x}) = 0$  и построим изменение с ростом времени  $t > 0$  деформируемой вектором перемещений и температурой сферы  $\Gamma_1$ , заданную уравнением:

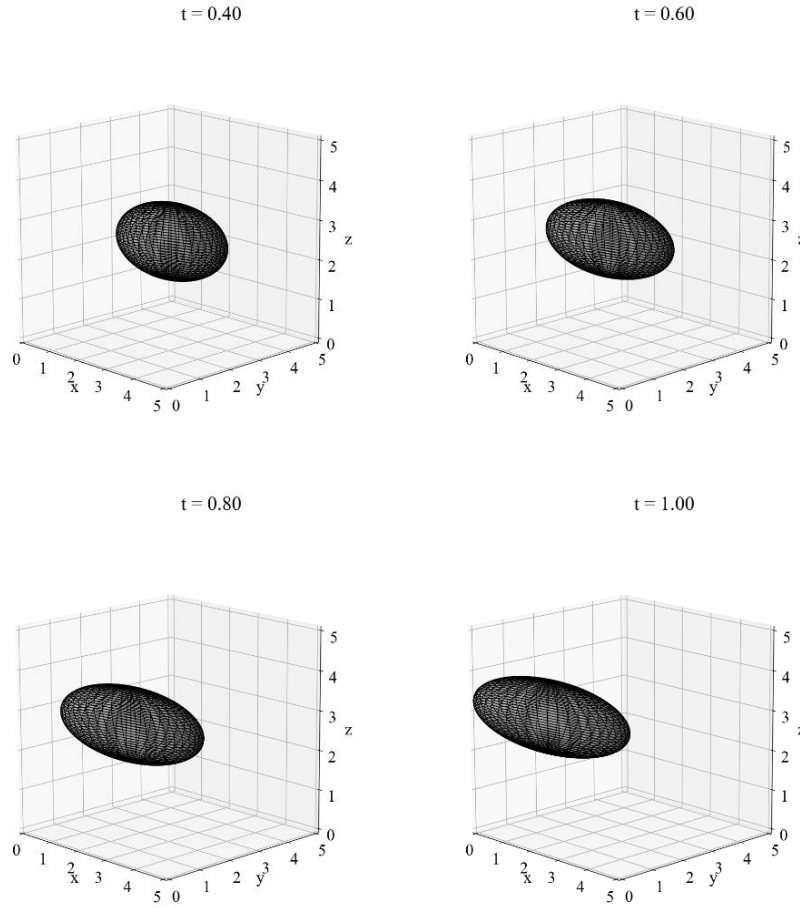
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1. \tag{3.18}$$

Здесь  $(x_0, y_0, z_0)$  – центр сферы единичного радиуса, который в каждом случае выбирается так, чтобы данная поверхность находилась внутри деформируемой среды.

Пусть  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 4, 6, 7, 9, 10, 11$ ),  $c_8 = -2$ ,  $\alpha = 5$ ,  $k = 2$ ,  $l = 1$ .

Рисунок 3.1 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(1, 4, 2)$ .



Рисунок 3.1. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит смещение и растяжение сферы вдоль оси  $Ox$ .

**3.4.1.2.** Предположим, что функция  $f(\alpha t - x)$ , входящая в решение (3.14) имеет вид:

$$f(\alpha t - x) = k(\alpha t - x)^2 + l(\alpha t - x) + r \quad (klr \neq 0).$$

В этом случае из (3.14) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \frac{\alpha^2 k}{3} t^3 + \frac{\alpha}{2} (l - 2kx) t^2 + (kx^2 - lx + r + c_6) t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \quad u^3(\xi) = c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\ \theta(\xi) &= \frac{k(\alpha t - x)^2 + l(\alpha t - x) + r}{\alpha} + c_5, \quad q(\xi) = -\frac{k(\alpha t - x)^2 + l(\alpha t - x) + r}{\alpha} + c_4, \\ \omega^1(\xi) &= c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.16), имеют вид:

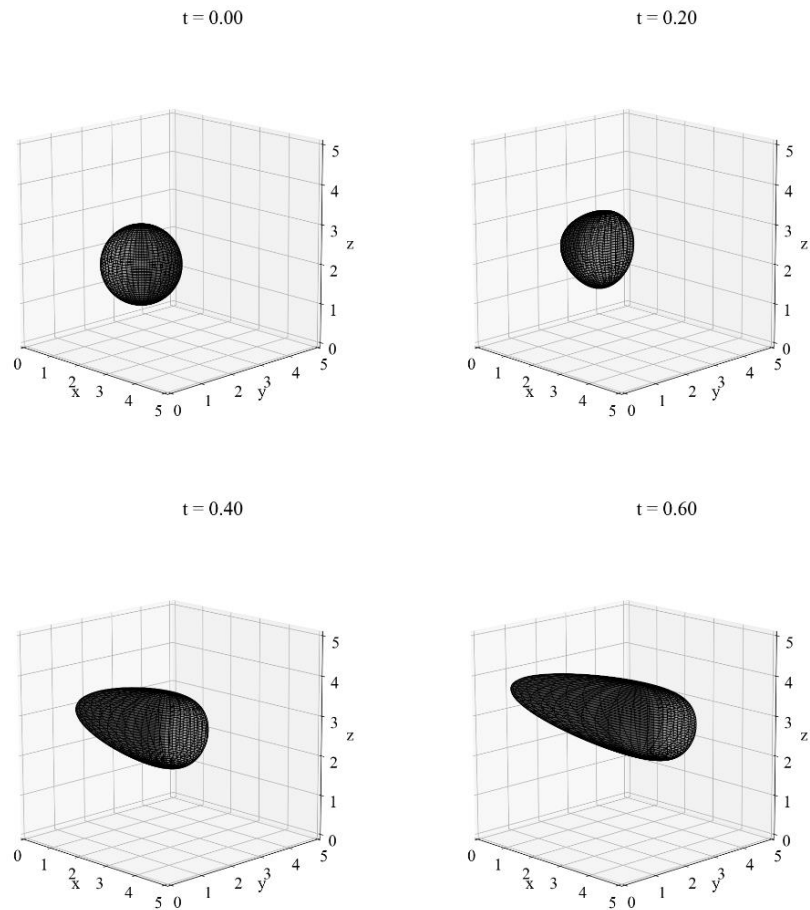
$$A^1(\mathbf{x}) = -\frac{43kx^3}{210\alpha} + \frac{3lx^2}{10\alpha} + \frac{(5l - 4kx)(y^2 + z^2)}{30\alpha} + \frac{(c_4\alpha - r)x}{3\alpha} - \frac{c_3y}{2} + \frac{c_2z}{2} + \nabla h(\mathbf{x});$$

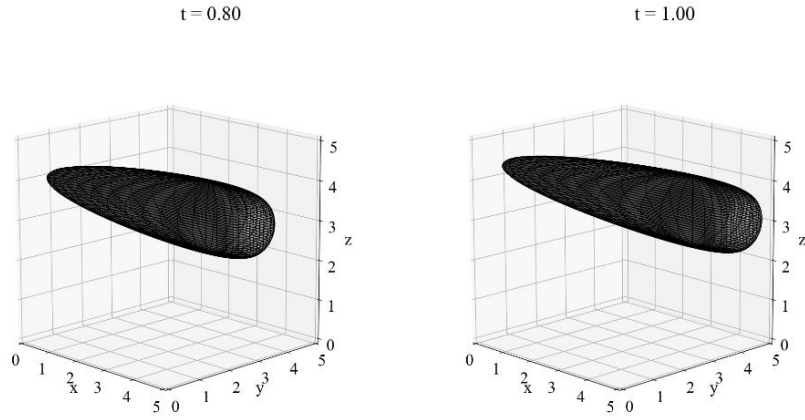
$$A^2(\mathbf{x}) = -\frac{kx^2y}{14\alpha} + \frac{2lxy}{15\alpha} + \frac{c_3x}{2} + \frac{(c_4\alpha - r)y}{3\alpha} - \frac{c_1z}{2} + \nabla h(\mathbf{x});$$

$$A^3(\mathbf{x}) = -\frac{kx^2z}{14\alpha} + \frac{2lxz}{15\alpha} - \frac{c_2x}{2} + \frac{c_1y}{2} + \frac{(c_4\alpha - r)z}{3\alpha} + \nabla h(\mathbf{x}).$$

Решение системы (3.19), при значениях параметров  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 4, 6, 7, 9, 10, 11$ ),  $c_8 = -8$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k = 3$ ,  $l = 3$ ,  $r = 1$  представлено в виде деформируемой вектором перемещений и температурой замкнутой поверхности  $\Gamma_1$  с центром в точке  $(2, 2, 2)$  с течением времени  $t$ .

Рисунок 3.2 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(2, 2, 2)$ .



Рисунок 3.2. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит смещение сферы и вытягивание левой ее части вдоль оси  $Ox$ .

**3.4.1.3.** Предположим, что функция  $f(\alpha t - x)$ , входящая в решение (3.14) имеет вид:

$$f(\alpha t - x) = k \ln(l(\alpha t - x)) \quad (kl \neq 0).$$

В этом случае из (3.14) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \frac{k(\alpha t - x)(\ln[l(\alpha t - x)] - 1)}{\alpha} + c_6 t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \quad u^3(\xi) = c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\ \theta(\xi) &= \frac{k \ln[l(\alpha t - x)]}{\alpha} + c_5, \quad q(\xi) = -\frac{k \ln[l(\alpha t - x)]}{\alpha} + c_4, \\ \omega^1(\xi) &= c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \quad (3.20)$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.16), имеют вид:

$$\begin{aligned} A^1(\mathbf{x}) &= \frac{3kl}{5\alpha} \ln(x) + \frac{kl}{3\alpha} \ln(yz) + \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \frac{c_4 x}{3} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^2(\mathbf{x}) &= \frac{2kl}{15\alpha} \ln(xy) + \frac{c_3 x}{2} + \frac{c_4 y}{3} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^3(\mathbf{x}) &= \frac{2kl}{15\alpha} \ln(xz) - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{c_4 z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Графическое решение системы (3.20), представлено динамикой изменения деформированной вектором перемещений и температурой сферы  $\Gamma_1$ , при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $\alpha = 2$ ,  $k = 1$ ,  $l = -1$ .

Рисунок 3.3 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 3, 3)$ .

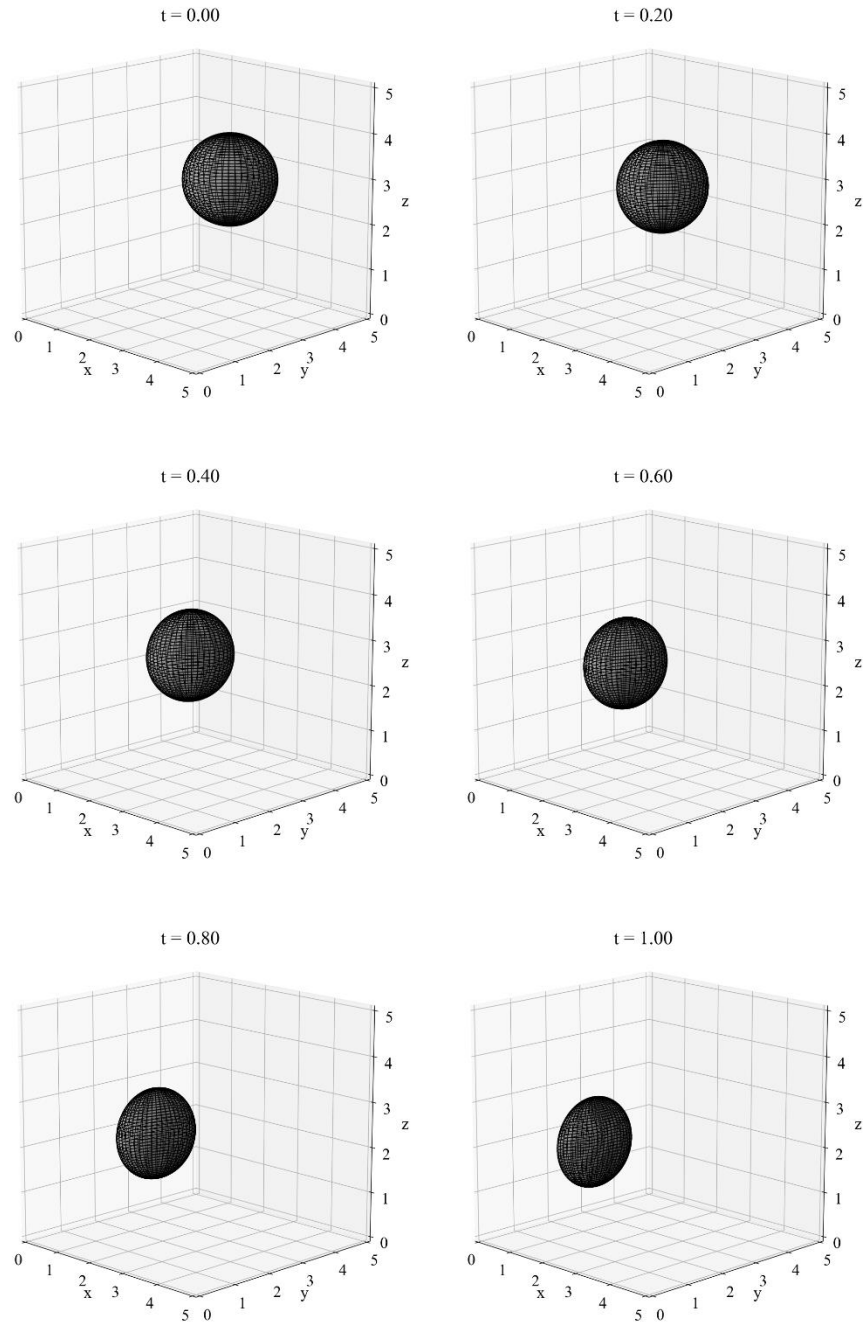


Рисунок 3.3. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит смещение и сжатие сферы вдоль оси  $Ox$ .

**3.4.1.4.** Предположим, что функция  $f(\alpha t - x)$ , входящая в (3.14) имеет вид:

$$f(\alpha t - x) = (\alpha t - x) \exp(k(\alpha t - x)) \quad (k \neq 0).$$

В этом случае из (3.14) следует:

$$\begin{aligned}
u^1(\xi) &= \frac{(\alpha kt - kx - 1)\exp(k(\alpha t - x))}{\alpha k^2} + c_6 t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\
u^2(\xi) &= c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \quad u^3(\xi) = c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\
\theta(\xi) &= \frac{(\alpha t - x)\exp(k(\alpha t - x))}{\alpha} + c_5, \quad q(\xi) = -\frac{(\alpha t - x)\exp(k(\alpha t - x))}{\alpha} + c_4, \\
\omega^1(\xi) &= c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.16), имеют вид:

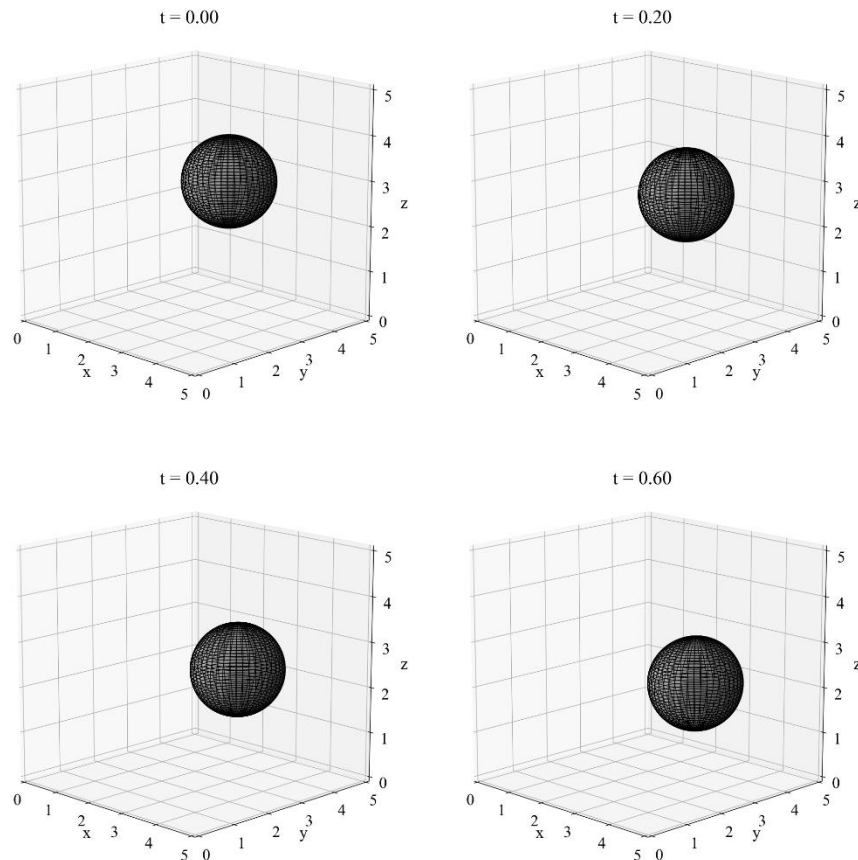
$$A^1(\mathbf{x}) = \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \frac{c_4 x}{3} + \nabla h(\mathbf{x});$$

$$A^2(\mathbf{x}) = \frac{c_3 x}{2} - \frac{c_1 z}{2} + \frac{c_4 y}{3} + \nabla h(\mathbf{x});$$

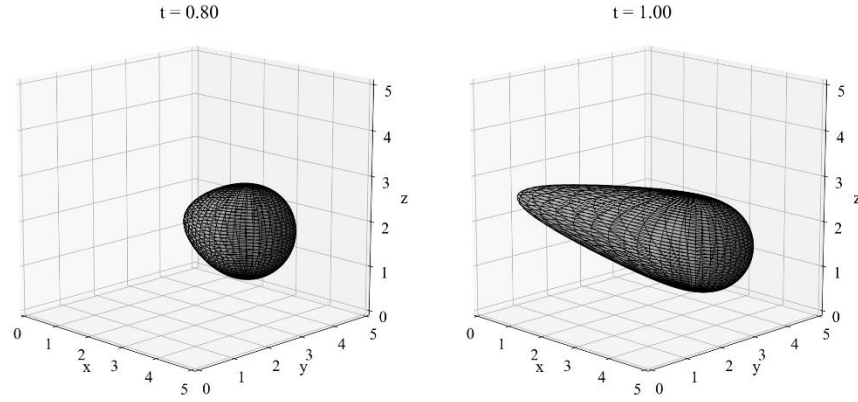
$$A^3(\mathbf{x}) = \frac{c_1 y}{2} - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_4 z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}).$$

Решение системы (3.21) представим в динамике изменением деформированной вектором перемещений сферы  $\Gamma_1$ , которая задана уравнением (3.18), при значениях  $c_i = 2$ , ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$ , ( $j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $\alpha = 4$ ,  $k = 1.5$ .

Рисунок 3.4 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 3, 3)$ .





Рисунок 3.4. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит смещение сферы вдоль оси  $Oz$  и вытягивание левой ее части вдоль оси  $Ox$ .

**3.4.2.** Инвариантная  $\tau_{3.5} \langle X_1 + \alpha X_3, X_2 + \beta X_3, X_4 \rangle$ -подмодель описывается инвариантным  $\tau_{3.5} \langle X_1 + \alpha X_3, X_2 + \beta X_3, X_4 \rangle$  решением. Из Таблицы 3.3 следует, что это решение системы (3.11) имеет вид:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{v} = \mathbf{f}(\xi), \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{g}(\xi), \quad \theta = \Theta(\xi), \quad q = E(\xi), \quad \xi = \alpha t + \beta x - y. \quad (3.22)$$

Это решение описывает бегущую волну в плоскости  $Oxy$ .

Подстановка (3.22) в (3.11) дает фактор систему:

$$\begin{aligned} \alpha f_\xi^1 - (\lambda + 2\mu)E_\xi - \mu g_\xi^3 &= 0, \quad \alpha f_\xi^2 + (\lambda + 2\mu)E_\xi - \beta \mu g_\xi^3 = 0, \quad \alpha f_\xi^3 + G'(g_\xi^1 + \beta g_\xi^2) = 0, \\ \alpha \Theta_\xi + \beta f_\xi^1 - f_\xi^2 &= 0, \quad \alpha g_\xi^1 + f_\xi^3 = 0, \quad \alpha g_\xi^2 + \beta f_\xi^3 = 0, \quad \alpha g_\xi^3 - f_\xi^1 - \beta f_\xi^2 = 0, \\ \alpha E_\xi - \beta f_\xi^1 + f_\xi^2 &= 0, \quad \beta g_\xi^1 - g_\xi^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Постоянные Ламе удовлетворяют соотношениям [14, 15, 19, 20, 38 42]:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad \mu > 0.$$

Система (3.23) и автоморфная система (3.9) имеет физический смысл только при  $\mu = \frac{\alpha^2}{2(\beta+1)} - \frac{\lambda}{2}$ ,  $0 < \mu < \frac{3\alpha^2}{4(\beta+1)}$ ,  $\beta > -1$ . Решаем систему (3.23), находим выражения для  $g^1(\xi)$ ,  $g^2(\xi)$ ,  $g^3(\xi)$ ,  $\theta(\xi)$ ,  $q(\xi)$ ,  $f^1(\xi)$ ,  $f^2(\xi)$ ,  $f^3(\xi)$ . Перемещение находится по формуле

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{v} dt + \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned}
f^1(\xi) &= f(\xi), u^1(\xi) = \int f(\xi) dt + c_6 t + A^1(\mathbf{x}), \\
u^2(\xi) &= -\int f(\xi) dt + c_8 t + A^2(\mathbf{x}), u^3(\xi) = c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\
\theta(\xi) &= -\frac{2}{\alpha} f(\xi) + c_5, q(\xi) = \frac{2}{\alpha} f(\xi) + c_4, \\
\omega^1(\xi) &= c_1, \omega^2(\xi) = c_2, \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

где  $f(\xi) = f(\alpha t + \beta x - y)$  – произвольная функция,  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11$ ) – произвольные постоянные, а вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$  удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \left( c_1, c_2, \frac{2\alpha(\beta-1)}{\alpha^2(\beta-2) - \beta\lambda(\beta+1)} f(\alpha t + \beta x - y) + c_3 \right), \\
\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\alpha^2(\beta-1)^2 - \lambda(\beta^3 + \beta^2 + \beta + 1)}{\alpha(\alpha^2(\beta-2) - \beta\lambda(\beta+1))} f(\alpha t + \beta x - y) + c_4 + \\
& - \int f_x(\alpha t + \beta x - y) dt - \frac{\alpha^2 + \lambda(\beta+1)}{\alpha^2(\beta-2) - \beta\lambda(\beta+1)} \int f_y(\alpha t + \beta x - y) dt.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Пусть  $f(\alpha t + \beta x - y) \neq \text{const}$ , тогда из (3.25) следует, что  $\beta = 1$ . Поэтому

$\mu = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\lambda}{2}$ ,  $0 < \mu < \frac{3\alpha^2}{8}$  и система (3.24) примет вид:

$$\begin{aligned}
u^1(\xi) &= \int f(\alpha t + x - y) dt + c_6 t + A^1(\mathbf{x}), u^2(\xi) = -\int f(\alpha t + x - y) dt + c_8 t + A^2(\mathbf{x}), \\
u^3(\xi) &= c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \theta(\xi) = -\frac{2}{\alpha} f(\alpha t + x - y) + c_5, \\
q(\xi) &= \frac{2}{\alpha} f(\alpha t + x - y) + c_4, \omega^1(\xi) = c_1, \omega^2(\xi) = c_2, \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

где общее решение вектора  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$ , определяемого из системы (3.25), имеет вид [18, 53, 62]:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 s \left( (c_1, c_2, c_3) \times \mathbf{x} \right) ds + \nabla h(\mathbf{x}) + \\
& - \nabla \left( |\mathbf{x}|^2 \int_0^1 (s - \sqrt{s}) \left( \frac{2}{\alpha} f(\alpha t + sx - sy) + c_4 - \int f_x(\alpha t + sx - sy) dt + \int f_y(\alpha t + sx - sy) dt \right) ds \right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Получим решения для специально взятой функции  $f(\alpha t + x - y)$ . Приведем иллюстрации изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально–изотропной среде замкнутых поверхностей в результате их деформации под действием найденных перемещений и температуры. Укажем их физический смысл.

**3.4.2.1.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + x - y)$ , входящая в решение (3.26), имеет вид:

$$f(\alpha t + x - y) = k(\alpha t + x - y) + l \quad (kl \neq 0).$$

В этом случае из (3.26) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= k\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + xt - yt\right) + (l + c_6)t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= -k\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + xt - yt\right) + (c_8 - l)t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\ u^3(\xi) &= c_{10}t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \quad \theta(\xi) = -\frac{2(k(\alpha t + x - y) + l)}{\alpha} + c_5, \\ q(\xi) &= \frac{2(k(\alpha t + x - y) + l)}{\alpha} + c_4, \quad \omega^1(\xi) = c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.27), имеют вид:

$$\begin{aligned} A^1(\mathbf{x}) &= \frac{3kx^2}{5\alpha} + \frac{k(y^2 + z^2)}{3\alpha} + \frac{(10l - 4ky)x}{15\alpha} + \frac{c_4x}{3} - \frac{c_3y}{2} + \frac{c_2z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^2(\mathbf{x}) &= -\frac{3ky^2}{5\alpha} - \frac{k(x^2 + z^2)}{3\alpha} + \frac{(10l + 4kx)y}{15\alpha} + \frac{c_3x}{2} + \frac{c_4y}{3} - \frac{c_1z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^3(\mathbf{x}) &= \frac{(4k(x - y) + 10l)z}{15\alpha} - \frac{c_2x}{2} + \frac{c_1y}{2} + \frac{c_4z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Для графического представления решения (3.28) при значениях  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_4 = 3$ ,  $\alpha = 2$ ,  $k = 3$ ,  $l = 1$ , построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух, деформируемых вектором перемещений и температурой, замкнутых поверхностей:  $\Gamma_1$  - сферу, заданную уравнением (3.18), и  $\Gamma_2$  - куб с центром симметрии в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  с ребром, равным 2, заданный системой параметрических уравнений:

$$\begin{aligned} x &= |t_1| - |t_1 - 1| - |t_1 - 2| + |t_1 - 3| + x_0, \quad y = 1 + |v| - |v - 1| + y_0, \\ z &= 2 - \frac{1}{2} \left( |t_1 - 1| - |t_1 - 2| - |t_1 - 3| + |t_1 - 4| + |t_2 - 1| - |t_2 - 2| + |t_2| - |t_2 + 1| \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( |t_1 - 1| - |t_1 - 2| - |t_1 - 3| + |t_1 - 4| + |t_2 - 1| - |t_2 - 2| + |t_2| - |t_2 + 1| \right) + z_0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где  $t_1, t_2$  - параметры куба. В каждом конкретном случае точка  $(x_0, y_0, z_0)$  выбирается так, чтобы данная поверхность находилась внутри деформируемой среды.

Рисунок 3.5 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(2, 2, 2)$ .

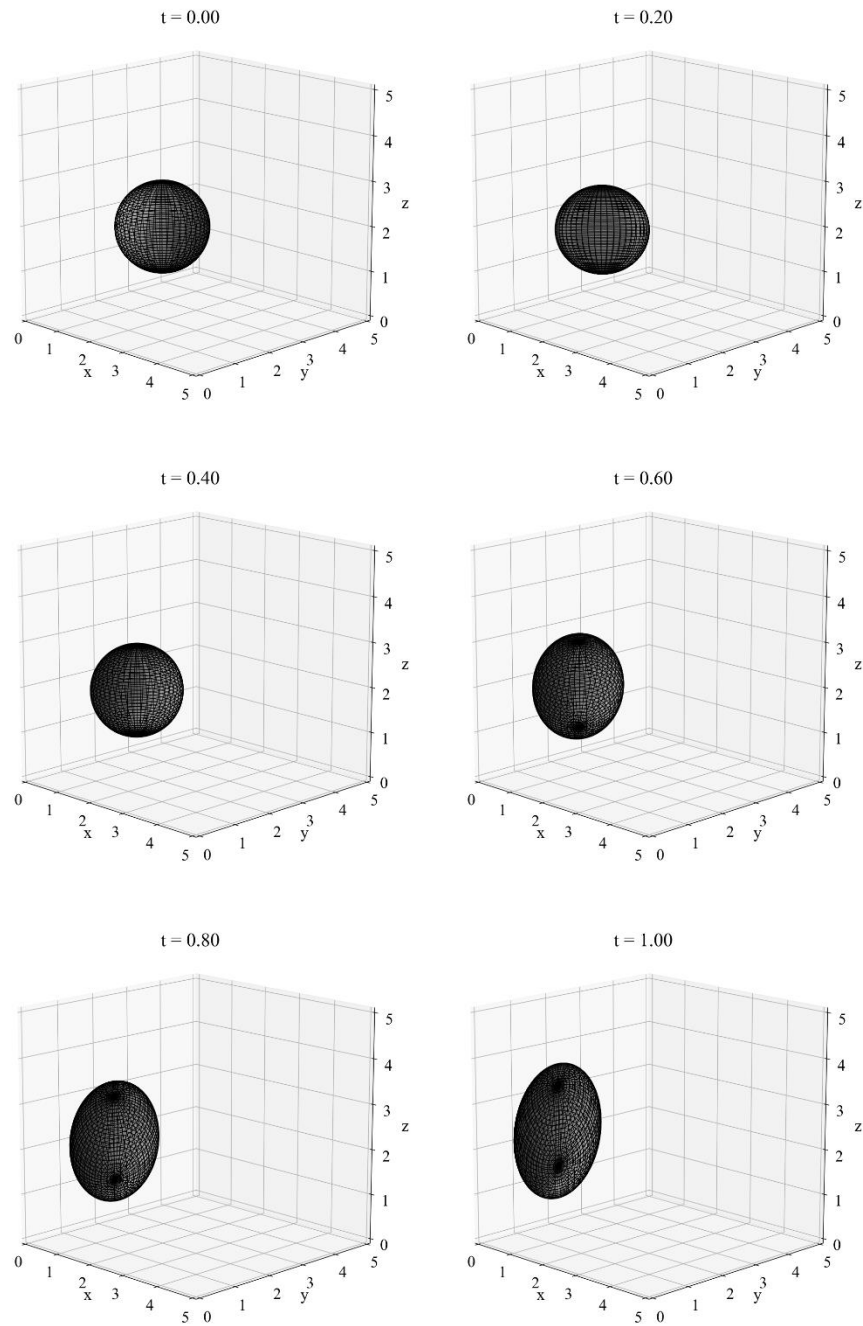


Рисунок 3.5. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит смещение сферы вдоль оси  $Oy$  и ее равномерное вытягивание вдоль оси  $Oz$ .

Рисунок 3.6 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(2, 2, 2)$ .

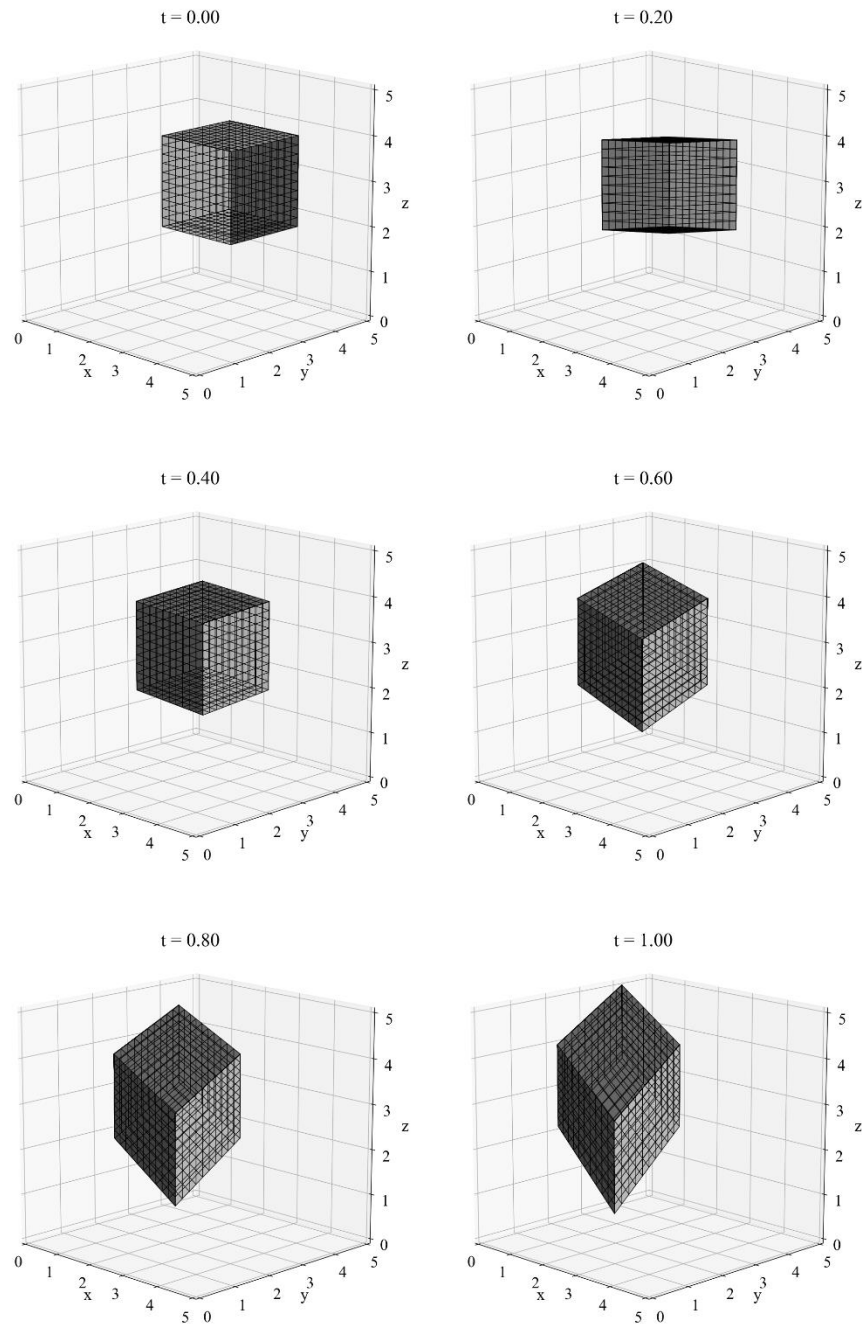


Рисунок 3.6. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$ .

Со временем происходит смещение куба, его вытягивание и поворот вдоль оси  $Oz$ .

**3.4.2.2.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + x - y)$ , входящая в решение (3.26) имеет вид:

$$f(\alpha t + x - y) = k(\alpha t + x - y)^2 + l(\alpha t + x - y) + r \quad (klr \neq 0).$$

В этом случае из (3.26) следует:

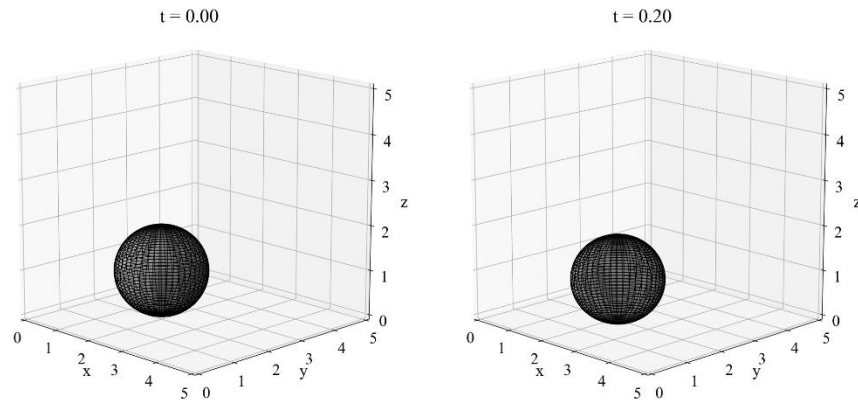
$$\begin{aligned}
u^1(\xi) &= \frac{k(\alpha t + x - y)^3}{3\alpha} + l\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + xt - yt\right) + (r + c_6)t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\
u^2(\xi) &= -\frac{k(\alpha t + x - y)^3}{3\alpha} - l\left(\frac{\alpha}{2}t^2 + xt - yt\right) + (c_8 - r)t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\
u^3(\xi) &= c_{10}t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \quad \theta(\xi) = -\frac{2(k(\alpha t + x - y)^2 + l(\alpha t + x - y) + r)}{\alpha} + c_5, \\
q(\xi) &= \frac{2(k(\alpha t + x - y)^2 + l(\alpha t + x - y) + r)}{\alpha} + c_4, \quad \omega^1(\xi) = c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.30}$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.28), имеют вид:

$$\begin{aligned}
A^1(\mathbf{x}) &= \frac{3lx^2}{5\alpha} + \frac{l(y^2 + z^2)}{3\alpha} + \frac{(10r - 4ly)x}{15\alpha} + \frac{c_4x}{3} - \frac{c_3y}{2} + \frac{c_2z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^2(\mathbf{x}) &= -\frac{3ly^2}{5\alpha} - \frac{l(x^2 + z^2)}{3\alpha} + \frac{(10r + 4lx)y}{15\alpha} + \frac{c_3x}{2} + \frac{c_4y}{3} - \frac{c_1z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^3(\mathbf{x}) &= \frac{(4l(x - y) + 10r)z}{15\alpha} - \frac{c_2x}{2} + \frac{c_1y}{2} + \frac{c_4z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Для графического представления решения (3.30) при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 5, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_4 = -3$ ,  $c_6 = -1.5$ ,  $\alpha = 2$ ,  $k = 3$ ,  $l = 1$ ,  $r = 1$ , построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух деформируемых вектором перемещений и температурой замкнутых поверхностей  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Рисунок 3.7 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(2, 2, 1)$ .



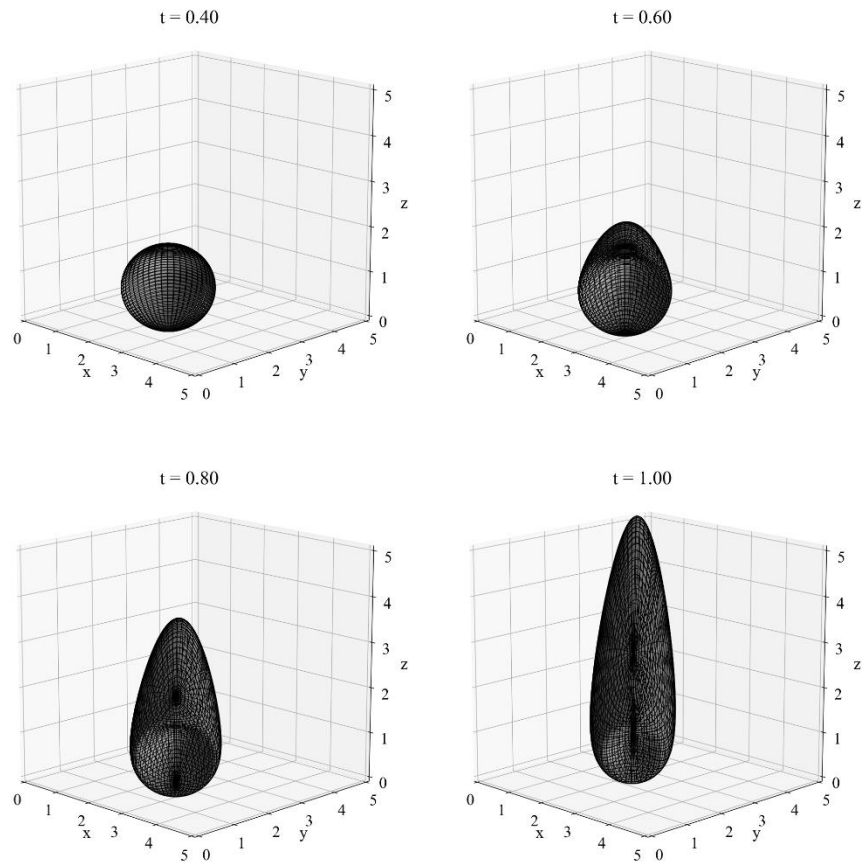
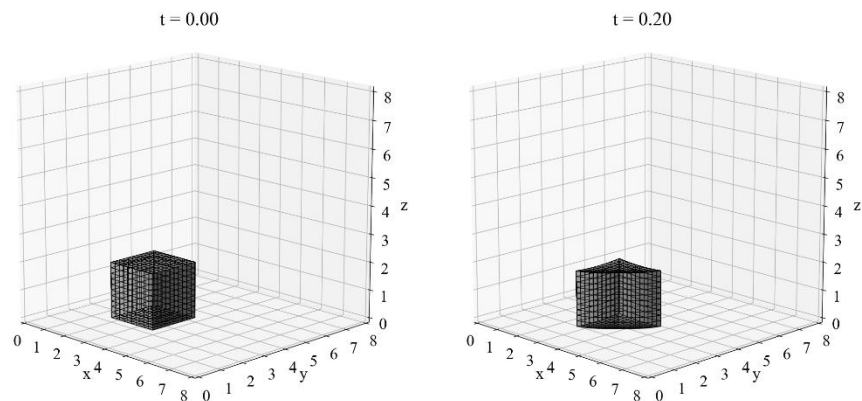
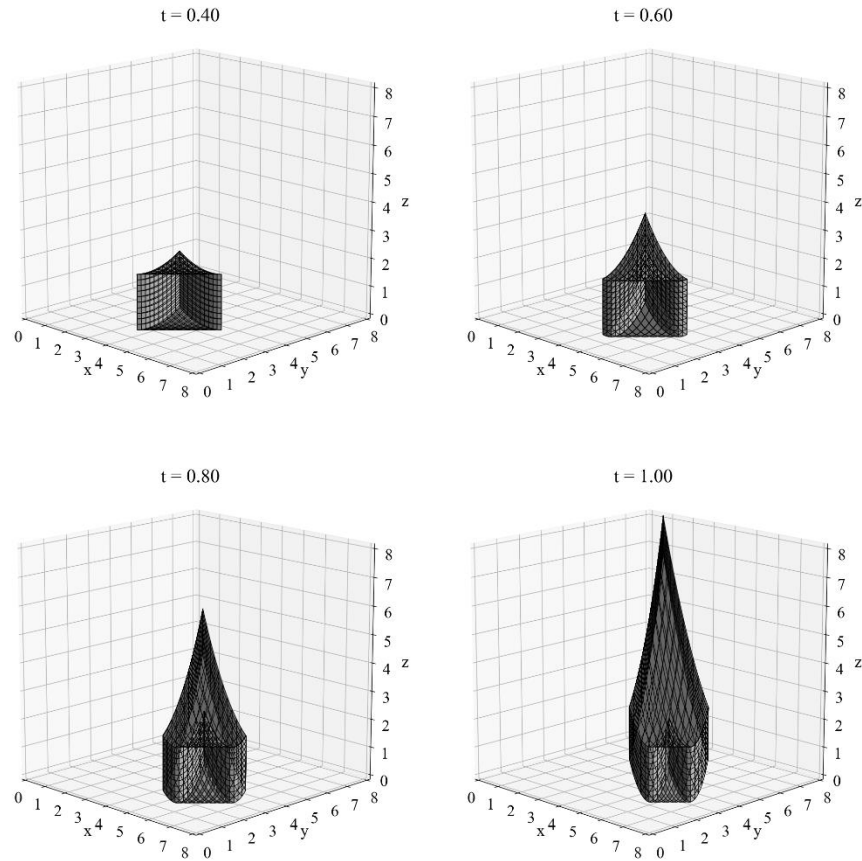


Рисунок 3.7. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит сильная деформация, вытягивание и загиб сферы с двух сторон вдоль оси  $Oz$  (принимает форму рога).

Рисунок 3.8 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(2, 2, 0)$ .



Рисунок 3.8. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$ .

Со временем происходит смещение куба вдоль оси  $Ox$ , его сильная деформация, вытягивание и загиб с двух сторон вдоль оси  $Oz$  (принимает форму прямоугольного рога).

**3.4.2.3.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + x - y)$ , входящая в решение (3.26) имеет вид:

$$f(\alpha t + x - y) = k \ln(l(\alpha t + x - y)) \quad (kl \neq 0).$$

В этом случае из (3.26) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \frac{k(\alpha t + x - y)}{\alpha} (\ln(l(\alpha t + x - y)) - 1) + c_6 t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= \frac{k(\alpha t + x - y)}{\alpha} (1 - \ln(l(\alpha t + x - y))) + c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\ u^3(\xi) &= c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \quad \theta(\xi) = -\frac{2k \ln(l(\alpha t + x - y))}{\alpha} + c_5, \\ q(\xi) &= \frac{2k \ln(l(\alpha t + x - y))}{\alpha} + c_4, \quad \omega^1(\xi) = c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \tag{3.31}$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.27), имеют вид:



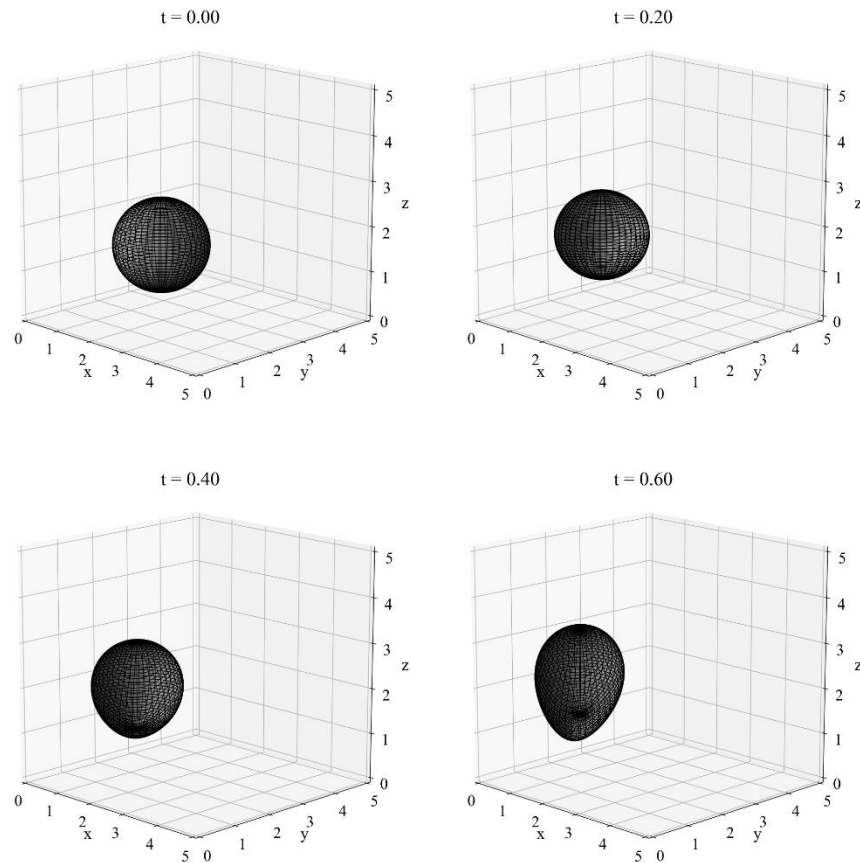
$$A^1(\mathbf{x}) = \frac{c_4 x}{3} - \frac{c_3 y}{2} + \frac{c_2 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x});$$

$$A^2(\mathbf{x}) = \frac{c_3 x}{2} + \frac{c_4 y}{3} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x});$$

$$A^3(\mathbf{x}) = -\frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{c_4 z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}).$$

Для графического представления решения (3.31) при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_4 = 3$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k = 7$ ,  $l = 1$ , построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух, деформируемых вектором перемещений и температурой, замкнутых поверхностей  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Рисунок 3.9 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 1, 2)$ .



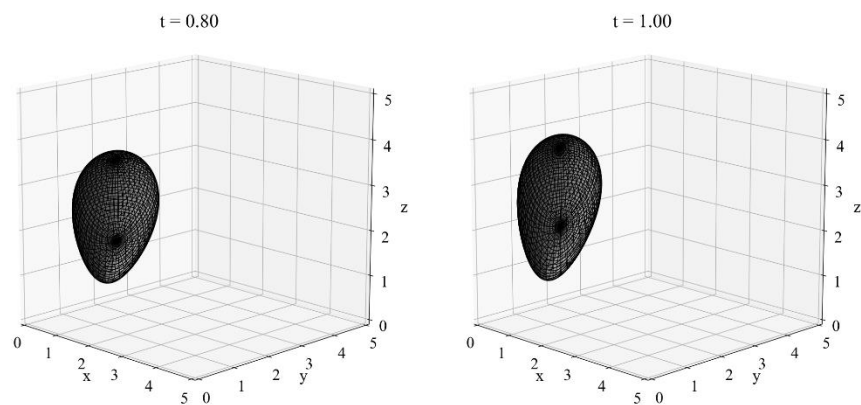
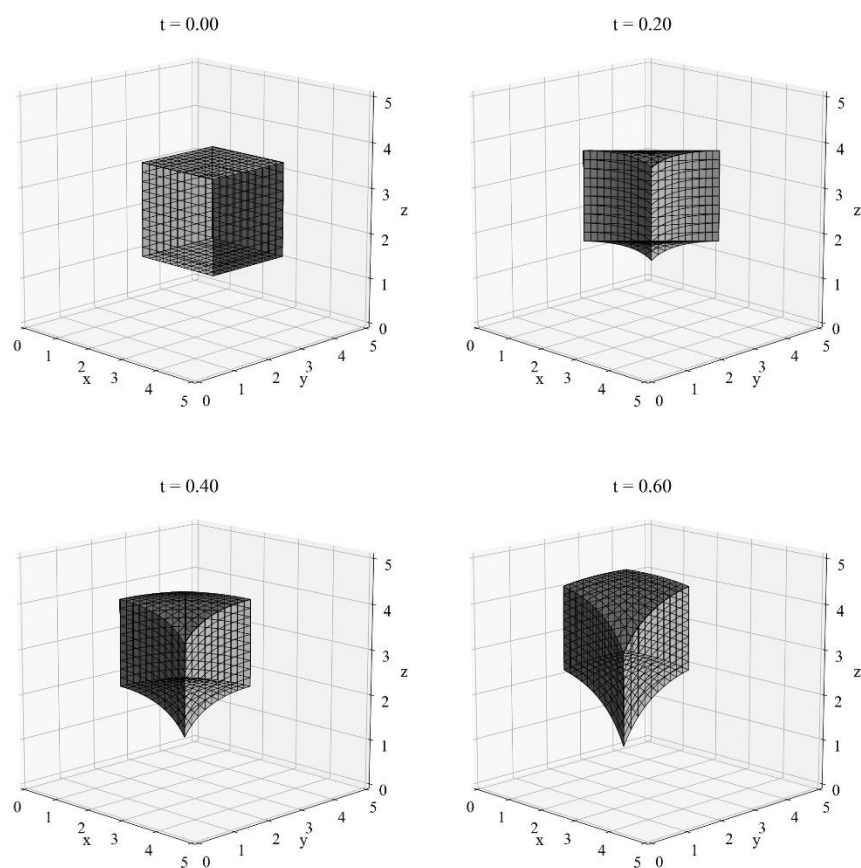


Рисунок 3.9. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит незначительное перемещение сферы и ее вытягивание вдоль оси  $Oz$ .

Рисунок 3.10 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(3, 0.5, 2)$ .



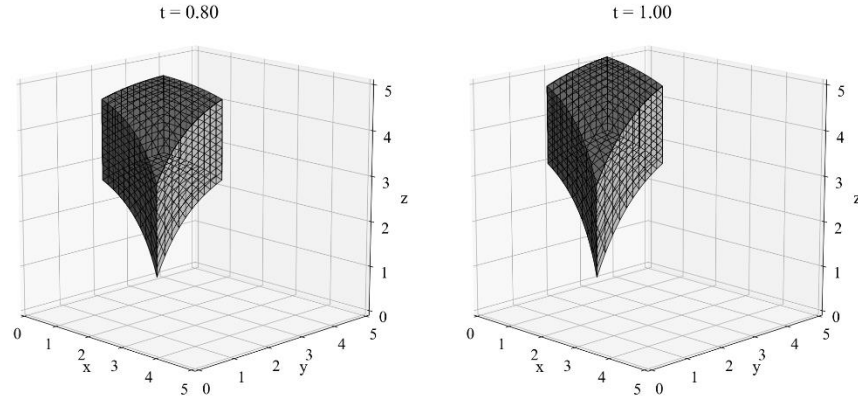


Рисунок 3.10. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$ .

Со временем происходит смещение и вытягивание куба вдоль оси  $Oz$ , наиболее существенное для одного из его углов.

**3.4.2.4.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + x - y)$ , входящая в решение (3.26) имеет вид:

$$f(\alpha t + x - y) = \exp(k(\alpha t + x - y)) \quad (k \neq 0).$$

В этом случае из (3.26) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \frac{\exp(k(\alpha t + x - y))}{\alpha k} + c_6 t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= -\frac{\exp(k(\alpha t + x - y))}{\alpha k} + c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\ u^3(\xi) &= c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \quad \theta(\xi) = -\frac{2 \exp(k(\alpha t + x - y))}{\alpha} + c_5, \\ q(\xi) &= \frac{2 \exp(k(\alpha t + x - y))}{\alpha} + c_4, \quad \omega^1(\xi) = c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \quad (3.32)$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.27), имеют вид:

$$\begin{aligned} A^1(\mathbf{x}) &= \frac{c_4 x}{3} - \frac{c_3 y}{2} + \frac{c_2 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^2(\mathbf{x}) &= \frac{c_3 x}{2} + \frac{c_4 y}{3} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^3(\mathbf{x}) &= -\frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{c_4 z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Для графического представления решения (3.32) при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 5, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_4 = 3$ ,  $c_6 = -1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $k = 1$  построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух, деформируемых вектором перемещений и температурой, замкнутых поверхностей  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Рисунок 3.11 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 2, 1)$ .

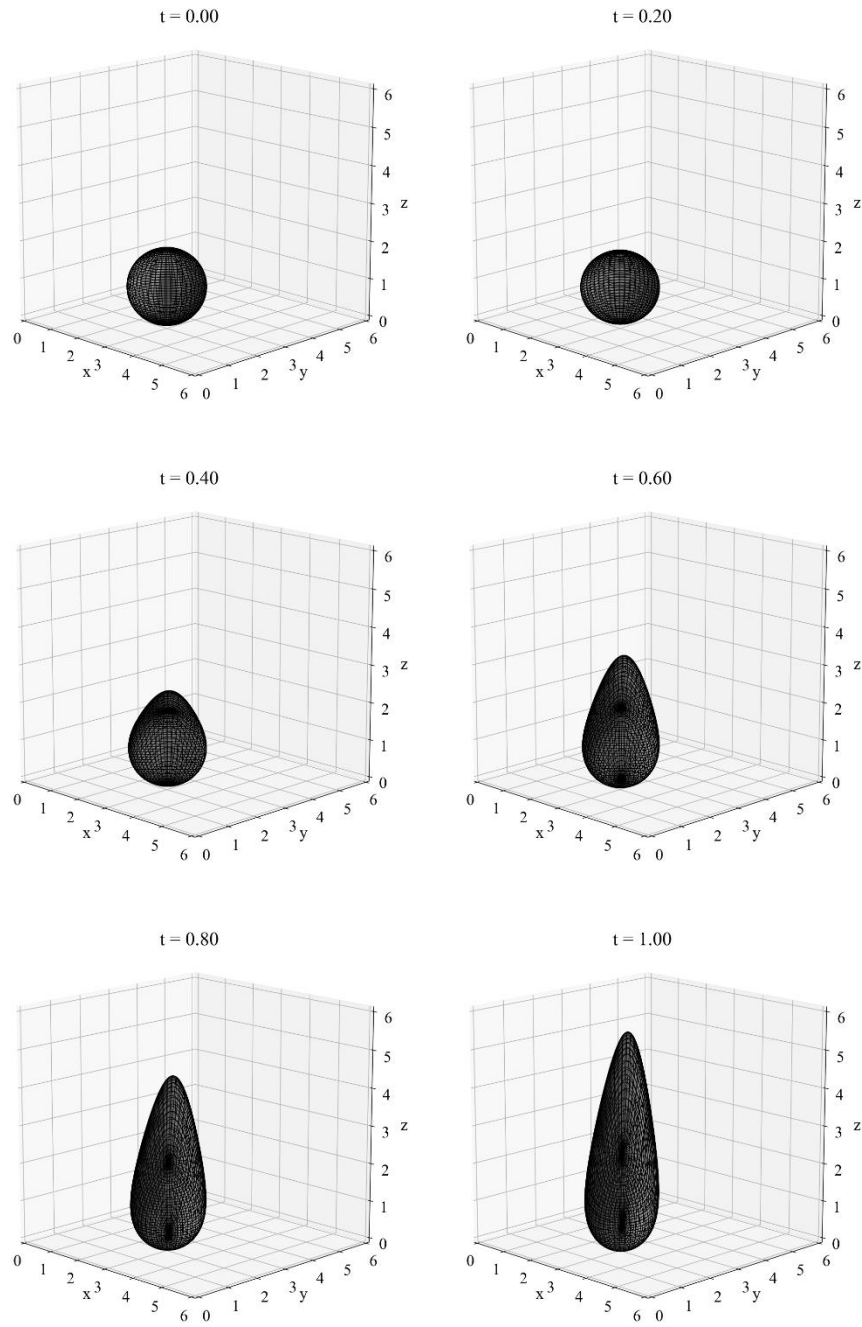


Рисунок 3.11. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит загиб сферы и ее вытягивание вдоль оси  $Oz$ .

Рисунок 3.12 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(2.5, 2, 0.5)$ .

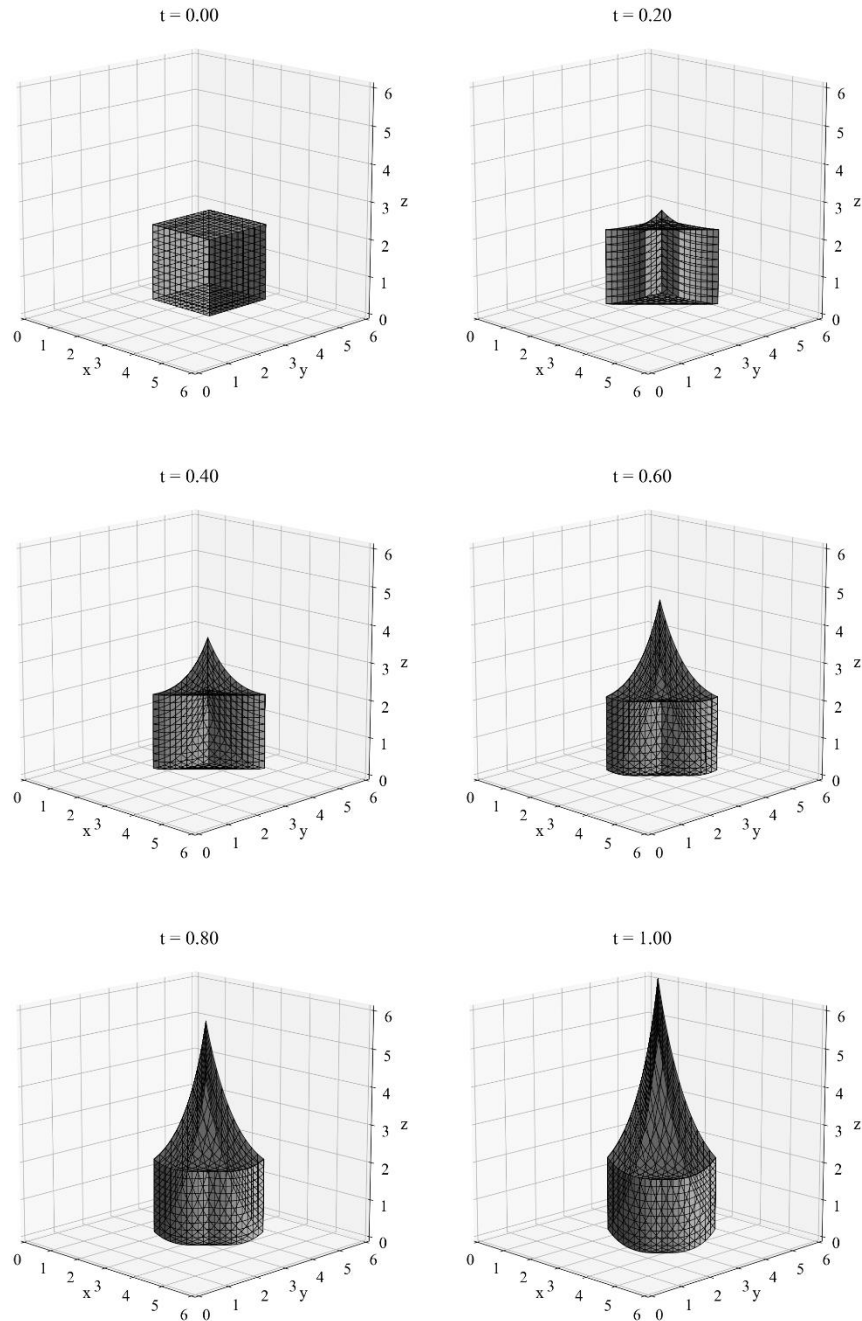


Рисунок 3.12. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$ .

Со временем происходит перегиб куба и его вытягивание вдоль оси  $Oz$ .

**3.4.3.** Инвариантная  $\tau_{3,6} \langle X_1 + \alpha X_4, X_2 + \beta X_4, X_3 + \gamma X_4 \rangle$  – подмодель описывается инвариантным  $\tau_{3,6} \langle X_1 + \alpha X_4, X_2 + \beta X_4, X_3 + \gamma X_4 \rangle$  решением. Из Таблицы 3.3 следует, что это решение системы (3.11) имеет вид:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{v} = \mathbf{f}(\xi), \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{g}(\xi), \quad \theta = \Theta(\xi), \quad q = E(\xi), \quad \xi = \alpha t + \beta x + \gamma y - z. \quad (3.33)$$

Это решение описывает бегущую волну в пространстве  $Oxyz$ .

Подстановка (3.33) в (3.11) дает фактор систему:

$$\begin{aligned}
\alpha f_{\xi}^1 - \beta(\lambda + 2\mu)E_{\xi} + G'g_{\xi}^2 + \gamma\mu g_{\xi}^3 &= 0, \quad \alpha f_{\xi}^2 - \gamma(\lambda + 2\mu)E_{\xi} - G'g_{\xi}^1 - \beta\mu g_{\xi}^3 = 0, \\
\alpha f_{\xi}^3 + (\lambda + 2\mu)E_{\xi} - G'(\gamma g_{\xi}^1 - \beta g_{\xi}^2) &= 0, \quad \alpha\Theta_{\xi} + \beta f_{\xi}^1 + \gamma f_{\xi}^2 - f_{\xi}^3 = 0, \\
\alpha g_{\xi}^1 - f_{\xi}^2 - \gamma f_{\xi}^3 &= 0, \quad \alpha g_{\xi}^2 + f_{\xi}^1 + \beta f_{\xi}^3 = 0, \quad \alpha g_{\xi}^3 + \gamma f_{\xi}^1 - \beta f_{\xi}^2 = 0, \\
\alpha E_{\xi} - \beta f_{\xi}^1 - \gamma f_{\xi}^2 + f_{\xi}^3 &= 0, \quad \beta g_{\xi}^1 + \gamma g_{\xi}^2 - g_{\xi}^3 = 0.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Постоянные Ламе удовлетворяют соотношениям [14, 15, 19, 20, 38 42]:

$$\lambda + \frac{2}{3}\mu > 0, \quad \mu > 0.$$

Система (3.34) и автоморфная система (3.8) имеет физический смысл только при  $G' = \mu$ ,  $\lambda = \frac{-2\beta^2\mu - 2\gamma^2\mu - 2\mu + \alpha^2}{\beta^2 + \gamma^2 + 1}$ ,  $0 < \mu < \frac{3\alpha^2}{4(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}$ . Решаем систему (3.34) находим выражения для  $g^1(\xi)$ ,  $g^2(\xi)$ ,  $g^3(\xi)$ ,  $\theta(\xi)$ ,  $q(\xi)$ ,  $f^1(\xi)$ ,  $f^2(\xi)$ ,  $f^3(\xi)$ . Перемещение находится по формуле:

$$\mathbf{u} = \int \mathbf{v} dt + \mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$ . В результате получаем:

$$\begin{aligned}
f^1(\xi) &= f(\xi), \quad u^1(\xi) = \int f(\xi) dt + c_6 t + A^1(\mathbf{x}), \\
u^2(\xi) &= \frac{\gamma}{\beta} \int f(\xi) dt + c_8 t + A^2(\mathbf{x}), \quad u^3(\xi) = -\frac{1}{\beta} \int f(\xi) dt + c_{10} t + A^3(\mathbf{x}), \\
\theta(\xi) &= -\frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta} f(\xi) + c_5, \quad q(\xi) = \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta} f(\xi) + c_4, \\
\omega^1(t, \mathbf{x}) &= c_1, \quad \omega^2(t, \mathbf{x}) = c_2, \quad \omega^3(t, \mathbf{x}) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.35}$$

где  $f(\xi) = f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)$  - произвольная функция,  $c_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$ ) - произвольные постоянные, а вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (A^1(\mathbf{x}), A^2(\mathbf{x}), A^3(\mathbf{x}))$  удовлетворяет системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= (c_1, c_2, c_3), \\
\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta} f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) + c_4 + \\
& - \int f_x(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) dt - \frac{\gamma}{\beta} \int f_y(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) dt + \frac{1}{\beta} \int f_z(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) dt.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Получим решения для специально взятой функции  $f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)$ . Приведем иллюстрации изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально-изотропной упругой среде замкнутых поверхностей в результате их деформации под действием найденных перемещений и температуры. Укажем их физический смысл.

**3.4.3.1.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)$ , входящая в (3.35) имеет вид:

$$f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) = \alpha t + \beta x + \gamma y - z + l, \quad (l \neq 0).$$

В этом случае из (3.35) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \frac{1}{2}(\alpha t^2 + 2\beta xt + 2\gamma ty - 2tz) + (l + c_6)t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= \frac{\gamma}{2\beta}(\alpha t^2 + 2\beta xt + 2\gamma ty - 2tz) + \frac{\gamma lt}{\beta} + c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\ u^3(\xi) &= -\frac{1}{2\beta}(\alpha t^2 + 2\beta xt + 2\gamma ty - 2tz) - \frac{lt}{\beta} + c_{10}t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\ \theta(\xi) &= -\frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z + l) + c_5, \\ q(\xi) &= \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z + l) + c_4, \quad \omega^1(\xi) = c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.36), имеют вид [18, 53, 62]:

$$\begin{aligned} A^1(\mathbf{x}) &= \frac{3(\beta^2 + \gamma^2 + 1)x^2}{10\alpha} + \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)(y^2 + z^2)}{6\alpha} + \frac{2(\beta^2 + \gamma^2 + 1)(\gamma y - z)x}{15\alpha\beta} + \\ &+ \frac{((\beta^2 + \gamma^2 + 1)l + c_4\alpha\beta)x}{3\alpha\beta} + \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^2(\mathbf{x}) &= \frac{3\gamma(\beta^2 + \gamma^2 + 1)y^2}{10\alpha\beta} + \frac{\gamma(\beta^2 + \gamma^2 + 1)(x^2 + z^2)}{6\alpha} + \frac{2(\beta^2 + \gamma^2 + 1)(\beta x - z)y}{15\alpha\beta} + \\ &+ \frac{((\beta^2 + \gamma^2 + 1)l + c_4\alpha\beta)y}{3\alpha\beta} + \frac{c_3 x}{2} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\ A^3(\mathbf{x}) &= -\frac{3(\beta^2 + \gamma^2 + 1)z^2}{10\alpha\beta} - \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)(x^2 + y^2)}{6\alpha\beta} + \frac{2(\beta^2 + \gamma^2 + 1)(\gamma y + \beta x)z}{15\alpha\beta} + \\ &+ \frac{((\beta^2 + \gamma^2 + 1)l + c_4\alpha\beta)z}{3\alpha\beta} - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \nabla h(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Для графического представления решения (3.37) при  $c_i = 2, i = 1, 2, 3, c_j = 1, j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, l = -4$ , построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух деформируемых вектором перемещений и температурой замкнутых поверхностей:  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Рисунок 3.13 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 3, 3)$ .

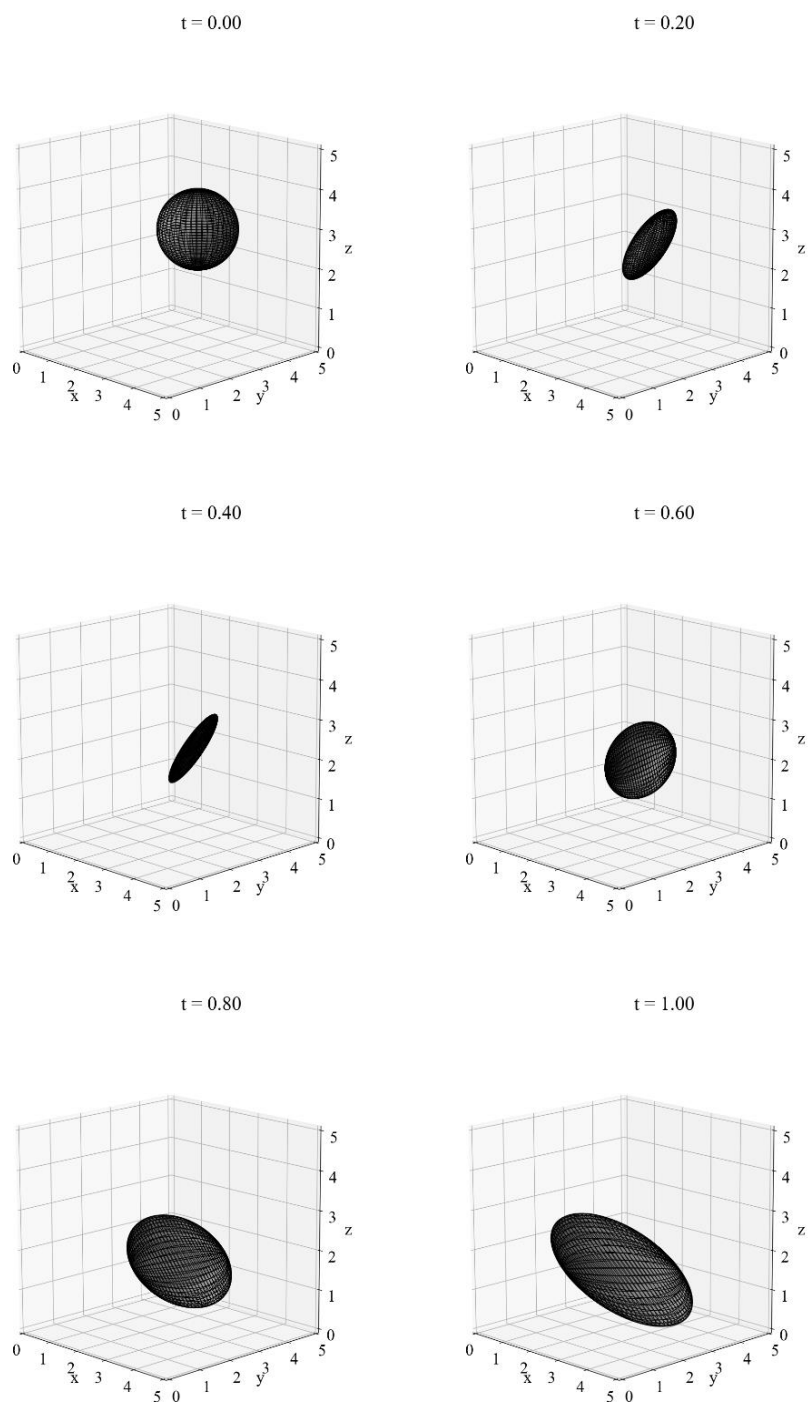


Рисунок 3.13. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Происходит резкое сжатие сферы в диск, ее поворот, смещение вдоль оси  $Oz$  и вытягивание вдоль оси  $Ox$ .

Рисунок 3.14 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(3, 3, 3)$ .



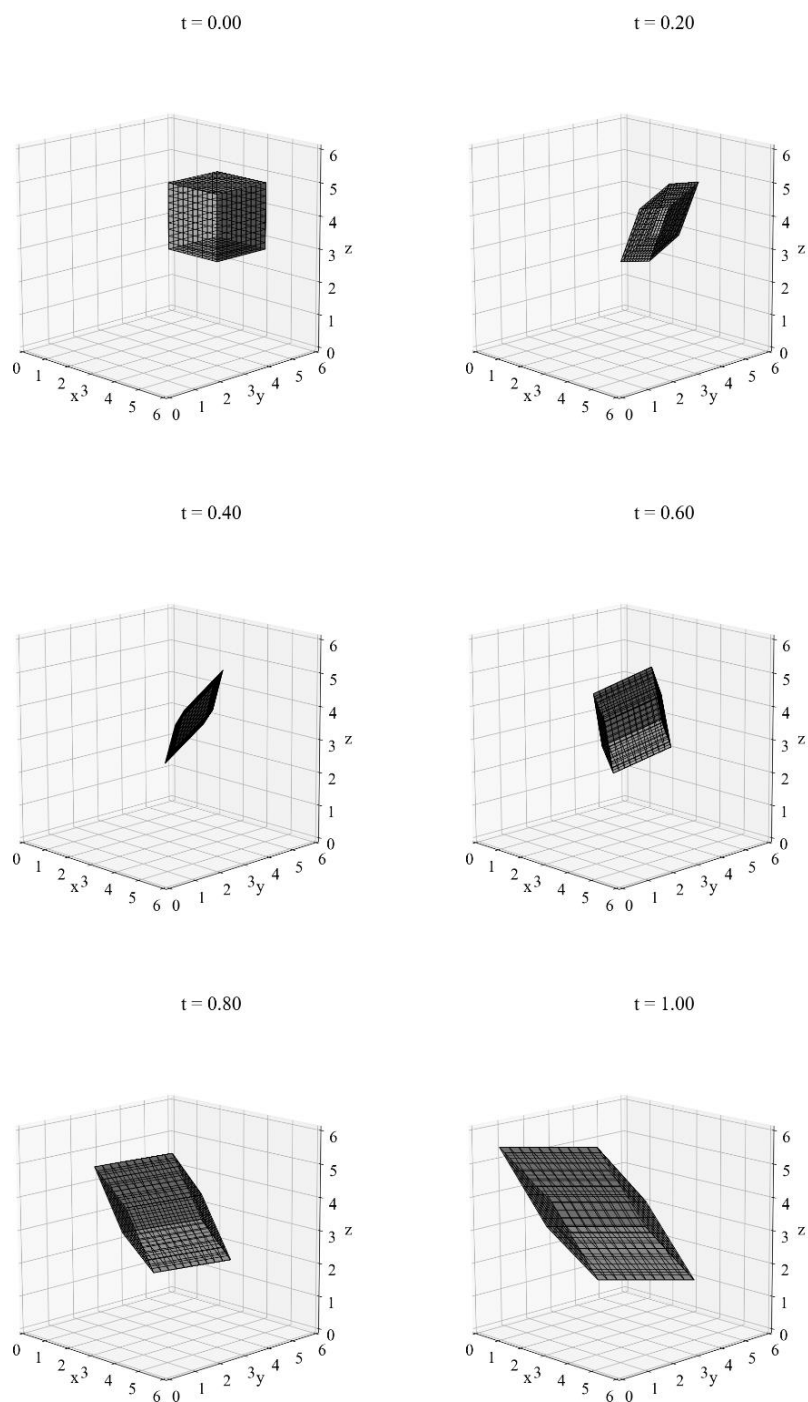


Рисунок 3.14. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$ .

Происходит резкое сжатие куба, его смещение вдоль оси  $Oz$ , переворот и вытягивание вдоль оси  $Ox$ .

**3.4.3.2.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)$ , входящая в (3.35) имеет вид:

$$f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) = k(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)^2 + l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) + r, \quad (klr \neq 0).$$

В этом случае из (3.35) следует:

$$\begin{aligned}
u^1(\xi) &= \frac{k}{3\alpha}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)^3 + \frac{lt}{2}(\alpha t + 2\beta x + 2\gamma y - 2z) + (r + c_6)t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\
u^2(\xi) &= \frac{\gamma k}{3\alpha\beta}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)^3 + \frac{\gamma lt}{2\beta}(\alpha t + 2\beta x + 2\gamma y - 2z) + \left(\frac{\gamma r}{\beta} + c_8\right)t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\
u^3(\xi) &= -\frac{k}{3\alpha\beta}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)^3 - \frac{lt}{2\beta}(\alpha t + 2\beta x + 2\gamma y - 2z) + \left(c_{10} - \frac{r}{\beta}\right)t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\
\theta(\xi) &= -\frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta} \left( k(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)^2 + l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) + r \right) + c_5, \\
q(\xi) &= \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha\beta} \left( k(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)^2 + l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) + r \right) + c_4, \\
\omega^1(\xi) &= c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.38}$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.36), имеют вид [18, 53, 62]:

$$\begin{aligned}
A^1(\mathbf{x}) &= \frac{3l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{10\alpha} x^2 + \frac{l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{6\alpha} (y^2 + z^2) + \frac{2l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{15\alpha\beta} (\gamma y - z)x + \\
&\quad + \frac{(c_4\alpha\beta + r(\beta^2 + \gamma^2 + 1))x}{3\alpha\beta} + \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^2(\mathbf{x}) &= \frac{3\gamma l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{10\alpha\beta} y^2 + \frac{\gamma l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{6\alpha\beta} (x^2 + z^2) + \frac{2l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{15\alpha\beta} (\beta x - z)y + \\
&\quad + \frac{(c_4\alpha\beta + r(\beta^2 + \gamma^2 + 1))y}{3\alpha\beta} + \frac{c_3 x}{2} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^3(\mathbf{x}) &= \frac{l(5\gamma - 4)(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{60\alpha\beta} z^2 + \frac{\gamma l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{6\alpha\beta} (x^2 + y^2) + \frac{2l(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{15\alpha\beta} (\beta x - \gamma y)z + \\
&\quad + \frac{(c_4\alpha\beta + r(\beta^2 + \gamma^2 + 1))z}{3\alpha\beta} - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \nabla h(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Для графического представления решения (3.38), построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух деформируемых вектором перемещений и температурой замкнутых поверхностей:  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Пусть  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3, 8$ ),  $c_4 = 3$ ,  $c_j = 1$  ( $j = 5, 7, 9, 10, 11$ ),  $c_6 = -5$ ,  $\alpha = -5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.5$ ,  $l = -1$ ,  $r = 1$ .

Рисунок 3.15 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(1, 4, 1.5)$ .

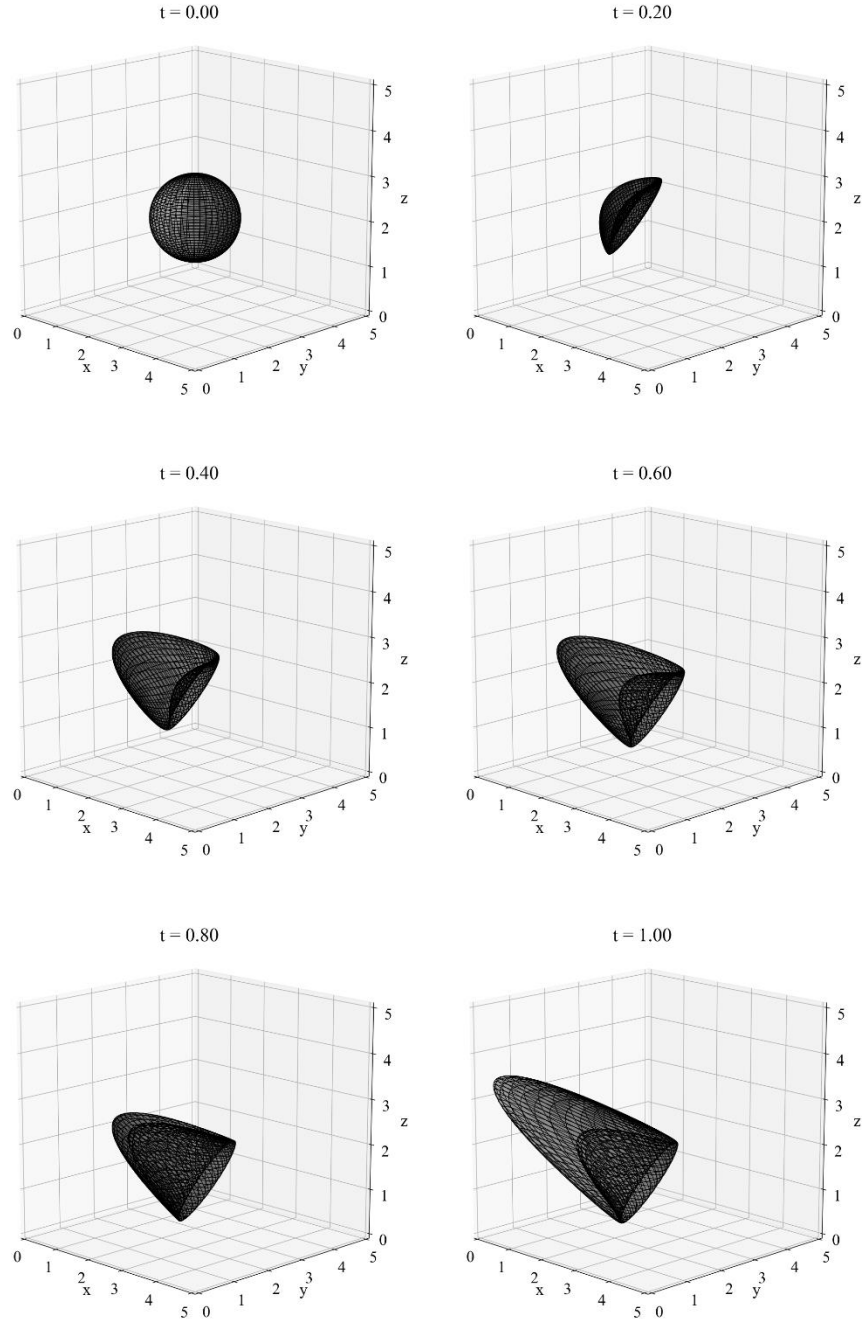


Рисунок 3.15. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$  при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3, 8$ ),  $c_4 = 3$ ,

$$c_j = 1 \ (j = 5, 7, 9, 10, 11), \ c_6 = -5, \ \alpha = -5, \ \beta = 1, \ \gamma = 1, \ k = 0.5, \ l = -1, \ r = 1.$$

Со временем происходит резкое сжатие сферы, ее неравномерное вытягивание вдоль оси  $Ox$ .

Пусть  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3, 8$ ),  $c_4 = 3$ ,  $c_j = 1$   $j = (5, 7, 9, 10, 11)$ ,  $c_6 = -7$ ,  $\alpha = -5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $l = -0.05$ ,  $r = 0.5$ .

Рисунок 3.16 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(0.5, 3, 1)$ .

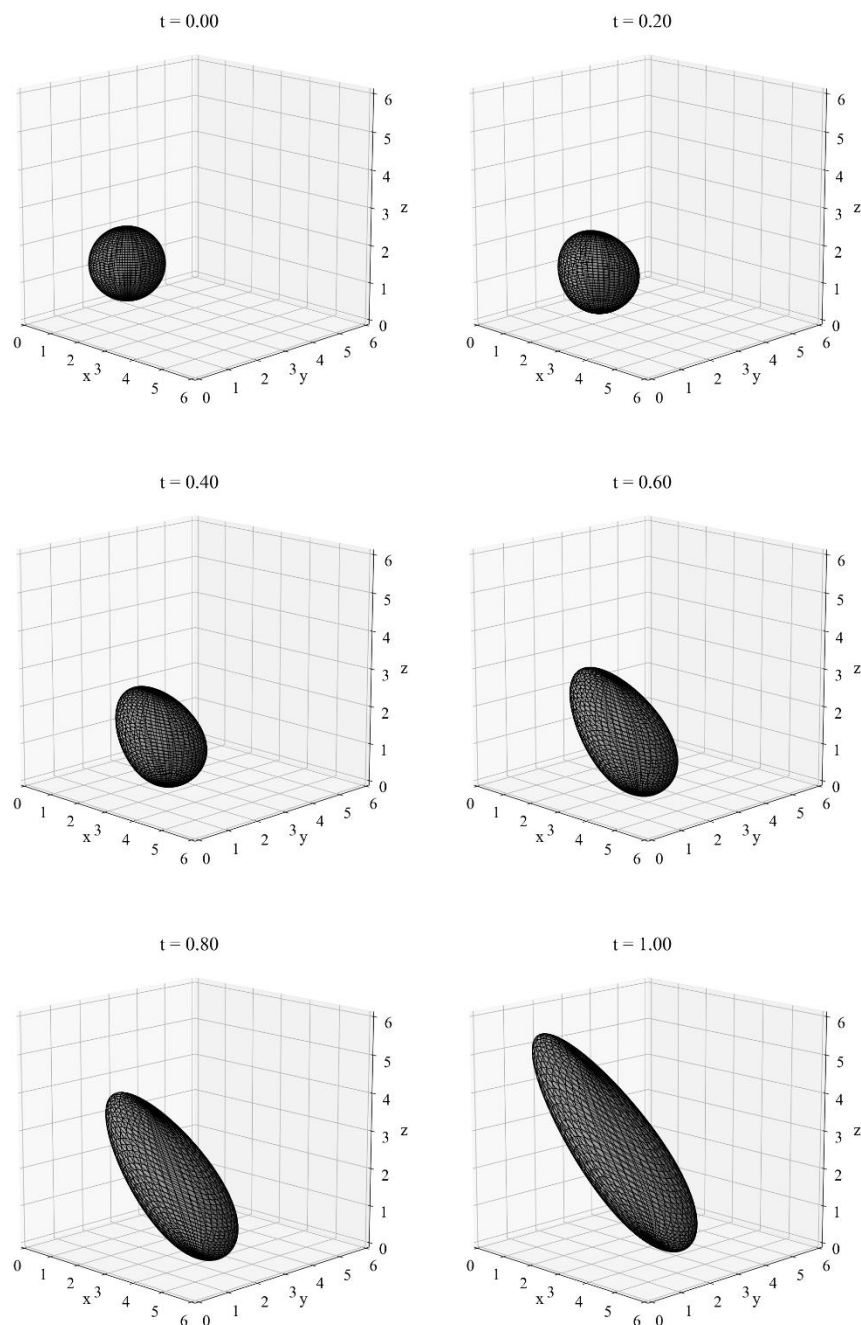


Рисунок 3.16. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$  при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3, 8$ ),  $c_4 = 3$ ,  $c_j = 1$   $j = (5, 7, 9, 10, 11)$ ,  $c_6 = -7$ ,  $\alpha = -5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $l = -0.05$ ,  $r = 0.5$ .

Со временем происходит вытягивание сферы прежде всего вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ .

Рисунок 3.17 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(0.5, 3, 0.5)$ .

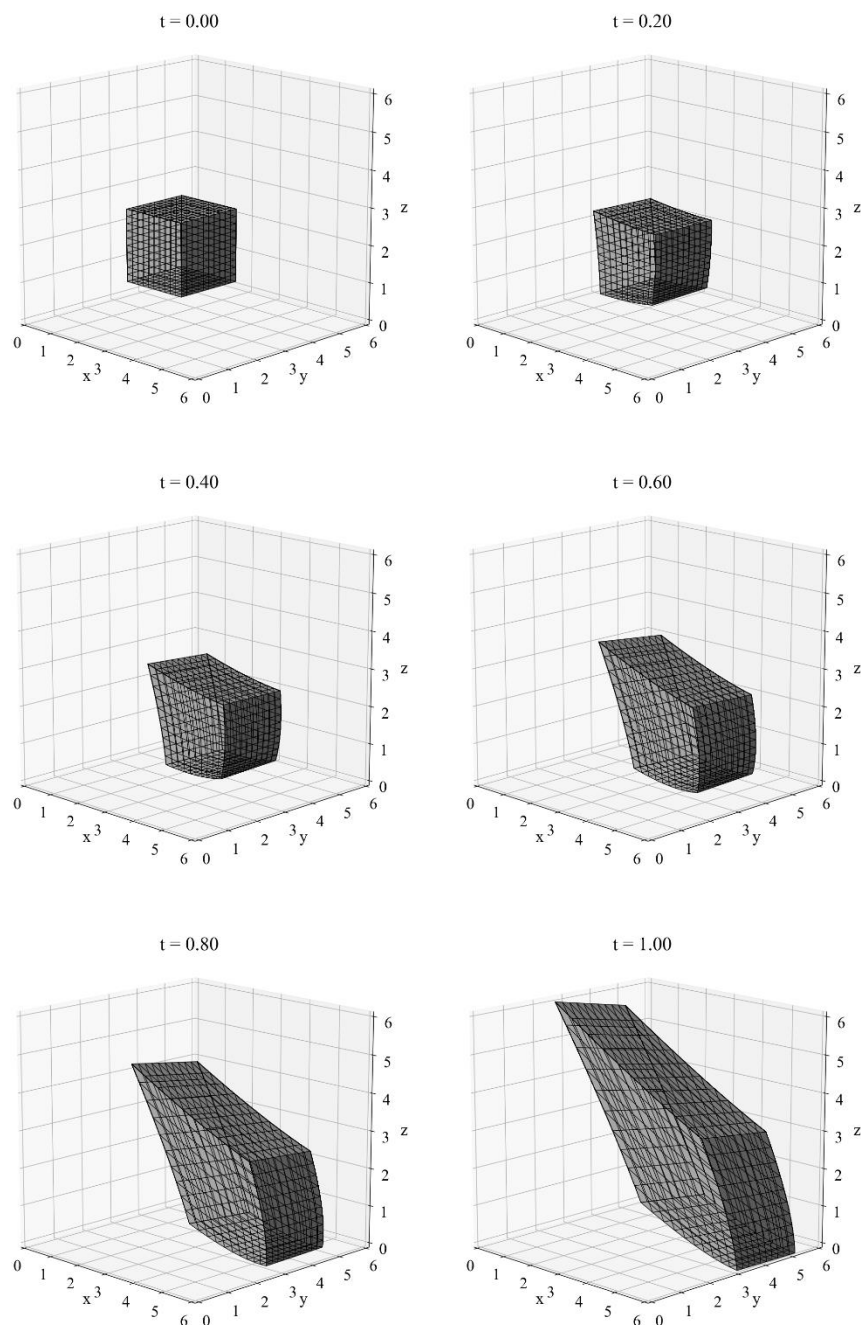


Рисунок 3.17. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$  при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3, 8$ ),  $c_4 = 3$ ,  $c_j = 1$   $j = (5, 7, 9, 10, 11)$ ,  $c_6 = -7$ ,  $\alpha = -5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.1$ ,  $k = 0.2$ ,  $l = -0.05$ ,  $r = 0.5$ .

Со временем происходит вытягивание куба вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$ , наиболее существенное для одного из его углов.

**3.4.3.3.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)$ , входящая в (3.35) имеет вид:

$$f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) = k \ln(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)), \quad (kl \neq 0, l > 0).$$

В этом случае из (3.35) следует:

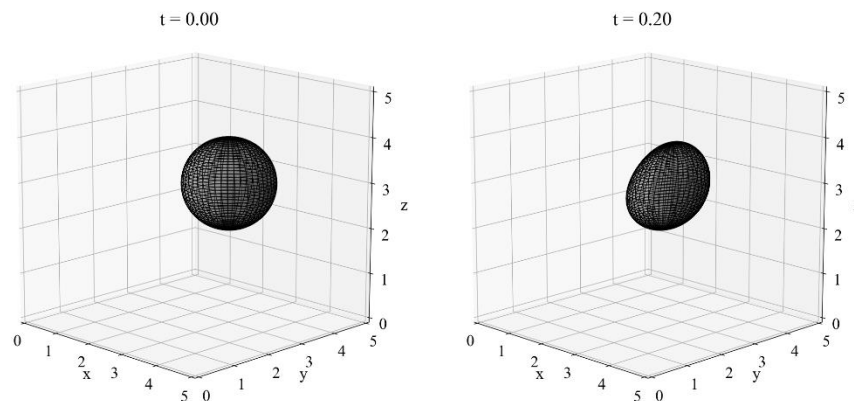
$$\begin{aligned}
u^1(\xi) &= \frac{k}{\alpha}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)(\ln(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) - 1) + c_6 t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\
u^2(\xi) &= \frac{\gamma k}{\alpha \beta}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)(\ln(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) - 1) + c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\
u^3(\xi) &= -\frac{k}{\alpha \beta}(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)(\ln(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) - 1) + c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\
\theta(\xi) &= -\frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha \beta} k \ln(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_5, \\
q(\xi) &= \frac{(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha \beta} k \ln(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_4, \\
\omega^1(\xi) &= c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

при условии, что  $\frac{\alpha t}{\beta x + \gamma y - z} < -1$  или  $\frac{\alpha t}{\beta x + \gamma y - z} > 0$ ,  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$  определяются из системы уравнений (3.36) [18, 53, 62]:

$$\begin{aligned}
A^1(\mathbf{x}) &= \frac{k(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{3\alpha\beta} \ln l + \frac{c_4 x}{3} + \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^2(\mathbf{x}) &= \frac{k(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{3\alpha\beta} \ln l + \frac{c_3 x}{2} + \frac{c_4 y}{3} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x}); \\
A^3(\mathbf{x}) &= \frac{k(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{3\alpha\beta} \ln l - \frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{c_4 z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Для графического представления решения (3.39) при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_4 = 3$ ,  $c_j = 1$  ( $j = 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_6 = -1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $k = 1$ ,  $l = 1$ , построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух деформируемых вектором перемещений и температурой замкнутых поверхностей:  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Рисунок 3.18 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 3, 3)$ .



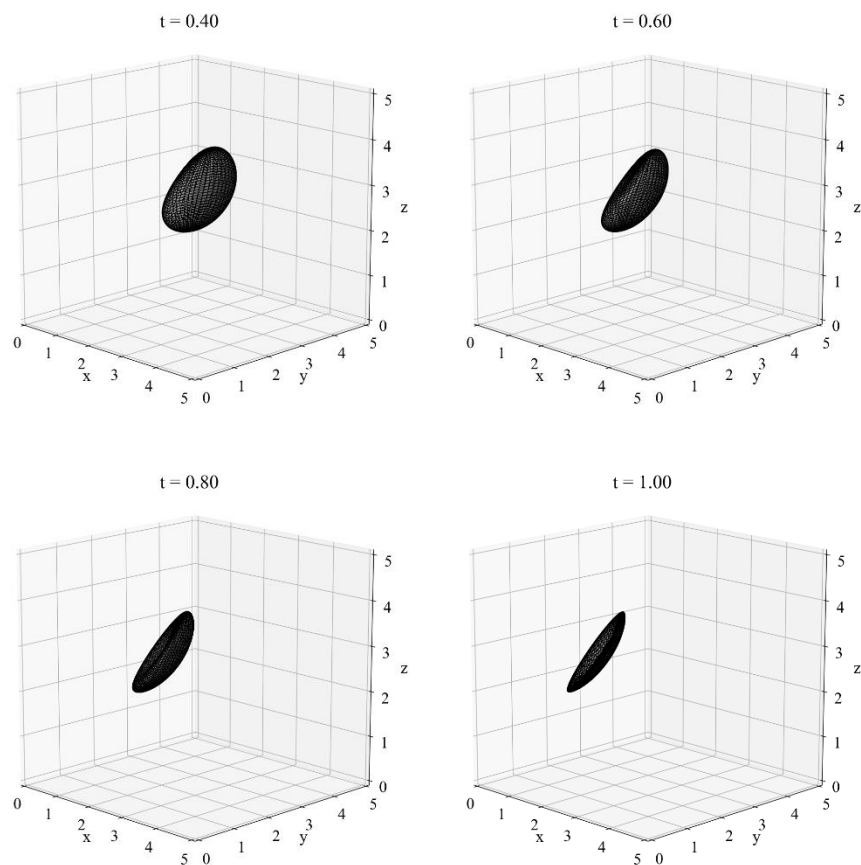
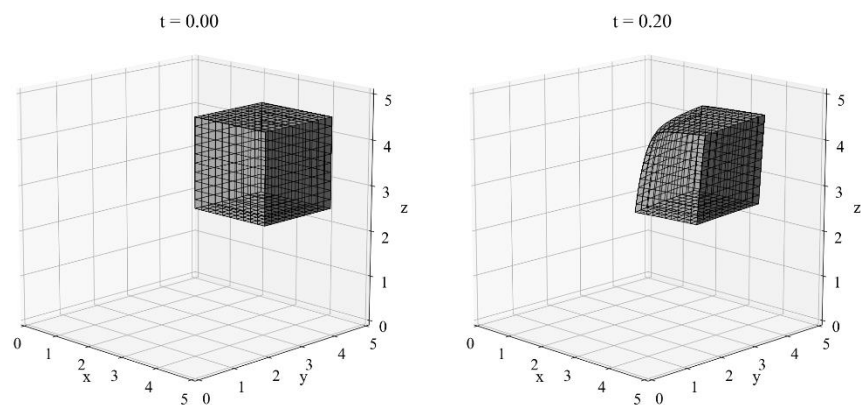


Рисунок 3.18. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$ .

Со временем происходит сжатие сферы в диск и ее смещение вдоль оси  $Ox$ .

Рисунок 3.19 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(2.5, 2.5, 2.5)$ .



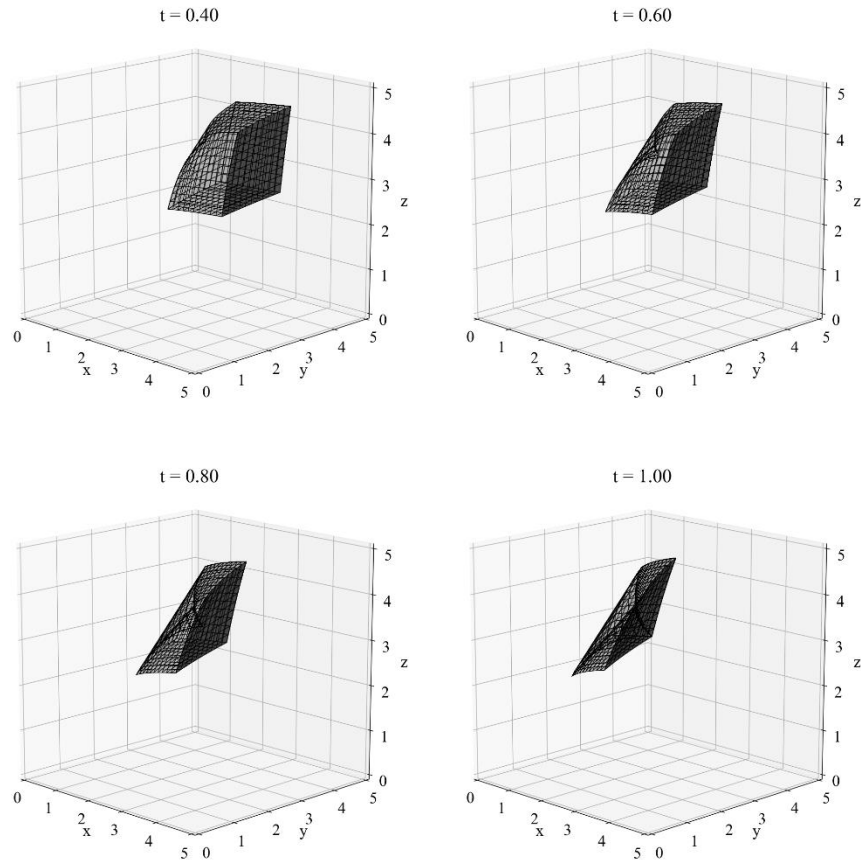


Рисунок 3.19. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$ .

Со временем происходит сжатие куба и его смещение вдоль оси  $Ox$ .

**3.4.3.4.** Предположим, что функция  $f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)$ , входящая в (3.35) имеет вид:

$$f(\alpha t + \beta x + \gamma y - z) = k \exp(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)), \quad (kl \neq 0).$$

В этом случае из (3.35) следует:

$$\begin{aligned} u^1(\xi) &= \frac{k}{\alpha l} \exp(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_6 t + A^1(\mathbf{x}) + c_7, \\ u^2(\xi) &= \frac{\gamma k}{\alpha \beta l} \exp(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_8 t + A^2(\mathbf{x}) + c_9, \\ u^3(\xi) &= -\frac{k}{\alpha \beta l} \exp(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_{10} t + A^3(\mathbf{x}) + c_{11}, \\ \theta(\xi) &= -\frac{k(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha \beta} \exp(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_5, \\ q(\xi) &= \frac{k(\beta^2 + \gamma^2 + 1)}{\alpha \beta} \exp(l(\alpha t + \beta x + \gamma y - z)) + c_4, \\ \omega^1(\xi) &= c_1, \quad \omega^2(\xi) = c_2, \quad \omega^3(\xi) = c_3, \end{aligned} \tag{3.40}$$

где  $A^1(\mathbf{x})$ ,  $A^2(\mathbf{x})$ ,  $A^3(\mathbf{x})$ , определяемые из системы уравнений (3.36), имеют вид [18, 53, 62]:



$$A^1(\mathbf{x}) = \frac{c_4 x}{3} + \frac{c_2 z}{2} - \frac{c_3 y}{2} + \nabla h(\mathbf{x});$$

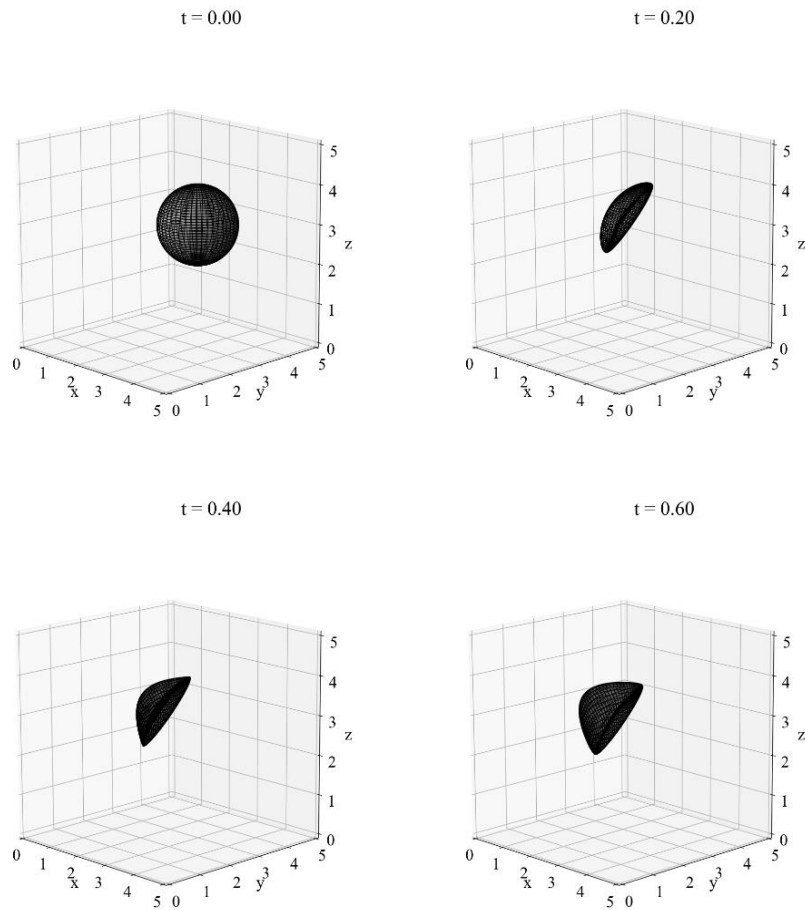
$$A^2(\mathbf{x}) = \frac{c_3 x}{2} + \frac{c_4 y}{3} - \frac{c_1 z}{2} + \nabla h(\mathbf{x});$$

$$A^3(\mathbf{x}) = -\frac{c_2 x}{2} + \frac{c_1 y}{2} + \frac{c_4 z}{3} + \nabla h(\mathbf{x}).$$

Для графического представления решения (3.40), построим изменение с ростом времени  $t > 0$  двух деформируемых вектором перемещений и температурой замкнутых поверхностей  $\Gamma_1$ , заданную уравнением (3.18) и  $\Gamma_2$ , заданную уравнениями (3.29).

Пусть значения  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_6 = -2$ ,  $\alpha = -7$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.75$ ,  $l = 0.5$ .

Рисунок 3.20 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(3, 3, 3)$ .



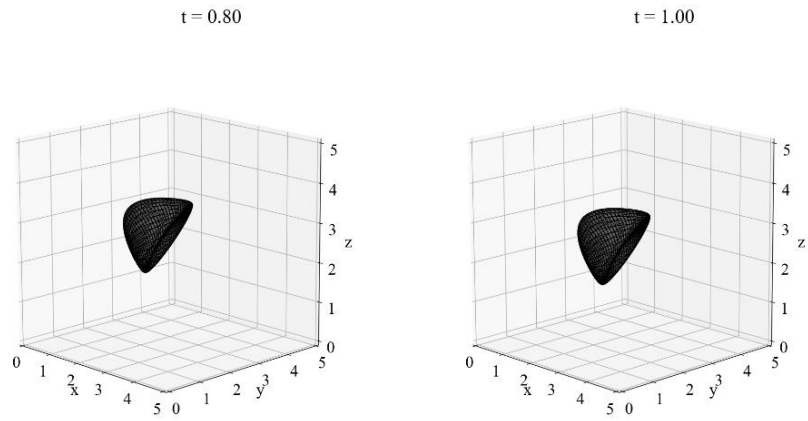
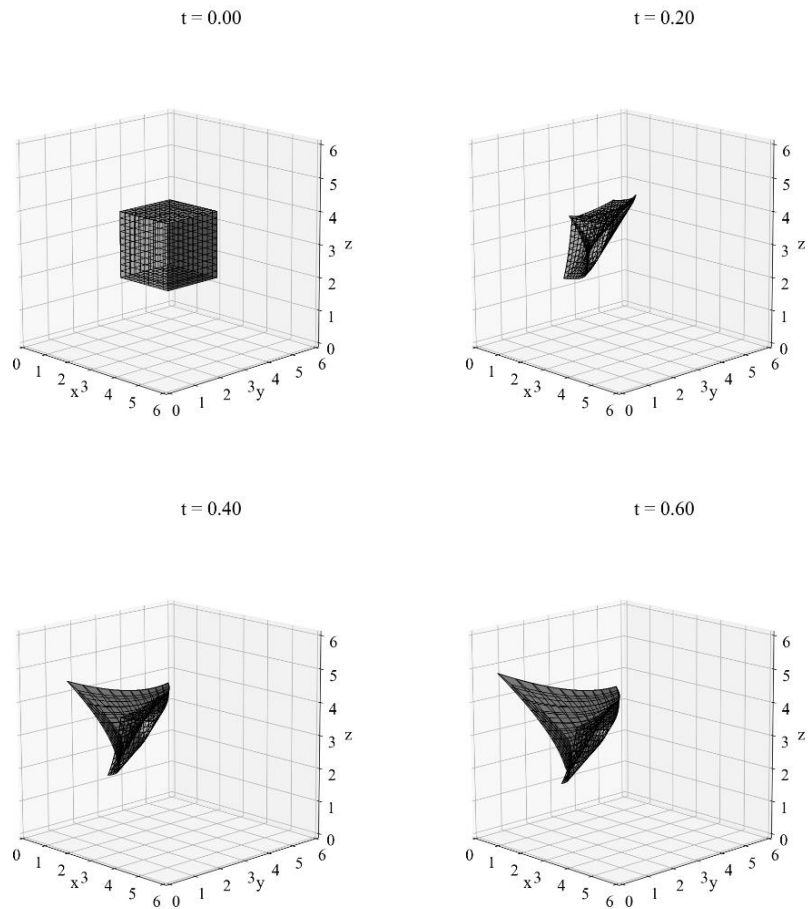


Рисунок 3.20. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$  при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$c_j = 1 \quad (j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \quad c_6 = -2, \quad \alpha = -7, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad k = 0.75, \quad l = 0.5.$$

Происходит резкое сжатие и вытягивание сферы вдоль оси  $Ox$ , ее смещение вдоль оси  $Oy$ .

Рисунок 3.21 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_2$ , с центром симметрии в точке  $(2, 2, 2)$ .



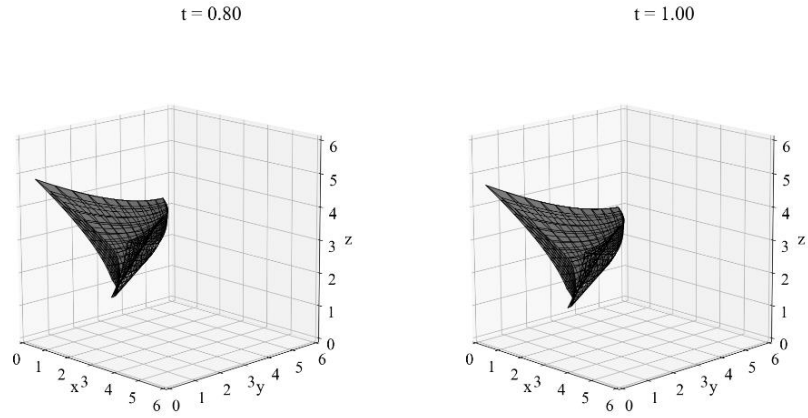


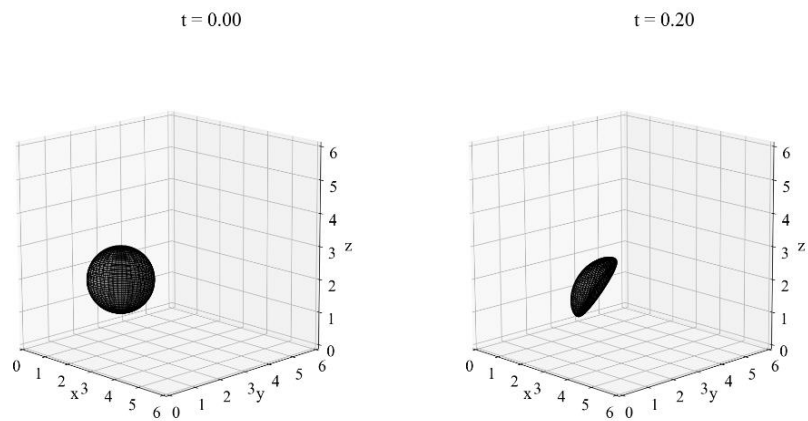
Рисунок 3.21. Деформирование поверхности  $\Gamma_2$  при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$c_j = 1 \quad (j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \quad c_6 = -2, \quad \alpha = -7, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 1, \quad k = 0.75, \quad l = 0.5.$$

Происходит резкое сжатие куба, вытягивание одного из его углов вдоль оси  $Ox$ , его смещение вдоль оси  $Oy$ .

Пусть  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $c_j = 1$  ( $j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11$ ),  $c_6 = -10$ ,  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ ,  $k = 0.75$ ,  $l = 0.5$ .

Рисунок 3.22 показывает результат деформирования поверхности  $\Gamma_1$ , с центром в точке  $(2, 2, 2)$ .



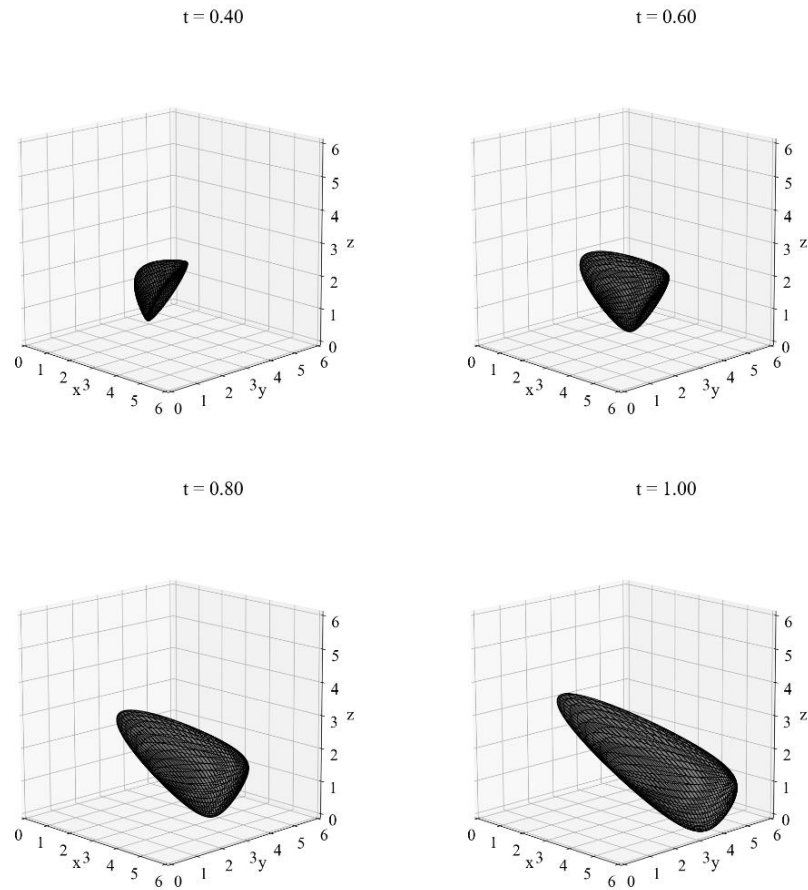


Рисунок 3.22. Деформирование поверхности  $\Gamma_1$  при  $c_i = 2$  ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$c_j = 1 \ (j = 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11), \ c_6 = -10, \ \alpha = 0.25, \ \beta = 1, \ \gamma = 1, \ k = 0.75, \ l = 0.5.$$

Со временем происходит резкое сжатие, сильное вытягивание и смещение сферы вдоль оси  $Ox$ .

### 3.5. Выводы по главе

Трехмерная динамическая модель термоупругой трансверсально–изотропной среды используется для описания термоупругого деформирования материалов, обладающих анизотропией упругих свойств с выделенным направлением анизотропии. Такими материалами являются слоистые и композитные материалы, применяемые в машиностроении, авиастроении, кораблестроении и строительстве, грунты в условиях вечной мерзлоты, ледники и другие. Эта модель исследуется методами группового анализа дифференциальных уравнений. Выполнено групповое расслоение системы дифференциальных уравнений второго порядка, задающей эту модель. Получена система дифференциальных уравнений первого порядка, состоящей из автоморфной и разрешающей систем., которая эквивалентна уравнениям исходной модели. Выполнена классификация по признаку подобия всех инвариантных и частично инвариантных

решений полученной системы первого порядка, а, следовательно, и всех подмоделей исходной модели. Для некоторых инвариантных подмоделей ранга 1, содержащих произвольную гладкую функцию, найдены точные решения. Для данных решений построены графики, характеризующие изменения формы выделенных в термоупругой трансверсально–изотропной среде сферы единичного радиуса и куба с ребром равным 2 в результате их деформации под действием найденных перемещений и температуры. Существенная деформация сферы и куба в некоторых подмоделях говорит о высокой вероятности появления трещин в материале, которые могут привести даже к разрушению объекта, выполненного из этого материала.

Механическая значимость этих решений заключается в следующем: 1) эти решения описывают конкретную динамическую деформацию в термоупругой трансверсально–изотропной среде, 2) эти решения могут использоваться в качестве тестовых решений в численных расчетах, выполняемых при исследовании динамической деформации в термоупругой трансверсально–изотропной среде, изучение этой модели также актуально в связи с применением 3D принтера в строительстве [79], 3) эти решения позволяют оценить степень адекватности данной математической модели и ее подмоделей реальным физическим процессам после проведения экспериментов, соответствующих этим решениям, и оценки возникающих отклонений.

## Заключение

Кратко сформулируем основные результаты данной диссертационной работы.

1. Предлагаемая диссертационная работа вносит свой вклад в выполнение программы «Подмодели» [26], опубликованной академиком Л. В. Овсянниковым в 1994 году.

2. Для нестационарной модели распространения газа в разреженном пространстве с заданным начальным распределением давления получены все существенно различные нетривиальные подмодели, отличные от моделей, исследованных в работах Ю.А. Чиркунова [53, 62, 65, 66]. Для классификации инвариантных подмоделей модели, задаваемой системой (1.5) были построены оптимальные системы неподобных подгрупп группы  $G_8$  и получены универсальные инварианты каждой подгруппы. Для каждой инвариантной подмодели ранга 1 найдены фактор уравнения, получены механические характеристики этого течения газа и найдены условия существования этих подмоделей. Проведено численное решение задачи Коши методом Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности для уравнений семи подмоделей ранга 1. Приведены рисунки, показывающие динамику движения частиц. Указан физический смысл.

3. Во второй главе методом, предложенным Ю. А. Чиркуновым [67], проведена групповая классификация нелинейного дифференциального уравнения, описывающего продольные колебания упругого неоднородного стержня. Выполнена классификация всех существенно различных нестационарных инвариантных подмоделей для четырех найденных базисных моделей, обладающих разными групповыми свойствами. С помощью численного метода Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности получены решения соответствующих задач Коши, для которых продольное перемещение и скорость его изменения заданы на некоторой линии уровня: 1) единственная нетривиальная подмодель ранга 0, 2) семь инвариантных подмоделей ранга 1. На приведенных рисунках показаны специфические особенности деформации стержня. Найдены значения параметров, для которых, в каждой фиксированной точке стержня с течением времени происходит возрастание продольного колебания, а значит со временем может произойти разрушение стержня. Указан физический смысл этих решений.

4. Проведено исследование групповых свойств и выполнено групповое расслоение уравнений трехмерной динамической модели термоупругой трансверсально-изотропной среды относительно бесконечной подгруппы, порождаемой градиентом гармонической функции, при наложенных ограничениях на параметры тензора модулей упругости  $\lambda' = \lambda + 2\mu - 2G'$ , и  $\mu' = G'$ . С помощью замены части дополнительных функций на векторы перемещений,

исходная система была приведена к равносильной ей системе линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Частные случаи полученной разрешающей системы совпадают с системами уравнений безвихревой акустики с термодинамикой и уравнениями Максвелла в неоднородной среде с термодинамикой. Проведено исследование симметричных свойств полученной системы уравнений, найдены допускаемые ими локальные группы Ли точечных преобразований разрешающей системы, построены оптимальные системы подгрупп, получены их универсальные инварианты. Тем самым, выполнена классификация всех инвариантных и частично инвариантных подмоделей. Исследованы 3 инвариантные подмодели ранга 1. Получены точные решения описывающие найденные подмодели, которые зависят от произвольной функции. Для некоторых конкретных видов этой функции построены графики, описывающие деформацию двух замкнутых поверхностей: сферы единичного радиуса и куба с ребром 2, выделенных в термоупругой трансверсально–изотропной среде поверхностей в результате ее деформации под действием найденных перемещений. Указан их физический смысл.

5. В первой и второй главе, для исследования подмоделей и их фактор уравнений, при различных начальных условиях и значениях параметров в задачах Коши был использован численный метод Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядка точности [35, 64]. В первой главе получены численные значения для компонент  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  динамической составляющей эйлеровых координат для каждой частицы газа и найдена траектория движения фиксированной частицы в фазовом пространстве. Во второй главе получены численные значения для перемещения  $u$  и его составляющей  $\varphi$ . В третьей главе, для найденных точных решений, построены графики. Все вычисления и визуализация расчетов были выполнены на языке программирования Python (версия 3.7) комплекса программ Anaconda, в среде разработки программного обеспечения Spyder, с использованием библиотеки с открытым исходным кодом SciPy ([www.scipy.org](http://www.scipy.org)).

6. Все полученные в данной диссертационной работе подмодели и нетривиальные точные и численные решения могут использоваться в качестве тестовых решений в соответствующих различных численных расчетах и схемах, а также позволят проводить оценку степени адекватности математической модели и ее подмоделей реальным физическим процессам после проведения экспериментов, соответствующих этим решениям.

В заключении автор выражает искреннюю благодарность и глубокую признательность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук Юрию Александровичу Чиркунову за научное руководство, помощь, терпение и поддержку на всех этапах работы.

**Список литературы**

1. Андреев В.К., Бублик В.В., Бытев В.О. Симметрии неклассических моделей гидродинамики. – Новосибирск: Наука, 2003. – 350 с.
2. Аннин Б.Д., Бельмецев Н.Ф., Чиркунов Ю.А. Групповой анализ уравнений динамической трансверсально–изотропной упругой модели // Прикладная математика и механика. – 2014. Т. 78. – Вып. 5. С. 735–746.
3. Аннин Б.Д., Бытев В.О., Сенашев С.И. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности. – Новосибирск: Наука, 1985. – 144 с.
4. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И. Анизотропия упругих свойств материалов // Прикладная механика и техническая физика. – 2009. – Т. 49, № 6. – С. 131–151.
5. Аннин Б.Д., Чиркунов Ю.А., Бельмецев Н.Ф. Групповое расслоение уравнений трансверсально–изотропной упругости // Вестник СибГАУ. Серия математика, механика, информатика. – 2012. – № 3 (43). – С. 4–6.
6. Годунов С.К. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1979. – 392 с.
7. Годунов С.К., Роменский Е.И. Элементы механики сплошной среды и законы сохранения. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 280 с.194.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
9. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. – М.: Наука, 1983. 280 с.
10. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М.: Изд – во Моск. ун – та, 1990.
11. Капцов О.В. Расширение симметрий эволюционных уравнений // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 262, № 5. – С. 1056–1059.
12. Капцов О.В. Методы интегрирования уравнений с частными производными. – М.: Физматлит, 2009. – 184 с.
13. Капцов О.В., Капцов Д.О. Редукции уравнений с частными производными к системам обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные технологии. – Новосибирск, 2017. – Т. 22, № 4. – С. 61–68.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
15. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
16. Меграбов А.Г. О некоторых результатах группового подхода в кинематической задаче сейсмики (геометрической оптики) // ДАН. – 2003. – Т. 390, № 4. – С. 457–461.



17. Меграбов А.Г. Дифференциальные инварианты и спектральный метод в прямых и обратных задачах с переменными коэффициентами: дис. д-ра. ф.-м. наук: 01.01.02 / Меграбов Александр Грайрович. – Новосибирск, 2004. – 276 с.
18. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Ленинград: Изд-во Академии наук, 1933. – 381 с.
19. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
20. Новожилов В.В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
21. Овсянников Л.В. Группы и инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР. – 1958. – Т. 118, № 3. – С. 439–442.
22. Овсянников Л.В. Групповые свойства дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 240 с.
23. Овсянников Л.В. Групповые свойства уравнений механики // В кн.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. – М.: Наука, 1972. – С. 381–393.
24. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука. 1978. 399 с.
25. Овсянников Л.В. Об оптимальных системах подалгебр // Доклады АН. 1993. Т. 333, № 6. С. 702–704.
26. Овсянников Л.В. Программа подмодели. Газовая динамика // ПММ. – 1994. – Т. 58, № 4. С. 30–55.
27. Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А. Групповое расслоение уравнений Ламе // ПММ. – 1988. – Т. 52, Вып. 3. – С. 471–477.
28. Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А. Групповые свойства уравнений классической теории упругости // Докл. АН СССР. – 1988. – Т. 302, № 6. – С. 1353–1356.
29. Прудников В.Ю., Чиркунов Ю.А. Групповые свойства уравнений теории упругости // В кн.: Математические методы в механике. – Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1989. – С. 38.
30. Пухначев В.В. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в плоском случае // ПМТФ. – 1960. – Т. 1, № 1. – С. 83–90.
31. Пухначев В.В. Преобразования эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений // ДАН СССР. – 1987. – Т. 294, № 3. – С. 535–538.
32. Пухначев В.В. Точные решения уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, № 2(294). – С. 16–23.
33. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. – 2010. – Т. 51, № 4 (302). – С. 116–126.
34. Пухначев В.В. Точечный вихрь в вязкой несжимаемой жидкости // ПМТФ. – 2014. – Т. 55, № 2 (234). – С. 180–187.

35. Самарский А.А. Введение в численные методы. Учебное пособие для вузов. – 3-е изд., стер. – СПб.: Изд-во Лань, 2005. – 288 с.
36. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. М.: Физматгиз, 1962.
37. Седов Л.И. Распространение сильных взрывных волн. – Прикл. матем. и мех. 10(2) 1946. – С. 241–250.
38. Снеддон И.Н., Бери Д.С. Классическая теория упругости. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 219 с.
39. Талышев А.А. Расширения групп и частично инвариантные решения // Уфимский математический журнал. – 2009. – Т. 1, № 3. – С. 119–124.
40. Талышев А.А. Об автоморфных системах конечномерных групп Ли // Уфимский математический журнал. – 2012. – Т. 4, №4. – С. 130–138.
41. Талышев А.А. О дифференциально-инвариантных решениях // Сиб. журн. чист. и прикл. матем. – 2016. – Т. 16, Вып. 3. – С. 75–84.
42. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости – 2-е изд. – М.: Наука, 1979. – 576с.
43. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
44. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Сопротивление материалов с элементами теории сплошных сред и строительной механики. Т. 2. – Москва: Наука. 1978. – 616 с.
45. Хабиров С.В. Плоские изотермические движения идеального газа без расширений // ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 3. С. 411–424.
46. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. – М.;Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1940. – 396 с.
47. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. М.: Наука, 1988.
48. Чесноков А.А. Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке // ПМТФ. – 2008. – Т. 49, № 5 (291). – С. 41–54.
49. Чесноков А.А. Симметрии уравнений теории мелкой воды на вращающейся плоскости // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2008. – Т. 11, № 3 (35). – С. 135–148.
50. Чесноков А.А. Обобщенные характеристики, симметрии и точные решения интегродифференциальных уравнений теории длинных волн: дис. д-ра. ф.-м. наук: 01.02.05 / Чесноков Александр Александрович. – Новосибирск, 2010. – 308 с.
51. Чиркунов Ю.А. Групповое свойство уравнений Ламе // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1973. – Вып. 14. – С. 138–140.
52. Чиркунов Ю.А. Групповой анализ уравнений Ламе // Динамика сплошной среды. – Новосибирск, 1975. – Вып. 23. – С. 219–225.
53. Чиркунов Ю.А. Групповой анализ линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: НГУЭУ, 2007. – 362 с.

54. Чиркунов Ю.А. Групповое расслоение уравнений Ламе классической динамической теории упругости // Известия АН. Механика твердого тела. – 2009. – № 3. – С. 47–54.
55. Чиркунов Ю.А. Условия линейной автономности основной алгебры Ли системы линейных дифференциальных уравнений // Доклады АН. – 2009. – Т. 426, № 5. – С. 605–607.
56. Чиркунов Ю.А. Системы линейных дифференциальных уравнений, симметричные относительно преобразований, нелинейных по функции // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 3. – С. 680–686.
57. Чиркунов Ю.А. Системы Фридрихса для систем волновых уравнений и волны сдвига в трехмерной упругой среде // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 121–132.
58. Чиркунов Ю.А. Системы линейных дифференциальных уравнений с не  $x$  – автономной основной алгеброй Ли. // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2011. – Т. 14, № 2 (46). – С. 112–123.
59. Чиркунов Ю.А. Конформная инвариантность в теории упругости // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика деформируемого твердого тела. – 2011. – № 4 (4). – С. 1853–1854.
60. Чиркунов Ю.А. Нелинейные продольные колебания вязкоупругого стержня в модели Кельвина. // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т. 79, Вып. 5. – С. 717–727. Шильников Л.П., др. Методы качественной теории в нелинейной динамике. – М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. – Ч. 1. – 428 с.
61. Чиркунов Ю. А., Пикмуллина Е. О. Инвариантные движения газа в разреженном пространстве. Труды международной конференции «Ломоносовские чтения на Алтае: фундаментальные проблемы науки и образования. 14–17 ноября 2017 г.». Алтайский государственный университет. Барнаул. 2017. С. 514–519;
62. Чиркунов Ю.А., Хабиров С.В. Элементы симметричного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. – Новосибирск. НГТУ, 2012. – 659 с.
63. Andreev V.K., Kaptsov O.V., Puchnachev V.V., Rodionov A.A. Applications of group–theoretical methods in hydrodynamics. Springer, Netherlands, 2010. 396 p.
64. Carrier G.F. Propagation of waves in orthotropic media. // Quarter of Appl. Math. 1946. V. 2, No. 2. Pp. 160–165.
65. Chirkunov Yu.A., The conservation laws and group properties of the equations of gas dynamics with zero velocity of sound, J. Appl. Math. Mech. 73(4). 2012. Pp. 421–425.
66. Chirkunov Yu.A. Exact solutions of the system of the equations of thermal motion of gas in the rarefied space, Int. J. Non-Linear Mech. 83 (2016) Pp. 9–14.

67. Chirkunov Yu.A. Generalized equivalence transformations and group classification of systems of differential equations. *J. Appl. Mech. Techn. Phys.* 53 (2). 2012. Pp. 147–155.
68. Chirkunov Yu.A.: Invariant submodels and exact solutions of the generalization of the Leith model of the wave turbulence. *Acta Mech.* 229(10). 2018. Pp. 4045–4056.
69. Chirkunov Yu.A. Exact solutions of the models of nonlinear diffusion in an inhomogeneous medium. *Int. J. Non-Linear Mech.* 106. 2018. Pp. 162–173.
70. Chirkunov Yu.A. Nonlinear longitudinal oscillations of viscoelastic rod in Kelvin model. *J. Appl. Math. Mech.* 79(5). 2015. Pp. 506–513.
71. Chirkunov Yu.A. Submodels of the generalization of the Leith's model of the phenomenological theory of turbulence and of the model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous media without absorption. *J. Phys. A: Math. Theor.* 395501. 48(39). 2015. Pp. 22. (See also *J. of Phys. A: Math. Theor.* Highlights of 2015 collection).
72. Chirkunov Yu.A. Submodels of model of nonlinear diffusion in the inhomogeneous medium involving absorption. *J. Math. Phys.* 101502. 56(10). 2015. Pp. 19.
73. Chirkunov Yu.A. Submodels of model of nonlinear diffusion with non-stationary absorption. *Int. J. Non-Linear Mech.* 91. 2017. Pp. 86–94.
74. Chirkunov Yu.A., Belmetsev N.F. Exact solutions of three-dimensional equations of static transversely isotropic elastic model. *Acta Mechanica.* 2017. V. 228. Issue 1. Pp. 333–349.
75. Chirkunov Yu.A., Dobrokhotov S.Yu., Medvedev S.B. and Minenkov D.S. Exact solutions of one-dimensional nonlinear shallow-water equations over even and sloping bottoms. *Theor. Math. Phys.* 178(3). 2014. Pp. 278–299.
76. Chirkunov Yu.A., Nazarenko S.V., Medvedev S.B. and Grebenev V.N. Invariant solutions for the nonlinear diffusion model of turbulence. *J. Phys. A: Math. Theor.* 185501, 47(18). 2014. Pp. 14.
77. Chirkunov Yu.A., Pikhullina E.O. Invariant submodels of the model of thermal motion of gas in a rarefied space. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2017. V. 95. Pp. 185–192.
78. Chirkunov Yu.A., Pikhullina E.O. Nonlinear longitudinal vibrations of an elastic inhomogeneous rod. *AIP Conference Proceedings.* 2288. 030097 2020.
79. Chirkunov Yu., Pikhullina E. and Gasenko I. On thermoelastic deformation of a transversally isotropic medium in 3D construction printing. December 2021. *IOP Journal of Physics Conference Series.* V. 2131(3): 032024. DOI: 10.1088/1742-6596/2131/3/032024.
80. Chirkunov Yu.A., Skolubovich Yu.L. Nonlinear three-dimensional diffusion models of porous medium in the presence of non-stationary source or absorption and some exact solutions. *Int. J. Non-Linear Mech.* 106. 2018. Pp. 29–37.
81. Gassmann F. Introduction to seismic travel time methods in anisotropic media. *Pure Appl. Geophysics.* 1964. V. 58. Pp. 1–224.

82. Grigoriev Y.N., Ibragimov N.H., Kovalev V.F., Meleshko S.V. Symmetries of integro–differential equations. Lecture Notes in Physics. Springer, Dordrecht, 2010. V. 806. 305 p.
83. Grigoriev Y.N., Meleshko S.V., Suriyawichitseranee A. On group classification of the spatially homogeneous and isotropic Boltzmann equation with sources II. International Journal of Non–Linear Mechanics. 2014. V. 61. Pp. 15–18.
84. Ibragimov N. H. (ed.) CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations. V. 1–3. CRC Press, Boca Raton, 1994.
85. Kaptsov O.V. Symmetries of differential ideals and differential equations. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. Krasnoyarsk, 2019. V. 12, No. 2. Pp. 185–190.
86. Krause M., Böhlke T. Maximum – Entropy Based Estimates of Stress and Strain in Thermoelastic Random Heterogeneous Materials // J. of Elasticity. 2020. Vol. 141. Pp. 321–348.
87. Kumar R., Kansal T. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusion plate // Int J Sol Stru. 2008. Vol. 45. Pp. 5890–5913.
88. Lie S. Classification und integration von gewöhnlichen differential gleichungen zwischen x, y, die eine gruppe von transformationen gestaten. Archiv for Math. Og Naturv., Christiania, 1883, 9, Pp. 371–393.
89. Lie S. Über differentialinvarianten. Math. Ann., 1884, 24, Pp. 52–89.
90. Lie S. Allgemeine Untersuchungen über differentialgleichungen die eine continuirliche, endliche gruppe gestatten. Math. Ann. 1885, 25, Heft; Pp. 71–151.
91. Lie S. Untersuchungen über unendliche kontinuierliche gruppen. Ber. Sachs., 1895, 21, Pp. 43–150.
92. Lie S. Engel F Theorie der transformationsgruppen, Bd. 1, 2, 3. Leipzig, Teubner, 1888, 1890, 1893.
93. Love A.E.H. A Treatise on the mathematical theory of elasticity. Fourth edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. 662 p.
94. Megrabov A.G. The group bundle, the Lax representation, and the kinematic seismic problem. Journal of Inverse and Ill–Posed Problems, 1997. V. 5, No. 6. Pp. 549–564.
95. Megrabov A.G. On a Differential Identity obtained with the use of the Group Approach and its Integral Corollaries. Journal of Inverse and Ill–Posed Problems. Brill Academic Publishers, 2004. V. 12, No. 5. Pp. 535–547.
96. Meleshko S.V., Moshkin N.P., Pukhnachev V.V. On exact analytical solutions of equations of Maxwell incompressible viscoelastic medium. International Journal of Non–Linear Mechanics. 2018. V. 105. Pp. 152–157.
97. Neuman J. Bethe H. A. Fuchs K. Hirschfelderetal J. O. The point source solution, Blast wave Los-Alamos Scientific Laboratory Report LA-2000. 1958. Pp. 27–55.

98. Olver P. Applications of Lie groups to differential equations. Springer–Verlag, New York, 1986. 513 p.
99. Pucci E., Saccomandi G., Vitolo R., Bogus Transformations in Mechanics of Continua, *Int. J. of Eng. Sci.* 99. 2016. Pp. 13–21.
100. Taylor G. The formation of a blast wave by a very intense explosion. I. Theoretical discussion .in: *Proceedings of the Royal Society. Ser. A.* 201. 1950. Pp. 159–174.